0882. MODUL

GÚLA, KÚP, GÖMB

A gúla, a kúp, a gömb felszíne

KÉSZÍTETTE: VÉPY-BENYHE JUDIT

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Gúla, kúp, gömb felszíne, kiszámítása képlettel.
Időkeret	3 tanóra
Ajánlott korosztály	8. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Tágabb környezetben:* építészet. *Szűkebb környezetben:* térgeometria; felszín, térfogat számítás; terület, kerület számítás; Pitagorasz-tétel. *Ajánlott megelőző tevékenység:* hatodik és hetedik osztályos területszámítás témakör (0761); téglatest, kocka felszín, térfogat témakör (0683), 7. osztályos Henger, hasáb témakör (0781–0783), kör területének, kerületének kiszámítása (0762–0763); háromszög, négyszög szerkesztések (0753–0754; 0664); Pithagorasz-tétel (0842–0843); műveletek racionális számokkal (0711–0715), négyzetgyökvonás (0841); körcikk területe, körív hossza (0853). *Ajánlott követő tevékenység:* gúla, kúp, gömb térfogata (0873), eltolás (0881), hasonlóság (0883)
A képességfejlesztés fókuszai	*Számlálás, számolás:* terület, kerület, felszín és térfogat-számítási feladatok, fejben és kalkulátor használatával egybekötve. *Becslés, mérés, valószínűségi következtetés:* méréssel egybekötött problémamegoldások, mértékváltási feladatok, következtetés a körcikk területére középponti szögének méretéből. *Szövegesfeladat-megoldás, problémamegoldás, metakogníció:* gyakorlati helyzetekben, környezetünkben a gúlák, kúpok felismerése, kapcsolódó számítási feladatok megoldása. *Deduktív következtetés, induktív következtetés:* általános képletek alkotása a gúlák és kúpok jellemző adatainak meghatározására: felszín.

AJÁNLÁS

A tanulók többnyire négyes csoportokban dolgoznak, de fontos, hogy egyéni feladattal is kipróbálhassák magukat. Nagyon fontos a csoportokon belül kialakuló vita, érvelések, ellenérvek, a gondolkodás szabadsága, a másik véleményének figyelembevétele, egymás tisztelete. Az egyén szerepe fontosságának megtapasztalása a közösségben. Pozitív élményeket adhat: pl. poszter készítése az osztállyal. A szociális készség, valamint az esztétikai érzék fejlesztésére is módot adnak ezek az órák.
A tanulói tapasztalatcsere hangsúlyozása mellett ugyanilyen fontosnak kell lennie a frontális tanári munkának, amelynek folyamán a tanulók megerősítést kapnak a továbbhaladásuk szempontjából legfontosabb ismeretekben, illetőleg tisztázódnak meg nem értett anyagrészek.

TÁMOGATÓRENDSZER

Feladatlapok, feladatgyűjtemény, mellékletek, a modulhoz tartozó eszközök (Lásd.: eszközlista), műanyag geometriai testek, körző, vonalzó (táblai is), 0871-es modul 6. tanári melléklete (kastély modell), számológép, csoportonként 1 narancs.

ÉRTÉKELÉS

Folyamatos szóbeli értékelés, a hiányosságok pótlására, hibák javíttatására is kiterjedően. Egyéni- és csoporteredmények pozitív értékelése. Ösztönözzünk arra, hogy a tanulók egymás munkáját is értékeljék, megbecsüljék, megdicsérjék. A csoportmunkákat lehet értékelni a csoportok által gyűjtött pontszámok alapján. Pontszámokat a jól megoldott feladatokért adhat a tanár, illetve a többi csoport.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszközök, Feladatok**
I. Gúla felszíne			
1.	Hasáb, henger (téglatest, kocka) felszínéről tanultak felelevenítése	ismétlés, rendszerezés	1. feladatlap, műanyag testek
2.	Gúla felszínének kiszámítása	számolás, modellezés	0881. 6. tanári melléklet gúlái, műanyag gúlák, gyerekek által készített gúlák, 1. tanári melléklet, 0883. 2. tanári melléklet gúlái
3.	Szabályos gúla felszíne – általánosítás	általánosítás	
4.	Feladatok a gúla felszínének számítására	szövegértés, számolás	2. feladatlap
II. Forgáskúp felszíne			
1.	A körcikk területének számítása	tapasztalatgyűjtés, általánosítás	3. feladatlap
2.	A forgáskúp felszíne	számolás, általánosítás	3. feladatlap, műanyag forgáskúpok, 0871. 6. tanári melléklet kúpjai
3.	Feladatok forgáskúp felszínének számítására	szövegértés, számolás	3. feladatlap

III. A gömb felszíne; gyakorló feladatok felszínszámításra

1.	A gömb felszíne (narancs)	tapasztalatgyűjtés	4. feladatlap
2.	Vegyes gyakorló feladatok felszínszámításra	szövegértés, számolás	Feladatgyűjtemény

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Gúla felszíne

1. Hasáb, henger (téglatest, kocka) felszínéről tanultak felelevenítése

1. FELADATLAP

Ez a bemelegítő feladat csoportos vagy önálló munkára ajánlott.

1. Állításokat olvashattok a felszínről. Próbáljátok elönteni, melyik igaz, melyik hamis!

a) Egybevágó testek felszíne egyenlő. Igaz.

b) Ha egy testet több testre szétdarabolok akkor a kapott testek felszíneinek összege az eredeti test felszínével egyezik meg. Hamis.

c) A felszín mérőszáma mindig egész szám. Hamis.

d) Ha két test felszíne egyenlő, akkor a két test egybevágó. Hamis.

e) Ha egy téglatest éleinek hosszát a kétszeresére változtatom, akkor a test felszíne a nyolcszorosára nő. Hamis. (Négyszeresére nő.)

f) Ha egy testet csupa síklap határol, a test felszíne a határolólapok területeinek összege. Igaz.

g) Mivel a terület mérőszáma mindig pozitív szám, ezért a felszín mérőszáma is pozitív szám. Igaz.

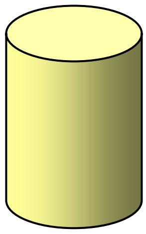
Ha van idő, érdemes a pontokat végigbeszélni részletesen. Külön érdemes megvitatni, hogy hányszorosára nő a test felszíne, ha nagyítom kétszeresére, háromszorosára (gyorsabban haladó osztályokban felvetheti a tanár, hogy n-szeresére nagyítjuk) Néhány konkrét példával megsejthetik, hogy: Négyszeresére, kilencszeresére, n^2-szeresére változik. Érdemes visszautalni a síkidomok nagyítása és a területük kapcsolatára.

A következő feladatokat szakértői mozaik módszerével oldhatják meg a gyerekek, vagy előző órán házi feladatnak is adható. Jó, ha minden feladatmegoldó csoportnak kezébe adja a tanár, a test műanyag modelljét, melyről szó van. Házi feladat ellenőrzésekor is legyenek kirakva a testek!
A szakértői csoportok ne csak az eredményt ismertessék, hanem meséljék el egymásnak, hogyan számoltak!
Lassabban haladó gyerekeknek széthajtható papírmodellt adjunk, ezzel segítve a háló-terület-felszín összekapcsolását!

2. (A) Egy henger magassága 1 dm, alapkörének átmérője 6 cm. Készítsd el hálójának vázlatos rajzát! Mekkora a henger felszíne?

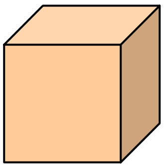
A két alap egy-egy 3cm sugarú kör, a palást pedig egy olyan téglalap, melynek oldalai az alapkör kerülete és a henger magassága, tehát a henger felszíne:

$A = 2r^2\pi + 2r\pi M = 18\pi + 60\pi = 78\pi \approx 245$ (cm^2), vagy 244,9 (cm^2), ha π értékét 3,14-nak tekintjük.



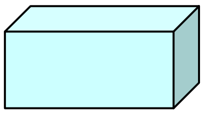
3. (B) Egy kocka éle 8 dm. Készítsd el hálójának vázlatos rajzát! Mekkora a felszíne?

$A = 6a^2 = 384$ (dm^2)



4. (C) Egy téglatest egy csúcsba futó éleinek hossza: 1 dm, 8 cm, és 0,5 dm. Készítsd el hálójának vázlatos rajzát! Mekkora a téglatest felszíne?

