0854. MODUL

GEOMETRIAI ISMÉTLÉS

Kerület-, terület-, felszín-, térfogatszámítás ismétlése

KÉSZÍTETTE: PUSZTAI JULIANNA

A modul célja	A kerület, terület, felszín, térfogat számításáról tanultak ismétlése, alkalmazása vegyes számítási feladatokban.
Időkeret	5 óra
Ajánlott korosztály	8. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	0591, 0682, 0683, 0761, 0762.,0763, 0781, 0782, 0783 0872,0873, a 9. évfolyam 7, 8, 18, és a 10. évfolyam 4. modulok.
A képességfejlesztés fókuszai	*Becslés, mérés:* mérésekre alapozott számítási feladatok megoldása. *Számolás:* műveletek végzése fejben, írásban, zsebszámológéppel, a műveletek sorrendjének tudatosítása *Induktív következtetés:* általános képletek alkotása *Deduktív következtetés*: képletek alkalmazása gyakorlathoz kapcsolódó szöveges feladatokban *Problémamegoldás:* szöveges feladatok megértése, megoldási terv készítése, ellenőrzés *Beszédkészség:* a geometriai fogalmak szabatos használata, definíciók, tulajdonságok, állítások, állítások tagadásának precíz megfogalmazása *Esztétikai:* igényesség a feladatok megoldásának külalakjában is.

AJÁNLÁS

A tanulók négyes csoportokban ülnek, egymással megvitathatják a tapasztalataikat, segíthetnek egymásnak. Ha heterogén csoportokat alakítunk, akkor minden tanuló a munkamegosztásban rá jutó résszel segíti a közös munkát, miközben saját tudása is gyarapodik társai tapasztalataival. A differenciált csoportok alakításával lehetőséget adunk a matematikai szakirányú középiskolába, gimnáziumba készülőknek arra, hogy több és nehezebb feladat megoldásával jó rutint szerezzenek a feladatmegoldásban. Számukra a Feladatgyűjteményben is találhatunk gondolkodtatóbb feladatokat.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Feladatlapok, Feladatgyűjtemény, mértani eszközök, írásvetítő fóliák, a Tanulói Munkafüzet rendszerező táblázatai.

ÉRTÉKELÉS

Folyamatos szóbeli értékelés, a hiányosságok pótlására, hibák javíttatására is kiterjedően. A témakör végén témazáró dolgozatot íratunk, ezt osztályozzuk.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. Kerület-, területszámítás			
1.	Mértékegységek	analógiás gondolkodás	0854 –1. tanári melléklet: Mértékegységek, fólia 1. Feladatlap
2.	Kerület- és területszámítási képletek	rendszerezés	
3.	Számítási feladatok	számolási készség, problémamegoldás	2. Feladatlap
II. Felszín-, térfogatszámítás			
1.	Felszín- és térfogatszámítási képletek	rendszerezés, mérésekre alapozott számítási feladatok	testek, hálózatok, csoportonként egy-egy téglatest, hasáb, henger.
2.	Számítási feladatok	problémamegoldás, metakognició	3. Feladatlap
III. Szöveges feladatok			
1.	Villámkérdések: tulajdonságok, képletek		
2.	A tanult ismeretek alkalmazása gyakorlati szöveges feladatokban	szövegértés, problémamegoldás, alkalmazás	2. tanári melléklet: Ellenőrző fólia a 4. feladatlaphoz, (2 oldal); 4. Feladatlap

IV. Összefoglalás, gyakorlás			
1.	Állítások igazságának eldöntése	érvelés az ismert tulajdonságok alkalmazásával	5. Feladatlap 1.
2.	Szerkesztés tükrözéssel és kerület-, területszámítás	alapszerkesztések alkalmazása	5. Feladatlap 2. 3.
3.	Hosszadatok számítása kerületből, területből	az ismert képletek alkalmazása számítási feladatokban	5. Feladatlap 4.
4.	Szöveges feladatok: tégatest, kocka	szövegértés, problémamegoldás, alkalmazás	5. Feladatlap 5. 6.

V. Felmérő dolgozat írása			
	A témakörben átismételt anyagrész tudásának ellenőrzése		Felmérő dolgozat A és B csoportnak, 2-2 oldal (sokszorosítandó az osztálynak szükséges mennyiségben)

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Kerület-, területszámítás

1. Mértékegységek

A házi feladat megbeszélése után rövid stafétajátékkal eleveníthetjük fel a hossz-, a terület- és térfogat-mértékegységeket. A tanár kérdez egy tanulót, aki válaszol, majd újabb kérdést tesz fel valamelyik társának és így tovább. Ha a kérdés tárgyra vonatkozik, a válasz mennyiség, ha a kérdés mennyiség, akkor a válasz tárgy legyen.
Például: Tanár: futópálya? 1. tanuló: 400 m; 5 m^3? 2. tanuló: farakás; hordó? 3. tanuló: hl; erdő? 4. tanuló: ha; mm? 5. tanuló: katicabogár lába; m^2?...stb.

Írásvetítő fólia, az 1.tanári melléklet segítségével átismételjük a mértékegységeket és váltószámaikat.

1. tanári melléklet – lásd a modul eszközei közt!

Emlékeztethetünk rá, hogy a „négyzet” kezdetű mértékegységek neve már magában utal a síkidomok egységnégyzetekkel való lefedésére, s ez 2-dimenziós egység ($\Rightarrow$ váltószám legtöbbször 10^2); a „köb” = *kocka* kezdetű mértékegységek neve pedig ugyanígy utal a testek egységkockákkal való kitöltésére, amely 3-dimenziós egység ($\Rightarrow$ váltószám legtöbbször:10^3).

TUDNIVALÓ:

Mértékegységek:

Hosszúságegységek:

$$1\text{ mm} \underset{10}{<} 1\text{ cm} \underset{10}{<} 1\text{ dm} \underset{10}{<} 1\text{ m} \underset{1000}{<} 1\text{ km}$$

Területegységek:

$$1\text{ mm}^2 \underset{10^2}{<} 1\text{ cm}^2 \underset{10^2}{<} 1\text{ dm}^2 \underset{10^2}{<} 1\text{ m}^2 \underbrace{\underset{10^2}{<} 1\text{ a} \underset{10^2}{<} 1\text{ ha} \underset{10^2}{<}}_{1000^2} 1\text{ km}^2$$

Térfogategységek:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1\text{ mm}^3 & \underset{10^3}{<} & 1\text{ cm}^3 & \underset{10^3}{<} & 1\text{ dm}^3 & \underset{10^3}{<} & 1\text{ m}^3 & \underset{1000^3}{<} & 1\text{ km}^3 \\ & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \\ & & 1\text{ ml} & \underset{10^3}{<} & 1\text{ l} & \underset{10^2}{<}\ 1\text{ hl}\ \underset{10}{<} & 10\text{ hl} & & \end{array}$$

Az 1. feladatlap a mértékváltás gyakorlására ad alkalmat. Lehet egyéni munka, ha tájékozódni akarunk a tanulók jártasságáról, de hasznosabb lehet, ha párokban vitatják meg a helyes mérőszámokat. A frontális ellenőrzés nem maradhat el.

