0863. MODUL

HOZZÁRENDELÉSEK, FÜGGVÉNYEK

Sorozatok

KÉSZÍTETTE: BIRLONI SZILVIA ÉS HARSÁNYI ZSUZSA

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A sorozatok fogalmának mélyítése, egyértelmű megadási módok ismerete. Sorszám és sorozatelem kapcsolata. Sorozatelemek közti összefüggések felismerése. Sorozatok megadása: képlet ill. rekurzív mód. Mi a számtani és mértani sorozat, tulajdonságaik. Más nevezetes sorozatok megismerése. Egyszerű gyakorlati alkalmazások.
Időkeret	7 óra
Ajánlott korosztály	8. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Tágabb környezetben:* mindennapi élet, nyelv, zene, fizika, kémia. *Szűkebb környezetben:* hozzárendelések, koordináta-rendszer, algebrai kifejezések, műveletek. *Ajánlott megelőző tevékenységek:* hozzárendelések vizsgálata, pontok ábrázolása koordináta-rendszerben, algebrai kifejezések átalakításai, szabályjátékok. *Ajánlott követő tevékenységek:* Sorozatokhoz kapcsolódó összefüggések általános formulái. Kamatos kamat számítása. Végtelen sorok vizsgálata.
A képességfejlesztés fókuszai	*Számolás kompetencia:* sorozat tagjainak kiszámítása. *Mérés, becslés:* táblázatok, grafikonok vizsgálata, ill. készítése. *Mennyiségi következtetés:* sorozat tagjainak változása a sorszám függvényében. *Szövegértés, problémamegoldás, metakogníció:* gyakorlati problémák, feladatok a hétköznapi életben, ezek matematikai leírása, vizsgálata, a természetben található érdekes szabályosságok, megfigyelése gyűjtése. *Rendszerezés, kombinativitás:* módszeres próbálkozás, szabályok keresése, formalizálás. *Dedukció, indukció:* néhány sorozatelemből továbbiakra következtetés; általános szabály; ~→ konkrét tagok.

AJÁNLÁS

Frontális, egyéni és csoportmunka vegyesen. A feldolgozásban sokszor ajánlottunk kooperatív módszereket. A pedagógus az osztály ismeretében rugalmasan kezelje ezeknek a módszereknek az alkalmazását. Természetesen más módszerek alkalmazása mellett is dönthet.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Hétköznapi életből gyűjtött példák sorozatokra, feladatlapok.

ÉRTÉKELÉS

Az egyéni és csoportos munka során szóbeli értékelés, a téma végén értékelő feladatlap kitöltése

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. A sorozatok			
1.	Ráhangolódás: éneklés, szekreter játék és szappanopera; fogalmak és jelölések	Megfigyelési készség, szövegalkotás.	Kotta, két A4-es lap
2.	Fogalmak és jelölések; gyakorlás		1. feladatlap
II. A számsorozatok			
1.	Ráhangolódás: „Gondoltam egy sorozatra...”	Következtetés, szabályalkotás.	
2.	Számsorozatok	Induktív gondolkodás.	2. feladatlap 1.
3.	A sorozat, mint függvény		2. feladatlap 2., 3.
III. A számtani sorozat			
1.	Számtani sorozat bevezetése egy hétköznapi probléma megoldása kapcsán	Problémamegoldó gondolkodás.	3. feladatlap 1.
2.	Meghatározások, összefüggések	Szabályalkotás.	3. feladatlap 2.
3.	Gyakorlás	Alkalmazási képesség.	4. feladatlap

IV. A mértani sorozat			
1.	Ráhangolódás		
2.	Mértani sorozat bevezetése gyakorlati példákkal	Szövegértés, fogalomalkotás.	5. feladatlap 1.
3.	Meghatározások, összefüggések	Szabályalkotás.	5. feladatlap 2-5.

V. Szöveges feladatok a sorozatok gyakorlati alkalmazására			
1.	Gyakorlati alkalmazás	Deduktív gondolkodás.	6. feladatlap

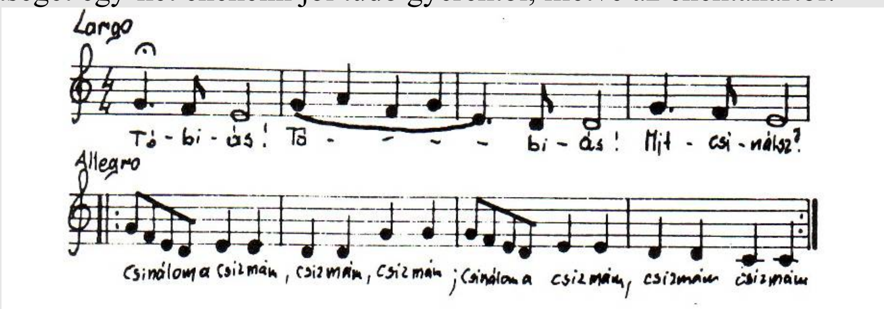
VI-VII. Felmérés			
			Felmérő feladatlap A, B

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. A sorozatok

1. Ráhangolódás: éneklés, szekreter játék és szappanopera; fogalmak és jelölések

Három játékot fogunk játszani, melyek a sorozat fogalmának kialakítását és megalapozását segítik. Ezek nem matematikai példák. Ezekkel a sorozatok komplexitását, és életszerűségét szeretnénk érzékeltetni.
1. játék: A gyerekek üljenek körbe, mert először énekelni fogunk! Fontosnak tartjuk, hogy a dalt közösen énekeljük is el. Amennyiben a közös éneklés levezénylése problémát okoz, kérjünk segítséget egy-két énekelni jól tudó gyerektől, illetve az énektanártól!



Természetesen lehet más dalt is énekelni, amit az osztály és a tanár szeret és megvan a kottája.
Az éneklés után értelmezzük a kottát, mint sorozatot! Mondjuk el, hogy:
Ezt az éneket a kottában zenei hangok „sorozatával” ábrázolták! A dallam szempontjából meghatározó, hogy melyik hang áll az első, a második, a ..., a tizedik ..., az utolsó helyen. A matematikusok a könnyebb leírás kedvéért néhány egyszerű jelölést vezettek be. A hangjegy sorozat, vagy bármilyen más sorozat, első elemét a_1-gyel, második elemét a_2-vel és így tovább. 1. Feladatlap 1.
2. játék: Ebben a játékban mi fogunk sorozatokat előállítani, mégpedig mondatok sorozatát. Válasszunk ki két egymás mellett ülő gyereket, ők fogják indítani a következő játékot! Legyen az ő jelük j_1 ill. b_1, aszerint, hogy jobbra vagy balra indítják a játékot! A mellettük ülők lesznek a j_2 ill. b_2 és így tovább, addig, míg a jelölés a kör másik felén össze nem találkozik. Ha páratlanul vannak, akkor az egyik betűből eggyel több sorszámú lesz. A játék leírása:
Szekreter játék: A tanár két lapra felírja ugyanazt(!) a kezdőmondatot. A j_1 ill. b_1 jelű játékosok megkapják ezeket a papírokat. Az a feladatuk, hogy olvassák el a mondatot, és a jelük leírásával folytassák egy mondattal a történetet, és hajtsák rá az első mondatra a lapot úgy, hogy csak az általuk írt mondatot lehessen elolvasni. Majd az egyik gyerek a baloldali, másik a jobboldali szomszédjának (j_2 ill. b_2) adja át a lapot. Ők is olvassák el a lefedetlen mondatot, írjanak folytatásul alá a jelük megadásával egy mondatot, hajtsák le az előzőt, úgy hogy ismét csak az utolsó mondat látsszon, és adják tovább annak a szomszédjának, aki még nem írt rá! A tanárnak közben az a dolga, hogy ügyeljen arra, hogy a két lap átadása mindig azonos időpontban történjen. Ezt addig folytassuk, amíg a két lap össze nem találkozik két egymás mellett ülő gyereknél! Ekkor az utolsó emberek is írják rá a befejező mondatot, majd kérjük meg, hogy mindketten olvassák fel a történetet!

