0862. MODUL

# HOZZÁRENDELÉSEK, FÜGGVÉNYEK

## Függvények grafikus ábrázolása, egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

KÉSZÍTETTE: BIRLONI SZILVIA ÉS HARSÁNYI ZSUZSA

# MODULLEÍRÁS

| | |
|---|---|
| **A modul célja** | A függvényszemlélet fejlesztése, hétköznapi életben, természettudományokban függvénykapcsolatok felismerése, jellemzése. A függvény értelmezési tartománya, értékkészlete, grafikonjának megjelenítése és vizsgálata. Elemi függvények ábrázolása, és egyszerű transzformálása. Egyenletek és egyenlőtlenségek grafikus megoldása. |
| **Időkeret** | 7 óra |
| **Ajánlott korosztály** | 8. osztály |
| **Modulkapcsolódási pontok** | *Tágabb környezetben:* mindennapi élet, statisztika, fizika, biológia, kémia.<br>*Szűkebb környezetben:* hozzárendelések, halmazok, koordinátarendszer, algebrai kifejezések, műveletek.<br>*Ajánlott megelőző tevékenységek:* hozzárendelések, pontábrázolás koordinátákkal, algebrai kifejezések átalakítása<br>*Ajánlott követő tevékenységek:* összetettebb függvények vizsgálata, és bonyolultabb függvénytranszformációk. |
| **A képességfejlesztés fókuszai** | *Számolás kompetencia:* helyettesítési érték számolása, műveletvégzés sorrendje.<br>*Mérés, becslés:* táblázatok, grafikonok vizsgálata, ill. készítése.<br>*Mennyiségi következtetés:* egyik mennyiség változása hogyan változtatja meg a hozzárendelt értékeket<br>*Szövegértés, problémamegoldás, metakognició:* gyakorlati problémák, feladatok a hétköznapi életben, ezek matematikai leírása, vizsgálata.<br>*Rendszerezés, kombinativitás:* módszeres próbálkozás.<br>*Dedukció, indukció:* szabályalkotás, szabályok alkalmazása konkrét esetekben. |

## AJÁNLÁS

Frontális, egyéni és csoportmunka vegyesen. A feldolgozás során sokszor ajánlottunk kooperatív módszereket. A pedagógus az osztály ismeretében rugalmasan kezelje ezeknek a módszereknek az alkalmazását. Természetesen más módszerek alkalmazása mellett is dönthet.

## TÁMOGATÓ RENDSZER

Hétköznapi életből gyűjtött példák függvényekre, írásvetítő, előre nyomtatott, különböző léptékű koordinátarendszer, feladatlapok. Készíttessük el a gyerekekkel az alapvető függvények görbéit átlátszó irattartó fóliára: koordinátarendszerre fektetve alkoholos filctollal rajzolják meg a grafikonokat (lineáris, másodfokú, abszolút érték, hiperbola), mindegyiket külön fóliára. Ezeket a továbbiakban függvény sémáknak nevezzük.

## ÉRTÉKELÉS

Az egyéni és csoportos munka során szóbeli értékelés, a téma végén értékelő feladatlap kitöltése.

# MODULVÁZLAT

| | Lépések, tevékenységek | Kiemelt készségek, képességek | Eszközök, Feladatok |
|---|---|---|---|
| **I. A grafikus ábrázolást gyakoroljuk derékszögű koordinátarendszerben** | | | |
| 1. | Ábrázolás és olvasás grafikonról | Absztrakciós készség | 1. feladatlap |
| 2. | A grafikon, mint ponthalmaz | Számolási készség | 2. feladatlap |
| **II. A lineáris függvény vizsgálata** | | | |
| 1. | A lineáris függvény általános képlete | Általánosítás, szabályalkotás | 3. feladatlap |
| 2. | Gyakorlás | | 4. feladatlap |
| **III. A másodfokú függvény** | | | |
| 1. | A másodfokú függvény | Számolási készség, elemzési készség | 5. feladatlap<br>1. tanári melléklet (1. kártyakészlet) |
| **IV. Az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény** | | | |
| 1. | Szöveges feladatok | Szövegértelmezés, szabályalkotás, számolási készség | 6. feladatlap |
| 2. | Általánosítás | | |
| 3. | Gyakorlás | | 7. feladatlap |

| V. Számok abszolút értéke, az $x \mapsto \lvert x \rvert$ függvény grafikonja | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Az abszolút érték fogalma, ismétlés | | 0861-es modul 4. tanári melléklet |
| 2. | Általánosítás, ábrázolás | | 8. feladatlap<br>2/a. tanári melléklet (2. kártyakészlet)<br>2/b. tanári melléklet (ellenőrző fólia) |
| 3. | Gyakorlás | | 9. feladatlap |

| VI. Függvény transzformáció – kitekintés | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Tapasztalatgyűjtés, általánosítás | | 10–11. feladatlap;<br>0861. 4. tanári mell. (koo-rendszer);<br>függvénygrafikonok sémái |

| VII. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Ráhangolódás: „függvény torpedó” | Számolási készség | |
| 2. | Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása | | 12. feladatlap |
| 3. | Tapasztalatok megfogalmazása, ellenőrzés diákkvártettel | | |

# A FELDOLGOZÁS MENETE

## I. A grafikus ábrázolást gyakoroljuk derékszögű koordinátarendszerben

### 1. Ábrázolás és olvasás grafikonról

Ráhangolódás: Minden gyerek írjon a füzetébe öt pontot, a koordináták megadásával. Írjuk fel a táblára az $f(x)=3x-4$, vagy az $y=3x-4$ képletet. A gyerekek válogassák ki a pontjaik közül azokat, amelyek rajta vannak a függvény grafikonján, azaz koordinátáik kielégítik az egyenlőséget.
Mondjuk el újra: A függvények grafikonjának ábrázolása – hasonlóan a táblázatok alapján készített grafikonokhoz – az $(x; f(x))$ értékpárokkal, mint koordinátákkal megadott pontok ábrázolását jelenti.
Önálló munkára ajánljuk a következő feladatokat. Hívjuk fel a gyerekek figyelmét arra, hogy a függvény grafikonjának ábrázolása előtt érdemes meghatározni az értelmezési tartományt. Ha úgy ítéljük meg, akkor az első feladat megoldása előtt elevenítsük fel, amit a grafikon pontjainak összeköthetőségéről tanultunk.

### 1. FELADATLAP

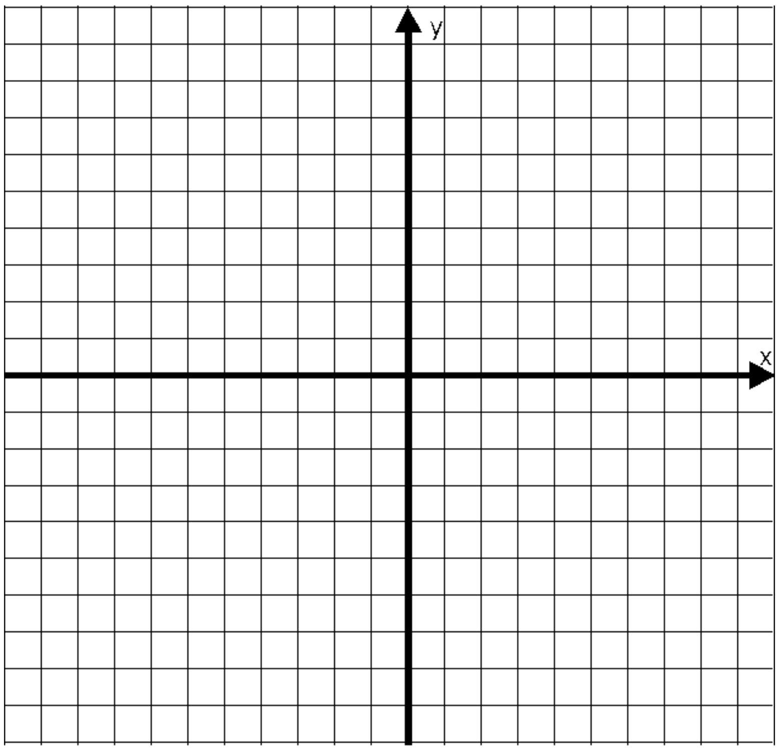
**1.** Ábrázold a függvényeket! Mielőtt összekötöd az ábrázolt pontokat, gondold meg, szabad-e!

**a)** $f(x)=2x+1$, az alaphalmaz és a képhalmaz is a természetes számok halmaza

A pontok nem köthetők össze, mert csak a természetes számokra értelmeztük a függvényt.

**b)** $f(x)=2x+1$, az alaphalmaz és a képhalmaz is a valós számok halmaza

A pontok összeköthetők, mert minden számra értelmeztük a függvényt.

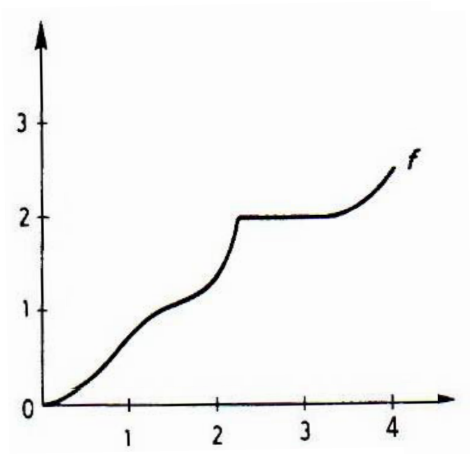



Döntsd el az állításokról, hogy igazak-e!

– Ha az $x$ értéke 5, akkor az $y$ értéke 11. i
– A (3; 8) koordinátájú pont rajta van az egyenesen. h
– Ha az $y = 17$, akkor $x = 8$. i
– Ha az $x = –2,5$, akkor $y = – 4$. i
– Ha az $y = –7$, akkor $x = 4$. h
– Ha egy pont a függvény grafikonján van, akkor koordinátái igazzá teszik az $y = 2x + 1$ egyenletet. i
– Ha egy pont nincs a függvény grafikonján, akkor koordinátái nem teszik igazzá az $y = 2x + 1$ egyenletet. i

Összefoglalva mondjuk ki: ha ábrázoljuk az $f(x) = 2x + 1$ függvényt, akkor a kapott egyenes pontjainak koordinátái kielégítik az $y = 2x + 1$ egyenletet.

**2.** Az ábrán az $f$ függvény grafikonját látod.
A grafikonról olvasd le, hogy
**a)** mennyi $f(3)$ 2
**b)** mennyi $f(4)$ 2,5
**c)** felveszi-e a függvény a 4 értéket nem
**d)** hol veszi fel a függvény az 1 értéket? ≈ 1,5-nél




## 2. A grafikon, mint ponthalmaz

A csoportmozaik módszerét alkalmazva gyakoroljuk különböző függvények grafikonjának ábrázolását. Hívjuk fel a figyelmet az értéktáblázat használára! A gyerekek jelöljék meg magukat az A, B, C, D betűvel, és a füzetükbe ábrázolják a megfelelő függvénygrafikonokat. Feltétlenül nevezzék meg az értelmezési tartományt és az értékkészletet is. Ha készen vannak, mutassák be egymásnak a munkájukat, és csoportosítsák a grafikonokat alakjuk szerint. Ezt a csoportosítást mindenki rögzítse a füzetébe úgy, hogy a hasonló grafikonokat, a hozzájuk tartozó hozzárendelési szabályokkal együtt egymás mellé lerajzolják.

## 2. FELADATLAP

Készítsd el a betűjelednek megfelelő függvények grafikonját értéktáblázat segítségével. Ha mindenki elkészült, akkor beszéljétek meg, hogy mely grafikonok alakja hasonló! Eszerint csoportosítsátok, és csoportosítva rajzoljátok le a füzetbe a grafikonokat a hozzárendelés szabályával együtt!