1. FELADATLAP

A mértékváltás gyakorlására oldd meg a következő feladatokat!

a)	325 m =	3250 dm =	0,325 km	
	8,2 km =	8200 m =	820 000 cm	
	1025 mm =	10,25 dm =	1,025 m	
b)	80 m² =	8000 dm² =	800 000 cm²	
	16,5 ha =	165 000 m² =	0,165 km²	
	2500 cm² =	250 000 mm² =	0,25 m²	
c)	13,5 dm³ =	13 500 cm³ =	0,0135 m³	
	3,4 m³ =	3 400 000 cm³ =	$3,4 \cdot 10^9$ mm³	
	1,5 km³ =	$1,5 \cdot 10^9$ m³ =	$1,5 \cdot 10^{12}$ dm³	
d)	645 l =	645 dm³ =	6,45 hl	
	3500 ml =	3500 cm³ =	3,5 l	
	8,6 hl =	0,86 m³=	860 l =	860 dm³

2. Kerület- és területszámítási képletek

A Tanulói munkafüzet soron következő összefoglaló táblázatát feladhatjuk önálló feldolgozásra: a gyerekek csoportonként beszéljék meg, hogy melyik síkidomnak miért úgy számítjuk ki a területét, ahogy azt a táblázatba foglalt képletek mutatják! Egy szóvivő minden csoportból számoljon be valamelyik síkidomról!

TUDNIVALÓ:

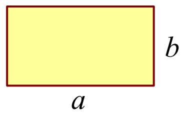
Síkidomok kerülete és területe:

Kerület:
a határoló oldalak hosszainak összege

Terület

Téglalap:

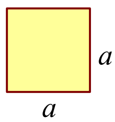
$K = 2 \cdot (a + b)$



$T = a \cdot b$

Négyzet:

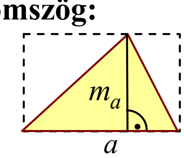
$K = 4 \cdot a$



$T = a^2$

Háromszög:

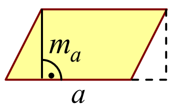
$K = a + b + c$



$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$

Paralelogramma:

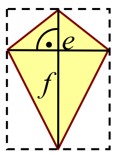
$K = 2 \cdot (a + b)$



$T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$

Deltoid:

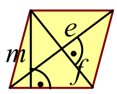
$K = 2 \cdot (a + b)$



$T = \frac{e \cdot f}{2}$

Rombusz:

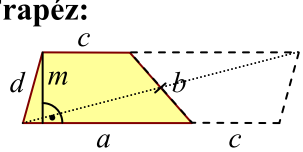
$K = 4 \cdot a$



$T = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot m$

Trapéz:

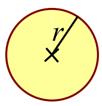
$K = a + b + c + d$



$T = \frac{(a + c) \cdot m}{2}$

Kör:

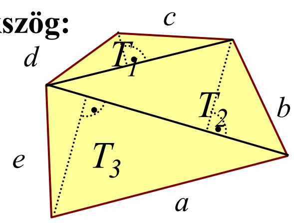
$K = 2 \cdot r \cdot \pi$



$T = r^2 \cdot \pi$

Általános sokszög:

$K = a + b + c + d + e + \ldots$



$T = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots$

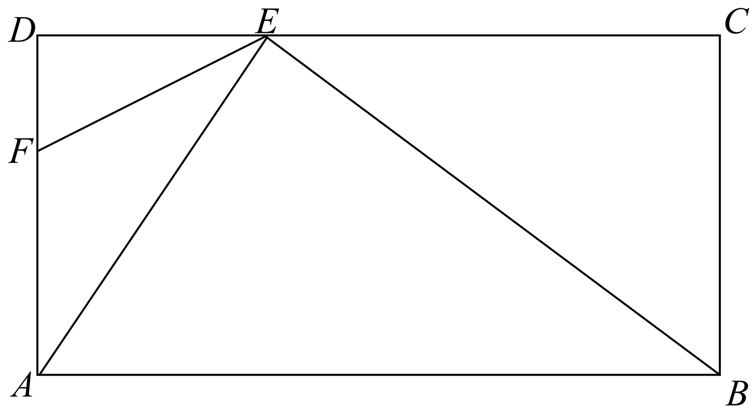
3. Számítási feladatok

Feladjuk az 2. Feladatlapot csoportmunkában. A csoportok tagjai osszák fel egymás között egy-egy feladat részfeladatait, mindenki írja be a saját füzetébe ezeket a részeredményeket, ezután közösen válaszolják meg a feltett kérdéseket, beszéljék meg tapasztalataikat.

2. FELADATLAP

Osszátok fel csoporton belül a következő feladatok részfeladatait, beszéljétek meg tapasztalataitokat, majd közösen válaszoljatok a feltett kérdésekre!

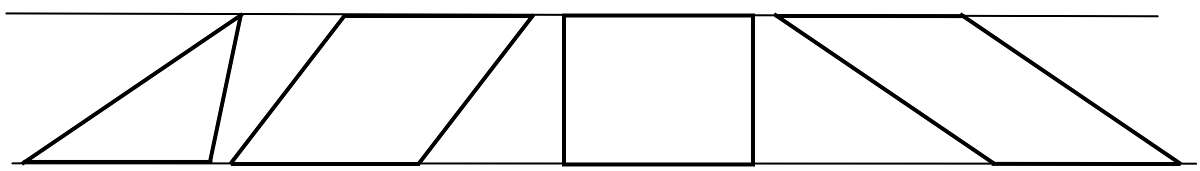
1. Számítsátok ki az ábrán látható $ABE\triangle$, $AEF\triangle$, $FED\triangle$, $BCE\triangle$-ek területét! Mekkora a téglalap területe, és ez hányszorosa az $FED\triangle$ területének? Miért?



$AB = 9$ cm;
$BC = 4{,}5$ cm;
E és F pontok a téglalap oldalait harmadolják.