Mondjuk el, hogy ebben az esetben a sorozat elemei a gyerekek által írt mondatok voltak. Emeljünk ki néhány elemet a jelével együtt.
3. játék: Ebben a játékban is sorozatot állítunk elő, most már a gyerekek csoportban dolgoznak.
Most TV-játék sorozatot fogunk írni, mégpedig úgy, hogy minden csoport egy-egy rövid epizódot dolgoz ki. A kerettörténet: Az Almási család nyaral. Szereplők: a két szülő, a két gyerek (Tamara és Peti) valamint a gyerekek barátai (Rozi és Máté). Húzassuk ki a csoportokkal az egyes részek tartalmát:

1. t_1: Otthoni csomagolás, indulás,
2. t_2:Megérkezés a nyaralóba, berendezkedés,
3. t_3:Első este,
4. t_4:Reggeli ébredés, a napi program megbeszélése,
5. t_5:Harmadik nap a strandon,
6. t_6:Utolsó vacsora a nyaralóban.

A csoportok a megadott kereteknek megfelelően nyolc-tízmondatos történetet írjanak! Határozzuk meg 10 percben az írás időkeretét!
Amikor elkészültek a csoportok, a megfelelő sorrendben ismertessék az osztállyal a történetüket. Hívjuk fel a figyelmet arra, hogy milyen fontos szerepe van az elemek megfelelő sorrendjének a történet érthetősége szempontjából!

2. Fogalmak és jelölések; gyakorlás

Az 1. feladatlapot önálló munkára ajánljuk. Az ellenőrzést frontálisan végezzük írásvetítő felhasználásával.

1. FELADATLAP

1.

Ezt az éneket a kottában zenei hangok „sorozatával” ábrázolták. A dallam szempontjából meghatározó, hogy melyik hang áll az első, a második, a ..., a tizedik ..., az utolsó helyen. A matematikusok a könnyebb leírás kedvéért néhány egyszerű jelölést vezettek be. A hangjegy sorozat első elemét a_1-gyel, második elemét a_2-vel jelöljük, és így tovább.
Nevezd meg a sorozat következő elemeit a hangok abc-s nevével!

a_2 = F a_5 = A a_{11} = G a_{30} = D

2. Dan Brown: A da Vinci-kód c. könyvében egy szöveg kódolására használják a Fibonacci-sorozatot. (Leonardo Pisano Fibonacci, olasz matematikus, 1170-1240) Ismerkedjünk meg ezzel a sorozattal!
A sorozat elemeit úgy állítjuk elő, hogy megadjuk az első ($a_1 = 1$) és a második elemet ($a_2 = 1$), és minden további elem az előző kettő összegeként adódik.

a) Add meg a sorozat harmadik, ötödik és nyolcadik elemét! Ne feledkezz a jelölés használatáról!

Szorgalmi házi feladatnak ajánljuk:

b) Feleltesd meg az ABC betűit a Fibonacci-sorozat elemeinek valamilyen rendszer szerint, és készítsd el egy egymondatos szöveg titkosírását!

II. A számsorozatok

1. Ráhangolódás: „Gondoltam egy sorozatra...”

A tanár megad két számot: 2; 4. A csoportok minél többféle szabályt kitalálnak, ami szerint folytatni lehet. Nem adják meg a szabályt, csak a következő két-három elemet. Ennek alapján kell a többieknek kitalálni, hogy ki milyen szabályra gondolhatott. A játék végén azt is beszéljük meg, hogy akárhány elemet is adunk meg, mindig lehetne másképpen folytatni. De ha van egy szabályom, akkor az már meghatározza a sorozatot.

Csoporton belüli páros feladatmegoldásra ajánljuk a következő négyrészes feladatot, amely differenciálásra ad lehetőséget. A párokat egy gyengébb és egy jobb képességű gyerek alkossa. A jobb képességűek kapják a *b)* és a *c)* feladatokat. Amikor mindenki megoldotta a saját feladatát, akkor mondja el megoldását a párjának. Ezután az a) és d) valamint a c) és b) cseréljen feladatot, és a kiszámolt elemek segítségével adják meg a szomszédos elemek különbségét, és írják le az így nyert sorozatot.

2. Számsorozatok

2. FELADATLAP

1.

A) Páros munkában fogtok dolgozni. Oldjátok meg a tanárotok által megadott betűjelű feladatot!

Gondoltam egy sorozatra, és megadtam az első három elemét. Adjátok meg a hiányzó elemeket! Próbáljátok meg kitalálni, hogy mi lehet a szabályom?

Itt is beszéljük meg, hogy többféle szabály szerint is folytathatók a sorozatok. Három elemével nem adunk meg egyértelműen egy sorozatot. Például az a) feladatban a 4. elem $9 + 6 = 15$ is lehetne. Az n-edik tag felírását a jobb képességű gyerekektől várhatjuk.

a) 3; 6; 9 …

$a_1 = 3$ $\quad a_2 = 6$ $\quad a_3 = 9$ $\quad a_4 = 12$ $\quad a_{10} = 30$ $\quad a_{50} = 150$ $\quad a_n = 3n$

b) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \ldots$

$a_1 = \frac{1}{2}$ $\quad a_2 = \frac{1}{3}$ $\quad a_3 = \frac{1}{4}$ $\quad a_4 = \frac{1}{5}$ $\quad a_{10} = \frac{1}{11}$ $\quad a_{50} = \frac{1}{51}$ $\quad a_n = \frac{1}{n+1}$

c) $\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7} \ldots$

$a_1 = \frac{1}{3}$ $\quad a_2 = \frac{1}{5}$ $\quad a_3 = \frac{1}{7}$ $\quad a_4 = \frac{1}{9}$ $\quad a_{10} = \frac{1}{21}$ $\quad a_{50} = \frac{1}{101}$ $\quad a_n = \frac{1}{2n+1}$

d) 5; 9; 13…

$a_1 = 5$ $\quad a_2 = 9$ $\quad a_3 = 13$ $\quad a_4 = 17$ $\quad a_{10} = 41$ $\quad a_{50} = 201$ $\quad a_n = 4n+1$

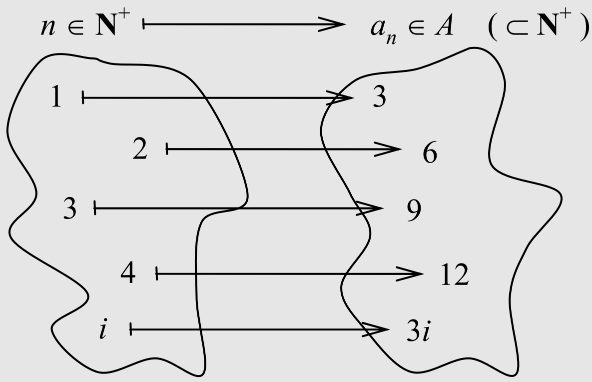
Amikor mindenki megoldotta a saját feladatát, akkor mondja el megoldását a párjának!

B) Ezután az a) és d) valamint a c) és b) cseréljen feladatot! A kiszámolt elemek segítségével add meg a szomszédos elemek különbségét, és írd ide az így nyert sorozatot!

a) 3; 3; 3; **b)** $\frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}$ **c)** $\frac{2}{15}; \frac{2}{35}; \frac{2}{63}$ **d)** 4; 4; 4

3. A sorozat, mint függvény

Ellenőrizzük az 1. feladat megoldásait közösen, majd táblai munkával kísérve Venn-diagramon ábrázoljuk az első sorozatot! Itt tisztázzuk, hogy függvényről van szó, mert egyértelmű hozzárendeléseket adtunk meg, ezért lehet használni a függvény jelölését. Azt is tisztázzuk, hogy a számsorozatok olyan függvények, amelyek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza!
De el kell mondani, hogy a sorozatoknál a szokásos jelölés az a_1, a_2, … a_n, … jelölés, ezért a többi feladatban már mi is ezt használjuk!
Vezessük be a hozzárendelés jelölését is: $f(n) = 3n$



A maradék három feladat Venn-diagramos ábrázolását a csoport tagjai osszák szét egymás között! Rajzolják meg és beszéljék meg a feladatok megoldását! A hozzárendelés szabályait közösen ellenőrizzük! $f(n) = \frac{1}{n+1}$; $f(n) = \frac{1}{2n+1}$; $f(n) = 4n+1$

TUDNIVALÓ:

A számsorozatok olyan függvények, melyek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza!