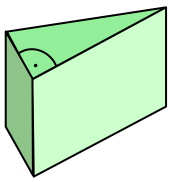
$A = 2\,(10 \cdot 8 + 10 \cdot 5 + 8 \cdot 5) = 340$ (cm^2)



5. (D) Egy hasáb magassága 1 dm. Az alaplap derékszögű háromszög, melynek két befogója 5 és 12 cm hosszú. Készítsd el hálójának vázlatos rajzát! Mekkora a hasáb felszíne?

A háromszög átfogója Pitagorasz-tétellel: 13 cm. Az alaplap két derékszögű háromszög, az oldallapokból együtt egy olyan téglalapot rakhatunk ki, melynek egyik oldala az alapháromszög kerülete, másik oldala pedig a hasáb magassága. Tehát a hasáb felszíne:

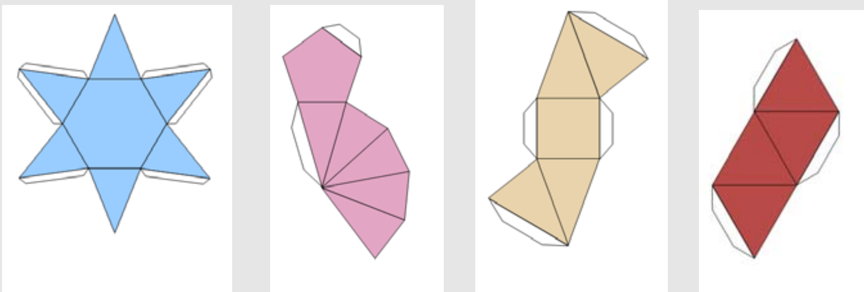
$A = 2 \cdot \frac{5 \cdot 12}{2} + 10 \cdot (5 + 12 + 13) = 60 + 300 = 360$ (cm^2)



2. Gúla felszínének kiszámítása

Az előző modulban elkészített kastély-modellben (**0881. modul 6. tanári melléklet**, illetve a gyerekek által készített modell) szereplő gúlákat veszik kézbe a csoportok, és minél többnek kiszámolják a felszínét.

0881 – 6. tanári melléklet – Lásd a 0881. modul végén és az eszközei közt!



Amelyik csoportnak segítség kell, a megfelelő gúlahálót is kézbe lehet adni (illetve – ha maguk készítették, és nem a tanári mellékletből vágták ki – lerajzolhatják, vagy megszerkeszthetik a füzetbe). Lehet versenyt szervezni, hogy adott időn belül melyik csapat számolja ki a legtöbb gúla felszínt, vagy melyik csapat készül el először az összessel. Ha kevesebb idő van, szakértői mozaik módszerével is megoldhatják a gyerekek a feladatot, akkor egy csapatnak csak egy (vagy két) gúla felszínét kell számolni.

Először a gyerekek mérjék le a szükséges adatokat a gúlákon! (Lehet, hogy nem mérnek le mindent, amire szükség van, de később ezeket még pótolhatják.)
Tizedes törtekkel végzett alapműveletek végrehajtásánál könnyen elveszíti egy nyolcadikos gyerek a fonalat, és a felszínszámítás gondolatmenete helyett csak az rögzül, hogy rengeteget kellett számolni. Ezért, ha nem kerekítettünk velük, engedjük meg a számológép használatát! Ennek kiküszöbölésére és a könnyebb ellenőrizhetőség érdekében a következőket teheti a tanár:

– Megkérheti a gyerekeket, hogy minden lemért adatot fél cm-re kerekítsenek. (Tehát a hozzá legközelebb eső egész vagy fél cm-rel számoljanak.)

– Másik hasznos dolog, ha – miután a gyerekek lemérték a szükséges adatokat –, kapnak egy ellenőrző táblázatot, mely tartalmazza a gúlák szükséges élhosszait, lapjainak magasságát, stb.(**1. tanári melléklet** tartalmazza a 0881-es modul 6. tanári mellékletében szereplő gúlák adatait fél cm-ekre kerekítve.), vagy egyszerűen egyeztetnek a tanárral. Lehet a csoportoknak jutalompontokat adni, ha minden adatot jól határoztak meg.

1. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

Fél cm-re kerekített értékek	a (alapél)	m_a (alaplap háromszögeinek magassága)	m_o (oldallap magasság)
hatoldalú	4	3,5	5
háromoldalú	7	6	6
négyoldalú	5		7
ötoldalú	4	3 (2,5 is elfogadható)	7

Ennél a feladatnál a cél az, hogy konkrét, lemért adatokból megfogható, kézbe vehető gúla felszínét számolják. Ne ragaszkodjunk a Pitagorasz-tételhez számoláskor, és ne segítsünk a gyerekeknek azzal, hogy felhívjuk az egybevágó háromszögekre a figyelmet (oldallapok)! Hagyjuk őket ezeket mérni, megtapasztalni!

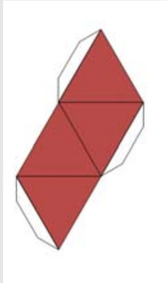
Jelölések:

m_o: oldallapot alkotó egyenlőszárú háromszög magassága;

a: alapél;

m_a: az alaplapot alkotó szabályos sokszöget középpontjából egyenlőszárú háromszögekre bontjuk, ezeknek a háromszögeknek a magassága m_a. (Háromszögalapú gúlánál az alaplap magassága.) A tanuló természetesen másképp is darabolhatja az alaplapot!

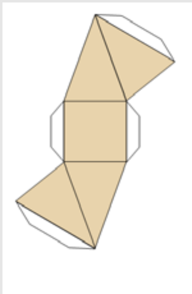
Háromszögalapú szabályos gúla:



$a = 7$ cm; $m_o = m_a = 6$ cm.

$A = 4 \cdot T_{\text{háromszög}} = 4 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} = \mathbf{84}\ (\text{cm}^2)$.

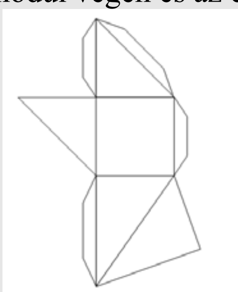
Négyszögalapú szabályos gúla:



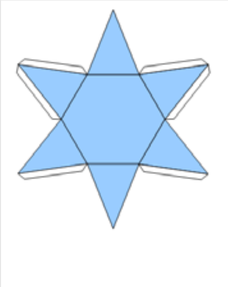
$a = 5$ cm; $m_o = 7$ cm.

$A = T_{\text{négyzet}} + 4 \cdot T_{\text{háromszög}} = 5 \cdot 5 + 4 \cdot \frac{5 \cdot 7}{2} = \mathbf{95}\ (\text{cm}^2)$

Gyorsan haladó csoportoknál feladhatjuk a hatszögalapú szabályos, vagy ötszögalapú szabályos gúla felszínének kiszámítását is. Ha könnyebb, összetettebb feladatot szeretnénk, érdekes lehet, ha nem csak a „toronytetők” felszínét számíttatjuk ki, hanem a kastély egy-egy „tornyának” felszínét. Pl.: A háromszögalapú gúlát ráhelyezzük a háromszögalapú hasábra, és ennek a „lakótoronynak” a felszínét kérdezzük. Itt a gyereknek észre kell venni, hogy a hasáb egyik alapját, és a gúla alapját nem kell beleszámítani a felszínbe. A többi gúlából is tudunk ilyen lakótornyokat építeni a megfelelő hasábbal.
Annak érdekében, hogy ne csak szabályos gúlák felszínét számolják a gyerekek, a műanyag testkészletből adhatunk a kézbe téglalap alapú gúlát is, vagy a **0883. modul 2. tanári melléklet**ének gúláit. Ezek a gúlák azért is egyszerűen számolhatók, mert minden oldallapjuk derékszögű háromszög.
0883 – 2. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!



Hatszögalapú szabályos gúla:

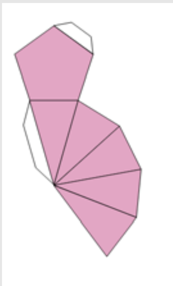


a = 4 cm; m_o = 5 cm; az alaplap 6 db egyenlőoldalú háromszögre bontható. (Természetesen lehet máshogy is felbontani, pl.: 2 trapézra, vagy 1 téglalapra és 2 egyenlőszárú háromszögre.) Ennek magassága számolható Pithagorasz tételével, vagy lemérhető: $m_a \approx 3{,}5$ cm. Az alaplapot alkotó kis háromszögek területe T = $\frac{4 \cdot 3{,}5}{2}$ = 7 (cm^2) →

$T_{hatszög} = 6 \cdot 7 = 42$ (cm^2) Az oldallap területe: $T_{oldallap} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$ (cm^2);

$A = T_{hatszög} + 6 \cdot T_{oldallap} = 42 + 6 \cdot 10 =$ **102** (cm^2).