$T_{ABE\triangle} = 20{,}25\ \text{cm}^2$; $T_{AEF\triangle} = 4{,}5\ \text{cm}^2$; $T_{FED\triangle} = 2{,}25\ \text{cm}^2$; $T_{BCE\triangle} = 13{,}5\ \text{cm}^2$;
$T_{\text{téglalap}} = 40{,}5\ \text{cm}^2$; $T_{\text{téglalap}} = 18 \cdot T_{FED\triangle}$

2. A következő síkidomok csúcsai két párhuzamos egyenesre esnek. Számítsd ki a síkidomok területét! A számításhoz szükséges adatokat méréssel állapítsd meg!



2,5 cm² 5 cm² 5 cm² 5 cm²
mindegyik síkidomra: $a = 2{,}5$ cm; $m_a = 2$ cm

3. Mekkora a rombuszok magassága, ha kerületük 20 cm és területük:
$T_1 = 25\ \text{cm}^2$; $T_2 = 20\ \text{cm}^2$; $T_3 = 15\ \text{cm}^2$; $T_4 = 10\ \text{cm}^2$?
$m_1 = 5$ cm; $m_2 = 4$ cm; $m_3 = 3$ cm; $m_4 = 2$ cm.

4. Négyzet alakú telek kerítése 460 m hosszú. Hány hektár a területe?
$a = 115$ m; $T = 13225\ \text{m}^2 = 1{,}3225$ ha

Óra végén a csoportok beszámolnak munkájuk tapasztalatairól. Házi feladatnak a Feladatgyűjtemény ad válogatási alkalmat differenciálásra.

II. Felszín-, térfogatszámítás

1. Felszín- és térfogatszámítási képletek

A tanár az órai munkához testeket, hálózatokat készít elő: a szertárban található testekből, a sík- és térmértani készletből összeállítva, otthonról, napköziből, stb. behozott építőkockákból. A házi feladat ellenőrzése után, bemelegítésként, stafétajáték következhet. Mondjanak a gyerekek igaz állításokat a tanár által felmutatott testek vagy hálózatok – kocka, téglatest, hasáb illetve henger – tulajdonságairól!
Ültessük a tanulókat tudásuk szerint differenciált négyes csoportokba!
Először ismételjük át – a Tanulói munkafüzet összefoglaló táblázatának segítségével – a testek felszínéről és térfogatáról tanultakat!

TUDNIVALÓ:

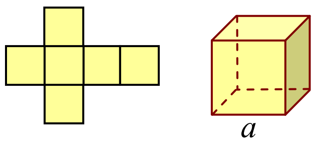
Testek felszíne, térfogata

Felszín:
a határoló lapok területeinek összege

Térfogat

Kocka:

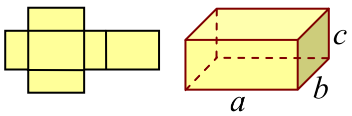
$A = 6 \cdot a^2$



$V = a^3$

Téglatest:

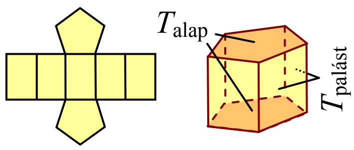
$A = 2 \cdot (ab + bc + ac)$



$V = a \cdot b \cdot c$

Hasáb:

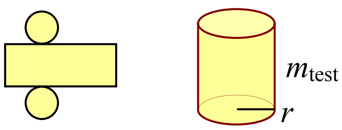
$A = 2 \cdot T_{alap} + T_{palást}$



$V = T_{alap} \cdot m_{test}$

Henger:

$A = 2 \cdot T_{alap} + T_{palást} =$
$= 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi \cdot m_{test}$



$V = T_{alap} \cdot m_{test} =$
$r^2\pi \cdot m_{test}$

Ezután minden csoport kapjon először egy téglatestet, majd hasábot és hengert. A 3. Feladatlap utasításai szerint járjanak el.
Az 1. feladatban mérjék meg a téglatest éleit, rajzolják le vázlatosan a hálózatát, számítsák ki a felszínét és térfogatát, a munkát és tapasztalataikat megosztva. Mindenkinek minden kerüljön be a munkafüzetébe. A jobb csoportok tanulói önállóan oldják meg a 2. feladatot is, a megoldást beszéljék meg csoporttársaikkal!
A tanár körbejárva ellenőriz; azon csoportoknak, amelyek elkészültek az eddigiekkel, kiosztja a 3. feladat eszközeit, 1 hasábot és 1 hengert. A gyerekek párban dolgozhatnak: egyik pár a hengerrel, másik a hasábbal. Mérjék le a test jellemző adatait, számítsák ki térfogatát, majd kölcsönösen ellenőrizzék a másik pár megoldásait: így minden testtel mindenki foglalkozzon. Csak a gyorsabban haladó csoportokban lévő pároktól kérjük a testek felszínének kiszámítását is (3.c).

A feladatlap további 3 feladatával óra végéig foglalkozhatnak, közös vagy önálló munkában. Az elkészültek ellenőrzése történjen frontális megbeszéléssel. Házi feladatnak adhatjuk a feladatlap meg nem oldott részeit, vagy válogathatunk a Feladatgyűjteményből is, differenciáltan.

2. Számítási feladatok

3. FELADATLAP

1. Csoportban dolgozzatok! Tanárotoktól kaptok egy téglatestet. Mérjétek meg a kapott téglatest éleit, rajzoljatok róla vázlatos hálózatot, számítsátok ki a felszínét és térfogatát!

2.

a) Egy kocka felszíne 96 cm². Mekkora a térfogata? $V = 64\ \text{cm}^3$

b) Egy kocka térfogata 125 cm³, mekkora a felszíne? $A = 150\ \text{cm}^2$

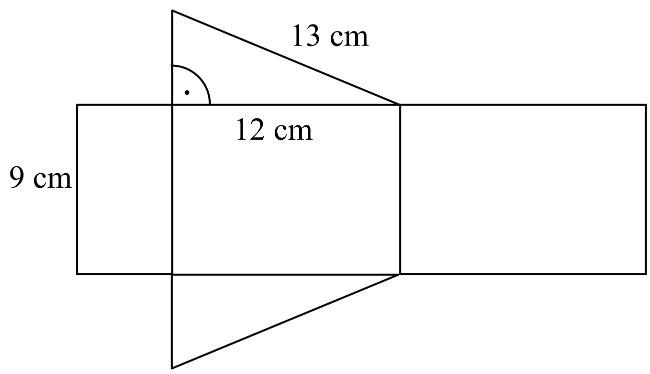
3. Tanárotoktól most egy hasábot és egy hengert kaptok. Párban dolgozzatok: egyik pár a hasábbal, másik pár a hengerrel! Ha elkészültetek, kölcsönösen ellenőrizzétek egymás megoldását!

a) Számítsátok ki a kapott hasáb térfogatát, a szükséges adatokat méréssel állapítsátok meg!

b) Számítsátok ki a kapott henger térfogatát, a szükséges adatokat méréssel állapítsátok meg!

c) A kapott test felszínét is számítsátok ki; ha szükséges, végezzetek pótlólagos méréseket!