Csoportmozaik módszerrel dolgozzuk fel a következő négy feladatot. Osszák el a csoporton belül a gyerekek az A, B, C és D betűket. Vegyék figyelembe, hogy az A és B könnyebb, a C és D nehezebb feladatok.

2. a) Határozd meg a betűjelednek megfelelő sorozat első, második és ötödik elemét! (Használd a tanult jelöléseket!)
b) Ábrázold a sorozat első 5 elemét derékszögű koordinátarendszerben!
c) Válaszolj a kérdésekre!

A feladata: $f(n) = 2n - 3$
Igaz-e, hogy
$a_{100} = 197$ igaz
Az 1533 nem tagja a sorozatnak. hamis
A 2534 tagja a sorozatnak. igaz

B feladata: $f(n) = 3n + 1$
Igaz-e, hogy
$a_{42} = 127$ igaz
Az 3001 nem tagja a sorozatnak. hamis
A 727 tagja a sorozatnak. igaz

C feladata: $f(n) = |n+2|$

Igaz-e, hogy

$a_{28} = -30$ hamis

Az 502,6 nem tagja a sorozatnak. igaz

A 148 tagja a sorozatnak. igaz

D feladata: $f(n) = (n-2)^2$

Igaz-e, hogy

$a_{10} = 64$ igaz

Az 1024 nem tagja a sorozatnak. hamis

A 400 tagja a sorozatnak. igaz

Miután mindenki megoldotta a saját feladatát, ismertesse azt a csoporton belül. A kérdésekre adott válaszokat –indokolással– közösen is beszéljük meg csoportforgó módszerrel!

3.

a) Add meg a négyzetszámok sorozatának első tíz elemét! (Vagyis az $f(n) = n^2$ sorozatét.)

1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100

b) Vond ki az egymást követő elemeit egymásból, vagyis képezd a különbségsorozatot! Mit figyeltél meg?

3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19 vagyis a páratlan számok sorozatát kapjuk

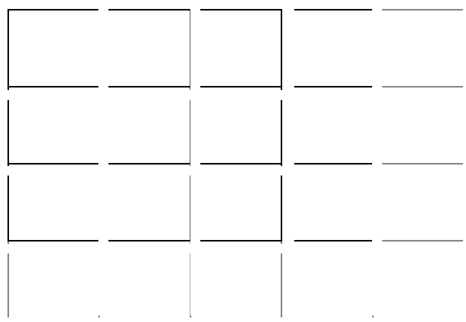
III. A számtani sorozat

1. Számtani sorozat bevezetése egy hétköznapi probléma megoldása kapcsán

A következő feladatot párban oldják meg a gyerekek, és a csoport két párja egyeztesse a kapott eredményt.

3. FELADATLAP

1. Új család kicseréli régi bútorait. Új ruhásszekrényt szeretnének, de attól félnek, hogy a szobát a szekrény látványa látszólag még kisebbé teszi. A lakberendező azt ajánlja, hogy olyan szekrényt csináltassanak, amelynek tolóajtói vannak, és ezeket az ajtókat kívül egybevágó négyzet alakú tükrökkel fedjék be úgy, hogy a kis tükörlapokat lécek határolják.



A mintából jól látható, hogy az első sorban az első négyzethez 4 db léc, és minden következőhöz 3 db léc szükséges, és minden további sorban az elsőhöz három, a következőkhöz 2 db léc kell. A szükséges lécek számát kell meghatározni.
Rajzoljátok le, és számítsátok ki, hogy hány léc kell

a) az első sorba, ha egy négyzetből, ha két négyzetből, ha három illetve ha n négyzetből áll!

b) a második sorba, ha egy négyzetből, ha két négyzetből, ha három illetve n négyzetből áll!

c) a harmadik sorba, ha egy négyzetből, ha két négyzetből, ha három illetve n négyzetből áll!

Írjátok le a kapott adatokat a jelölések használatával!

Első sor:	$a_1 = 4$	$a_2 = 7$	$a_3 = 10$	$a_n = 4 + (n-1) \cdot 3$
Második sor	$a_1 = 3$	$a_2 = 5$	$a_3 = 7$	$a_n = 3 + (n-1) \cdot 2$
Harmadik sor	$a_1 = 3$	$a_2 = 5$	$a_3 = 7$	$a_n = 3 + (n-1) \cdot 2$

d) Soronként hány darab tükörlap lesz, ha a lécek 20 cm hosszúak, és a szekrény szélessége 2,2 méter? 11

e) Hány sor fér el, ha a szekrény magassága 2,6 méter? 13

f) Soronként hány lécre van szükség? az első sorban 43 db, a továbbiakban 23 db

g) Összesen hány lécre van szükség? 310 db

Közösen beszéljük meg: ha soronként vizsgáljuk a tükörlapokhoz szükséges lécek számát, akkor olyan sorozatot kapunk, amelyben

az első sorban

$a_1 = 4$ $a_2 = 7$ $a_3 = 10$ $a_4 = 13$ $a_{11} = 33$

a második sorban

$a_1 = 3$ $a_2 = 5$ $a_3 = 7$ $a_4 = 9$ $a_{11} = 23$

Stb.

Minden sorra az érvényes, hogy az első elemtől kezdve a számok ugyannyival nőnek, az első sorban hárommal, minden továbbiban kettővel. Azt is mondhatjuk, hogy a szomszédos tagok különbsége 3 illetve 2. Az ilyen sorozatokat számtani sorozatnak nevezzük.

2. Meghatározások, összefüggések

TUDNIVALÓ:

Számtani sorozatnak nevezzük az olyan sorozatot, amelyben a második tagtól kezdve minden tagot úgy kapunk meg, hogy a sorozat előző tagjához egy – a sorozatra jellemző – állandó számot hozzáadunk. A második tagtól kezdve bármelyik tagból az előző tagot kivonva a különbség állandó.

Egy számtani sorozatot az első elemével (a_1) és a szomszédos elemek különbségével adunk meg. A különbséget d-vel jelöljük, és differenciának mondjuk – ez a szó latinul különbséget jelent.

A következő feladatsornak az a célja, hogy a gyerekek megtapasztalják a számtani sorozat bizonyos jellemzőit egy konkrét esetben. A kérdéseket diákkvártett formájában dolgozzuk fel, és minden gyerek írja le a válaszokat a füzetébe!

2. Egy számtani sorozat első eleme 5, differenciája 3.

a) Határozzátok meg a negyedik elemét! 14

b) Határozzátok meg a 10. elemét! Milyen módszerrel számoltatok? 32

c) Írjátok fel a sorozat első 8 elemét! 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23; 26

d) Keressetek olyan elempárokat, amelyek különbsége azonos! Mit tapasztaltok?
Szomszédos, vagy minden második, vagy minden harmadik...

e) Keressetek minél több olyan elempárt, amelyeknek az összege 31! Mit tapasztaltatok?
14+17; 11+20; 8+23; 5+26.

f) Hogyan lehetne kiszámolni a 8 szám összegét a legegyszerűbben? 31-et néggyel szorozva.

g) Keressetek olyan elempárokat, amelyek összege megegyezik az ötödik elem kétszeresével! Mit tapasztaltatok?
Az ötödik elemtől szimmetrikusan elhelyezkedő két-két elem összege.

Összegezzük a tapasztalatokat (az osztály képességétől függően szöveggel vagy a képletek használatával):

TUDNIVALÓ:

Egy számtani sorozat bármely sorszámú elemét ki tudjuk számolni úgy, hogy a sorszámának értékét eggyel csökkentjük, ezt megszorozzuk a differenciával, és a szorzatot hozzáadjuk az első elemhez.

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

A számtani sorozat első és utolsó elemének összege, második és utolsó előtti elemének összege … állandó.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots$$

Például az első 8 elem összegét úgy számolhatjuk ki legegyszerűbben, hogy az első és utolsó elem összegét (31) megszorozzuk a 8 felével.

Egy sorozat első *n* elemének összegét úgy számolhatjuk ki legegyszerűbben, hogy az első és az *n*. elem összegének a felét (számtani közepüket) megszorozzuk az *n*-nel.

A számtani sorozat bármely (elsőtől különböző) elemét megkaphatjuk úgy is, hogy a tőle szimmetrikusan elhelyezkedő két elem átlagát (számtani közepét) vesszük.