**A** feladata:
Ábrázold a képletekkel megadott függvények grafikonját

**a)** $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ **b)** $x \mapsto x^2$

**c)** Döntsd el, hogy a pontok rajta vannak-e valamelyik grafikonon!
*A* (4; 5); *B* (–4; 3); *C* (2; 4); *D* (2; 2); *E* (–2; 1); *F* (–1; 1); *G* (6; 5); *H* (100; 51);
*I* (–200; –40 000) **a)** rajta van: *D; H* **b)** rajta van: *C; F*

**B** feladata:
Ábrázold a képletekkel a megadott függvények grafikonját

**a)** $f(x) = -2x + 5$ **b)** $x \mapsto |x|$

**c)** Döntsd el, hogy a pontok rajta vannak-e valamelyik grafikonon!
*A* (4;3); *B* (–4;13); *C* (2;4); *D* (2; –2); *E* (–2;2); *F* (–1;1); *G* (6; –7); *H* (100; –195); *I* (–200; –200)

**a)** rajta van: *B; G; H* **b)** rajta van: *E; F*

**C** feladata:
Ábrázold a képletekkel a megadott függvények grafikonját

**a)** $f(x) = 3x - 2$ **b)** $x \mapsto |x - 5|$

**c)** Döntsd el, hogy a pontok rajta vannak-e valamelyik grafikonon!
*A* (4;10); *B* (–4;9); *C* (2;4); *D* (2; –3); *E* (–2; –7); *F* (–1; –5); *G* (6;1); *H* (100;298); *I* (–200; –205)

**a)** rajta van: *A; C; F; H* **b)** rajta van: *B*

**D** feladata:
Ábrázold a képletekkel a megadott függvények grafikonját

**a)** $f(x) = -\frac{3}{2}x - 2$ **b)** $x \mapsto x^2 + 1$

**c)** Döntsd el, hogy a pontok rajta vannak-e valamelyik grafikonon!
*A* (4;–8); *B* (–4;4); *C* (2;5); *D* (2;–5); *E* (–2;1); *F* (–1;2); *G* (6; –10); *H* (100; –152); *I* (–200; 40 001)

**a)** rajta van: *A; D; E; H* **b)** rajta van: *C; F; I*

# II. A lineáris függvény vizsgálata

## 1. A lineáris függvény általános képlete

## 3. FELADATLAP

**1.**
**A feladata:**
Előbb ábrázold, majd írd fel a lineáris függvények képletét!

**a)** Átmegy az origón, és az *x*-tengely pozitív irányában 1 egységet haladva 4 egységgel nő.
Tehát a meredeksége 4. $f(x) = 4x$

**b)** Átmegy a (0; 2) ponton, és az *x* tengely pozitív irányában 1 egységet haladva 4 egységgel nő. Tehát a meredeksége 4 $f(x) = 4x + 2$

**B feladata:**
Előbb ábrázold, majd írd fel a lineáris függvények képletét!

**a)** Átmegy az origón, és az *x*-tengely pozitív irányában 1 egységet haladva 2 egységgel csökken. Tehát a meredeksége –2, $f(x) = -2x$

**b)** Átmegy a (0; 2) ponton, és az *x* tengely pozitív irányában 1 egységet haladva 2 egységgel csökken. Tehát a meredeksége –2, $f(x) = -2x + 2$

**C feladata:**
Előbb ábrázold, majd írd fel a lineáris függvények képletét!
**a)** Átmegy az origón, és az $x$ tengely pozitív irányában 3 egységet haladva 9 egységgel nő.
Tehát a meredeksége 3, $f(x) = 3x$
**b)** Átmegy a (0; 2) ponton, és az $x$ tengely pozitív irányában 3 egységet haladva 9 egységgel nő. Tehát a meredeksége 3, $f(x) = 3x + 2$

**D feladata:**
Előbb ábrázold, majd írd fel a lineáris függvények képletét!
**a)** Átmegy az origón, és az $x$ tengely pozitív irányában 2 egységet haladva 10 egységgel csökken. Tehát a meredeksége –5, $f(x) = –5x$
**b)** Átmegy a (0; 2) ponton, és az $x$ tengely pozitív irányában 2 egységet haladva 10 egységgel csökken. Tehát a meredeksége –5, $f(x) = –5x + 2$

Összegezzük a feladatok tapasztalatait!
Ha megadjuk a lineáris függvény meredekségét és azt, hogy az $y$-tengely melyik pontján menjen át, akkor felírhatjuk az $f(x) = mx + b$ képletet.
Utána ismételjük át a lineáris függvényekkel kapcsolatos ismereteket az előző feladatsor segítségével:
– mindegyik grafikon egyenes,
– az $x$ mindegyikben első hatványon szerepel,
– az 1. feladat a) részeinek grafikonja átmegy az origón,
a képletüket úgy kapjuk, hogy az $x$-et megszorozzuk valamilyen számmal, ez a szám megmutatja az egyenes meredekségét,
– a feladat b) részeinek képletét úgy kapjuk, hogy az a)-ban szereplőhöz hozzáadunk egy számot, ez a szám megmutatja, hogy a grafikon hol metszi az $y$-tengelyt!

## TUDNIVALÓ:

Az $f(x) = mx + b$ alakú függvények a lineáris függvények.
Az $m$ a függvény **meredekségét** jelöli,
A meredekség megmutatja, hogy az $x$ tengely pozitív irányába egy egységet haladva, $m > 0$ esetén mennyivel nő, és $m < 0$ esetén mennyivel csökken a függvény értéke.
A $b$ értéke megmutatja, hogy a grafikon hol metszi az $y$ tengelyt.

**2.** Ábrázold az $f(x) = 5$ függvény grafikonját! Mit tapasztalsz?
A grafikonja párhuzamos az $x$ tengellyel.

**3.** Fejezd be a mondatokat:
Ha $b = 0$, akkor az egyenes átmegy az origón, egyenlete $f(x) = m \cdot x$ alakban írható.
Ha a meredeksége 0 vagyis $m = 0$, akkor az egyenes párhuzamos az $x$ tengellyel, az egyenlete $f(x) = b$ alakban írható.

**4.** Igaz-e, hogy a következő függvények lineáris függvények? (Próbáld meg átírni őket $f(x) = mx + b$ alakba!)
**a)** $f(x) = 2(4 – x)$ igen: $f(x) = –2x + 8$
**b)** $f(x) = (x – 10) – (2x + 1)$ igen: $f(x) = –x – 11$
**c)** $f(x) = 5 – 3(x – 1) –7$ igen: $f(x) = –3x + 1$

## 2. Gyakorlás

Gyakoroljunk diákkvártett segítségével! A kérdések:

# 4. FELADATLAP

Feladatok gyakorlásra:

**1.** Számítsd ki a $g(x) = -\frac{3}{2}x + 1$ függvény helyettesítési értékét az $x = 1$ és az $x = -1$ helyen!

$g(1) = -0{,}5$; $g(-1) = 2{,}5$

**2.** Ábrázold az előbbi $g$ függvény grafikonját!

**3.** Legyen $A$ (–3; ?); $B$ (4; ?); $C$ (?; 6); $D$ (?; $\frac{2}{3}$)! Add meg úgy a pontok hiányzó koordinátáit, hogy azok az előbb ábrázolt

**a)** $g$ grafikonon legyenek: $A$ (–3; 5,5); $B$ (4; –5); $C$ ($-\frac{10}{3}$; 6); $D$ ($\frac{2}{9}$; $\frac{2}{3}$)

**b)** $g$ grafikon alatt legyenek például: $A$ (–3; –4); $B$ (4; –6); $C$ (–4; 6); $D$ (0; $\frac{2}{3}$)

**c)** $g$ grafikon felett legyenek például: $A$ (–3; 7); $B$ (4; –4); $C$ (0; 6); $D$ (–1; $\frac{2}{3}$)

**4.** Mennyi a meredeksége az $f(x) = -5x + 2$ függvény grafikonjának? Mit jelent ez?

$m = -5$, vagyis az $x$ tengelyen pozitív irányban egy egységet haladva a függvény értéke 5-tel csökken.

**a)** Hol metszi az előbbi $f$ függvény grafikonja az $y$-tengelyt? 2

**b)** Hol metszi az előbbi $f$ függvény grafikonja az $x$-tengelyt? 0,4

**c)** Nő vagy csökken az előbbi $f$ függvény, ha az $x$-tengely növekvő irányában haladunk? csökken

**d)** Mondjatok olyan függvényt, amelynek grafikonja párhuzamos az előbbi $f$-fel! például: $g(x) = -5x+3$

**e)** Melyik az az $x$ érték, amelynél kisebb számokat választva az előbbi $f$ függvény grafikonja az $x$-tengely felett van? 0,4

**f)** Melyik az az $x$ érték, amelynél nagyobb számokat választva az előbbi $f$ függvény grafikonja az $x$-tengely alatt van? 0,4

**g)** Hogyan kell megválasztani az $x$ értékét, hogy a előbbi $f$ függvény értéke (–8)-nál nagyobb legyen? $x < 2$

**5. a)** A következő függvények közül ábrázolás nélkül válogassátok ki azokat, amelyeknek grafikonja egyenes! Válogassátok ki közülük azokat is, amelyek grafikonja folytonos vonal (görbe)! Választásotokat indokoljátok is!

| | |
|---|---|
| $f(x) = -5x + 2$ | $k(x) = -x$ |
| $g(x) = -4(x+2) + 5(x-1) - 6(x-2)$ | $l(x) = 2x^2 - 4x - 2(x-1)^2 + 5(x-1)$ |
| $h(x) = 3x - 4$ | $m(x) = \frac{x-1}{4}$ |
| $n(x) = -2x + 1,\ x \in \mathbf{N}^+$ | $r(x) = \frac{2-x}{\lvert 2-x \rvert}$ |

$q(x)=2x^2+1$		$s(x)=\frac{1}{5}x-4$

Egyenes: *f; g; h; k; l; m; s.*
Folytonos: *f; g; h; k; l; m; s; q.*

**b)** A következő állítások közül egyénileg válogasd ki azokat, amelyek igazak!
1. A $q$ függvény grafikonjának nincs pontja az $x$ tengelyen. igaz
2. $f(–2) > n(–2)$ hamis, mert $n(–2)$ nincs értelmezve, így a reláció sem értelmezhető.
3. $g(1)$ pozitív hamis, mert $g(1) = –6$.
4. $m(2345,6) > k(2345,6)$ igaz
5. $q(–3) > r(2)$ hamis, mert $r(2)$ nincs értelmezve.
6. $n(2,6) = r(2,6)$ hamis, mert $n(2,6)$ nincs értelmezve.

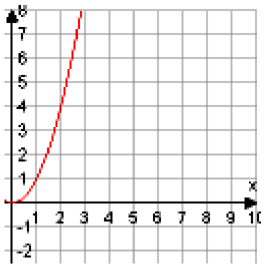
Ha készen vannak, a válogatást közösen is beszéljük meg!

# III. A másodfokú függvény

## 1. A másodfokú függvény

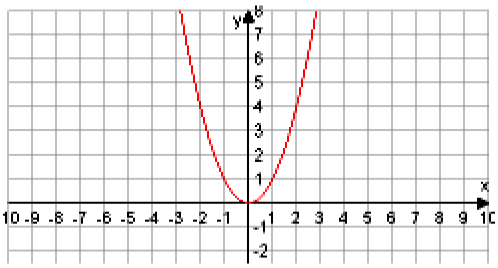
Hányszorosára változik a négyzet területe, ha az oldalait másfélszeresére növeljük? Készíts értéktáblázatot illetve grafikont a változás mértéke és a terület kapcsolatáról!
Jelöljük $\lambda$-val azt a számot, ahányszorosára változtatjuk az oldalt!

Az $a$ oldalú négyzet területe: $T = a^2$. Az oldalát 1,5-szeresére növelve a terület $T = (1{,}5a)^2 = 2{,}25a^2$ -re nő, azaz $1{,}5^2 = 2{,}25$-szorosára változik.
Általánosságban: $T = (\lambda a)^2 = \lambda^2 a^2$, ahol $\lambda$-val jelöljük azt a számot, ahányszorosára változtatjuk az oldalt.




| $\lambda$ | $\frac{1}{3}$ | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $\frac{1}{9}$ | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 |

Tekintsük az $f(x) = x^2$ hozzárendelési utasítást! A példában csak a pozitív valós számokra értelmeztük, de az értelmezési tartomány kiterjeszthető a valós számok halmazára. Ekkor a következő grafikont kapjuk, amely szimmetrikus az $y$-tengelyre:



Játék:

A tanulók 2–4 fős csoportokban dolgoznak. A tanár minden csoportnak kiosztja az 1. tanári mellékletben található kártyákat: a tanulók egyenlően szétosztják őket egymás között.