4. Milyen test hálózata ez? Számítsd ki a test térfogatát!



Derékszögű háromszög alapú hasáb.

Másik befogó: $\sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (cm);

$T_{alap} = 30\ \text{cm}^2$;

$V = 270\ \text{cm}^3$.

5. Négyzetes oszlop magassága 25 cm, térfogata 3,6 dm³. Mekkora az alapéle?

$T_{alap} = 144\ \text{cm}^2$; $a = 12$ cm

6. Mekkora a henger magassága, ha alapterülete 300 cm², térfogata 0,06 m³?

$m = 20$ dm $= 2$ m

III. Szöveges feladatok

1. Villámkérdések: tulajdonságok, képletek

A házi feladat ellenőrzése után, bemelegítésként villámkérdésekre kérünk írásbeli választ a tanulóktól. 3×4 kérdést teszünk fel.
Az első sorozat előtt megmondjuk, hogy egy számmal, vagy mennyiséggel kell válaszolni a kérdésekre:

– Hány fok a trapéz belső szögeinek összege?
– Egy paralelogramma egyik szöge 75º, mekkora a szemben lévő szöge?
– Ennyi szimmetriatengelye van a négyzetnek;
– Ennyi szimmetriaközéppontja van a szabályos háromszögnek.
360º; 75º; 4; 0

A második sorozatban egy-egy geometriai alakzat nevével válaszoljanak:

– Hogy nevezzük egy szög száraitól egyenlő távolságra lévő pontok halmazát?
– Melyik az a háromszög, amelyiknek 3 szimmetriatengelye van?
– Melyik négyszögnek van 2 pár párhuzamos oldala?
– Melyik testnek van a határolólapjai között kör?
szögfelező; szabályos háromszög; paralelogramma; henger

A harmadik kérdéssorozatban képleteket kérjünk válaszként!

Hogyan számítjuk ki:

– a paralelogramma kerületét?
– a kocka felszínét?
– a deltoid területét?
– a téglatest térfogatát?

$2(a+b)$; $6a^2$; $\frac{e \cdot f}{2}$; $a \cdot b \cdot c$

Ellenőrzéskor kérdéssorozatonként felolvassuk a helyes válaszokat, és javítjuk az esetleges hibákat.
Jutalmazhatjuk a jó eredményt elérőket.

2. A tanult ismeretek alkalmazása gyakorlati szöveges feladatokban

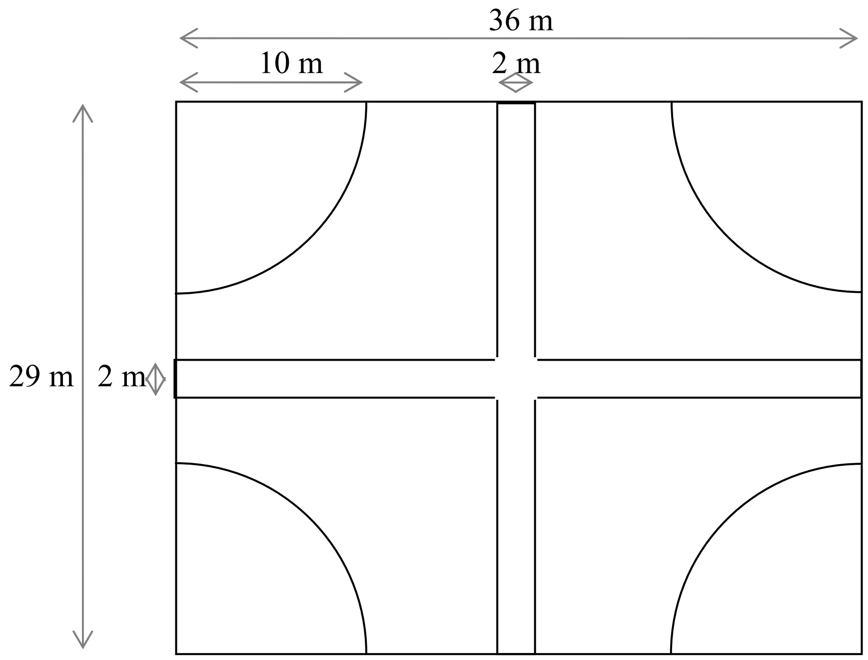
A 4. Feladatlap a tanulók terület-, felszín- és térfogatszámításra vonatkozó ismereteinek alkalmazása szöveges feladatokon keresztül. A gyerekek 4-es csoportokban dolgozzanak, megbeszélve a feladatmegoldás folyamatát: kérjük, hogy írják is le füzetükbe a megoldási terveiket! A tanár a tanulók eddigi munkáját ismerve válassza ki, hogy a heterogén vagy a differenciált csoportokba osztás alkalmasabb-e számukra.
A csoportok saját tempójukban, önállóan dolgozhatnak az óra végéig. Közben, ha szükséges, tanári segítséget is kérhetnek, valamint ellenőrizhetik munkájukat az írásvetítőre feltett 2.tanári melléklet: ellenőrző fólia segítségével.

2. tanári melléklet – lásd a modul eszközei közt!

Jó lenne, hogyha az első négy feladatot mindenki megoldaná – de legalábbis legyen feladatterve, hogy otthon be tudja fejezni a munkát. Az 5-6. feladatot a jobbaktól kérjük.

4. FELADATLAP

1. Egy téglalap alakú díszpark füvesített, a négy sarkában található virágágyak ill. a rajta áthaladó, 2 m széles utak kivételével. Mekkora a füves terület?