Feladhatjuk a gyerekeknek, hogy nézzenek utána, Gauss gyermekkorában milyen történet fűződött ehhez az összefüggéshez. (lásd: Sain Márton: Matematikatörténeti ABC, vagy a 7. évfolyamos munkafüzetükben)

3. Gyakorlás

Házi feladatnak ajánljuk:

4. FELADATLAP

1. Számítsd ki a sorozatok kérdezett adatait!

a) $a_1 = 6$, $d = -3$, $a_8 = ?$ –15

b) $a_1 = \frac{3}{4}$, $d = 0{,}5$, $a_{10} = ?$, mennyi az első 10 elem összege? 5,25; 30

c) $a_2 = -7$, $d = 4$, $a_1 = ?$, mennyi az első 12 elem összege? –11; 132

A következő órán százalékszámításos feladatok lesznek, ezért feltétlenül szükségesnek tartjuk, hogy a gyerekek átismételjenek néhány százalékszámítással kapcsolatos ismeretet. Ezeket a feladatokat a következő óra elején mindenképp beszéljük meg!

2. Melyik a nagyobb?

a) 25 000-nek a 20%-kal megnövelt értéke vagy 24 000-nek a 30%-kal megnövelt értéke?
30 000 és 31 200

b) 120 000-nek a 15%-kal csökkentett értéke vagy 80 000-nek 30%-kal megnövelt értéke?
102 000 és 104 000

c) A hűtőgépek értéke az évszakoktól függően változik. Nyáron bizonyos százalékkal emelkedik, télen csökken az ára. Az Eszkimó hűtőgép 78 000 Ft volt ősszel. Télen ezt 15%-kal csökkentették, majd tavasz végén a téli árat 22%-kal megemelték. Számítsd ki, hogy mennyibe került télen, illetve nyáron a hűtőgép! Hány százalékkal változott az ár összességében?
télen: 66 300, nyáron: 80 886 változás: +3,7%

IV. A mértani sorozat

1. Ráhangolódás

Frontálisan, táblai rajzzal kísérve beszéljük meg a mértani sorozat fogalmát előkészítő játékot. A játék: Képzeljük el, hogy a gyerekek egy viccet küldenek („Hogyan kell nyulat fogni? Utánozni kell a répa hangját!”) SMS-ben egymásnak, és a tanár ennek a lépéseit regisztrálja a táblán fadiagram segítségével. (Ezt a gyerekek is írják a füzetükbe!) A szabály: az első küldő a tanár, aki megnevez két diákot az osztályból, akinek küldi az üzenetet. Mindenki, aki megkapta az üzenetet, két új nevet mond, akiknek továbbítja azt (a tanár felírja a neveket a táblára a fadiagram következő pontjaiba).
A játék addig tart, amíg elvileg minden gyerek megkapja az SMS-t. Az osztálylétszámtól függően lesznek olyan gyerekek, akik már nem tudnak osztályon belül új nevet mondani. Ők bárkinek küldhetik az osztályon kívül is az üzenetet.
Határozzuk meg, és írjuk fel a táblára, hogy lépésenként, hány SMS ment!

1. lépés: 2
2. lépés: $4 = 2 \cdot 2$
3. lépés: $8 = 4 \cdot 2$
4. lépés: $16 = 8 \cdot 2$

Ha az egész iskola részt venne a játékban, akkor a következő lépésben hány SMS indulna? És a hatodikban, hetedikben stb.?
Alkalmazzuk a tanult jelöléseket!

Első lépés: 2 db SMS, tehát	$a_1 = 2$
második lépés: 2 · 2 db SMS, tehát	$a_2 = 2 \cdot 2 = 4$
és így tovább:	$a_3 = 4 \cdot 2 = 8$
	$a_4 = 8 \cdot 2 = 16$
	$a_5 = 16 \cdot 2 = 32$

Mondjuk el, hogy ez egy mértani sorozat, és hívjuk fel a figyelmet a sorozat jellegzetességére: az első elemtől kezdve minden további elemet úgy kaptunk, hogy az előzőt kettővel megszoroztuk! Ezt rögzítsük a füzetbe is! Beszéljük meg azt is, hogy mi a különbség a számtani sorozat és e sorozat között!

2. Mértani sorozat bevezetése gyakorlati példákkal

A következő két feladatot páros munkára ajánljuk a csoport 2-2 párja számára.

5. FELADATLAP

1.

a) Bizsuék betesznek a bankba 100 000 Ft-ot évi 10%-os kamatra. Egy év elteltével mennyi pénzük lenne, ha év közben nem vennénk ki belőle? $a_1 =$

Ezt az összeget még egy további évre a bankban hagyják ugyanolyan kamatra. Mennyi lesz a pénzük a második év végén? $a_2 =$

És a harmadik év elteltével? $a_3 =$

És négy év után? $a_4 =$

b) A „Holnap Zrt." 5 000 000 Ft-ért autót vásárolt. A cég könyvelője minden év végén kiszámolja a gépkocsi értékét, mert az a használat miatt évente 20%-kal csökken. Egy év elteltével mennyi lesz az értéke? $b_1 =$

Továbbra is ezt az autót használják. Mennyi lesz az értéke két év elteltével? $b_2 =$

És a harmadik év végén? $b_3 =$

És négy év után? $b_4 =$

Ha a párok végeztek saját feladatukkal, ismertessék azt csoporton belül.
Amikor elkészültek, táblai munkával kísérve beszéljük meg a megoldás módját.

	Vagyon	autó értéke
1. lépés	$a_1 = 110000$	$b_1 = 4000000$
2. lépés	$a_2 = 110000 \cdot 1,1 = 121000$	$b_2 = 4000000 \cdot 0,8 = 3200000$
3. lépés	$a_3 = 121000 \cdot 1,1 = 133100$	$b_3 = 3200000 \cdot 0,8 = 2560000$
4. lépés	$a_4 = 133100 \cdot 1,1 = 146410$	$b_4 = 2560000 \cdot 0,8 = 2048000$

Mondjuk el, hogy ennek a két feladatnak a megoldása is mértani sorozathoz vezetett. Pontosítsuk a mértani sorozat fogalmát!

3. Meghatározások, összefüggések

TUDNIVALÓ:

Mértani sorozatnak nevezzük az olyan számsorozatot, amelyben a második tagtól kezdve minden tagot úgy kapunk meg, hogy a sorozat előző tagját egy – a sorozatra jellemző– állandó számmal szorozzuk. Így a szomszédos tagok hányadosa ugyanaz a szám. Jelölés: a_1 a sorozat első eleme, q a sorozatra jellemző állandó.

Például:

Az SMS küldésnél $a_1 = 2$, $q = 2$

A bankos példánál $a_1 = 110000$, $q = 1,1$

Az autós feladatnál $a_1 = 4000000$, $q = 0,8$

A következő feladatokat önálló munkára ajánljuk. Az ellenőrzés párokban vagy csoportokban történhet.

2. Válogasd szét az alábbi sorozatokat aszerint, hogy számtani, mértani, egyik sem vagy mindkettő! A számtani sorozatoknál add meg a differenciát és a mértani sorozatoknál a hányadost! Képezzük a különbség, valamint a hányados sorozatokat! Mit veszünk észre?

a) –2; 5; 12; 19; … számtani $d = 7$

b) 3; 12; 48; 192; ... mértani $q = 4$

c) -1; 1; -1; 1 … mértani $q = -1$

d) 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13… egyik sem (Fibonacci)

e) 1; 3; 7; 13; … egyik sem

f) 3; 3; 3; 3; … mindkettő $d = 0$ vagy $q = 1$

g) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$ egyik sem

h) $\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{3}{8}; -\frac{3}{16}; \ldots$ mértani $q = -\frac{1}{2}$

i) 1; 12; 123; 1234; … egyik sem

j) $\frac{2}{5}; \frac{4}{25}; \frac{8}{125}; \frac{16}{625}; \ldots$ mértani $q = \frac{2}{5}$

k) 0,3; 0,9; 1,5; 2,1;… számtani $d = 0{,}6$

3. Adott egy számsorozat első két eleme: 2 és 6.
Folytasd a sorozatot a megadott szabály szerint további három elemmel!
a) Legyen számtani sorozat! 2; 6; 10; 14; 18;…
b) Legyen mértani sorozat! 2; 6; 18; 54; 162; …
c) Egyik se legyen! Például: 2; 6; 2; 6; 2; … vagy 2; 6; 9; 11; 12; … stb.
d) Ábrázold mindhárom sorozatot külön koordinátarendszerben!