**1. tanári melléklet** – lásd e fájl végén és a modul eszközei közt is!

| | | | |
|---|---|---|---|
| A(0; 0) | B(1; 1) | C(−1; 1) | D$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ |
| E(−0,8; 0,64) | F(2; 4) | G(−2;4) | H(1,5; 2,25) |
| I(0,3; 0,15) | J(−0,1; 0,1) | K(0,5; 0,5) | L(−0,9; 1,8) |
| M(1,5; 3) | N(2,5; 10) | O(1,7; 3,4) | P(−3; 12) |

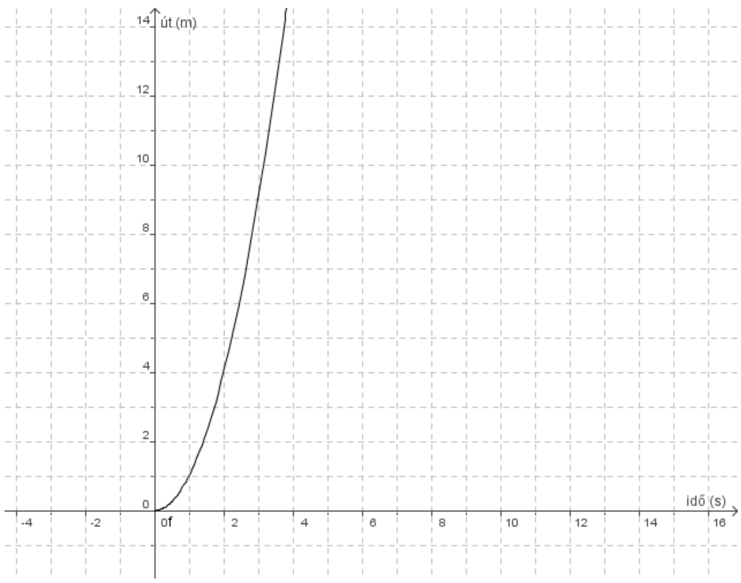
| | | | |
|---|---|---|---|
| Q(2,5; 5) | R(−3; 6) | S(1,6; 2) | T(1,2; 1,2) |
| U(−0,1; 0) | V(−1; −1) | X(0,3; 0,05) | Y(−0,7; 0,35) |

Képezzenek csoportokat aszerint, hogy mely kártyák pontjai vannak rajta az $f(x) = x^2$ függvény képén, melyek vannak felette illetve melyek alatta! Segítségül ábrázolhatják a függvény grafikonját és a pontokat (2 négyzetrács jelentsen egy egységet), és használhatnak számológépet is. Ha készen vannak, osztályszinten is megbeszélik a csoportosítást.

# 5. FELADATLAP

**1.** Egy kisautó induláskor $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$-tel gyorsul. Mekkora utat tesz meg 1 s, 2 s, 3 s alatt? Ábrázold a mozgását út-idő grafikonon! (Egyenletesen gyorsuló mozgásnál a megtett utat az $s = \frac{a}{2}t^2$ összefüggéssel kell számolni, ahol $s$ a megtett út, $a$ a gyorsulás és $t$ az idő.)

Megoldás:



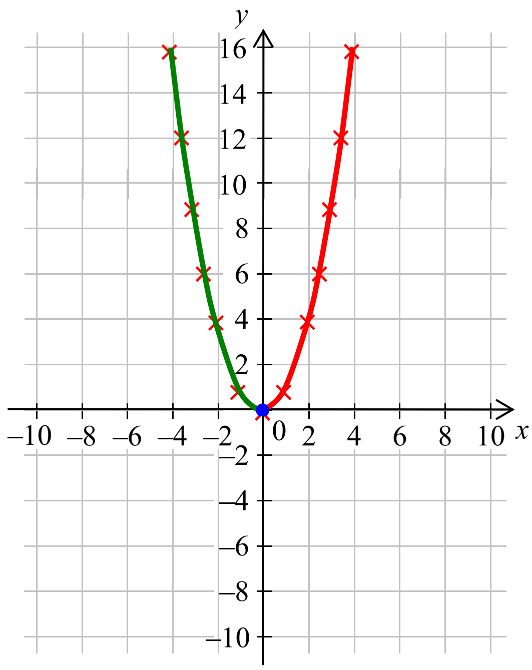

**2.** Készíts értéktáblázatot, és ábrázold koordinátarendszerben az $f(x) = x^2$ függvény grafikonját!
A grafikont csoporton belül mutassátok meg egymásnak, és beszéljétek meg egymással az értelmezési tartományt és az értékkészletet! Húzzátok át pirossal a görbének a növekedő részét és zölddel a csökkenőt! Kék színnel jelöljétek meg a minimumát!

A színezést közösen is beszéljük meg! Beszélgessünk arról is, hogy nagyobb számnak a négyzete biztosan nagyobb-e, mitől függ ez, és hogyan látszik a grafikonon. Mondjuk el, hogy csak a pozitív számok esetén igaz, hogy nagyobb számnak a négyzete is nagyobb, ezt látjuk a grafikon emelkedésén.
Gyakorlás önálló feladatmegoldással.

Megoldás:

| $x$ | –4 | –3,5 | –3 | –2,5 | –2 | –1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 16 | 12,25 | 9 | 6,25 | 4 | 1 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
| 0 | 1 | 4 | 6,25 | 9 | 12,25 | 16 |




**3.** Ábrázold a függvényeket!

**a)** $f(x) = x^2 + 1$ **b)** $f(x) = x^2 - 3$ **c)** $f(x) = -x^2 + 2$

# IV. Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény

## 1. Szöveges feladatok

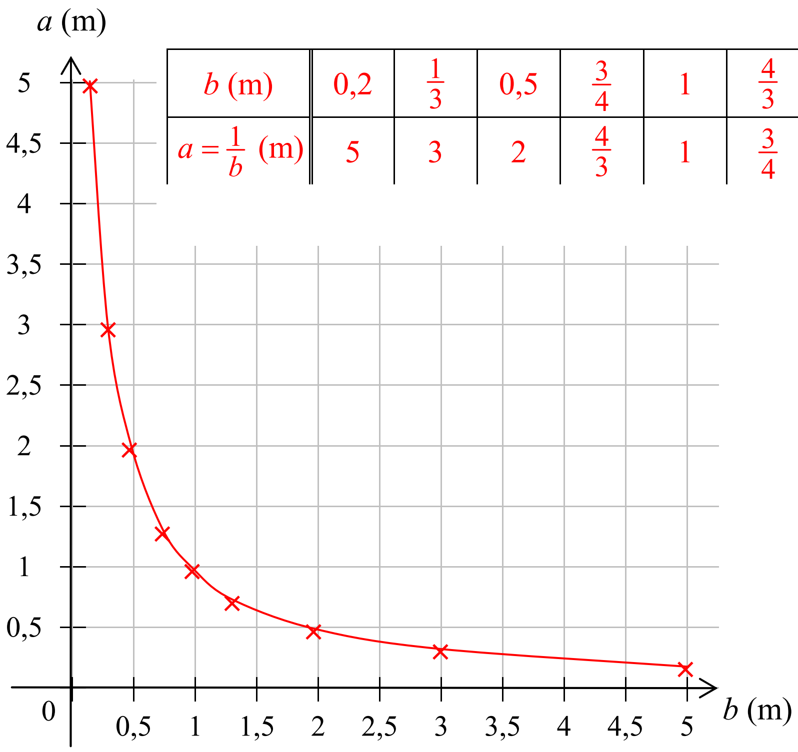
Szakértői mozaikkal fogunk dolgozni. A négy szöveges feladat a fordított arányosságon alapul. Az összetartozó értékek ábrázolása után az $f(x) = \frac{c}{x}$ függvény grafikonját kapjuk. A gyerekek osszák ki maguk között az A, B, C, D betűket. Mindenki megoldja a saját feladatát, majd a szóforgó módszerét alkalmazva megtanítják egymásnak mind a négy feladat megoldását.

## 6. FELADATLAP

**A feladata:**
Egy téglalap alakú földdarab területe egységnyi (pl. 1 m$^2$, 1 km$^2$, 1 hold ≈ 5755 m$^2$, 1 hektár = 10$^4$ m$^2$). Mekkorák lehetnek az oldalai? Változtasd az egyik oldalát, és minden esetben számítsd ki a hozzátartozó másik oldalt! Végig ugyanazt a mértékegységet használd! Az összetartozó értékpárokat rendezd táblázatba, és ábrázold grafikonon! (Figyeljétek meg az összetartozó értékpárok szorzatát, és fogalmazzátok meg a tapasztalatot!) Milyen összefüggés van az értékpárok között? Írjátok fel a szabályt minél többféleképpen! Gondolkozzatok azon is, körülbelül mekkora értékeket vehetnek fel a feladatban szereplő mennyiségek!

Megoldás:

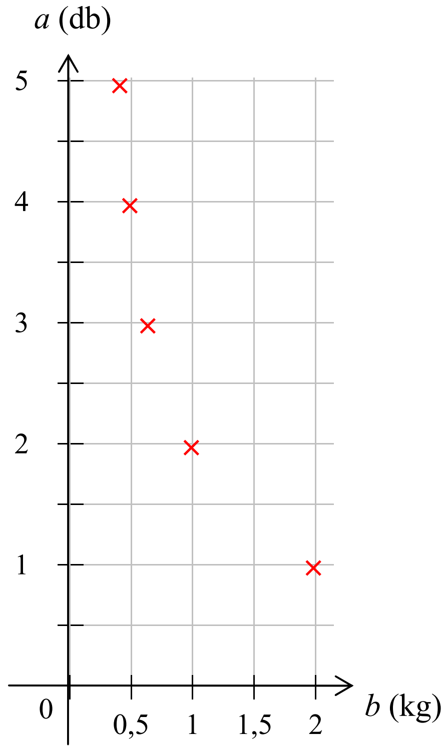
| $b$ (m) | 0,2 | $\frac{1}{3}$ | 0,5 | $\frac{3}{4}$ | 1 | $\frac{4}{3}$ | 2 | 3 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a = \frac{1}{b}$ (m) | 5 | 3 | 2 | $\frac{4}{3}$ | 1 | $\frac{3}{4}$ | 0,5 | $\frac{1}{3}$ | 0,2 |




**B feladata:**
2 kg mogyoróból egyforma csomagokat készítenek. Változtasd a csomagok tömegét, és számítsd ki minden esetben, hány csomag készíthető! Az összetartozó értékpárokat rendezd táblázatba, és ábrázold grafikonon! Milyen összefüggés van az értékpárok között? Írjátok fel a szabályt minél többféleképpen! Gondolkozzatok azon is, körülbelül mekkora értékeket vehetnek fel a feladatban szereplő mennyiségek!

Megoldás:

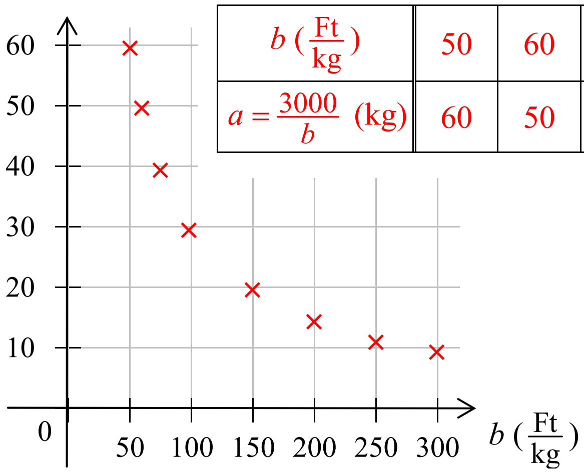
| $b$ (kg) | 2 | 1 | $\frac{2}{3}$ | 0,5 | 0,4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a = \frac{2}{b}$ (db) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |




**C feladata:**
3000 Ft-tal a zsebedben társaiddal vásárolni mész. Útközben elhatározzátok, hogy cseresznyét fogtok vásárolni az összes pénzen. Számítsd ki, hogy más-más kilónkénti árak esetén mennyi cseresznyét vásárolhattok! Az összetartozó értékpárokat rendezd táblázatba, és ábrázold grafikonon! Milyen összefüggés van az értékpárok között? Írd fel a szabályt minél többféleképp! Gondolkozzatok, körülbelül mekkora értéket vehetnek fel a feladatban szereplő mennyiségek!