$T_{\text{Park}} = 29 \cdot 36 = 1044\ (\text{m}^2);$

$T_{\text{út}} = 2 \cdot (29 + 36 - 2) = 126\ (\text{m}^2);$

$T_{\text{virág}} = 10^2 \cdot \pi \approx 314{,}16\ (\text{m}^2);$

$T_{\text{fű}} = T_{\text{Park}} - T_{\text{út}} - T_{\text{virág}} \approx 603{,}84\ \text{m}^2 \approx 604\ (\text{m}^2)$ vagy

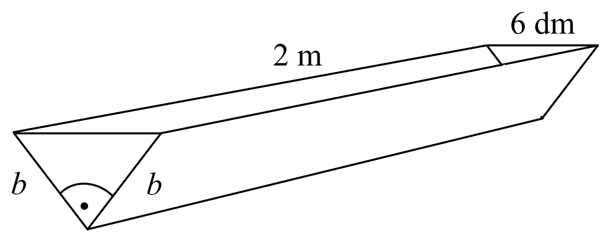
$T_{\text{fű}} = T_{\text{utak nélküli parknegyed}} \cdot 4 = (13{,}5 \cdot 17 - \frac{10^2 \cdot \pi}{4}) \cdot 4$ vagy

$T_{\text{fű}} = 27 \cdot 34 - 10^2 \cdot \pi$

2. Egy felújítandó szoba 5,2 m hosszú, 4 m széles, 2,8 m magas. Mekkora falfelületet kell lefesteni, ha az ajtó és az ablakok 6 m²-t foglalnak el? A 60 m³-es helyiség fűtésére tervezett radiátor elég-e ennek a szobának a bemelegítéséhez?
falfelület: 51,52 – 6 = 45,52 (m²); V = 58,24 m³ – tehát elég.

3.a) Mekkora egy 6 dm átfogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög területe?
(átfogó)² = 2 · (befogó)² = 36 (dm²); $T_{\triangle} = 9\ \text{dm}^2$

b) Itatóvályú keresztmetszete egyenlőszárú derékszögű háromszög, amelynek átfogója (a vályú szélessége) 6 dm. Hány liter víz fér a 2 m hosszú vályúba?



$V = 180\ \text{dm}^3 = 180\ \text{l}$

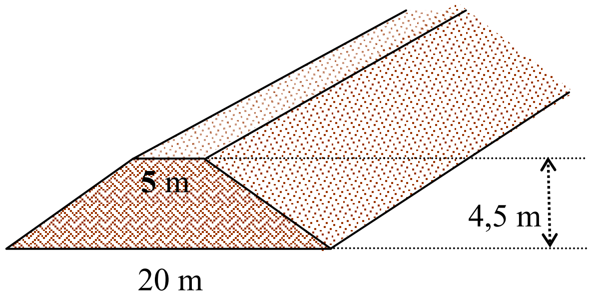
4. Mit gondolsz, hány liter leves készül a fazékban, amelynek magassága 20 cm, alapkörének átmérője 1,8 dm és $\frac{4}{5}$ részéig lehet megtölteni ?

$V = 0,9^2 \cdot \pi \cdot 1,6 \approx 4,071\ (\mathrm{dm}^3) \approx 4\ (\mathrm{l})$

5. Hány m² lemez kell egy 3,5 m magas, 1,5 m átmérőjű hirdetőoszlop palástjának elkészítéséhez?

$T_{\text{palást}} = d \cdot \pi \cdot m \approx 16,5\ (\mathrm{m}^2)$

6. A folyómenti gát trapéz keresztmetszetű. Alul 20 m, felül 5 m széles, 4,5 m magas. Mennyi földet kellett a 2 km hosszú gáthoz beépíteni?
$V = (20 + 5) \cdot 4,5 : 2 \cdot 2000 = 112\ 500\ (\mathrm{m}^3)$



IV. Összefoglalás, gyakorlás

Ez az óra gyakorlásra, alkalmazásra szolgál, ezért összetettebb feladatokat is tartalmaz. Felelevenít sokszög tulajdonságokat, alapszerkesztéseket, kerület-, terület-, felszín-, térfogatszámításokat.

(Ha szükséges, felhasználható arra is, hogy a lassabban haladó tanulóink gyakorlatot szerezzenek az alapszerkesztésekben, kerület,– terület,– felszín,– térfogatszámításban, mértékváltásban. Akár gyerekre szabott feladatokat is készíthetünk, vagy csoportoknak azonos gyakorolnivalókat adhatunk.)

1. Állítások igazságának eldöntése

5. FELADATLAP

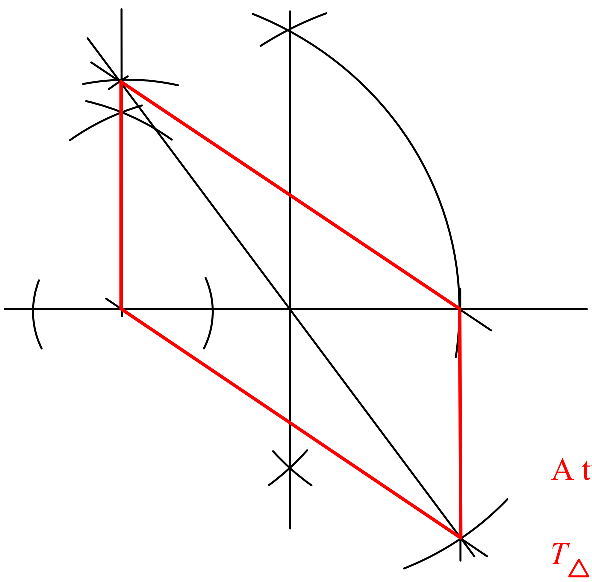
1. Döntsd el, hogy igazak vagy hamisak a következő állítások! Véleményedet indokold! Hamis állítás esetén ellenpéldával is indokolhatsz.

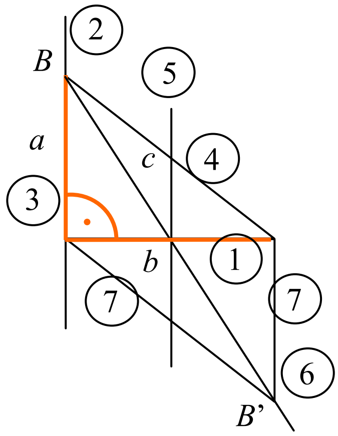
a) A szabályos háromszög középpontosan szimmetrikus. Hamis, minden csúccsal szemben oldal van.
b) Minden téglalap trapéz. Igaz, a téglalapnak van párhuzamos oldalpárja.
c) A deltoid átlói felezik egymást. Hamis, a szimmetria átló nem mindig felezi a másik átlót.
d) Ha a deltoid átlói felezik egymást, akkor az rombusz. Igaz, a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást.
e) Minden háromszög köré írható kör. Igaz, az oldalfelező merőlegesek metszéspontja egyenlő távolságra van mindhárom csúcsponttól.
f) Van olyan paralaelogramma, amelynek minden oldala egyenlő. Igaz, a rombusz.
g) Ha egy négyszög minden oldala egyenlő, akkor az négyzet. Hamis, ellenpélda a rombusz.

h) Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor tengelyesen is szimmetrikus.
Hamis, ellenpélda a paralelogramma.