4. Adott a mértani sorozat első eleme és hányadosa. Számold ki a megadott elemet!
a) $a_1 = 4$, $q = 3$, $a_5 = ?$ 324
b) $a_1 = -3$, $q = \frac{1}{2}$, $a_6 = ?$ –0,09375

5.
a) Adottak egy számtani sorozat elemei: $a_3 = 10$, $a_5 = 18$. Számold ki a negyedik elemet, a különbséget és az első elemet! $a_4 = 14$; $d = 4$; $a_1 = 2$
b) Adottak egy mértani sorozat elemei: $a_3 = 18$, $a_4 = 54$. Számold ki az ötödik elemet, a hányadost és az első elemet! $a_5 = 162$; $q = 3$; $a_1 = 2$

V. Szöveges feladatok a sorozatok gyakorlati alkalmazására

1. Gyakorlati alkalmazás

Vegyesen oldunk meg számtani és mértani sorozatra vezető egyszerű szöveges feladatokat. A gyerekek párban dolgozzanak, és csoporton belül egyeztessék az eredményeket! A megoldásokhoz ajánljuk a számológép használatát.

6. FELADATLAP

1. Pisti CD-állványa trapéz alakú. A legalsó sorban 20 db CD fér el. Minden további sorba 2-vel kevesebbet lehet rakni, mint amennyi az alatta levőben van. A CD-tartó hatsoros. Hány CD van a legfelső sorban? Hány CD van összesen az állványon?
Megoldás: A hatsoros CD-tartó legfelső sorában 10-zel kevesebb CD van, mint az elsőben. Így itt 10 van, és az egészben összesen 90 db van.

2. Takarékoskodóék eladják használt autójukat, és a kapott pénzt - 1 200 000 Ft-ot - beteszik a bankba két évre lekötve, évi 9%-os kamatra. Mennyi pénzt vehetnek ki két év múlva?
1 200 000 · 1,09 · 1,09=1 425 720 Ft.

3. A Napsugár bevásárlóközpont mélygarázsa 5 szintes. A második szinten 210 parkolóhely van, és felfelé haladva minden további szinten 30-cal több. Hány autó fér el a legalsó és a legfelső szinten? Összesen hány autó kaphat helyet a parkolóházban?
A legalsó szinten 180 hely van. Az ötödiken 300 hely van. Az egészben 1 200 hely van

4. Egy kezdő mérnök az első munkahelyén a következő fizetési ajánlatokat kapja:
A kezdő fizetése havi 120 000 Ft, és ha elégedettek a munkájával, akkor ezt az összeget negyedévente 6 000 Ft-tal megemelik.
I. negyedéves kereset: 3 · 120 000Ft, II. negyedéves kereset: 3 · 126 000Ft, III. negyedéves: 3 · 132 000Ft. IV. negyedéves: 3 · 138 000 Ft-ot kap az utolsó negyedévben. Tehát az egész évi kereset: 1 548 000Ft.

a) A kezdő fizetése havi 120 000 Ft, és ha elégedettek a munkájával, akkor ezt az összeget negyedévente 5%-kal megemelik.
I. negyedéves kereset: 3 · 120 000Ft, II. negyedéves kereset: 3 · 126 000Ft, III. negyedéves: 3 · 132 300Ft. IV. negyedéves: 3 · 138 915Ft-ot kap az utolsó negyedévben. Tehát az egész évi kereset: 1 551 645Ft.

b) A munkaszerződést 1 éves időtartamra kötik. Mit ajánlanál, melyik ajánlatot válassza? És ha két évre szerződnek vele?

5. a) Melyik a századik pozitív páros szám? 200

b) Mennyi az első száz darab pozitív páros szám összege? 10 100

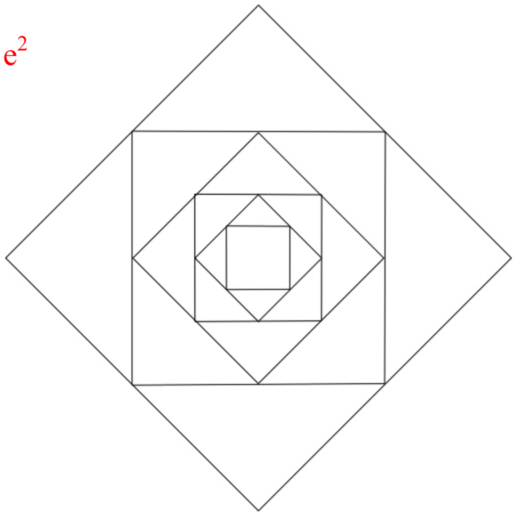
6. Egytől kezdve egymás után leírjuk azokat a számokat, amelyek 3-mal osztva egy maradékot adnak.

a) Melyik szám áll a századik helyen a sorban? 298

b) Hányadik helyen áll a 137? Ez a szám nincs a sorban.

c) Hányadik helyen áll a 163? 55

7. Mekkora a területe a rajzon látható legnagyobb négyzetnek, ha a legkisebb négyzet területe 1 e^2? 32 e^2



8. Mennyit kell fizetni a kertésznek a kert felásásáért, ha az első óra munkadíja 4 000 Ft, és minden továbbié 200 Ft-tal kevesebb. A munka 10 órán át tart.
A tizedik órában 2 200 az óradíj, összesen 31 000Ft.

9. Egy üzletet 5 nap múlva felszámolnak. A tulajdonos felméri az árukészlet értékét, mely 800 000 Ft. Annak érdekében, hogy megszabaduljon az összes árutól, naponta 20%-kal csökkenti az összes megmaradt termék árát az előző napi árhoz képest. Mivel egyáltalán nem

volt vevője az öt nap alatt, az új tulajdonos felajánlja, hogy az árukészletet a csökkentett áron megvásárolja. Mennyit kell fizetnie?
$800\,000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 262\,144$Ft.

10. Egy 10 soros mozi nézőterének első sorában 10 szék van. Minden további sorban kettővel több hely van. Hányan ülhetnek le a 10. sorban, és mekkora a mozi befogadóképessége?

A 10. sorban $10 + 9 \cdot 2 = 28$, összesen 190 férőhely van.

VI–VII. Felmérés

Amennyiben a tanár úgy ítéli meg, hogy a dolgozat megírása előtt a gyerekeknek még szüksége van egy óranyi gyakorlásra, akkor a modulok feladatgyűjteményéből válogathat erre a célra példákat. A felmérő A csoportja egyszerűbb, míg a B csoportja nehezebb feladatokat tartalmaz.

FELMÉRŐ Név:______________________

8. évfolyam, Függvények, sorozatok

A CSOPORT

1. Ábrázold koordinátarendszerben a következő függvények grafikonját!

a) $f(x) = 2x - 3$ **b)** $f(x) = -|x|$

Döntsd el a következő pontokról, hogy rajta vannak-e a függvények grafikonján!

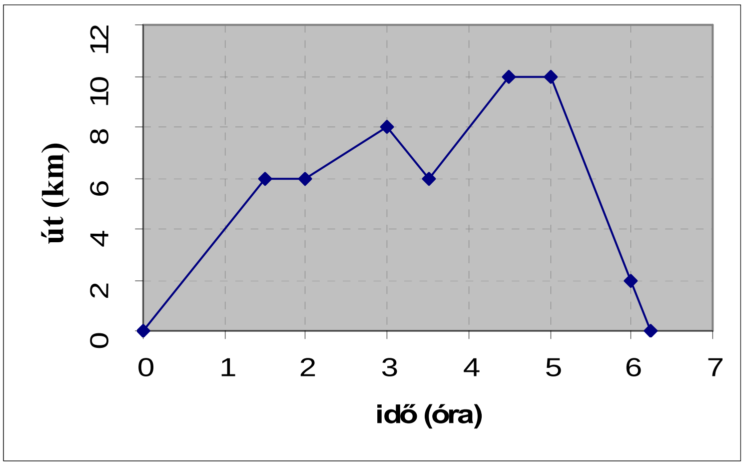
$A(1; -1)$; $B(0; 0)$; $C(2; 1)$; $D(-1; -1)$; $E(0; -1)$

2. Adott két függvény: $f(x) = x^2$ és $g(x) = 4x - 3$

a) Ábrázold a függvényeket közös koordinátarendszerben, és add meg a metszéspontjuk koordinátáit!

b) Grafikusan oldd meg az $x^2 = 4x - 3$ egyenletet!