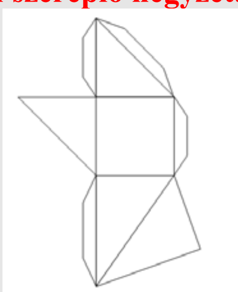
Ötszögalapú szabályos gúla:



a = 4 cm; m_o = 7 cm; $m_a \approx 3$ cm (2,75 cm) Az alaplapot alkotó kis háromszögek területe T = $\frac{4 \cdot 3}{2}$ = 6 (cm^2) → $T_{ötszög} = 5 \cdot 6 = 30$ (cm^2) Az oldallap területe: $T_{oldallap} = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14$ (cm^2);

$A = T_{ötszög} + 5 \cdot T_{oldallap} = 30 + 5 \cdot 14 =$ **100** (cm^2).

0883. modul 2. tanári mellékletében szereplő négyzetalapú (nem szabályos) gúla:



a = 6 cm; Kétféle oldallapja van, melyeknek magassága az egyik oldaléllel egyezik meg, mivel derékszögűek a háromszögek: m_1 = 6 cm; m_2 = 8,5 cm;

$A = T_{négyzet} + 2 \cdot T_{kis\ oldallap} + 2 \cdot T_{nagy\ oldallap} = 6 \cdot 6 + 2 \cdot \frac{6 \cdot 6}{2} + 2 \cdot \frac{6 \cdot 8{,}5}{2} = 36 + 36 + 51 = 123$

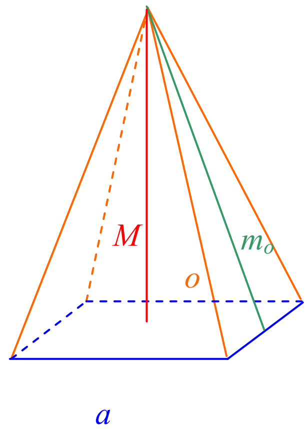
A = 123 (cm^2)

3. Szabályos gúla felszíne – általánosítás

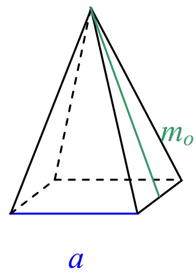
Most frontálisan megkérjük a csoportokat, meséljék el, hogyan számoltak az előző feladatban! Összegezésül megkapjuk, hogy a gúla felszínét a következőképpen lehet kiszámolni: alaplap területe (például egyenlőszárú háromszögekre bontva) + egyenlőszárú háromszögek (melyek az oldallapokat alkotják) területeinek összege. Mivel az alaplap feldarabolásával kapott egyenlőszárú háromszögek egybevágók, elég egy darabnak a területét kiszámolni, és szorozni annyival, amennyi a szabályos sokszög oldalainak száma. Az oldallapokat alkotó egyenlőszárú háromszögek szintén egybevágók, így elég egynek a területét kiszámolni, majd szorozni az alaplapot alkotó szabályos sokszög oldalainak számával. Képletek gyártásával nem fárasztanám a gyerekeket, ez ennek a korosztálynak még korai.

ÖSSZEGZÉS:

Szabályos gúlák felszínét úgy tudjuk kiszámítani, hogy az alaplap területét kiszámoljuk, majd az oldallapok egybevágó egyenlőszárú háromszögei közül az egyik területét is kiszámoljuk, és megszorozzuk a megfelelő darabszámmal. Mivel az alaplap is szabályos sokszög, ha szükséges, akkor egybevágó háromszögekre bontható, melyekből szintén elég egyet kiszámolni és megszorozni a megfelelő darabszámmal.
Jelölések: Az alapélt jelölhetjük a-val, az oldallap magasságát m_o-val, az oldalélt o-val, a testmagasságot M-mel.



Pl.: Szabályos négyoldalú gúla felszíne:

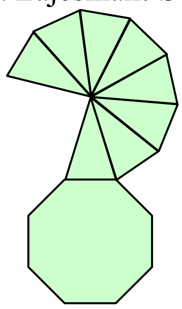


$$A = T_{\text{négyzet}} + 4 \cdot T_{\text{háromszög}} = a \cdot a + 4 \cdot \frac{a \cdot m_o}{2}$$

A következő feladat jól előkészíti a forgáskúp felszínének számolását. Érdemes legalább frontálisan végigbeszélni.

6. Lusta Lajcsi úgy döntött, elege van a sok számolgatásból! Ha szabályos gúla felszínét kell számolni, ő bizony veszi az alaplap kerületét és megszorozza az oldallap magasságával, elosztja kettővel, így éppen megkapja a kiterített palást területét.

$T_{palást} = \left(\frac{K_{alaplap} \cdot m_{oldallap}}{2}\right)$ Okos Kata teljesen felháborodott ezen a számolási módszeren, és kioktatta Lajcsit, hogy nem lehet így leegyszerűsíteni a dolgokat! Számolj utána, igaza lehet-e Lajcsinak! (Az előző gúlát használd megint!) Próbáld meg megmagyarázni, miért lehet igaza, illetve miért nem lehet igaza Lajcsinak! Segít az alábbi ábra!



Lajcsinak igaza van. A palástot alkotó háromszögek alapjainak összege kiadja a gúla alaplapjának kerületét. (Erről a 0871-es modulban már volt szó.)
Legyen az alaplap n oldalú szabályos sokszög. Az alapél a, az oldallap magassága: m_o. Egy oldallap területe: $\frac{a \cdot m_o}{2}$ A palást területe tehát: $n \cdot \frac{a \cdot m_o}{2}$ Ez átalakítva: $\frac{n \cdot a \cdot m_o}{2}$ Mivel az alaplap kerülete $n \cdot a$, ezért a palást területe: $\frac{K_{alaplap} \cdot m_o}{2}$

4. Feladatok a gúla felszínének számítására

A következő feladatokat házi feladatnak (vagy, ha van rá idő az órán csoportos munkára) ajánljuk. (Fontos feladatok, legalább egyet, kettőt csináltassunk meg.)

2. FELADATLAP

1. Mekkora az alábbi szabályos gúlák felszíne?

a) Az alaplapja 4 cm oldalhosszúságú négyzet, oldallapjait alkotó háromszögeinek magassága 5 cm. Szerkeszd meg a gúla hálóját!

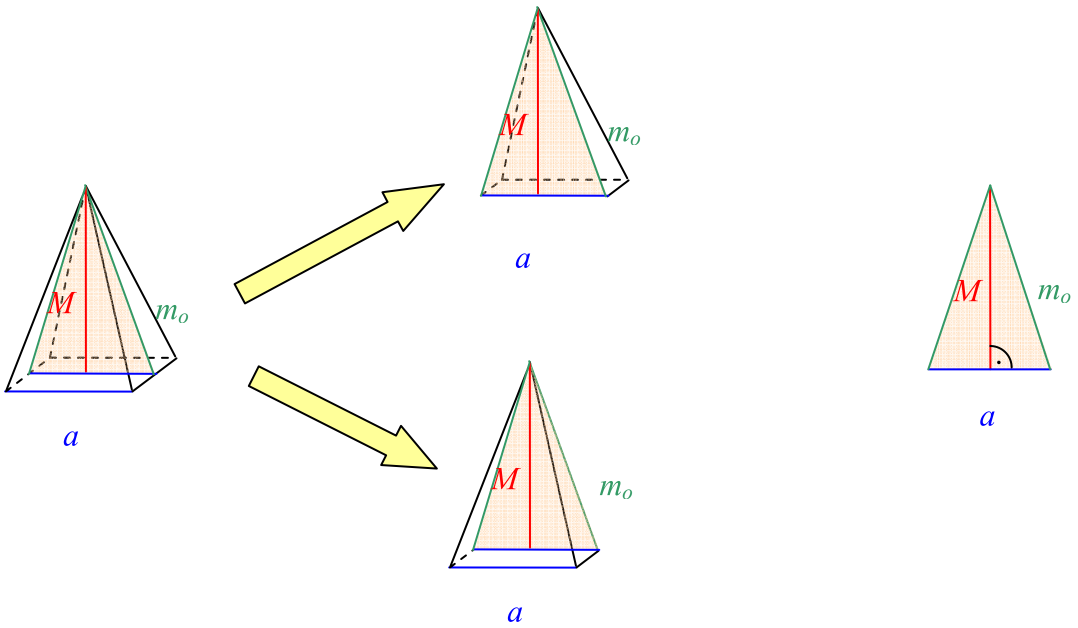
Egyszerű feladat.