2. Szerkesztés tükrözéssel és kerület-, területszámítás

2. Szerkessz derékszögű háromszöget a = 3 cm, b = 4,2 cm adatokkal! Tükrözd a háromszöget b oldal felezőpontjára! Milyen négyszöget kaptál? Határozd meg a kerületét és a területét!





A tükrözéssel paralelogrammát kaptam.

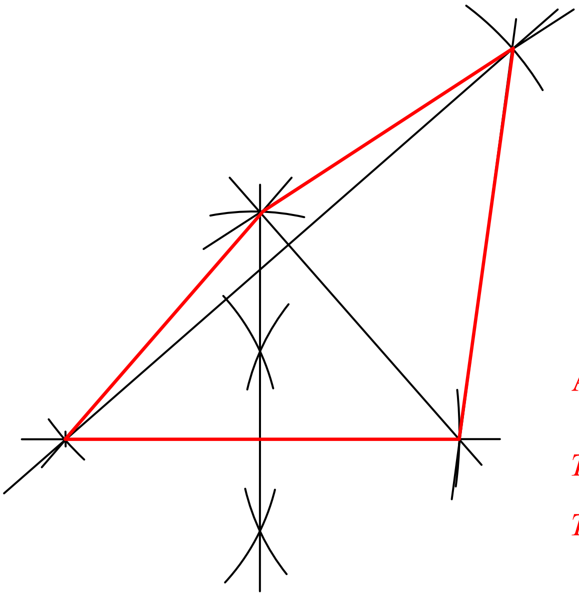
$$T_{\triangle} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{3 \cdot 4,2}{2} = 6,3\ (\text{cm}^2)$$

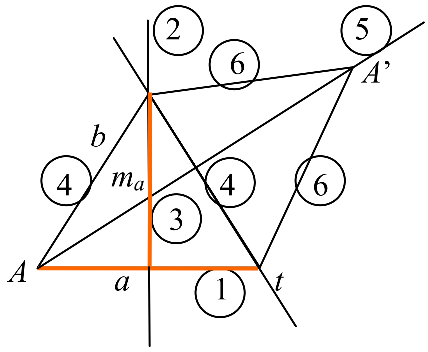
$$T_{\text{paralelogramma}} = 2 \cdot T_{\triangle} = 2 \cdot 6,3 = 12,6\ (\text{cm}^2)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \approx 5,16\ (\text{cm})$$

$$K_{\text{paralelogramma}} = 2 \cdot (a + c) \approx 2 \cdot (3 + 5,16) = 16,32\ (\text{cm})$$

3. Szerkessz egyenlőszárú háromszöget, ha alapja a = 52 mm, m_a = 3 cm! Tükrözd a háromszöget az egyik szárára! Milyen négyszöget kaptál? Határozd meg a kerületét és a területét!





A tükrözéssel deltoidot kaptam.

$$T_\Delta = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{5,2 \cdot 3}{2} = 7,8\ (\text{cm}^2)$$

$$T_{\text{deltoid}} = 2 \cdot T_\Delta = 2 \cdot 7,8 = 15,6\ (\text{cm}^2)$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + {m_a}^2} \approx 3,97 \approx 4\ (\text{cm})$$

$$K_{\text{deltoid}} = 2 \cdot (a + b) \approx 2 \cdot (5,2 + 4) = 18,4\ (\text{cm})$$

3. Hosszadatok számítása kerületből, területből

4. Számítsd ki a síkidomok hiányzó adatait!

síkidom	hosszadatok	kerület	terület
kör	r = 3,5 cm	≈ 22 cm	≈ 38,5 cm^2
kör	r = 2 cm	≈ 12,6 cm	≈ 12,6 cm^2
négyzet	o = 4,4 cm	17,6 cm	1936 cm^2
négyzet	o = 1,7 dm	6,8 dm	2,89 dm^2
téglalap	a = 5,6 cm b = 3,2 cm	17,6 cm	17,92 cm^2
szabályos háromszög	a = 4 cm	12 cm	≈ 6,9 cm^2

4. Szöveges feladatok: tégatest, kocka

5. Egy téglatest alakú akvárium méretei: a = 25,2 cm; b = 4 dm; c = 32 cm. Mennyi üveget használtak a készítéséhez? (Nincs teteje.) Hány liter víz fér bele?
$A \approx 5181\ \text{cm}^2 \approx 51{,}8\ \text{dm}^2$; $V = 32\,256\ \text{cm}^3 \approx 32{,}3\ \text{dm}^3 = 32{,}3\ \text{l}$

6. Mekkora a tömege egy 6 cm élű fakockának? A fa sűrűsége: $\rho = 0{,}8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.
$V = 216\ \text{cm}^3$, $m = 172{,}8\ \text{g}$

V. Felmérő dolgozat írása

Az óra célja a témakörben átismételt anyagrész tudásának ellenőrzése: háromszögek, négyszögek ismerete, szerkesztése, kerület- és területszámítási feladatok megoldása, hasáb és henger térfogatának kiszámítása.
A dolgozat A és B csoportokra készült. A feladatok megoldása mellett javasolt pontszámokat is adunk.

FELMÉRŐ Név:____________________

8. évfolyam, Geometriai ismétlés

A CSOPORT

1. Döntsd el, hogy igazak, vagy hamisak a következő állítások! Hamis állítás esetén mondj ellenpédát, vagy indokold véleményedet!

a) Az egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei legfeljebb 90°-osak.

b) Ha egy deltoid középpontosanszimmetrikus, akkor az négyzet.

c) Minden négyzet trapéz.

d) Ha egy paralelogramma átlói egyenlő hosszúak, akkor az téglalap.

2. Szerkessz rombuszt, amelynek oldala 4,2 cm és egyik szöge 45°! A még szükséges adatok mérésével számítsd ki a kerületét, területét!

$a = 4,2$ cm
$\alpha = 45°$

3. A következő feladatban geometriai alakzatok nevei, valamint terület- és térfogatképletek szerepelnek. Kösd össze az összetartozókat!