3. Miki kirándulni megy. A találkozóhely Dobogókőn van. Reggel 8-kor indult, és ekkor kezdtük megfigyelni a mozgását. Az origó tehát az indulás helyét és idejét jelenti.



a) Állapítsd meg, hogy mikor állt meg először pihenni, és hány kilométerre volt ekkor az indulástól! Mennyi ideig pihent?

b) Mely időszakban (hánytól hányig) volt a legnagyobb a sebessége?

c) Az indulástól számított első három órában hány kilométert tett meg?

d) Milyen hosszú volt a teljes túra útvonala?

4) Egy mozi nézőterén 10 sor van. Minden sorban kettővel kevesebben férnek el, mint az előzőben. Az első sorban 30 hely van.

a) Milyen sorozat ez?

b) Írd le a sorozat jellemzőit a tanult jelölésekkel!

c) Hány ember ülhet az utolsó sorban?

d) Hány ember fér el a nézőtéren?

FELMÉRŐ Név:____________________

8. évfolyam, Függvények, sorozatok

B CSOPORT

1. Ábrázold koordinátarendszerben a következő függvények grafikonját!

a) $f(x) = -0{,}75x + 1$ **b)** $f(x) = |x - 1|$

Döntsd el a következő pontokról, hogy rajta vannak-e a függvények grafikonján!

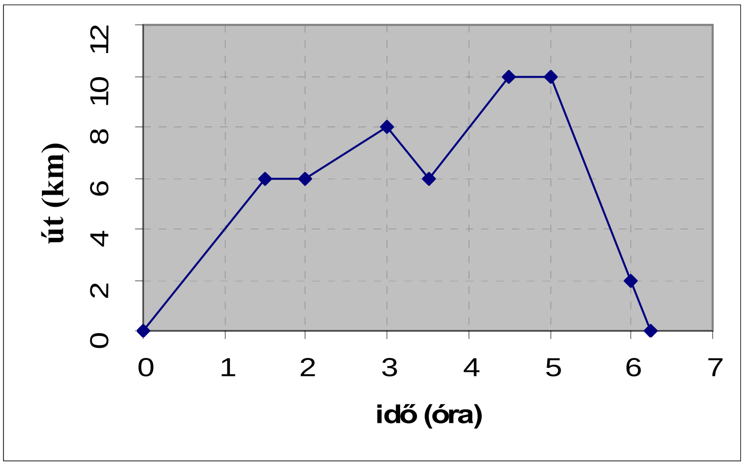
$A(1;\ 0)$; $B(0;\ 1)$; $C(2;\ -0{,}5)$; $D(-1;\ 2)$; $E(4;\ -2)$

2. Adott két függvény: $f(x) = (x-2)^2$ és $g(x) = 3x - 2$

a) Ábrázold a függvényeket közös koordinátarendszerben, és add meg a metszéspontjuk koordinátáit!

b) Grafikusan oldd meg az $(x-2)^2 = 3x - 2$ egyenletet!

3. Miki kirándulni megy. A találkozóhely Dobogókőn van. Reggel 8-kor indult, és ekkor kezdtük megfigyelni a mozgását. Az origó tehát az indulás helyét és idejét jelenti.



a) Állapítsd meg, hogy mikor állt meg először pihenni, és hány kilométerre volt ekkor az indulástól! Mennyi ideig pihent?

b) Mely időszakban (hánytól hányig) volt a legnagyobb a sebessége?

c) Az indulástól számított első három órában hány kilométert tett meg?

d) Milyen hosszú volt a teljes túra útvonala?

4. Egy mozi nézőterén 10 sor van. Minden sorban kettővel kevesebben férnek el, mint az előzőben. A negyedik sorban 24 hely van.

a) Milyen sorozat ez?

b) Írd le a sorozat jellemzőit a tanult jelölésekkel!

c) Hány ember ülhet az első sorban?

d) Hány ember ülhet az utolsó sorban?

e) Hány ember fér el a nézőtéren?

5. Írd át a következő szövegeket algebrai kifejezésekkel!

a) Minden számhoz hozzárendeljük a kétszeresét.

b) Minden számhoz hozzárendeljük a négyzeténél eggyel nagyobb értéket.

c) Minden számhoz hozzárendeljük a két szomszédjának az összegét.

d) Minden számhoz hozzárendeljük a két szomszédjának a különbségét.

FELMÉRŐ (MEGOLDÁSOK) Név:____________________

8. évfolyam, Függvények, sorozatok

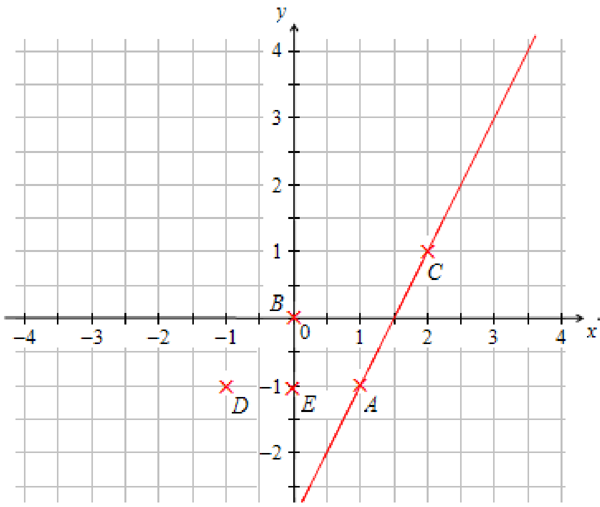
A CSOPORT

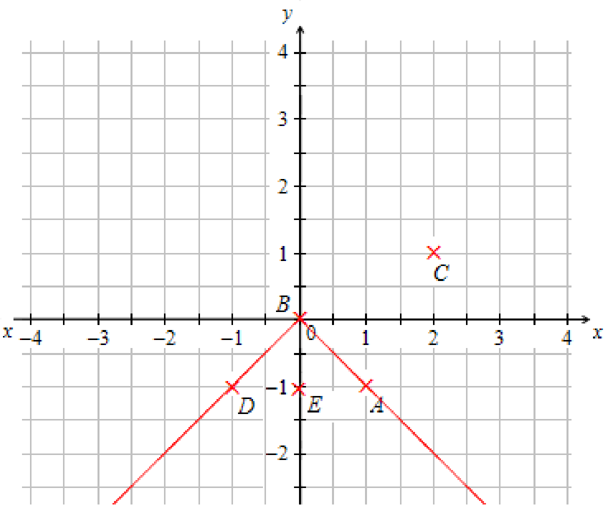
1. Ábrázold koordinátarendszerben a következő függvények grafikonját!

a) $f(x) = 2x - 3$ **b)** $f(x) = -|x|$

Döntsd el a következő pontokról, hogy rajta vannak-e a függvények grafikonján!

$A(1; -1)$; $B(0; 0)$; $C(2; 1)$; $D(-1; -1)$; $E(0; -1)$





az a)-n rajta van az A; C; a b)-n rajta vannak az A; B; és D pontok. Az E egyiken sincs rajta.

grafikononként 4-4 pont, a helyesen megállapított pontokért 1-1 pont: **14 pont**

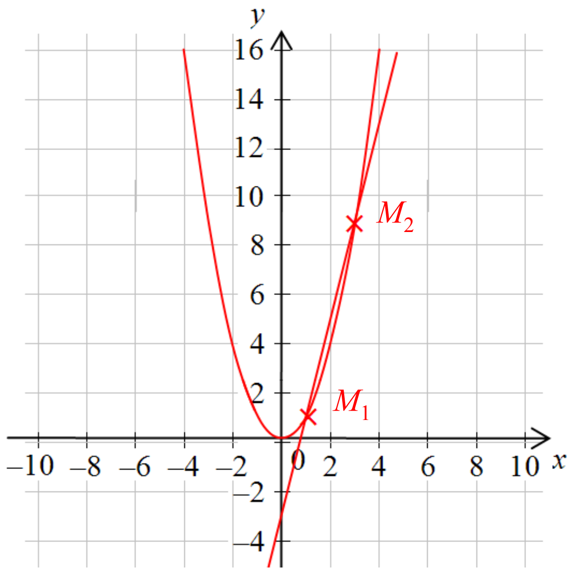
2. Adott két függvény: $f(x) = x^2$ és $g(x) = 4x - 3$

a) Ábrázold a függvényeket közös koordinátarendszerben, és add meg a metszéspontjuk koordinátáit!