Megoldás:

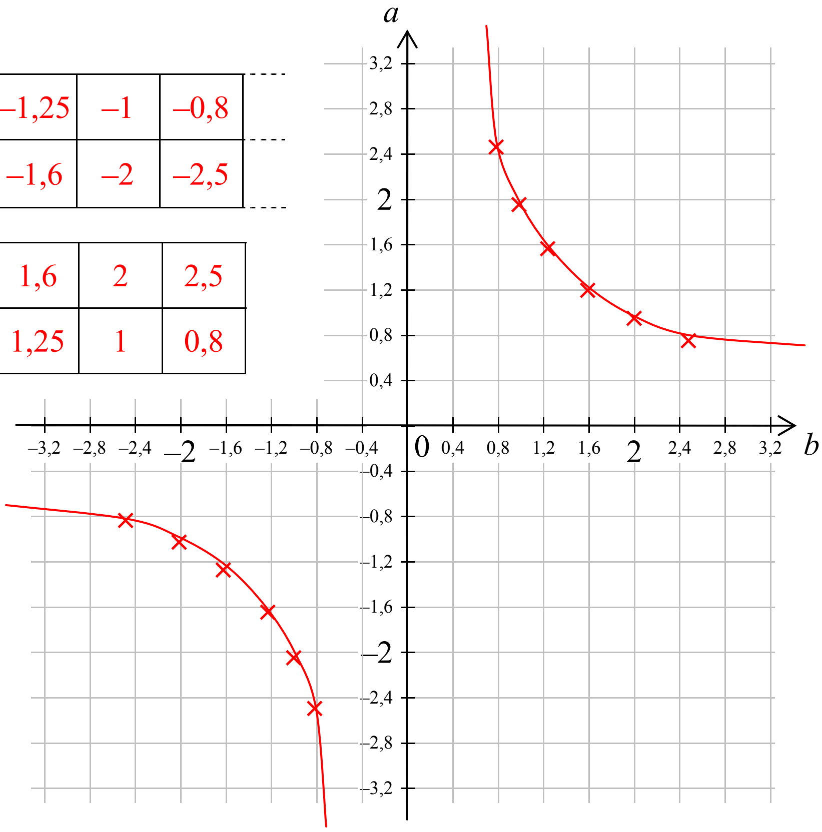
| $b\ (\frac{\text{Ft}}{\text{kg}})$ | 50 | 60 | 75 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a = \frac{3000}{b}$ (kg) | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 15 | 12 | 10 |




**D feladata:**
Egy tört számlálója legyen 2. A nevező változtatásával változik a tört értéke. Adj különböző értékeket a nevezőnek, és számítsd ki a hozzájuk tartozó törtek értékét! Az összetartozó értékpárokat rendezd táblázatba, és ábrázold grafikonon! Milyen összefüggés van az értékpárok között? Írjátok fel a szabályt minél többféleképpen! Gondolkozzatok azon is, körülbelül mekkora értékeket vehetnek fel a feladatban szereplő mennyiségek!

Megoldás:

| $b$ | –2,5 | –2 | –1,6 | –1,25 | –1 | –0,8 | 0,8 | 1 | 1,25 | 1,6 | 2 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a = \frac{2}{b}$ | –0,8 | –1 | –1,25 | –1,6 | –2 | –2,5 | 2,5 | 2 | 1,6 | 1,25 | 1 | 0,8 |




## 2. Általánosítás

Közösen általánosítsuk a feladatokat!
Beszéljük meg, hogy minden esetben fordított arányosság van a feladatokban szereplő mennyiségek között!

Fontos beszélnünk az egyes feladatoknál az értékkészletekről. Hozzák be a gyerekek a gyakorlati ismereteiket!
Beszéljük meg, hogy mindegyik feladatban az összetartozó mennyiségek szorzata állandó volt!
Az A feladatnál az értékpárok szorzata $T = a \cdot b = 1$ egység, és végig a kiszemelt mértékegységben számolunk. Az értékek egy téglalap oldalai, csak pozitív számok lehetnek. (Ha földdarabról van szó, akkor persze nem lehetnek akármilyen kicsi számok.) A szabályt fel lehet $a = \frac{1}{b}$ alakban is írni.
A B-nél az összetartozó értékpárok szorzata 2 (vagy 200, ha dkg-ban számolnak), az értékek pozitív egész számok lehetnek. A szabályt fel lehet írni $a = \frac{2}{b}$ alakban.
A C-nél az összetartozó értékpárok szorzata 3000, mivel forintról van szó, ezért az értékek csak pozitív egészek lehetnek, a szabályt fel lehet írni $a = \frac{3000}{b}$ alakban.
A D-nél az összetartozó értékpárok szorzata 2, az értékek bármilyen számot felvehetnek a nulla kivételével. A szabályt fel lehet írni $a = \frac{2}{b}$ alakban.

Táblai munkával kísérjük az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény grafikonjának megrajzolását. A jellemzőit közösen beszéljük meg! Hívjuk fel a figyelmet a jellemző pontokra!
Közösen beszéljük meg az $f(x) = \frac{1}{x-3}$ függvény grafikonját! Keressük meg először $x$-nek azt az értékét, amelyik biztosan nem lehet.
Mutassuk meg azt is, hogy az $x = 3$-hoz közel lévő törtszámok helyettesítésével könnyen rajzolható a grafikon!
Gyakoroljuk ezt a gondolatot, keressük közösen ezeket az úgynevezett „érdekes” pontokat (ezek olyan helyek, ahol a függvény másképp viselkedik, mint a többi helyen)!

## 3. Gyakorlás

## 7. FELADATLAP

**1.** Állapítsd meg, hogy a következő függvényeknél melyik $x$ érték biztosan nem eleme az értelmezési tartománynak!

**a)** $f(x) = \frac{2}{x+10}$, $x \neq -10$ **b)** $g(x) = \frac{2}{x+10} + 1$, $x \neq -10$ **c)** $f(x) = \frac{3}{x-100}$, $x \neq 100$

**d)** $g(x) = \frac{3}{x-100} + 2$, $x \neq 100$ **e)** $f(x) = \frac{5}{x+11}$, $x \neq -11$ **f)** $f(x) = \frac{5}{x+11} - 3$, $x \neq -11$

**g)** $f(x) = \frac{1}{x-17} + 4$ $x \neq 17$

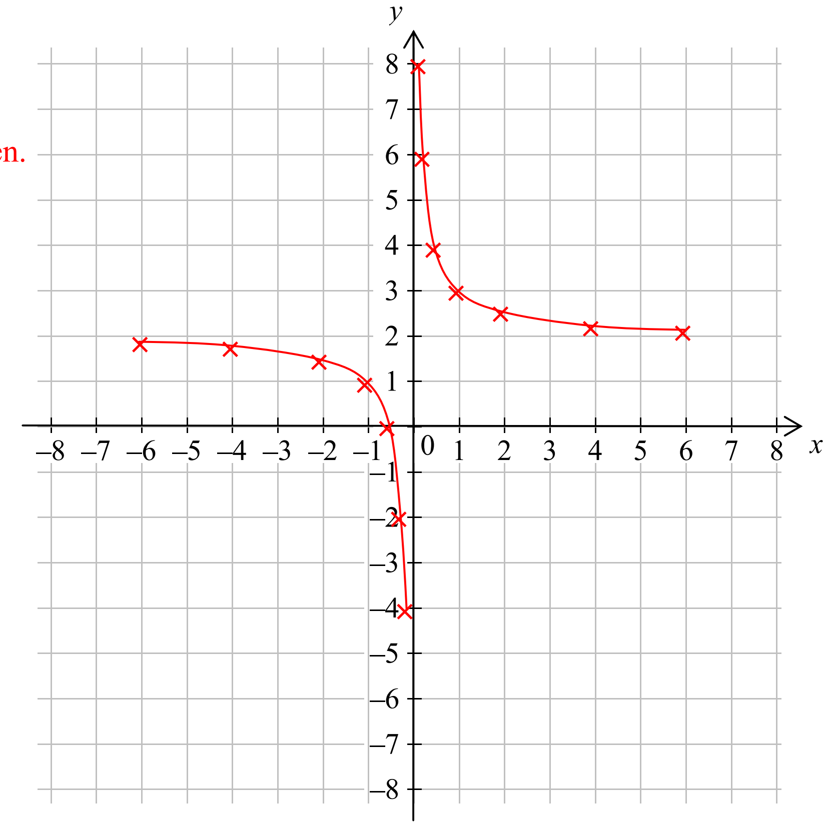
Önálló órai vagy otthoni munkára ajánljuk:

**2.** Ábrázold a függvényeket, és írd le a jellemzőiket!

**a)** $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$

Megoldás:

$D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$
$R(f) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$
$f(x)$ az egész $D(f)$-en csökken.
Szélsőértéke nincs.

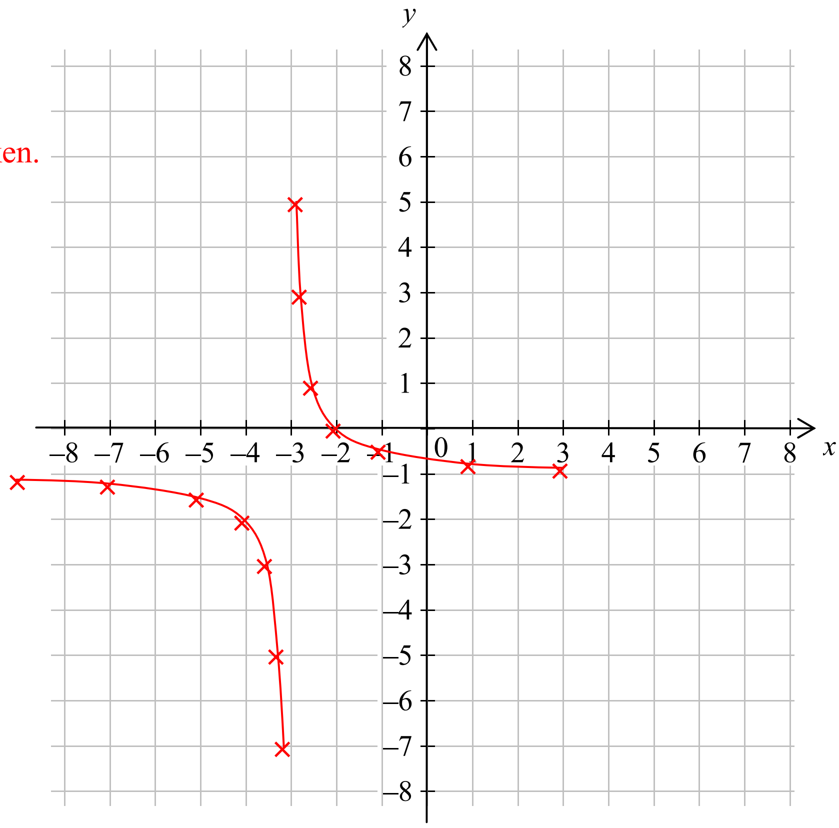



| $x$ | –6 | –4 | –2 | –1 | –0,5 | –0,25 | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 0,25 | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \frac{1}{x} + 2$ | $1\frac{5}{6}$ | 1,75 | 1,5 | 1 | 0 | –2 | –4 | 8 | 6 | 4 | 3 | 2,5 | 2,25 | $2\frac{1}{6}$ |

**b)** $f(x) = \dfrac{1}{x+3} - 1$

Megoldás:

$D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-3\}$
$R(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$
$f(x)$ az egész $D(f)$-en csökken.
Szélsőértéke nincs.




| $x$ | –9 | –7 | –5 | –4 | –3,5 | –3,25 | $-3\frac{1}{6}$ | $-2\frac{5}{6}$ | –2,75 | –2,5 | –2 | –1 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \frac{1}{x+3} - 1$ | $-1\frac{1}{6}$ | –1,25 | –1,5 | –2 | –3 | –5 | –7 | 5 | 3 | 1 | 0 | –0,5 | –0,75 | $-\frac{5}{6}$ |

# V. Számok abszolút értéke, az $f(x) = |x|$ függvény grafikonja

## 1. Az abszolút érték fogalma, ismétlés

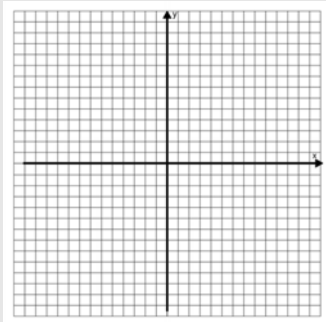
Mielőtt elkezdenénk az abszolútérték-függvény grafikonját felrajzolni, ismételjük át néhány példa segítségével a számok abszolút értékét! Keressenek a füzetükbe rajzolt számegyenesen olyan számot, melynek a nullától való távolsága pl. 5, 3, nagyobb mint 3, kisebb mint 2., stb. Keressenek olyat is, melyeknek az 5-től való távolsága 3, 2, nagyobb, mint 4, stb. Írjunk fel a táblára néhány számot, pozitív, negatív egészet, törteket, tizedes törteket vegyesen! A gyerekek a füzetükbe írják le a számok abszolút értékét! Utána mondjuk ki:

EMLÉKEZTETŐ:

Pozitív szám és a nulla abszolút értéke maga az eredeti szám, negatív szám abszolút értéke a szám ellentettje. Minden nullától különböző szám abszolút értéke pozitív. Jelölése: $|\;|$.