Téglalap	$\frac{a \cdot m_a}{2}$
Négyzetes hasáb	$a \cdot m_a \cdot m_{test}$
Háromszög	$a^2 \cdot m_{test}$
Paralelogramma alapú hasáb	$\frac{e \cdot f}{2}$
Téglatest	$a \cdot b \cdot c$
Rombusz	$a \cdot b$

4. Egy kisüzem víztárolót épít. Két terv közül kell választania. Mindkét tervben a tároló magassága 5 m, de az egyik egy 1,6 m átmérőjű henger, a másik pedig négyzetes hasáb formájú, amelynek alapéle 1,42 m. Melyiket válasszák, melyik tárolóba férne több víz?

FELMÉRŐ Név:______________________

8. évfolyam, Geometriai ismétlés

B CSOPORT

1. Döntsd el, hogy igazak, vagy hamisak a következő állítások! Hamis állítás esetén mondj ellenpédát, vagy indokold véleményedet!

a) Az egyenlőszárú háromszög szárszöge nem lehet tompaszög.

b) Ha egy deltoid középpontosan szimmetrikus, akkor az rombusz.

c) Minden egyenlőszárú trapéz paralelogramma.

d) Ha egy paralelogramma átlói nem egyenlő hosszúak, akkor az nem lehet téglalap.

2. Szerkessz paralelogrammát, amelynek oldalai 4,1 cm és 5,5 cm, egyik szöge 30°! A még szükséges adatok mérésével számítsd ki a kerületét, területét!

a = 4,1 cm
b = 5,5 cm
α = 30°

3. A következő feladatban geometriai alakzatok nevei, valamint terület- és térfogatképletek szerepelnek. Kösd össze az összetartozókat!

Négyzet	$r^2\pi \cdot m_{test}$
Háromszög alapú hasáb	$\frac{e \cdot f}{2}$
Henger	$\frac{a \cdot m_a}{2} \cdot m_{test}$
Deltoid	$a \cdot m_a$
Kocka	a^3
Paralelogramma	a^2

4. Egy 50 cm átmérőjű, 5 m hosszú hengerfából téglalap keresztmetszetű gerendát faragtak. A gerenda két szélességmérete 25 cm és 32 cm. A gerenda készítése közben hány m³ fa forgácsolódott el?

FELMÉRŐ (MEGOLDÁSOK) Név:________________________

8. évfolyam, Geometriai ismétlés

A CSOPORT

1. Döntsd el, hogy igazak, vagy hamisak a következő állítások! Hamis állítás esetén mondj ellenpéldát, vagy indokold véleményedet!

a) Az egyenlőszárú háromszög alapon fekvő szögei legfeljebb 90°-osak. H, $\alpha < 90°$ mindig

b) Ha egy deltoid középpontosanszimmetrikus, akkor az négyzet. Hamis, például rombusz

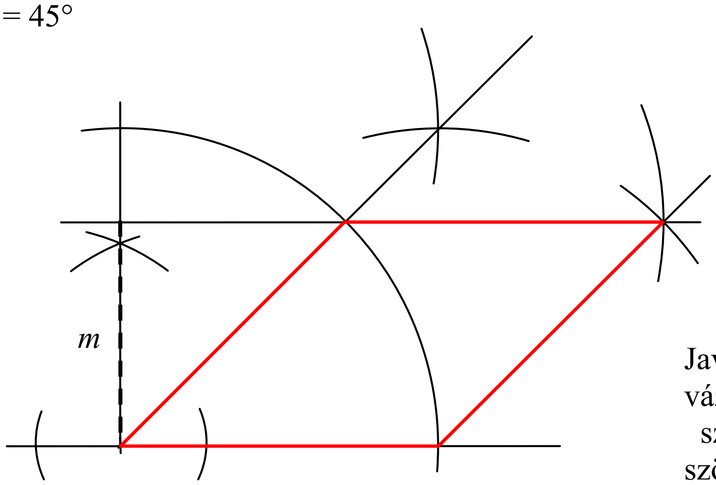
c) Minden négyzet trapéz. I

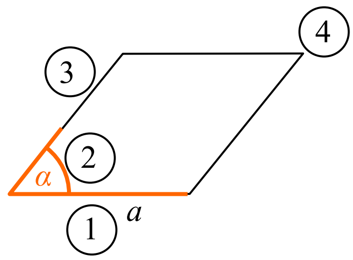
d) Ha egy paralelogramma átlói egyenlő hosszúak, akkor az téglalap. I

6 pont

2. Szerkessz rombuszt, amelynek oldala 4,2 cm és egyik szöge 45°! A még szükséges adatok mérésével számítsd ki a kerületét, területét!

$a = 4{,}2$ cm
$\alpha = 45°$





$K = 4 \cdot a = 16{,}8$ (cm)

$m \approx 3$ cm (mért adat)

$T = a \cdot m \approx 4{,}2 \cdot 3 \approx 12{,}6$ (cm^2)

Javasolt pontszám:

vázlatrajz, szerkesztés menete:	2 pont
szögszerkesztés,rombusz:	2 pont
kerület:	2 pont
magasság mérése:	1 pont
terület: képlet, számítás, jó eredmény:	2 pont
összesen:	**9 pont**

3. A következő feladatban geometriai alakzatok nevei, valamint terület- és térfogatképletek szerepelnek. Kösd össze az összetartozókat!

6 pont

Téglalap	$\frac{a \cdot m_a}{2}$
Négyzetes hasáb	$a \cdot m_a \cdot m_{test}$
Háromszög	$a^2 \cdot m_{test}$
Paralelogramma alapú hasáb	$\frac{e \cdot f}{2}$
Téglatest	$a \cdot b \cdot c$
Rombusz	$a \cdot b$

4. Egy kisüzem víztárolót épít. Két terv közül kell választania. Mindkét tervben a tároló magassága 5 m, de az egyik egy 1,6 m átmérőjű henger, a másik pedig négyzetes hasáb formájú, amelynek alapéle 1,42 m. Melyiket válasszák, melyik tárolóba férne több víz?

6 pont

$V_{\text{henger}} = r^2\pi \cdot m = 0,8^2 \cdot \pi \cdot 5 \approx 10,0531 \ (\text{m}^3)$

$V_{\text{négyzetes hasáb}} = a^2 \cdot m = 1,42^2 \cdot 5 = 10,082 \ (\text{m}^3)$

A négyzetes hasáb alakúba ≈ 30 l-rel fér több víz, ez elhanyagolható különbség, tehát ebből a szempontból mindegy, hogy melyiket választják.