$M_1(1; 1)$; $M_2(3; 9)$

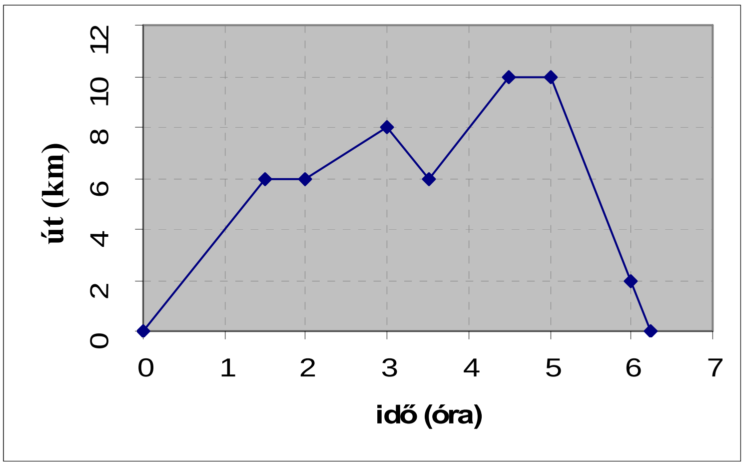
b) Grafikusan oldd meg az $x^2 = 4x - 3$ egyenletet!

$x = 1$ és $x = 3$



grafikonok 4-4 pont, helyes metszéspontok 2-2 pont, egyenlet megoldása 2-2 pont: **16 pont**

3. Miki kirándulni megy. A találkozóhely Dobogókőn van. Reggel 8-kor indult, és ekkor kezdtük megfigyelni a mozgását. Az origó tehát az indulás helyét és idejét jelenti.



a) Állapítsd meg, hogy mikor állt meg először pihenni, és hány kilométerre volt ekkor az indulástól! Mennyi ideig pihent?
1,5 óra múlva; 6 km-re; fél órát

b) Mely időszakban (hánytól hányig) volt a legnagyobb a sebessége?
13 órától 14 óra 15 percig

c) Az indulástól számított első három órában hány kilométert tett meg?
8 km-t

d) Milyen hosszú volt a teljes túra útvonala? 24 km (10 órától 11.30-ig „csavargott" 4 km-t!)

minden kérdésre adott helyes válaszért 2-2 pont: **8 pont**

4) Egy mozi nézőterén 10 sor van. Minden sorban kettővel kevesebben férnek el, mint az előzőben. Az első sorban 30 hely van.

a) Milyen sorozat ez?
számtani

b) Írd le a sorozat jellemzőit a tanult jelölésekkel!
$a_1 = 30,\ d = -2,\ n = 10$

c) Hány ember ülhet az utolsó sorban?
12

d) Hány ember fér el a nézőtéren?
210

az a) és b) részre 2-2 pont, a c) és d) részre 4-4 pont: **12 pont**

FELMÉRŐ (MEGOLDÁSOK) Név:________________________

8. évfolyam, Függvények, sorozatok

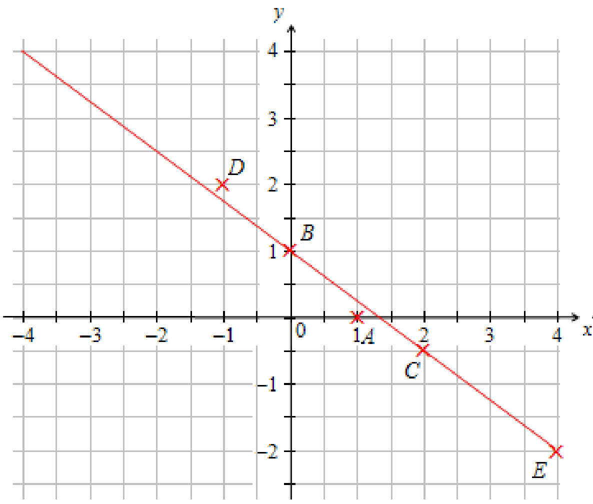
B CSOPORT

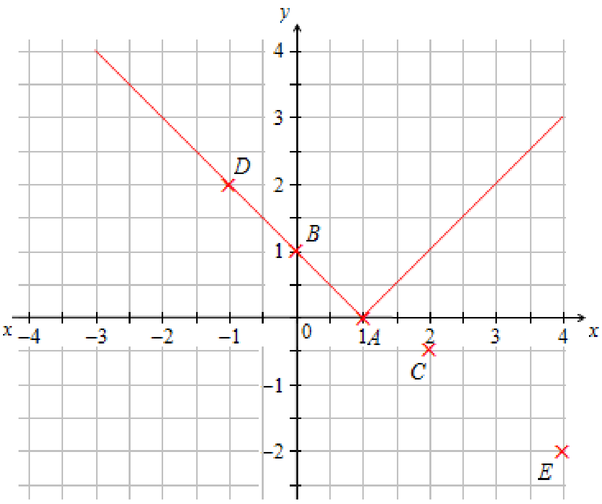
1. Ábrázold koordinátarendszerben a következő függvények grafikonját!

a) $f(x) = -0{,}75x + 1$ **b)** $f(x) = |x - 1|$

Döntsd el a következő pontokról, hogy rajta vannak-e a függvények grafikonján!

$A(1;\ 0)$; $B(0;\ 1)$; $C(2;\ -0{,}5)$; $D(-1;\ 2)$; $E(4;\ -2)$





az a)-n rajta van a *B; C; E* a b)-n pedig az *A; B;* és *D* pont.

grafikononként 4-4 pont, a helyesen megállapított pontokért 1-1 pont: **14 pont**

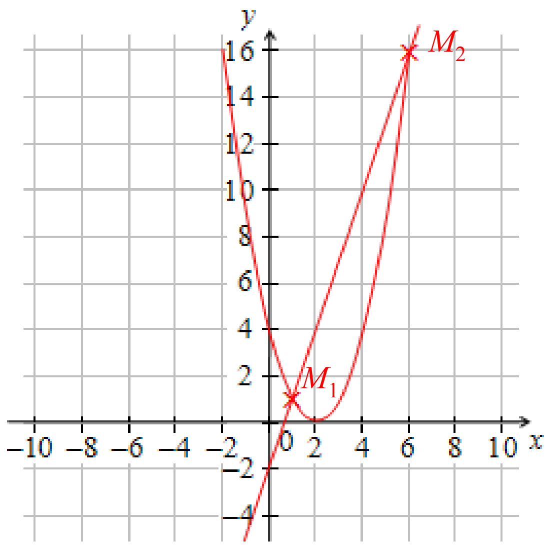
2. Adott két függvény: $f(x) = (x-2)^2$ és $g(x) = 3x - 2$

a) Ábrázold a függvényeket közös koordinátarendszerben, és add meg a metszéspontjuk koordinátáit!

$M_1(1;\ 1)$; $M_2(6;\ 16)$

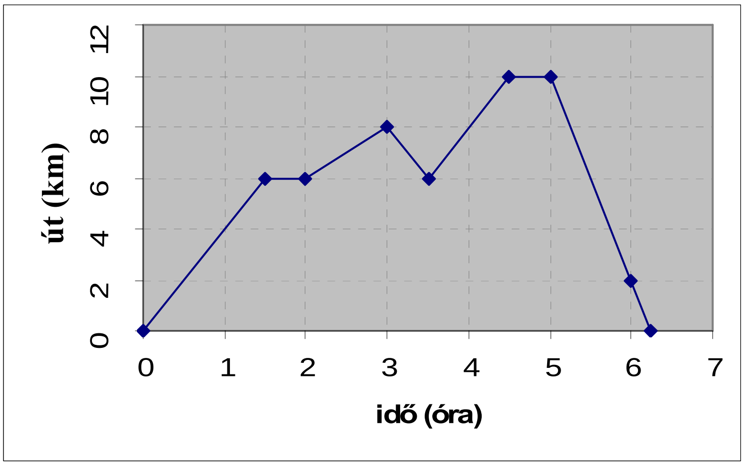
b) Grafikusan oldd meg az $(x-2)^2 = 3x - 2$ egyenletet!