Minden csoportnak osszunk ki egy koordinátarendszert (0861-es modul 4. tanári melléklet)!

**0861 – 4. tanári melléklet** –
lásd a 0861. modul tanári fájl végén és eszközei közt is!



Az $f(x)=|x|$ függvény grafikonját fogják a csoportok ábrázolni. Az egyik pár jelölje be az $f(x)=x$ függvény grafikonját, ahol $x \geq 0$. A másik pár az $f(x)=-x$ függvény grafikonját, ahol $x \leq 0$. A két grafikon együttese adja az $f(x)=|x|$ függvény grafikonját.

Közös megbeszéléssel ellenőrizzük a grafikont, és tegyük fel a következő kérdéseket!

**a)** Melyek azok a számok, amelyeknek vehetjük az abszolút értékét? Mi az értelmezési tartomány? bármely szám

**b)** Melyek azok a számok, amelyeket az utasítás elvégzése után megkaphatunk? Mi az értékkészlet? $y \geq 0$

**c)** Van-e legkisebb értéke a második jelzőszámnak? $y = 0$

**d)** Van-e legnagyobb értéke a második jelzőszámnak? nincs

**e)** Melyek a töréspont koordinátái? (0; 0)

A következőket önálló munkára ajánljuk. Amennyiben szükséges, a gyerekeket bíztassuk értéktáblázat elkészítésére!

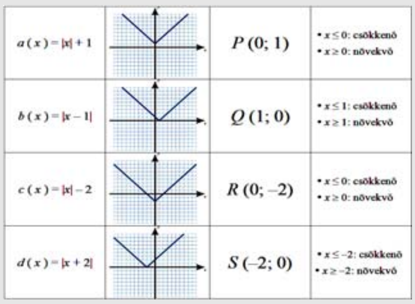
## 2. Általánosítás, ábrázolás

## 8. FELADATLAP

Feldolgozási javaslat a feladathoz:

A tanulók 4 fős csoportokban dolgoznak. A tanár minden csoportnak kiosztja a 2/a. tanári mellékletet (2. kártyakészlet), amely 4×4 db kártyát tartalmaz.

**2/a., 2/b. tanári melléklet** –
lásd e fájl végén és a modul eszközei közt is!




Egy összetartozó négyest alkot a függvény hozzárendelési utasítása, grafikonja, szélsőértéke és monotonitása. A tanulók véletlenszerűen húznak 4-4 db kártyát. Feladatuk összegyűjteni egy-egy összetartozó négyest úgy, hogy egymással nem beszélhetnek, a felesleges kártyákat az asztal közepére tehetik ki, és a hiányzó kártyákat csak onnét vehetik el. Egymáshoz nem nyúlhatnak át.

A négy grafikont külön-külön koordinátarendszerben rajzoljátok meg, és a kérdésekre adott válaszokat a csoport beszélje meg.

I.) $f(x)=|x|+1$ II.) $f(x)=|x-1|$

III.) $f(x)=|x|-2$ IV) $f(x)=|x+2|$

**a)** melyek azok a számok, amelyekkel a hozzárendelésben megfogalmazott szabályok elvégezhetők? (Mi az értelmezési tartomány?)
**b)** milyen számokat kaphatunk a szabály elvégzése után? (Mi az értékkészlet?)
**c)** a második jelzőszámnak van-e legnagyobb illetve legkisebb értéke?
**d)** milyen a grafikon, süllyedő vagy emelkedő? (A függvény növekszik, vagy csökken?)
**e)** melyek a görbe jellegzetes, „érdekes” pontjának koordinátái?

A feladatok ellenőrzéséhez javasoljuk írásvetítő használatát (2/b. tanári melléklet).

## 3. Gyakorlás

A következő feladatokban a gyerekek vegyesen találkoznak az eddig megismert függvényekkel. A feladatok megoldását páros munkára ajánljuk. A párok beszéljék meg megoldásaikat a csoportokon belül!

## 9. FELADATLAP

**1.** Mindegyik függvény grafikonját ábrázoljátok külön koordinátarendszerben! Mindegyiknél vizsgáljátok meg, hogy
**a)** melyek azok a számok, amelyekkel a hozzárendelésben megfogalmazott műveletek elvégezhetők? (Mi az értelmezési tartomány?)
**b)** milyen számokat kaphatunk eredményül a műveletek elvégzése után? (Mi az értékkészlet?)
**c)** a második jelzőszámnak van-e legnagyobb illetve legkisebb értéke?
**d)** milyen a grafikon, süllyedő vagy emelkedő? (A függvény növekszik, vagy csökken?)
**e)** melyek a görbe jellegzetes, „érdekes” pontjának koordinátái?

1) $f(x)=|x|+3$ 2) $x\mapsto x^2+3$ 3) $f(x)=-\frac{6}{5}x+3$ 4) $f(x)=|x-2|$

5) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ 6) $f(x)=\frac{1}{x}+1$ 7) $f(x)=(x-2)^2+1$

Megoldás:

| | a) | b) | c) legkisebb: | c) legnagyobb: | d) | e) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1) | $x\in\mathbf{R}$ | $y\geq 3$ | 3 | nincs | $x\leq 0$ süllyedő; $x\geq 0$ emelkedő | (0; 3) |
| 2) | $x\in\mathbf{R}$ | $y\geq 3$ | 3 | nincs | $x\leq 0$ süllyedő; $x\geq 0$ emelkedő | (0; 3) |
| 3) | $x\in\mathbf{R}$ | $x\in\mathbf{R}$ | nincs | nincs | süllyedő | – |
| 4) | $x\in\mathbf{R}$ | $y\geq 0$ | 0 | nincs | $x\leq 2$ süllyedő; $x\geq 2$ emelkedő | (2; 0) |
| 5) | $x\neq -1$ | $y\neq 0$ | nincs | nincs | süllyedő | (–1; 0) |
| 6) | $x\neq 0$ | $y\neq 1$ | nincs | nincs | süllyedő | (0; 1) |
| 7) | $x\in\mathbf{R}$ | $y\geq 1$ | 1 | nincs | $x\leq 2$ süllyedő; $x\geq 2$ emelkedő | (2; 1) |

**2. a)** Ábrázold a függvényeket!

1) $f(x)=|x-3|$ 2) $f(x)=x^2+1$ 3) $f(x)=\frac{1}{x}-2$ 4) $f(x)=|x|-3$

5) $f(x)=(x+3)^2$ 6) $f(x)=3x-1$ 7) $f(x)=\frac{1}{x-2}$ 8) $f(x)=-\frac{1}{3}x+1$

**b)** csoportosítsátok a függvényeket alakjuk szerint!

**c)** Írjatok mindegyik csoporthoz egy-egy új függvényt, melynek ugyanolyan alakú a grafikonja!

**d)** Adjátok meg az egyes csoportok esetében azt a közös műveletet, amely meghatározza a grafikon formáját!

egyenes: 6., 8. $x \mapsto ax+b$; V alakú: 1., 4., $x \mapsto |x|$; parabola: 2., 5., $x \mapsto x^2$;

hiperbola: 3., 7. $x \mapsto \frac{1}{x}$

A feladatok megoldását frontálisan beszéljük meg!

# VI. Függvény transzformáció

## 1. Tapasztalatgyűjtés, általánosítás

Szakértői mozaikkal dolgozzuk fel a következő feladatsort! A feladatsornak az a célja, hogy a gyerekek tapasztalatokat gyűjtsenek ebben a témakörben. Szeretnénk elérni, hogy a tapasztalataikat meg is fogalmazzák, és legyenek képesek ezeket más feladatokban is alkalmazni!

### 10. FELADATLAP

**A feladata:**

Ábrázold ugyanabban a koordinátarendszerben az alábbi függvények grafikonját! A grafikonokat különböző színnel jelöld!

Legyen az alapfüggvény az $f(x)=|x|$!

**a)** $f(x)=|x|+1$ **b)** $f(x)=|x|-2$ **c)** $f(x)=|x|+3$ **d)** $f(x)=|x|-1$

Állapítsd meg, hogy az egyes függvények grafikonjai milyen geometriai transzformációval származtathatók az alapfüggvény grafikonjából? Hogyan lehet erre következtetni a hozzárendelési szabályból?

Az alapfüggvény $y$ irányú eltolása a) +1-gyel, b) –2-vel, c) +3-mal, d) –1-gyel. Az $|x|$-hez hozzáadott szám mutatja meg az eltolás nagyságát.

**B feladata:**

Ábrázold ugyanabban a koordinátarendszerben az alábbi függvények grafikonját! A grafikonokat különböző színnel jelöld!

Legyen az alapfüggvény az $x \mapsto x^2$!

**a)** $f(x)=(x+1)^2$ **b)** $f(x)=(x-2)^2$ **c)** $f(x)=(x+3)^2$ **d)** $f(x)=(x-1)^2$

Állapítsd meg, hogy az egyes függvények grafikonjai milyen geometriai transzformációval származtathatók az alapfüggvény grafikonjából? Hogyan lehet erre következtetni a hozzárendelési szabályból?

Az alapfüggvény $x$ irányú eltolása a) –1-gyel, b) +2-vel, c) –3-mal, d) +1-gyel. A zárójelben $x$-ből kivont szám mutatja meg az eltolás nagyságát.

**C feladata:**
Ábrázold ugyanabban a koordinátarendszerben az alábbi függvények grafikonját! A grafikonokat különböző színnel jelöld!

Legyen az alapfüggvény az $x \mapsto \frac{2}{3}x$ !

**a)** $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ **b)** $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$ **c)** $f(x) = \frac{2}{3}x + 3$ **d)** $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$

Állapítsd meg, hogy az egyes függvények grafikonjai milyen geometriai transzformációval származtathatók az alapfüggvény grafikonjából? Hogyan lehet erre következtetni a hozzárendelési szabályból?
Az alapfüggvény *y* irányú eltolása a) +1-gyel, b) –2-vel, c) +3-mal, d) –1-gyel. A hozzáadott szám mutatja meg az eltolás nagyságát

**D feladata:**
Ábrázold páronként ugyanabban a koordinátarendszerben az alábbi függvények grafikonját! A grafikonokat különböző színnel jelöld!

**a)** $f(x) = |x|$ $f(x) = -|x|$

**b)** $f(x) = x^2$ $f(x) = -x^2$

**c)** $f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = -\frac{1}{x}$

Állapítsd meg, hogy a második függvények grafikonjai milyen geometriai transzformációval származtathatók az első függvények grafikonjából? Hogyan lehet erre következtetni a hozzárendelési szabályokból?
Az alapfüggvény tükrözése az *x*-tengelyre. Az előjelből következtetünk.

Ha készen vannak, közösen beszéljék meg a tapasztalatokat.