$A = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot m_o}{2} = 4^2 + 4 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 16 + 40 = 56$

A = 56 cm².

b) Az a) feladatban lévő gúlát vágjuk két egybevágó testre a csúcsán keresztül úgy, hogy az alaplap az egyik oldalfelező merőlegese mentén váljon szét. (Segít az ábra!) Milyen testet kaptál? Vajon a két test felszínének összege egyezik-e az eredeti gúla felszínével? Állításod indokold! Mekkora lett a két test felszíne külön-külön?

Összetett feladat, térlátás szükséges hozzá és Pitagorasz-tétel.



Két egybevágó téglalapalapú gúlát kapunk. A két gúla felszínének összege természetesen több, mint az eredeti gúla, hiszen a vágás mentén keletkezett két oldal is beleszámít.

$$M=\sqrt{{m_o}^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{25-4}\approx 4,6$$

$$A_{félgúla}=a\cdot\frac{a}{2}+2\cdot\frac{\frac{a}{2}\cdot m_o}{2}+\frac{a\cdot M}{2}+\frac{a\cdot m_o}{2}=8+10+9,2+10=37,2$$

A = 37,2 cm².

c) Alapéle 6 cm, oldaléle 5 cm, alaplapja négyzet alakú. Szerkeszd meg a gúla hálóját! (A hiányzó adatokat próbáld meg kiszámítani! Ha nem sikerül, akkor méréssel is megállapíthatod.)

Egyszerű feladat, de Pitagorasz-tétel kell a kiszámításához, vagy lemért adatokkal dolgozhat.

$$o^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+{m_o}^2\rightarrow m_o=\sqrt{5^2-3^2}\rightarrow m_o=4cm$$

$$A=a^2+4\cdot\frac{a\cdot m_o}{2}=6^2+4\cdot\frac{6\cdot 4}{2}=36+48=84$$

A = 84 cm².

d) Alaplapja 4 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög, oldallapjainak magassága 10 cm. Szerkeszd meg a gúla hálóját! (A hiányzó adatokat próbáld meg kiszámítani! Ha nem sikerül, akkor méréssel is megállapíthatod.)

Közepesen nehéz feladat, de Pitagorasz-tétel kell a kiszámításához, vagy lemért adatokkal dolgozhat.

$$a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+{m_a}^2\rightarrow m_a=\sqrt{4^2-2^2}\rightarrow m_a\approx 3,5cm$$

$$A=\frac{a\cdot m_a}{2}+3\cdot\frac{a\cdot m_o}{2}=\frac{4\cdot 3,5}{2}+3\cdot\frac{4\cdot 10}{2}=7+60=67$$

A = 67 cm².

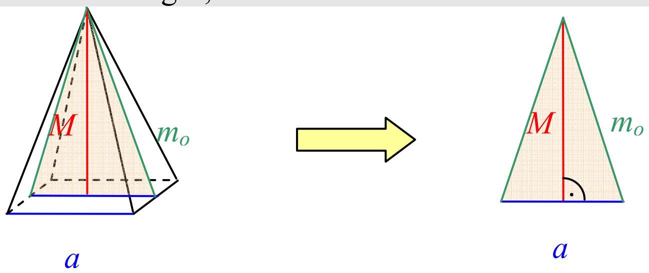
e) Alaplapja szabályos hatszög, melynek oldalhossza 3 cm, oldallapjainak magassága 5 cm. Szerkeszd meg a gúla hálóját! (A hiányzó adatokat próbáld meg kiszámítani! Ha nem sikerül, akkor méréssel is megállapíthatod.)
Nehezebb feladat, Pitagorasz-tétel kell a kiszámításához, vagy lemért adatokkal dolgozhat.

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a{}^2 \rightarrow m_a = \sqrt{3^2 - 1,5^2} \rightarrow m_a \approx 2,6cm$$

$$A = 6 \cdot \frac{a \cdot m_a}{2} + 6 \cdot \frac{a \cdot m_o}{2} = 6 \cdot \frac{3 \cdot 2,6}{2} + 6 \cdot \frac{3 \cdot 5}{2} = 23,4 + 45 = 68,4$$

A = 68,4 cm².

f) Alaplapja négyzet, melynek oldala 12 dm, a gúla magassága 8 dm. Segít az alábbi ábra.
Nehézebb feladat, térlátás szükséges, és nem kerülhető ki méréssel a Pitagorasz-tétel.



$$m_o{}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + M^2 \rightarrow m_o = \sqrt{6^2 + 8^2} \rightarrow m_o = 10dm$$

$$A = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot m_o}{2} = 12^2 + 4 \cdot \frac{12 \cdot 10}{2} = 144 + 240 = 384$$

A = 384 dm².

g) Alaplapja háromszög. A gúla minden éle 9 m. Vázold fel a gúla hálóját!
Nehezebb feladat, Pitagorasz-tétel szükséges.

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a{}^2 \rightarrow m_a = \sqrt{9^2 - 4,5^2} \rightarrow m_a \approx 7,8m$$

$$A = 4 \cdot \frac{a \cdot m_a}{2} = 4 \cdot \frac{9 \cdot 7,8}{2} = 140,4$$

A = 140,4 m².

Az előző feladatot (a testmagasság, oldalél, és az oldalmagasság összefüggését) szemléltessük megfelelő műanyag testen frontálisan!

2. Az ősi egyiptomi piramisok máig komoly feladványok, talányok a régészek, építészek számára. A legnagyobbat, a gizai piramist Kheopsz fáraó építtette Kr. e. 2500 körül. Ez a piramis két másik társával és a Sfinxszel együtt Kairo közelében csodálható meg a sivatagban. Súlya több mint 7 millió tonna. Magassága 146, 6 m, szélessége 230 m. Máig az ember alkotta építmények második legnagyobbika (az első a Kínai Nagy Fal). Ha a lehető legrövidebb úton felkapaszkodnánk a tetejére, mekkora utat kéne megtennünk? Mekkora a piramis felszíne? Nagyobb-e 1 km² – nél? (A piramis felszíne alatt csak a látható lapokat értjük, azt, amelyen a földdel érintkezik, nem számítjuk.)
Nehéz feladat.

A legrövidebb felfelé vezető út az oldallapok magassága:

$$m_o^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + M^2 \to m_o = \sqrt{115^2 + 146,6^2} \to m_o = 186,3m$$

186,3 m hosszú utat kéne megtenni.

$$A = 4 \cdot \frac{a \cdot m_o}{2} = 4 \cdot \frac{230 \cdot 186,3}{2} = 85698$$

A = 85698 m^2 ≈ 0,08 km^2

Egy tized km^2 – nél is kisebb a felszíne.

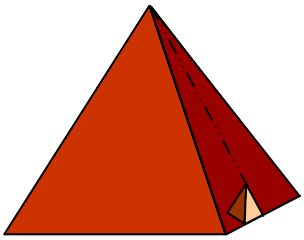
3. Elég-e 10 m^2 ponyvát venni ahhoz a téglalap alapú egyenes gúla alakú sátor elkészítéséhez, amelynek alaplapja 2 m hosszú és 1,6 m széles? (A sátornak van alja.) Készíts vázlatot a sátor kiterített ponyvájáról!

a) Oldalélei 2 m hosszúak; (A hiányzó adatokat próbáld meg kiszámítani! Ha nem sikerül, akkor készíts méretarányos ábrát, és mérd le a hiányzó adatokat!)

Nehezebb feladat.

b) A sátor magassága 1,5 m.

Nehéz feladat.