$x = 1$ és $x = 6$



grafikonok 4-4 pont, helyes metszéspontok 2-2 pont, egyenlet megoldása 2-2 pont: **16 pont**

3. Miki kirándulni megy. A találkozóhely Dobogókőn van. Reggel 8-kor indult, és ekkor kezdtük megfigyelni a mozgását. Az origó tehát az indulás helyét és idejét jelenti.



a) Állapítsd meg, hogy mikor állt meg először pihenni, és hány kilométerre volt ekkor az indulástól! Mennyi ideig pihent?
1,5 óra múlva; 6 km-re; fél órát

b) Mely időszakban (hánytól hányig) volt a legnagyobb a sebessége?
13 órától 14 óra 15 percig

c) Az indulástól számított első három órában hány kilométert tett meg?
8 km-t

d) Milyen hosszú volt a teljes túra útvonala? 24 km (10 órától 11.30-ig „csavargott” 4 km-t!)

minden kérdésre adott helyes válaszért 2-2 pont: **8 pont**

4. Egy mozi nézőterén 10 sor van. Minden sorban kettővel kevesebben férnek el, mint az előzőben. A negyedik sorban 24 hely van.

a) Milyen sorozat ez?
számtani

b) Írd le a sorozat jellemzőit a tanult jelölésekkel!
$a_4 = 24$, $d = -2$, $n = 10$

c) Hány ember ülhet az első sorban?
30

d) Hány ember ülhet az utolsó sorban?
12

e) Hány ember fér el a nézőtéren?
210

az a) és b) részre 2-2 pont, a c) és d) részre 4-4 pont: **12 pont**

5. Írd át a következő szövegeket algebrai kifejezésekkel!

a) Minden számhoz hozzárendeljük a kétszeresét.
$x \mapsto 2x$

b) Minden számhoz hozzárendeljük a négyzeténél eggyel nagyobb értéket.
$x \mapsto x^2 + 1$

c) Minden számhoz hozzárendeljük a két szomszédjának az összegét.
$x \mapsto 2x$

d) Minden számhoz hozzárendeljük a két szomszédjának a különbségét.
$x \mapsto 2$ vagy $x \mapsto -2$

az a), b), c) feladatokért 3-3 pont, a d) egy megoldásáért 3 pont, a másikért 2 pont: **14 pont**

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Határozd meg a képlettel megadott sorozatok első tíz elemét!

a) $a_n = 2n + 3$ **b)** $b_n = -n + 4$ **c)** $c_n = n^2 - 1$ **d)** $d_n = 1 - 0{,}8n$

a) 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17;19; 21; 23…
b) 3; 2; 1; 0; –1; –2; –3; –4; –5; –6…
c) 0; 3; 8; 15; 24; 35; 48; 63; 80; 99…
d) 0,2; –0,6; –1,4; –2,2; –3; –3,8; –4,6; –5,4; –6,2; –7

2. Igaz-e, hogy

a) $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ sorozat 7. tagja 29? hamis

b) $b_n = \frac{n^2 + 2n}{n}$ sorozat minden tagja egész szám? Átalakítva: $b_n = n + 2$ tehát igaz.

c) $c_n = \frac{n - 10}{n + 1}$ sorozat minden tagja törtszám? Hamis, mert n = 10 esetén 0 vagyis egész.

d) $d_n = \frac{3 - n}{n + 2}$ sorozat minden tagja pozitív szám? Hamis, mert csak a 3-nál kisebb számokra pozitív.

3. Egy feladat Fibonaccitól: Hány pár nyúlra szaporodik egy év alatt a kezdeti egy pár, ha a nyulak két hónap alatt válnak ivaréretté, és ezután minden pár minden hónapban egy új párnak ad életet? (Segítség: írd fel az egymást követő hónapokban a nyúlpárok számát! $a_1 = 1$ és $a_2 = 1$)
3. hónap: 2 pár, 4. hónap: 3 pár, 5. hónap: 5 pár, 6. hónap: 8 pár, 7. hónap: 13 pár, 8. hónap: 21 pár, 9. hónap: 34 pár, 10. hónap: 55 pár, 11. hónap: 89 pár, 12. hónap: 144 pár.

4. Egy húsztagú számtani sorozat első tagja 7, utolsó tagja 77. Mennyi a tagok összege?
840

5. Egy mértani sorozat 79. tagja 150, a 80. tagja 300. Mi a 82. tagja?
1200

6. Egy számtani sorozat első 5 tagjának összege 60. Mi a sorozat 3. tagja?
12

7. Egy számtani sorozat első 11 tagjának összege 11. Megállapítható-e ebből a sorozat valamelyik tagjának az értéke?
A hatodik tag éppen 1

8. Egy háromszög szögei számtani sorozatot alkotnak. Tudsz-e ebből következtetni a háromszög valamelyik szögének nagyságára?
Igen az egyik szöge 60°-os

9. Egy számtani sorozat 7. és 4. tagjának különbsége 15. Mi a 102. és a 97. tag különbsége?
25

10. Április 1.-jén a nap 5 óra 25 perckor kel, és a hónap folyamán naponta körülbelül 2 perccel korábban van napkelte. Hány órakor kel a nap április 22-én.
4 óra 43 perckor

11. Egy versenyen az első helyezett 6 000 Ft-ot, minden további helyezett 250 Ft-tal kevesebbet kapott. Hány versenyzőt jutalmaztak meg, ha az utolsó jutalma ugyanannyi, mint amennyivel kevesebbet kapott a negyedik helyezett a harmadiknál? Mennyi jutalmat osztottak ki?
24 főt jutalmaztak összesen 75 000 Ft-tal

12. Máté az örökségét meg akarta sokszorozni, ezért szerencsét próbált a kaszinóban. Sajnos egyetlen körben sem nyert, így egy este alatt elveszítette a teljes összeget. Már az első játéknál 1 000 Ft-ot, és minden további körben 1 500 Ft-tal többet veszített az azt megelőzőnél. Az utolsó tétje 53 500 Ft-volt. Hány kört játszott? Mennyi volt az öröksége?
36 kört játszott és 981 000 Ft volt az öröksége

13. A Teltkarcsú Lányok magazinja új fogyókúrás receptet közölt, melyben garanciát vállal arra, hogy bárki leadhatja testsúlyának két %-át havonta, ha betartja a diéta előírásait. Mekkora lesz a tömege annak a 80 kg-os embernek, aki 5 hónapig fogyókúrázik a recept szerint? (Használj számológépet!)
72,3 kg

14. Bizonyára ismered azokat a jókívánságokat tartalmazó e-maileket, melyeket kedves ismerőseidnek kell továbbítani. Katus készített egy ilyen üzenetet, amit másnap tovább is küldött 5 barátjának. Mindenki, aki megkapta ezt a levelet, másnap elküldte 5 ismerősének. Hány levelet küldtek az 4. napon? (Első nap az, amikor Katus elküldte az öt üzenetet.) Hány ilyen üzenet ment összesen az 4 nap alatt?
625, összesen: 780 db

15. Állítólag a sakkjáték feltalálója „szerény” ajándékot kért jutalmul a perzsa királytól. A sakktábla első négyzetére egy, a második négyzetére 2, a harmadik négyzetére 4 búzaszemet kért, és így tovább, minden további négyzetre kétszer annyi búzaszemet kért, mint az előzőre. Hány búzaszem jutott a tábla utolsó mezőjére? El bírja-e ezt vinni a hátán, ha egy búzaszem tömege 0,03 gramm.
(Érdekesség: valaki kiszámolta, hogy a játék feltalálásáért járó összes búza elszállításához 1 milliárd tehervonatra lenne szükség akkor, ha egy szerelvényre 56 vagont számítanak, és egy vagonba 10 000 kg tömegű búza fér.)
Az utolsó mezőre $1{,}844674407 \cdot 10^{19}$ db búzaszem jut, ez összesen $5{,}534023222 \cdot 10^{14}$ kg.