A TAPASZTALATOK ÖSSZEGZÉSE:
– A függvényértékhez egy *c* pozitív szám hozzáadása a grafikonnak az *y* tengely pozitív irányában *c* egységgel való eltolását eredményezi. $(f(x) + c)$
– A függvényértékből egy *c* pozitív szám elvétele a grafikonnak az *y*-tengely negatív irányában *c* egységgel való eltolását eredményezi. $(f(x) - c)$
– A változóhoz egy *c* pozitív szám hozzáadása a grafikonnak az *x*-tengely negatív irányában *c* egységgel való eltolását eredményezi. $(f(x+c))$
– A változóból egy *c* pozitív szám elvétele a grafikonnak az *x*-tengely pozitív irányában *c* egységgel való eltolását eredményezi. $(f(x-c))$
– A függvényértéket mínusz eggyel szorozva a grafikon tükröződik az *x*-tengelyre.

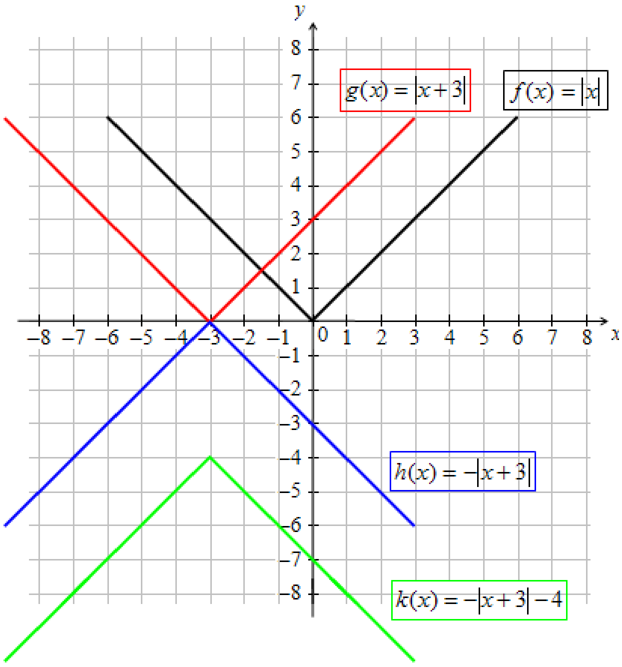
# 11. FELADATLAP

Osszuk ki a koordinátarendszert (0861-es modul 4. tanári melléklet) és a függvénygrafikonok sémáját! A függvény sémákat készíttessük el a gyerekekkel előre. Az alapvető függvények görbéit átlátszó irattartó fóliára, koordinátarendszerre fektetve, alkoholos filctollal rajzolják meg (lineáris, másodfokú, abszolút érték, hiperbola), mindegyiket külön fóliára.

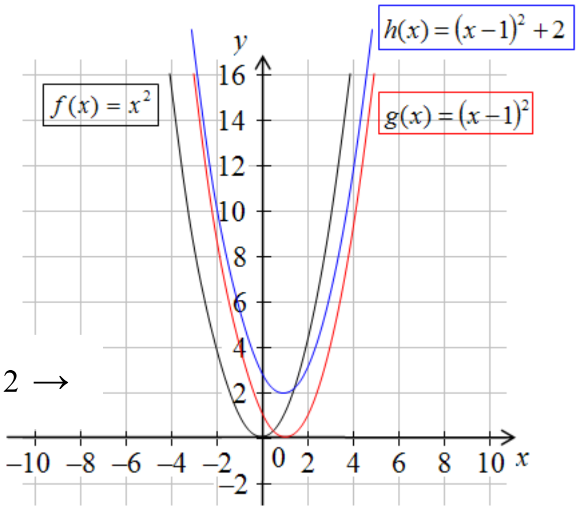
Diákkvártett módszerrel dolgozzunk úgy, hogy a képleteket felírjuk a táblára. A csoportoknak az a feladatuk, hogy helyezzék el a sémákat a koordinátarendszerben. Írásvetítővel ellenőrizzük a megoldást!

**1.** Ábrázoljátok közös koordinátarendszerben a közös feladatban szereplő függvényeket!

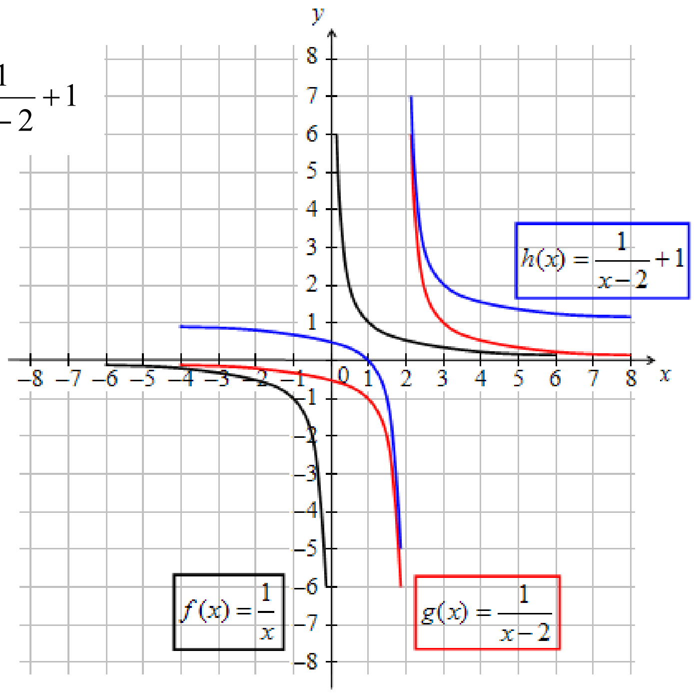
**a)** $f(x)=|x|$; $g(x)=|x+3|$; $h(x)=-|x+3|$; $k(x)=-|x+3|-4$




**b)** $f(x)=x^2$; $g(x)=(x-1)^2$; $h(x)=(x-1)^2+2$ $\longrightarrow$



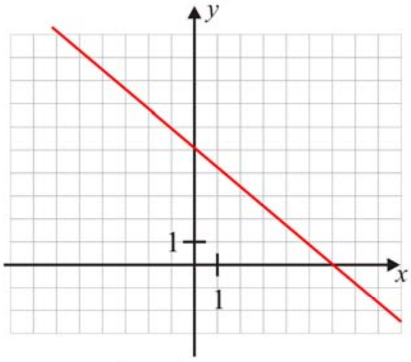

**c)** $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$; $h(x)=\dfrac{1}{x-2}+1$



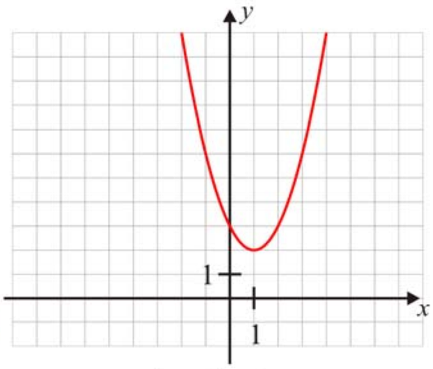

Önálló munkára vagy házi feladatnak ajánljuk. Mindenképp beszéljük meg közösen!

**2.** Az alábbi függvények grafikonjai mellett ott voltak a megfelelő hozzárendelési utasítások. Ezek közül néhányat valaki átírt. Javítsd ki!

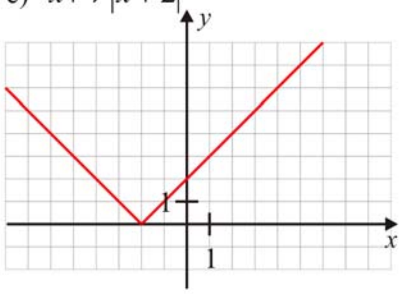
a) $x \mapsto -\frac{5}{6}x + 5$



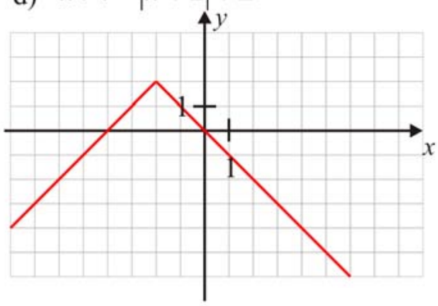

b) $x \mapsto (x+1)^2 + 2$



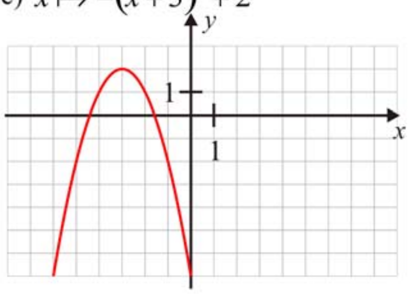

c) $x \mapsto |x+2|$



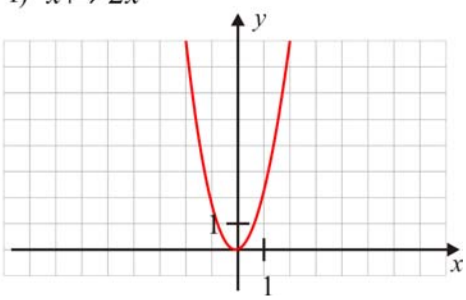

d) $x \mapsto -|x+2| + 2$




e) $x \mapsto -(x+3)^2 + 2$




f) $x \mapsto 2x^2$




Egyedül a b) hibás, helyesen: $x \mapsto (x-1)^2 + 2$

# VII. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

## 1. Ráhangolódás: „Függvény torpedó”

Kérjünk meg két önként jelentkező gyereket, és egy-egy papíron adjuk oda nekik a következő függvényeket: kék színnel $x \mapsto x+3$, piros színnel $x \mapsto -3-2x$. A többiek nem ismerik a hozzárendelés szabályát így mondanak egyesével számokat. A cél az, hogy megtalálják azt az értéket, melyre a két függvény helyettesítési értéke azonos, valamint az értékek alapján közösen kitalálják a hozzárendelési szabályt. Minden elhangozott szám után a két gyerek kiszámolja a helyettesítési értéket, a táblára rajzolt koordinátarendszerben a saját színével jelöli a pontot.

# 2. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

## 12. FELADATLAP

**1.** Párban dolgozzatok! A következő játékot úgy kell játszani, mint a torpedót. Mindketten készítsetek egy-egy koordinátarendszert a saját füzetetekbe. Adott két függvény *f* és *g*. A pár egyik tagja az *f* függvényt, másik pedig a *g* függvényt ábrázolja. Felváltva mondjatok egy-egy számot, és minden szám esetén számoljátok ki, és mondjátok meg egymásnak a saját függvényetek helyettesítési értékét. Mindketten jelöljétek a saját füzetetekben a párotok helyettesítési értékét, ha az a sajátotoknál nagyobb akkor pirossal, ha kisebb akkor zölddel! Így mindkettőtök koordinátarendszerében megjelenik mindkét függvény grafikonja. A játék addig tart, amíg el nem éritek azt a számot, melyre a két függvény helyettesítési értéke egyenlő nem lesz.

Először legyen $f(x)=-\frac{1}{2}x+5$ és $g(x)=\frac{1}{2}x+3$

Miután a játék befejeződött, az ábrátok alapján próbáljatok válaszolni a következő kérdésekre. Mely x értékekre teljesül, hogy

**a)** $-\frac{1}{2}x+5=\frac{1}{2}x+1$

**b)** $-\frac{1}{2}x+5<\frac{1}{2}x+1$

**c)** $-\frac{1}{2}x+5>\frac{1}{2}x+1$

Közösen beszéljük meg a válaszokat! Tapasztalat: A feladat arról szólt, hogyan lehet megkeresni *egy nyitott mondat megoldását* két függvény grafikonjának segítségével.
Az egyszerű eljárás az, hogy a nyitott mondat két oldalán szereplő függvényt ugyanabban a koordinátarendszerben ábrázoljuk, és megkeressük azt a pontot, vagy pontokat, ahol a két függvény grafikonja metszi egymást. A pont x koordinátája lesz az egyenlet megoldása. A grafikonról azt is leolvashatjuk, melyik tartományon melyik függvény helyettesítési értékei lesznek kisebbek.