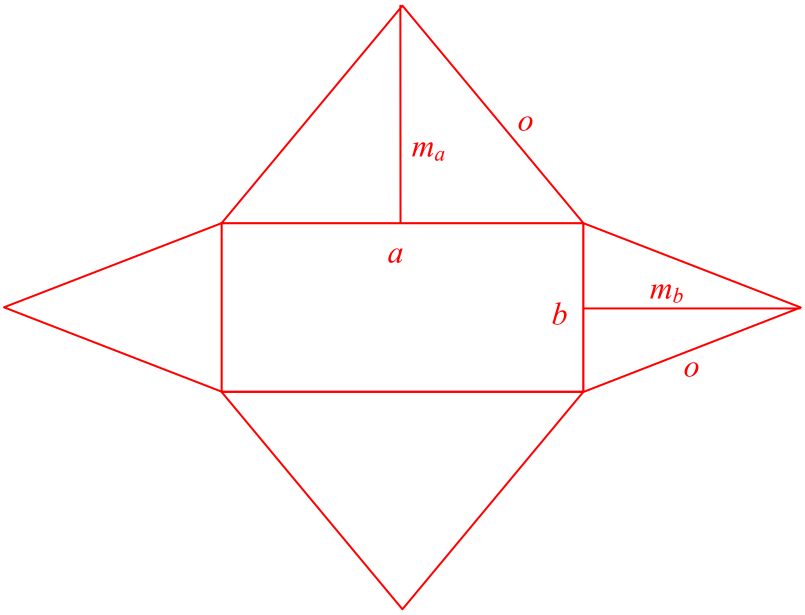


a) $o^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + m_a^2 \to m_a = \sqrt{2^2 - 1^2} \to m_a = 1,7m$

$$o^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + m_b^2 \to m_b = \sqrt{2^2 - 0,8^2} \to m_b = 1,8m$$

$$A = a \cdot b + 2 \cdot \frac{a \cdot m_a}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot m_b}{2} = 2 \cdot 1,6 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 1,7}{2} + 2 \cdot \frac{1,6 \cdot 1,8}{2} = 3,2 + 3,4 + 2,9 = 9,5$$

A = 9,5 m^2



b) $m_a{}^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + M^2 \to m_a = \sqrt{0,8^2 + 1,5^2} \to m_a = 1,7m$

$m_b{}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + M^2 \to m_b = \sqrt{1^2 + 1,5^2} \to m_b = 1,8m$

$A = a \cdot b + 2 \cdot \frac{a \cdot m_a}{2} + 2 \cdot \frac{b \cdot m_b}{2} = 2 \cdot 1,6 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 1,7}{2} + 2 \cdot \frac{1,6 \cdot 1,8}{2} = 3,2 + 3,4 + 2,88 = 9,48$

***A* = 9,48 m²**

4. A Louvre udvarán lévő modern üvegpiramis acélból, alumíniumból és üvegből készült. Ieoh Ming Pei tervezte, és 1989-ben fejezték be az építését. 35,4 m az oldalhosszúsága, magassága pedig 21,65 m. A piramis zömében rombusz alakú üvegtáblákból van kirakva (néhány háromszög alakút is tartalmaz, de ettől tekintsünk el). Mekkorák ezek a rombusz alakú üvegtáblák körülbelül, ha szám szerint 698 darabból áll. (A piramis alaplapja is üvegből van, de nem rombuszalakúakból van kirakva!) Hasonlítsd össze felszínét a Kheopsz fáraó piramisával (2. feladat)!

Nehezebb feladat.

[Forrás: Nathional Geograpics Magyarország honlapja.]

[Forrás: http://www.pele.org/francais/pyramidelouvre.shtml]

$m_o{}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + M^2 \to m_o = \sqrt{17,7^2 + 21,65^2} \to m_o = 28m$

$$A = 4 \cdot \frac{a \cdot m_o}{2} = 4 \cdot \frac{35,4 \cdot 28}{2} = 1982,4$$

A = 1982,4 m²

$$\frac{1982,4}{698} \approx 2,8$$

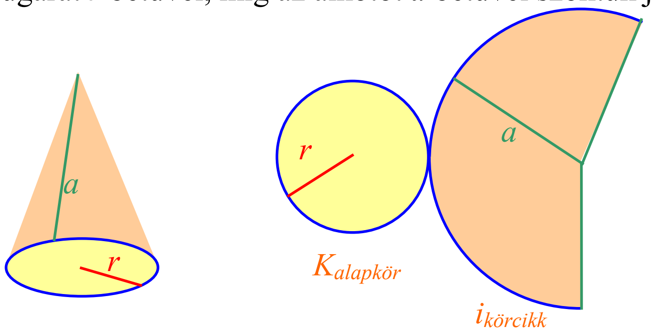
Tehát 1 db rombusz alakú üveg kb. **2,8 m²**-es.

II. Forgáskúp felszíne

A TUDNIVALÓ-ban foglaltakat beszéljük meg frontálisan a feladatok megkezdése előtt!

TUDNIVALÓ:

Tapasztaltuk, hogy a forgáskúp kiterített palástja egy körből (az alapkör) és egy körcikkből (palást) áll. Az alapkör sugarát *r* betűvel, míg az alkotót *a* betűvel szoktuk jelölni.



Az alapkör kerülete éppen a palást körívének hosszával egyezik meg (ezek egymáshoz illeszkednek).

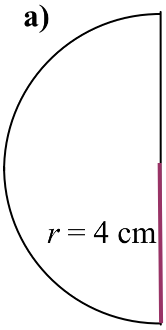
1. A körcikk területének számítása

A 0853-as modulban volt szó körcikk területéről, ívének hosszáról. A 3. feladatlap 1. feladata ennek átismétlése. Lassabban haladó osztályokban kezdjük frontálisan, többi osztályban lehet rögtön csoportmunkában csináltatni. Ez egy fontos feladat, mélyíti a körről kialakult fogalmakat, elsősorban azt, hogy a körív hossza és a középponti szög egyenesen arányos mennyiségek. Erre az ismeretre a középiskolában nagy szükség van.

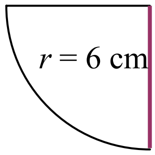
3. FELADATLAP

1. Számítsd ki az alábbi körcikkek íveinek hosszát, és területét!
Keress összefüggést a körívek hossza, a körcikk sugara és a körcikk területe között!
Fontos feladat.

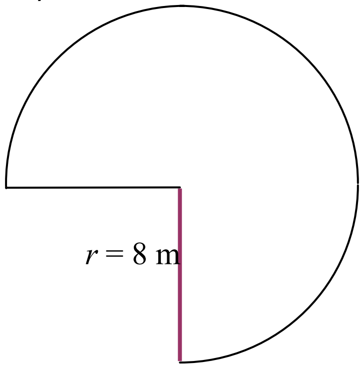
a)



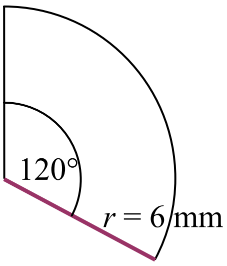
b)



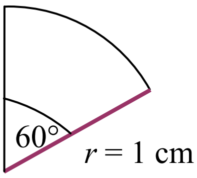
c)



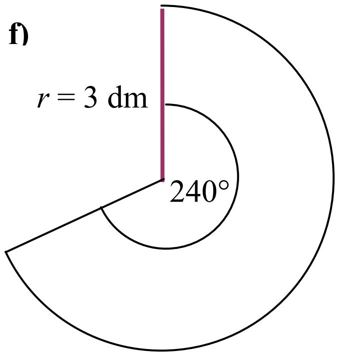
d)



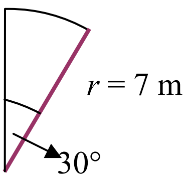
e)



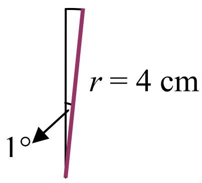
f)



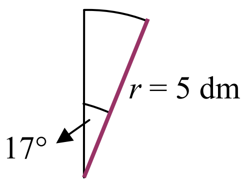
g)



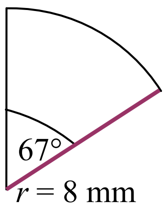
h)



i)



j)



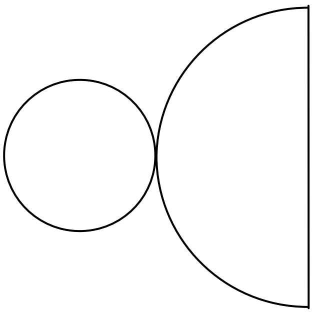
	a)	b)	c)	d)	e)
r	4cm	6cm	8m	6mm	1cm
i	4 π cm = = 12,6 cm	3 π cm = = 9,4 cm	12 π m= = 37,7 m	4 π mm = = 12,6 mm	$\frac{\pi}{3}\text{cm} = 1\text{cm}$
T	8 π cm^2 = = 25,1 cm^2	9 π cm^2 = = 28,3 cm^2	48 π m^2 = = 150,8 m^2	12 π mm^2 = = 37,7 mm^2	$\frac{\pi}{6}\text{cm}^2 = 0,5\text{cm}^2$

	f)	g)	h)	i)	j)
r	3dm	7m	4cm	5dm	8mm
i	4π dm $= 12{,}6$ dm	$\frac{7}{6}\pi\text{m} = 3{,}7\text{m}$	$\frac{\pi}{45}\text{cm} = 0{,}07\text{cm}$	$\frac{17}{36}\pi\text{dm} = 1{,}5\text{dm}$	$\frac{134}{45}\pi\text{mm} = 9{,}4\text{mm}$
T	$6\pi\ \text{dm}^2 = 18{,}8\ \text{dm}^2$	$\frac{49}{12}\pi\text{m}^2 = 12{,}8\text{m}^2$	$\frac{2}{45}\pi\text{cm}^2 = 0{,}14\text{cm}^2$	$\frac{85}{72}\pi\text{dm}^2 = 3{,}7\text{dm}^2$	$\frac{536}{45}\pi\text{mm}^2 = 37{,}4\text{mm}^2$