**a)** feladat megoldása $x=4$

**b)** feladat megoldása $x>4$

**c)** feladat megoldása $x<4$

Gyakorlásra ajánljuk:

**2.** Az előbbi feladat leírása szerint ábrázoljátok párban a következő függvények grafikonjait!

| | A | B |
|---|---|---|
| I. | $f(x)=2x-3$ | $g(x)=-1{,}5x+1$ |
| II. | $f(x)=x^2-3$ | $g(x)=4x-6$ |
| III. | $f(x)=0{,}5x-2{,}5$ | $g(x)=-\lvert x\rvert+2$ |
| IV. | $f(x)=-\lvert x+2\rvert+7$ | $g(x)=(x+3)^2+8$ |

A feladatban elkészített grafikonok segítségével válaszoljátok meg a következő kérdéseket!
Az $x$ milyen értékeire igaz, hogy

I.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a)** $f = g$ | vagyis | $2x - 3 = 1{,}5x + 1$ | $x = 8$ |
| **b)** $f \le g$ | vagyis | $2x - 3 \le -1{,}5x + 1$ | $x \le 8$ |
| **c)** $f \ge g$ | vagyis | $2x - 3 \ge -1{,}5x + 1$ | $x \ge 8$ |

II.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a)** $f = g$ | vagyis | $x^2 - 3 = 4x - 6$ | $x = 1$ és $x = 3$ |
| **b)** $f \le g$ | vagyis | $x^2 - 3 \le 4x - 6$ | $1 \le x \le 3$ |
| **c)** $f \ge g$ | vagyis | $x^2 - 3 \ge 4x - 6$ | $x \le 1$ vagy $x \ge 3$ |

III.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a)** $f = g$ | vagyis | $0{,}5x - 2{,}5 = -\lvert x\rvert + 2$ | $x = 3$ és $x = -9$ |
| **b)** $f \le g$ | vagyis | $0{,}5x - 2{,}5 \le -\lvert x\rvert + 2$ | $-9 \le x \le 3$ |
| **c)** $f \ge g$ | vagyis | $0{,}5x - 2{,}5 \ge -\lvert x\rvert + 2$ | $x \le -9$ vagy $x \ge 3$ |

IV.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a)** $f = g$ | vagyis | $-\lvert x+2\rvert + 7 = (x+3)^2 + 8$ | nincs ilyen $x$ |
| **b)** $f \le g$ | vagyis | $-\lvert x+2\rvert + 7 \le (x+3)^2 + 8$ | minden valós $x$ esetén |
| **c)** $f \ge g$ | vagyis | $-\lvert x+2\rvert + 7 \ge (x+3)^2 + 8$ | nincs ilyen $x$ |

## 3. Tapasztalatok megfogalmazása, ellenőrzés diákkvártettel

A TAPASZTALATOK ÖSSZEGZÉSE:
Egy egyenlet grafikus megoldása azt jelenti, hogy az egyenlőségjel két oldalán lévő függvényt ábrázoljuk ugyanabban a koordinátarendszerben, és a grafikonon megkeressük a metszéspontokat. Ezeknek az első koordinátája adja meg az egyenlet megoldását. A leolvasás sohasem pontos. Ezért mindig ellenőrizni kell behelyettesítéssel a leolvasott értéket.
Hívjuk fel a figyelmet arra, hogy eddig csak elsőfokú egyenlőséget tudtunk megoldani. A grafikus módszerrel másfajta egyenletek megoldását is megkaphatjuk, például abszolút értékes, törtes és másodfokú kifejezéseket tartalmazókat is.
Beszéljük meg az egyenlőtlenségek megoldását is:
Egy egyenlőtlenség grafikus megoldása azt jelenti, hogy az egyenlőtlenség két oldalán lévő függvényt ábrázoljuk ugyanabban a koordinátarendszerben, és a grafikonon megkeressük a metszéspontokat, és a két görbe egymáshoz való viszonyát figyelembe véve leolvassuk a megoldást.

A tanultak megértését diákkvártettel ellenőrizzük! Használjuk a koordinátarendszert és a grafikon sémákat!

| | |
|---|---|
| **1.** Az $x$ milyen értékeire teljesül, hogy $x + 1 \ge -x + 3$? | $x \ge 1$ |
| **2.** Az $x$ milyen értékeire teljesül, hogy $\lvert x - 2\rvert = x + 2$? | $x = 0$ |
| **3.** Az $x$ milyen értékeire teljesül, hogy $x^2 = -2x + 3$? | $x = 1$ és $x = -3$ |
| **4.** Az $x$ milyen értékeire teljesül, hogy $x^2 \ge -2x + 3$? | $x \le -3$ vagy $x \ge 1$ |
| **5.** Az $x$ milyen értékeire teljesül, hogy $x^2 \le 4$? | $-2 \le x \le 2$ |
| **6.** Az $x$ milyen értékeire teljesül, hogy $x^2 \ge 1$? | $x \le -1$ vagy $1 \le x$ |
| **7.** Az $x$ milyen értékeire teljesül, hogy $5 \ge \lvert x\rvert$? | $-5 \le x \le 5$ |

| | |
|---|---|
| **8.** Az $x$ milyen értékeire teljesül, hogy $3 \le \lvert x \rvert$? | $x \le -3$ vagy $3 \le x$ |
| **9.** Az $x$ milyen értékeire teljesül, hogy $x^2 - 1 = -\lvert x \rvert + 5$? | $x = 2$ vagy $x = -2$ |
| **10.** Az $x$ milyen értékeire teljesül, hogy $x^2 - 1 \le -\lvert x \rvert + 5$? | $-2 \le x \le 2$ |
| **11.** Az $x$ milyen értékeire teljesül, hogy $-2 \le \lvert x \rvert$? | $x \in \mathbf{R}$ |

# FELADATGYŰJTEMÉNY

**1. a)** A következő függvények közül ábrázolás nélkül válogasd ki azokat, amelyeknek grafikonja egyenes! Válogasd ki közülük azokat, amelyek grafikonja folytonos vonal (görbe)! Választásodat indokold is

$a(x) = 2x - 3$ $\quad$ $d(x) = 4x + 5$

$b(x) = x^2 - 2$ $\quad$ $e(x) = \dfrac{1}{x} - 1$

$c(x) = \lvert x \rvert$ $\quad$ $f(x) = 3x + 2(x - 2)$

Lineáris: *a*; *d*; *f*; folytonos vonal: az előzők és *b*; *c*.

**b)** A következő függvények közül ábrázolás nélkül válogasd ki azokat, amelyeknek grafikonja egyenes! Válogasd ki közülük azokat, amelyek grafikonja folytonos vonal (görbe)! Választásodat indokold is!

$a(x) = 2(x - 3) + 3(x - 1) - 2$ $\quad$ $d(x) = 4x - 2(x + 1) - 2x + 5$

$b(x) = 2x(x - 1) + 3(x - 2)$ $\quad$ $e(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

$c(x) = \lvert x \rvert + 2$ $\quad$ $f(x) = 3x + 5(x - 2) - x(x + 2)$

Lineáris: *a*; *d*; folytonos vonal: az előzők; *b*; *c* és $f$.

**c)** A következő függvények közül ábrázolás nélkül válogasd ki azokat, amelyeknek grafikonja egyenes! Választásodat indokold is!

$a(x) = -5x$ $\quad$ $f(x) = -\dfrac{4}{3}x + 1$

$b(x) = 3x$ $\quad$ $g(x) = \dfrac{x - 3}{4}$

$c(x) = -3(x + 2) + 5(x - 10) - 6(x - 8)$ $\quad$ $h(x) = -x^2 + 1$

$d(x) = \dfrac{3}{5}x - 2$

$e(x) = 4x^2 - 7x - (2x - 1)^2 + 3(x - 2)$ $\quad$ $i(x) = \dfrac{x - 3}{\lvert x - 3 \rvert}$

$j(x) = -x + 1,\ x \in \mathbf{N}^+$

Lineáris: *a*; *b*; *c*; *d*; *e*; *f*; *g*; *j*.

**2.** Add meg annak a lineáris függvénynek az utasítását,

**a)** Melynek grafikonja 2 meredekségű és átmegy a (–2; 3) ponton! $\quad$ $x \mapsto 2x + 7$

**b)** Melynek grafikonja átmegy a (3; 2) és az (1; 1) ponton! $\quad$ $x \mapsto 0{,}5x + 0{,}5$

**c)** Melynek grafikonja –4 meredekségű, és átmegy az (5; 4) ponton! $\quad$ $x \mapsto -4x + 24$

**d)** Melynek grafikonja átmegy a (–2; 4) és az (1; 7) ponton! $\quad$ $x \mapsto x + 6$

**3.** Válogasd ki a következő függvények közül azokat, melyeknek grafikonjai
**A)** párhuzamosak egymással!
**B)** merőlegesek egymásra!

**a)** $f(x) = -3x + 5$ **b)** $f(x) = 2x + 1$ **c)** $f(x) = -3x + 2$

**d)** $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ **e)** $f(x) = 3x + 2$ **f)** $f(x) = -2x + 3$

**g)** $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ **h)** $f(x) = -\frac{1}{2}x - 5$ **i)** $f(x) = 2x - 1$

Párhuzamosak: *a*) és *c*); *b*) és *i*); valamint *d*) és *h*).
Merőlegesek egymásra: b) és d); b) és h); f) és g); i) és d) valamint i) és h).

**4.** Milyen háromszöget határoz meg a megadott három egyenes?

**a)** $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, $g(x) = -2x - 1$, $h(x) = -x + 20$ derékszögű

**b)** $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = -3x + 1$, $h(x) = \frac{2}{6}x - 4$ derékszögű

**5.** Ábrázold az alábbi függvényeket külön koordinátarendszerben, és válaszolj mindegyik esetben a kérdésekre!

**a)** $f(x) = -3x + 7$ **b)** $f(x) = -|x|$ **c)** $f(x) = x^2 + 2$

**d)** $f(x) = |x - 1|$ **e)** $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ **f)** $f(x) = -|x| + 2$

Jelöld pirossal a grafikonok emelkedő, és kékkel a süllyedő részeit!
Jelöld zölddel a grafikonok azon részeit, ahol a helyettesítési értékek pozitívak, és sárgával, ahol negatívok!

– Melyik számhalmaz elemeit helyettesíthetjük az $x$ helyére (értelmezési tartomány)?

**a) R** **b) R** **c) R** **d) R** **e)** $x \neq 0$ **f) R**

– A helyettesítési értékek melyik számhalmaz elemeit alkotják (értékkészlet)?

**a) R** **b)** $y \leq 0$ **c)** $y \geq 2$ **d)** $y \geq 0$ **e)** $y \neq 1$ **f)** $y \leq 2$

– Van-e legnagyobb vagy legkisebb helyettesítési érték? Ha van, mely $x$ értéknél kapjuk meg?

**a)** nincs **b)** $y = 0$; $x = 0$ max. **c)** $y = 2$; $x = 0$ min. **d)** $y = 0$; $x = 1$ min. **e)** nincs **f)** $y = 2$; $x = 0$ max.

– Hol metszi a függvények grafikonja a tengelyeket?

**a)** $x = \frac{7}{3}$; $y = 7$ **b)** $x = 0$ $y = 0$ **c)** $y = 2$ **d)** $x = 1$; $y = 0$ **e)** $x = -1$ **f)** $x = 2; -2$ $y = 2$

– Milyen függvényértékeket kapunk, ha $x$ helyére nagyon nagy abszolútértékű számot írunk?

**a)** $|y| >> 0$ **b)** $y << 0$ **c)** $y >> 0$ **d)** $y >> 0$ **e)** $y \approx 1$ **f)** $y << 0$

**6.** Ábrázold az alábbi függvények grafikonját transzformáció segítségével, külön-külön, és válaszolj a kérdésekre!

**a)** $f(x) = (x - 4)^2 - 2$ **b)** $f(x) = -|x| + 3$ **c)** $f(x) = -(x + 1)^2 + 2$

**d)** $f(x) = |x - 6| - 4$ **e)** $f(x) = \frac{1}{x - 2}$ **f)** $f(x) = -|x + 2| + 1$

**g)** $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-2$ **h)** $f(x)=-\dfrac{1}{3}x+2$

Jelöld pirossal a grafikonok emelkedő, és kékkel a süllyedő részeit!
Jelöld zölddel a grafikonok azon részeit, ahol a helyettesítési értékek pozitívak, és sárgával, ahol negatívok!