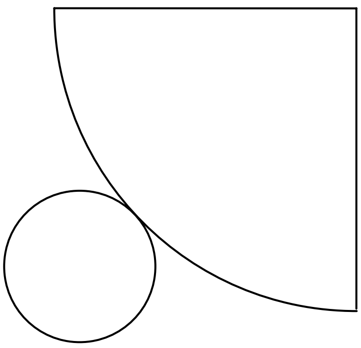
Észrevehetik, hogy a terület minden esetben az ívhosszúság és a sugár szorzatának a fele. (a), b), c), d), f) feladatnál ez szépen látszik, ha π értékét nem helyettesítjük be.) Beszélhetünk arról, hogy mikor találkoztak ezzel az összefüggéssel már korábban. Házi feladatnak adhatjuk, hogy olvassák el újra azt a részt. (0853. modul) És gyűjtsék ki belőle, amit a legfontosabbnak, vagy a legérdekesebbnek tartanak!
A 2. feladat a kúpok alapkörének sugara a palást körcikkének a szöge és a kúp alkotója közötti összefüggést fedezteti fel. Ezt a feladatot csak gyorsabban haladó osztályokban ajánljuk.

2. Forgáskúpok hálóját látod az alábbi ábrákon.
a) Számítsd ki a forgáskúpok alapkörének sugarát, ha az alkotó (palástot alkotó körcikk sugarának) hossza 24 cm!
b) Számítsd ki az alkotó hosszát (palástot alkotó körcikk sugarát), ha az alapkör sugara 6 cm!
Próbáld meg megfogalmazni sejtésed!
Számolást igénylő feladat. A továbbhaladás szempontjából kihagyható.

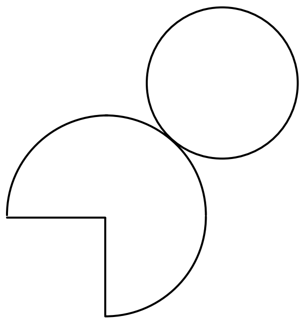
I.



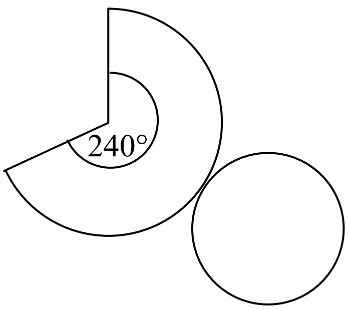
II.



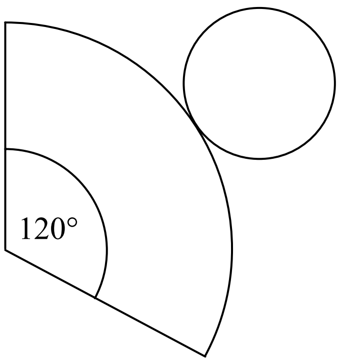
III.



IV.



V.



a) feladat:

I. a = 24 cm; $i_{körcikk} = \frac{1}{2} \cdot K_{nagykör} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a \cdot \pi = a \cdot \pi = 24\pi$. Mivel a körcikk ívhossza és az alapkör kerülete egyenlő hosszú: $K_{alapkör} = 24\pi$;. $24\pi = 2 \cdot r \cdot \pi \rightarrow r =$ **12 cm**.

II. a = 24 cm; $i_{körcikk} = \frac{1}{4} \cdot K_{nagykör} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot a \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \pi = 12\pi$. Mivel a körcikk ívhossza és az alapkör kerülete egyenlő hosszú: $K_{alapkör} = 12\pi = 2 \cdot r \cdot \pi \rightarrow r =$ **6 cm**.

III. a = 24 cm; $i_{körcikk} = \frac{3}{4} \cdot K_{nagykör} = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot a \cdot \pi = \frac{3}{2} \cdot a \cdot \pi = 36\pi$. Mivel a körcikk ívhossza és az alapkör kerülete egyenlő hosszú: $K_{alapkör} = 36\pi = 2 \cdot r \cdot \pi \rightarrow r =$ **18 cm**.

IV. a = 24 cm; $i_{körcikk} = \frac{2}{3} \cdot K_{nagykör} = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot a \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot a \cdot \pi = 32\pi$ Mivel a körcikk ívhossza és az alapkör kerülete egyenlő hosszú: $K_{alapkör} = 32\pi = 2 \cdot r \cdot \pi \rightarrow r =$ **16 cm**.

V. a = 24 cm; $i_{körcikk} = \frac{1}{3} \cdot K_{nagykör} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot a \cdot \pi = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \pi = 16\pi$. Mivel a körcikk ívhossza és az alapkör kerülete egyenlő hosszú: $K_{alapkör} = 16\pi = 2 \cdot r \cdot \pi \rightarrow r =$ **8 cm**.

b) feladat:

I. r = 6 cm; $K_{alapkör} = 12\pi$; $i_{körcikk} = \frac{1}{2} \cdot K_{nagykör} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a \cdot \pi = a \cdot \pi$. Mivel a körcikk ívhossza és az alapkör kerülete egyenlő hosszú: $12\pi = a \cdot \pi \rightarrow a =$ **12 cm**.

II. r = 6 cm; $K_{alapkör} = 12\pi$; $i_{körcikk} = \frac{1}{4} \cdot K_{nagykör} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot a \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \pi$. Mivel a körcikk ívhossza és az alapkör kerülete egyenlő hosszú: $12\pi = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \pi \rightarrow a =$ **24 cm**.

III. r = 6 cm; $K_{alapkör} = 12\pi$; $i_{körcikk} = \frac{3}{4} \cdot K_{nagykör} = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot a \cdot \pi = \frac{3}{2} \cdot a \cdot \pi$. Mivel a körcikk ívhossza és az alapkör kerülete egyenlő hosszú: $12\pi = \frac{3}{2} \cdot a \cdot \pi \rightarrow a =$ **8 cm**.

IV. r = 6 cm; $K_{alapkör} = 12\pi$; $i_{körcikk} = \frac{2}{3} \cdot K_{nagykör} = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot a \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot a \cdot \pi$. Mivel a körcikk ívhossza és az alapkör kerülete egyenlő hosszú: $12\pi = \frac{4}{3} \cdot a \cdot \pi \rightarrow a =$ **9 cm**.

V. r = 6 cm; $K_{alapkör} = 12\pi$; $i_{körcikk} = \frac{1}{3} \cdot K_{nagykör} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot a \cdot \pi = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \pi$. Mivel a körcikk ívhossza és az alapkör kerülete egyenlő hosszú: $12\pi = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \pi \rightarrow a =$ **18 cm**.

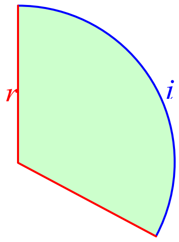
Gyorsan haladó csoportoknál megfogalmazhatják a tapasztaltokat a konkrét esetekben:

a) feladat: „Ha a palást egy teljes kör fele, az alaplap sugara is fele a palást sugarának.”, „Ha a palást egy teljes kör $\frac{3}{4}$ része, az alaplap sugara is $\frac{3}{4}$ része a palást sugarának.”.

b) feladat: „Ha a palást egy teljes kör fele, a sugara kétszer akkora, mint az alaplap sugara.” „Ha a palást egy teljes kör $\frac{3}{4}$ része, a sugara $\frac{4}{3}$ része az alapkör sugarának.” És így tovább.

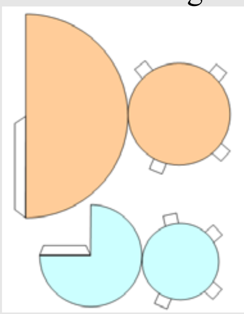
EMLÉKEZTETŐ:

A körcikk területét az $\frac{r \cdot i}{2}$ képlet alapján számíthatjuk ki, ahol r a kör sugara, i a körív hossza.