– Melyik számhalmaz elemeit helyettesíthetjük az $x$ helyére (értelmezési tartomány)?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a) R** | **b) R** | **c) R** | **d) R** |
| **e)** $x \neq 2$ | **f) R** | **g)** $x \neq -1$ | **h) R** |

– A helyettesítési értékek melyik számhalmaz elemeit alkotják (értékkészlet)?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a)** $y \geq -2$ | **b)** $y \leq 3$ | **c)** $y \leq 2$ | **d)** $y \geq -4$ |
| **e)** $y \neq 0$ | **f)** ) $y \leq 1$ | **g)** $y \neq -2$ | **h) R** |

– Van-e legnagyobb vagy legkisebb helyettesítési érték? Ha van, mely $x$ értéknél kapjuk meg?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a)** $x=4$; $y=-2$ min. | **b)** $x=0$; $y=3$ max. | **c)** $x=-1$; $y=2$ max. | **d)** $x=6$; $y=-4$ min. |
| **e)** nincs | **f)** $x=-2$; $y=1$ max. | **g)** nincs | **h)** nincs |

– Hol metszi a függvények grafikonja a tengelyeket?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a)** $x\approx 5{,}4$; $2{,}6$<br>$y=14$ | **b)** $x=3$; $-3$<br>$y=3$ | **c)** $x\approx 0{,}4$; $-2{,}4$<br>$y=1$ | **d)** $x=2$; $10$<br>$y=2$ |
| **e)** $y=-0{,}5$ | **f)** $x=-1$; $-3$<br>$y=-1$ | **g)** $x=-0{,}5$<br>$y=-1$ | **h)** $x=6$<br>$y=2$ |

– Milyen függvényértékeket kapunk, ha $x$ helyére nagyon nagy abszolútértékű számot írunk?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a)** $y >> 0$ | **b)** $y << 0$ | **c)** $y << 0$ | **d)** $y >> 0$ |
| **e)** $y \approx 0$ | **f)** $y << 0$ | **g)** $y \approx -2$ | **h)** $\lvert y\rvert >> 0$ |

**7.** Az alábbi állítások közül melyik igaz, és melyik hamis? (Válaszaidat indokold is! A hamis állításokat úgy változtasd meg, hogy igaz állításokat kapjunk!)

$f(x)=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{2}{5}$

**a)** A függvény grafikonja egyenes. igaz

**b)** Az $x=-4$-ben a függvény értéke $\dfrac{17}{5}$ igaz

**c)** Az $x=1$ esetén a függvény értéke pozitív. hamis, mert negatív

**d)** A függvény grafikonja az $y$ tengelyt a $\dfrac{2}{5}$-ben metszi igaz

**e)** A függvény csökkenő. igaz

**f)** A függvény grafikonjának meredeksége $-\dfrac{3}{4}$. igaz

**g)** A függvény grafikonja az $x$ tengelyt a $-\dfrac{3}{4}$-ben metszi hamis, $\dfrac{8}{15}$-ben

**h)** Ha az $x$ értéke 4 egységgel nő, akkor az $y$ értéke 3 egységgel csökken. igaz

**i)** Ha a függvény értéke negatív, akkor $x > 5$. igaz, de $x > \dfrac{8}{15}$-ra igaz.

**j)** A $\left(\dfrac{8}{15};0\right)$ pont rajta van a grafikonon. igaz

**k)** A függvény grafikonja párhuzamos a $x \mapsto \frac{1-3x}{4}$ függvény grafikonjával. igaz

**l)** Ha $x < \frac{8}{15}$, akkor a függvény értékei pozitívak. igaz

**m)** Az $f(x) = -\frac{6}{8}x + \frac{3}{5}$ függvény grafikonjával nincs közös pontja. igaz

**8. a)** Egy paralelogramma kerülete 10 hosszúságegység. Egyik oldalának hosszát változtatva, hogyan változik a másik oldalának hossza?

Megoldás: $x \mapsto 5-x$

**b)** Készítsd el az $f(x) = 5-x$ függvény grafikonját!

**c)** Ábrázold azokat a pontokat a koordinátarendszerben, amelyek koordinátái igazzá teszik az $y = 5-x$ egyenletet!

**9.a)** Egy egyenlőszárú háromszög kerülete 14 hosszúságegység. Egyik oldalát változtatva hogyan változik a másik oldal?

Ha az alapot ($x$) változtatjuk, akkor a szárak: $y = \frac{14-x}{2}$, ha a szárat ($x$) változtatjuk, akkor az alap: $y = 14–2x$

**b)** Ha $x$ jelöli az alapot, $y$ pedig a szárat, akkor mi a hozzárendelés szabálya? Ábrázold ezt a függvényt!

$y = \frac{14-x}{2} = -\frac{1}{2}x + 7$

**10.** Az $x \mapsto -3x + b$ függvény képletében úgy válaszd meg a $b$ értékét, hogy

**a)** $x = 4$ ben a függvény értéke 7 legyen! $b = 19$

**b)** $x = –2$-ben a függvény értéke 0 legyen! $b = –6$

**c)** $x = 10$-ben a függvény értéke pozitív legyen! $b > 30$

**d)** $x = 3$-ban a függvény értéke negatív legyen! $b < 9$

**11.** Ábrázoljátok a függvényt, és a grafikon segítségével találjátok ki, hogyan kell megválasztani az $x$ értékét, hogy az $x \mapsto -3x + 6$ függvény értéke

**a)** 0-val egyenlő, $x = 2$

**b)** 2-vel egyenlő, $x = \frac{4}{3}$

**c)** 3- nál nagyobb, $x < 1$

**d)** -5-nél kisebb, $x > \frac{11}{3}$

**e)** 0-nál kisebb, $x > 2$

**f)** -2-nél nagyobb vagy egyenlő, $x \le \frac{8}{3}$

**g)** 1-nél kisebb vagy egyenlő, $x \ge \frac{5}{3}$

**h)** nem negatív legyen! $x \le 2$

**12.** Adott az $f: x \mapsto 2x - 3$ és $g: x \mapsto -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ függvény Ábrázoljátok a függvényeket, és a grafikon alapján találjátok ki, hogyan kell megválasztani az $x$ értékét, hogy teljesüljön:

**a)** $f = g$ | $x=1$

**b)** $f > g$ | $x>1$

**c)** $f \ge g$ | $x \ge 1$

**d)** $g \ge f$ | $x \le 1$

**13.** Grafikusan oldd meg az egyenleteket, egyenlőtlenségeket.

**a)** $x^2 - 1 = -|x|$

$x_1 \approx -0{,}6$; $x_2 \approx 0{,}6$

**b)** $|x| = x + 3$

$x = -1{,}5$

**c)** $-x^2 + 2 = -\frac{1}{2}x + 1$

$x_1 \approx -0{,}8$; $x_2 \approx 1{,}3$;

**d)** $x^2 - 1 \geq 0$

$x \leq -1$ vagy $x \geq 1$

**e)** $|x - 1| \leq 2$

$-1 \leq x \leq 3$

**f)** $\frac{1}{4}x - 2 \geq 0$

$x \geq 8$

## 0862 – 1. tanári melléklet, 1. kártyakészlet (24 db kártya)

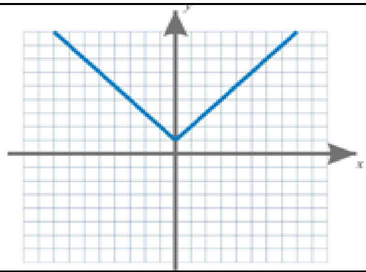
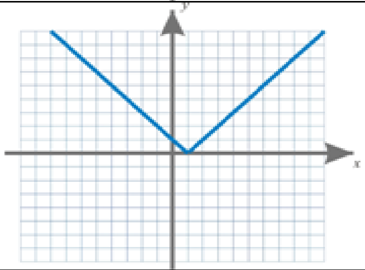
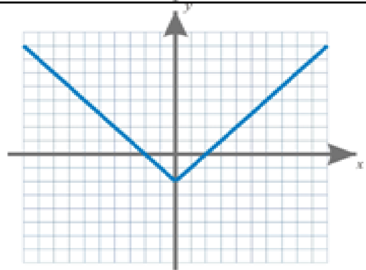
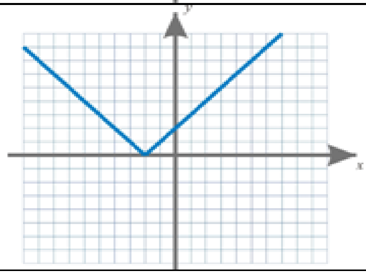
**Osztályonként 14 készlet (tanulópáronként 1 készlet) ebben a méretben vékony kartonpapírra nyomva.**
**Ki kell vágni a fekete vonalak mentén.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| A(0; 0) | B(1; 1) | C(–1; 1) | $D\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ |
| E(–0,8; 0,64) | F(2; 4) | G(–2;4) | H(1,5; 2,25) |
| I(0,3; 0,15) | J(–0,1; 0,1) | K(0,5; 0,5) | L(–0,9; 1,8) |
| M(1,5; 3) | N(2,5; 10) | O(1,7; 3,4) | P(–3; 12) |

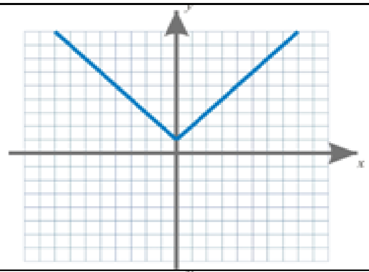
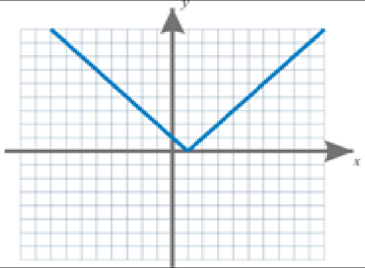
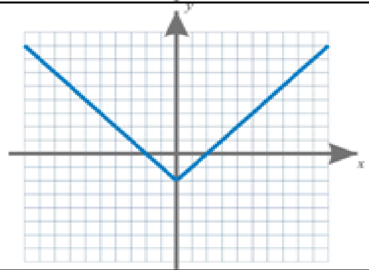
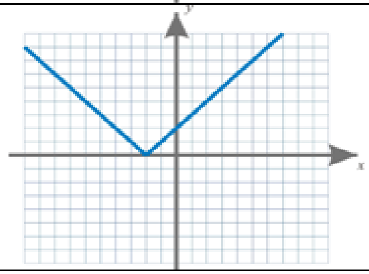
| | | | |
|---|---|---|---|
| Q(2,5; 5) | R(–3; 6) | S(1,6; 2) | T(1,2; 1,2) |
| U(–0,1; 0) | V(–1; –1) | X(0,3; 0,05) | Y(–0,7; 0,35) |

## 0862 – 2/a. tanári melléklet, 2. kártyakészlet

**Osztályonként 7 készlet (csoportonként 1 készlet) ebben a méretben kartonpapírra nyomva. Ki kell vágni a fekete vonalak mentén.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a(x) = \|x\| + 1$ |  | $P\,(0;\ 1)$ | • $x \leq 0$: csökkenő<br>• $x \geq 0$: növekvő |
| $b(x) = \|x - 1\|$ |  | $Q\,(1;\ 0)$ | • $x \leq 1$: csökkenő<br>• $x \geq 1$: növekvő |
| $c(x) = \|x\| - 2$ |  | $R\,(0;\ -2)$ | • $x \leq 0$: csökkenő<br>• $x \geq 0$: növekvő |
| $d(x) = \|x + 2\|$ |  | $S\,(-2;\ 0)$ | • $x \leq -2$: csökkenő<br>• $x \geq -2$: növekvő |

**0862 – 2/b. tanári melléklet, ellenőrző fólia a 8. feladatlaphoz** (megegyezik a szétvágatlan 2/a. melléklettel)
**Osztályonként 1 példány ebben a méretben írásvetítő fólián.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a(x) = \lvert x\rvert + 1$ |  | $P\,(0;\ 1)$ | • $x \le 0$: csökkenő<br>• $x \ge 0$: növekvő |
| $b(x) = \lvert x - 1\rvert$ |  | $Q\,(1;\ 0)$ | • $x \le 1$: csökkenő<br>• $x \ge 1$: növekvő |
| $c(x) = \lvert x\rvert - 2$ |  | $R\,(0;\ -2)$ | • $x \le 0$: csökkenő<br>• $x \ge 0$: növekvő |
| $d(x) = \lvert x + 2\rvert$ |  | $S\,(-2;\ 0)$ | • $x \le -2$: csökkenő<br>• $x \ge -2$: növekvő |