2. A forgáskúp felszíne

Egy papírkúp szétvágása után megállapítjuk frontálisan, hogy a felszín meghatározásához ki kell számítani az alapkör és a palást területét, s ezeket adjuk össze.
Ezek után a **0881. modul 6. tanári mellékleté**nek forgáskúpjait kézbe adva a csoportok kiszámolhatják annak felszínét. Lassabban haladó csoportokat a hálók kiosztásával segíthet a tanár.
0881 – 6. tanári melléklet – Lásd a 0881. modul végén és az eszközei közt!



A nagyobb alapkörű kúp adatai: $r = 4$ cm; $a = 8$ cm

A palást egy teljes kör fele. $A_{kúp} = T_{alapkör} + T_{palást} = r^2 \cdot \pi + \frac{a^2 \cdot \pi}{2} = 16\pi + \frac{64\pi}{2} = 48\pi \approx 150{,}8$

Vagy számolhatnak a körcikk területének képletével:

$$A_{kúp} = T_{alapkör} + T_{palást} = r^2 \cdot \pi + \frac{i \cdot a}{2} = 16\pi + \frac{8\pi \cdot 8}{2} = 48\pi \approx 150{,}8$$

A = 150,8 cm²

A kisebb alapkörű kúp adatai: $r = 3$ cm; $a = 4$ cm

A palást egy teljes kör $\frac{3}{4}$ része.

$$A_{kúp} = T_{alapkör} + T_{palást} = r^2 \cdot \pi + \frac{3}{4} a^2 \cdot \pi = 9\pi + \frac{3}{4} 16 \cdot \pi = 21\pi \approx 66$$

Vagy számolhatnak a körcikk területének képletével:

$$A_{kúp} = T_{alapkör} + T_{palást} = r^2 \cdot \pi + \frac{a \cdot i}{2} = 9\pi + \frac{24\pi}{2} = 21\pi \approx 66$$

A = 66 cm²

Gyorsabban haladó csoportoknak adhatjuk azt az összetettebb feladatot, hogy számolják ki a körkúpból és a hozzá tartozó körhengerből álló torony felszínét.

A MINTAPÉLDÁ-t (vagy egy másik forgáskúp felszínének számolását) frontálisan beszéljük meg. Ha szükséges az osztályban, több feladatot is beszéljünk végig, mielőtt önálló, vagy csoportmunkára szólítanánk fel őket.

MINTAPÉLDA:

Feladat: Mekkora annak a forgáskúpnak a felszíne, melynek alapkörének sugara 6 cm, alkotója 10 cm?

I. megoldás: a = 10 cm, r = 6 cm.

Az alapkör kerülete: $K_{alapkör} = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 6 \cdot \pi = 12\pi (\approx 37,7) \rightarrow K_{alapkör} \approx 37,7 cm$

Ez megegyezik a palástot alkotó körcikk ívének hosszával: $i_{körcikk}$ = 37,7 cm.

Az alaplap területét: $T_{alapkör} = r^2 \cdot \pi = 6^2 \cdot \pi = 36\pi (\approx 113) \rightarrow T_{alapkör} \approx 113 cm^2$

A palást területe a már tanult $T_{körcikk} = \frac{r \cdot i}{2}$ képlet alapján számolható, ahol i a körív hossza, r a kör sugara: $T_{körcikk} = \frac{a \cdot i_{körcikk}}{2} = \frac{10 \cdot 37,7}{2} = 188,5 \rightarrow T_{körcikk} = 188,5 cm^2$

Tehát a kúp felszíne: $A_{kúp} = T_{alapkör} + T_{körcikk} = 113 cm^2 + 188,5 cm^2 = 301,5 cm^2$

II. megoldás: a = 10 cm, r = 6 cm.

Az alapkör sugara 6 cm, a körcikk sugara 10 cm. A 3. feladatlap 2. példájának tapasztalata alapján a körcikk $\frac{6}{10}$, azaz $\frac{3}{5}$ része egy teljes körnek.

Az alaplap területét: $T_{alapkör} = r^2 \cdot \pi = 6^2 \cdot \pi = 36\pi (\approx 113) \rightarrow T_{alapkör} \approx 113 cm^2$

A palást területe: $T_{körcikk} = \frac{3}{5} \cdot a^2 \cdot \pi = 188,4 \rightarrow T_{körcikk} = 188,4 cm^2$

Tehát a kúp felszíne: $A_{kúp} = T_{alapkör} + T_{körcikk} = 113 cm^2 + 188,4 cm^2 = 301,4 cm^2$

Az előző feladathoz képest az $\frac{1}{10}$-nyi eltérést a kerekítés okozza.

3. Feladatok forgáskúp felszínének számítására

3. Készítsd el a hálóját, és számold ki a forgáskúp felszínét, ha:

a) az alapkör sugara 3 dm, palástja pedig egy 120°-os körcikk;

Könnyű feladat.

I. $K_{alapkör} = 2 \cdot r \cdot \pi = 6\pi \approx 18,8 = i_{körív} = 18,8 = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot a \cdot \pi \rightarrow a = 9 dm$;

$A_{kúp} = T_{alapkör} + T_{palást} = r^2 \cdot \pi + \frac{i \cdot a}{2} = 9\pi + \frac{18,8 \cdot 9}{2} = 112,9$

***A* = 112,9 dm²**

II. A 3. feladatlap 2. feladatánál tapasztaltuk, hogy a 120°-os körcikk sugara 3-szorosa az alapkörcikk sugarának → $a = 3 \cdot r = 9$dm. A körcikk épp $\frac{1}{3}$ kör.

$$A_{gúla} = T_{alapkör} + T_{palást} = r^2 \cdot \pi + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \pi = 9\pi + 27\pi = 36\pi \approx 113$$

***A* = 113 dm²**

b) az alapkör sugara 7 m, az alkotó 5 m;

Könnyű feladat.

Lehetetlen.

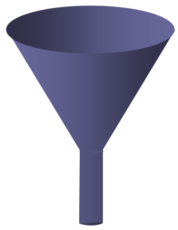
c) az alapkör sugara 3 cm, az alkotó 6 cm!

Közepesen nehéz feladat.

(A körcikk éppen félkör. Ha ez nem jut az eszükbe, akkor az alapkör kerülete = palást körcikkének ívhossza egyenlettel kell számolniuk.) $A = 27\pi$

***A* = 84,8 cm²**

4. Mekkora területű bádogot használtak a tölcsérhez? A tölcsér szájának átmérője 18 cm, torkolatának átmérője 2 cm, az egész tölcsér hossza 22 cm, amiből a bevezető cső hossza 10 cm. (Úgy tekintjük, hogy a tölcsér szája teljes kúp.)



Nehéz feladat, összetett, és Pithagorasz-tétel szükséges.

$M_{kúp}$= 12 cm. $a = \sqrt{9^2 + 12^2} \rightarrow a = 15cm$

$$A_{tölcsér} = T_{kúppalást} + T_{hengerpalást} = \frac{15 \cdot 18\pi}{2} + 4 \cdot \pi \cdot 10 = 175\pi$$

***A* = 549,5 cm²**

III. A gömb felszíne; gyakorló feladatok felszínszámításra

1. A gömb felszíne (narancs)

Házi feladatnak adható a következő példa (az is elég, ha csoportonként 1 fő végrehajtja a feladatot), vagy órán csoportokban is dolgozhatnak.

4. FELADATLAP

1. a) Végy a kezedbe egy narancsot! Mekkora lehet a felszíne? Képzeljük ezt gömbnek és próbáljuk meg kiszámítani a sugarát! Zsineggel megmérhetjük a narancs legnagyobb kerületét (az „egyenlítő” mentén), és ebből kellene következtetni a sugarára. (A narancs felbontása után le is mérheted a gömb átmérőjét egy gerezden. Vigyázz, a héját is hozzá kell számítani!)

K = $2r\pi$ alapján kiszámítható a sugár: $r = \frac{K}{2\pi}$.

b) Most próbáld meg úgy meghámozni, hogy negyed gömbcikkeket félbevágsz az „egyenlítő” mentén!

Így háromszögszerűségeket fogsz kapni, amelyet nagyjából ki lehet teríteni síkban. Ezt négyzethálós lapra, vagy milliméterpapírra nyomkodva és körülrajzolva határozd meg a felszín nagyságát! A narancs átmérőjét mérd le, és a füzetedbe jegyezd le a narancs sugarának hosszát és felszínének nagyságát!

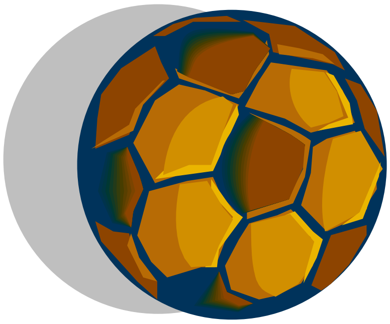
Gyűjtsük össze óra elején az adatokat, és – ahol erre van idő – próbáljuk együtt kitalálni a képletet, amivel gömböknél a felszín számolható. Ötleteket várunk. Mi szerepelhet benne? (π, mivel területről van szó r^2…)

Egyszerűen meg is mondhatjuk a képletet: $4r^2\pi$. Ekkor ellenőrizhetik, mennyire mértek jól. Lehet jutalmazni a csoportokat az alapján, mennyire közelítették meg a jó eredményt.
El kell mondanunk a gyerekeknek, hogy sajnos a tudásunk még nem elég ahhoz, hogy ezt a képletet alátámasszuk!

TUDNIVALÓ:

A gömb felszínének képlete: $4r^2\pi$.

2. Mekkora darab bőrből varrták a focilabdát, ha átmérője körülbelül 30 cm?
2826 cm² bőrből varrták.



3. Ha egy narancs átmérője 8 cm, hány cm^2 héj borítja?
201 cm^2

2. Vegyes gyakorló feladatok felszínszámításra

A tanár válogathat a feladatgyűjtemény feladataiból. Feltétlenül legyen önálló, és csoportos feladatmegoldás is az órán.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Egy szabályos háromoldalú gúla alapéle 5 cm, oldallapjainak magassága 3 cm. Szerkeszd meg a hálóját! A szükséges adatok lemérése vagy kiszámítása után határozd meg a felszínét!
Könnyű feladat, szabályos háromoldalú gúla felszíne.
$m_a = 4{,}3$ cm; $\boldsymbol{A = 33{,}3}$ **cm^2**

2. Egy szabályos négyoldalú gúla alaplapjának kerülete 4 dm. Mekkora a felszíne, ha oldallapjai 8 cm magasak?
Könnyű feladat, szabályos négyoldalú gúla felszíne.
$a = 10$ cm; $\boldsymbol{A = 260}$ **cm^2**

3. Szabályos háromoldalú gúla minden éle 3,4 cm. Szerkeszd meg a hálóját! A szükséges adatok lemérése vagy kiszámítása után határozd meg a felszínét!
Közepesen nehéz feladat, szabályos háromoldalú gúla felszíne, Pithagorasz-tétel vagy mérés.
$m_a = 2{,}9$ cm; $\boldsymbol{A = 20}$ **cm^2**

4. Szabályos hatoldalú gúla alapélei 4,6 cm hosszúak. Szerkeszd meg az alaplapot! Mekkora a gúla felszíne, ha oldallapjainak magassága 6 cm? (A hiányzó adatokat mérd le, vagy számítsd ki!)
Közepesen nehéz feladat, szabályos hatoldalú gúla felszíne, Pithagorasz-tétel vagy mérés.
$m_a = 4$ cm; $\boldsymbol{A = 138}$ **cm^2**

5. Egy háromszögalapú gúla alapélei 2,4; 3,2 és 4 cm-esek. Szerkeszd meg a gúla alaplapját! Mekkora a gúla felszíne, ha minden oldallapjának magassága 6 cm?
Könnyebb feladat, háromoldalú gúla felszíne.
Az alaplap megszerkesztésekor észrevehetik, hogy a háromszög derékszögű. Ezt Pithagorasz-tétellel le is ellenőrizhetik. $T_{alaplap} = 3{,}84\ cm^2$; $\boldsymbol{A = 32{,}64}$ **cm^2**

6. A táblázat szabályos négyoldalú gúlákról szól. Töltsd ki!
Nehéz feladat, Pithagorasz-tétel, szabályos négyoldalú gúla felszíne.

alapél (*a*)	50 cm	18 m	6 dm	4 dm
oldallap magassága (m_o)	65 cm	15 m	20 cm	74,7 cm
oldalél (*o*)	69,6 cm	17,5 m	lehetetlen	77,3 cm
testmagasság (*M*)	60 cm	12 m	lehetetlen	72 cm
felszín (*A*)	9000 cm^2	864 m^2	lehetetlen	7576 cm^2

7. Egy szabályos hatoldalú gúla alakú lampiont akarnak készíteni. Elég lesz-e fél m^2 rizspapír, ha minden oldalát (az alját is) be akarják vonni, és 5% anyagot akarnak ráhagyni a ragasztásra? A lampion méretei: alapél 14 cm, oldalél 25 cm.
Nehéz feladat, Pithagorasz-tétel, szabályos hatoldalú gúla felszíne.
m_o = 24 cm; m_a = 12,1 cm.

$$A = 6\cdot\frac{a\cdot m_a}{2} + 6\cdot\frac{a\cdot m_o}{2} = 6\cdot\frac{14\cdot 12{,}1}{2} + 6\cdot\frac{14\cdot 24}{2} = 508{,}2 + 1008 = 1516{,}2$$

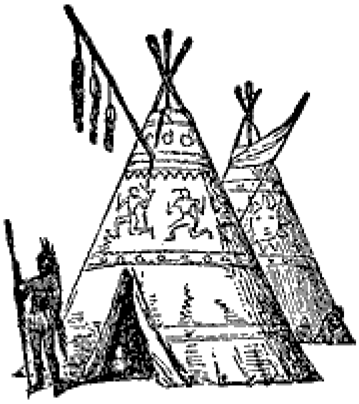
A = 1516,2 cm^2.
1516,2 cm^2 · 1,05 = 1592 cm^2 ≈ 16 dm^2 = **0,16 m^2**
Bőven elég lesz fél m^2 rizspapír.

8. Egy forgáskúp alapkörének sugara 2 cm, palástja félkör alakú. A hiányzó adatok meghatározása után szerkeszd meg a hálóját, és számold ki a felszínét!
Könnyű feladat, forgáskúp felszíne.
Az alkotót kiszámolhatja az alapkör kerületének és a palást ívhosszának egyenlőségéből, vagy a 3. feladatlap 2. feladata alapján: a = 4 cm; **A = 12 π cm^2 ≈ 37,7 cm^2**

9. Egy forgáskúp alapkörének átmérője 4 cm, alkotója 5 cm. Mekkora a felszíne?
Könnyű feladat, forgáskúp felszíne.
A = 14 π cm^2 ≈ 44 cm^2

10. Egy forgáskúp alakú toronytető alapkörének átmérője 6 m, alkotója 4 m. Mekkora területű bádoglemezt használtak fel hozzá? (Nincs alja a toronytetőnek.)
Könnyű feladat, forgáskúp felszíne.
A = 12 π m^2 ≈ 37,7 m^2

11. A wigwam forgáskúp alakú indián sátor (alja nincs). Mekkora bőrből készült az a wigwam, melynek alapkörének átmérője és alkotója 2 m?
Könnyű feladat, forgáskúp felszínképlete szükséges.



Forrás: etc.usf.edu/clipart/4200/4283/wigwam_1.htm

Megoldás: $r = 1\text{m};\ a = 2\text{m};\ A = \frac{2r\pi a}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi \approx 6{,}3$

6,3 m^2 bőrből készült a sátor.

12. A táblázatban forgáskúpok adatait soroltuk fel. Pótold a hiányzó adatokat!
Nehéz feladat, Pithagorasz-tétel; forgáskúp felszíne.

alapkör sugara (r)	8 cm	3,6 dm	21 dm	67 m	6,3 mm
alkotó (a)	17 cm	39 cm	35 dm	65 m	11 mm
testmagasság (M)	15 cm	1,5 dm	2,8 m	lehetetlen	9 mm
felszín (A)	628,3 cm^2	8482,3 cm^2	3694,5 dm^2	lehetetlen	342,4 mm^2

13. Töltsd ki a táblázatot!
Könnyű feladat, gömb felszínképlete szükséges.

$r_{gömb}$	5 cm	8 m	3 mm	2 dm
$A_{gömb}$	314 cm^2	804 m^2	113 mm^2	50,24 dm^2

14. Mennyi héj borítja a negyed cikk almát, ha átmérője 7 cm?
Könnyű feladat, gömb felszínképlete szükséges.
38,5 cm^2

0882 – 1. tanári melléklet

Osztályonként 8 db (csoportonként 1 db) ebben a méretben sima lapon.
0881. 6. tanári mellékletében szereplő gúlák oldalhosszai, egyéb adatai a felszínszámításhoz.

Fél cm-re kerekített értékek	a (alapél)	m_a (alaplap háromszögeinek magassága)	m_o (oldallap magasság)
hatoldalú	4	3,5	5
háromoldalú	7	6	6
négyoldalú	5		7
ötoldalú	4	3 (2,5 is elfogadható)	7