FELMÉRŐ (MEGOLDÁSOK) Név:____________________

8. évfolyam, Geometriai ismétlés

B CSOPORT

1. Döntsd el, hogy igazak, vagy hamisak a következő állítások! Hamis állítás esetén mondj ellenpéldát, vagy indokold véleményedet!

a) Az egyenlőszárú háromszög szárszöge nem lehet tompaszög. Hamis, pl. lehet 100°-os

b) Ha egy deltoid középpontosan szimmetrikus, akkor az rombusz. I

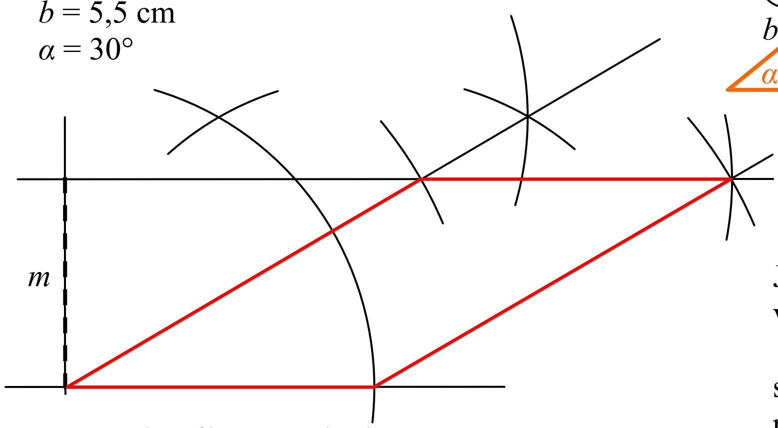
c) Minden egyenlőszárú trapéz paralelogramma. Hamis, pl. szimmetrikus trapéz

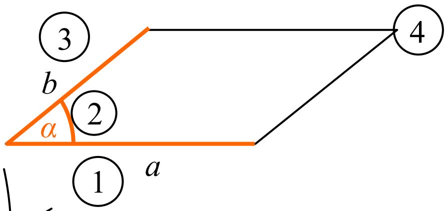
d) Ha egy paralelogramma átlói nem egyenlő hosszúak, akkor az nem lehet téglalap. I

6 pont

2. Szerkessz paralelogrammát, amelynek oldalai 4,1 cm és 5,5 cm, egyik szöge 30°! A még szükséges adatok mérésével számítsd ki a kerületét, területét!

$a = 4{,}1$ cm
$b = 5{,}5$ cm
$\alpha = 30°$





$K = 2 \cdot (a + b) = 19{,}2$ (cm)

$m \approx 2{,}8$ cm (mért adat)
$T = a \cdot m \approx 4{,}1 \cdot 2{,}8 \approx 11{,}5$ (cm^2)

Javasolt pontszám:

vázlatrajz, szerkesztés menete:	2 pont
szögszerkesztés, paralelogramma:	2 pont
kerület:	2 pont
magasság mérése:	1 pont
terület: képlet, számítás, jó eredmény:	2 pont
összesen:	**9 pont**

3. A következő feladatban geometriai alakzatok nevei, valamint terület- és térfogatképletek szerepelnek. Kösd össze az összetartozókat!

6 pont

Négyzet	$r^2\pi \cdot m_{test}$
Háromszög alapú hasáb	$\frac{e \cdot f}{2}$
Henger	$\frac{a \cdot m_a}{2} \cdot m_{test}$
Deltoid	$a \cdot m_a$
Kocka	a^3
Paralelogramma	a^2

4. Egy 50 cm átmérőjű, 5 m hosszú hengerfából téglalap keresztmetszetű gerendát faragtak. A gerenda két szélességmérete 25 cm és 32 cm. A gerenda készítése közben hány m³ fa forgácsolódott el?

6 pont

$V_{\text{henger}} = r^2\pi \cdot m = 0,25^2 \cdot \pi \cdot 5 \approx 0,982\ (\text{m}^3)$

$V_{\text{téglatest}} = a \cdot b \cdot m = 0,25 \cdot 0,32 \cdot 5 = 0,4\ (\text{m}^3)$

$V_{\text{faforgács}} = V_{\text{henger}} - V_{\text{téglatest}} \approx 0,582\ (\text{m}^3)$

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Pótold a hiányzó mérőszámokat, kitevőket!

a)	62,5	km	=	62 500	m	=	625 000	dm			
	0,1845	km	=	184,5	m	=	18 450	cm			
	246	mm	=	24,6	cm	=	0,246	m			
	4,25	km	=	$4{,}25\cdot10^3$	m	=	$4{,}25\cdot10^6$	mm			
	$5{,}2\cdot10^{-3}$	km	=	$5{,}2\cdot10^0$	m	=	$5{,}2\cdot10^3$	mm			
b)	3,5	m^2	=	350	dm^2	=	35 000	cm^2			
	5	ha	=	50 000	m^2	=	5 000 000	dm^2			
	1,25	km^2	=	125	ha	=	1 250 000	m^2			
	3,6	km^2	=	$3{,}6\cdot10^2$	ha	=	$3{,}6\cdot10^6$	m^2	=	$3{,}6\cdot10^8$	dm^2
	$8{,}1\cdot10^{-2}$	km^2	=	$8{,}1\cdot10^0$	ha	=	$8{,}1\cdot10^4$	m^2	=	$8{,}1\cdot10^6$	dm^2
c)	6,3	m^3	=	6 300	dm^3	=	6 300 000	cm^3			
	0,042	m^3	=	42	dm^3	=	42 000 000	mm^3			
	1,5	l	=	1,5	dm^3	=	1500	cm^3	=	1500	ml
	220	cm^3	=	0,22	dm^3	=	0,22	l	=	2,2	dl
	0,75	m^3	=	7,5	hl	=	750	l	=	750	dm^3

2. Egy kép 2 db 33 cm-es és 2 db 19 cm-es szegőléccel van bekeretezve. Mekkora a képet fedő üveglap területe?

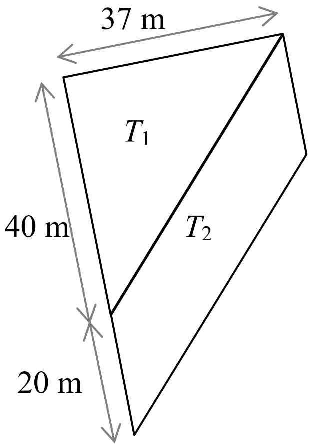
$T = 33\cdot19 = 627\ (\mathrm{cm}^2)$

3. Szerkessz 4 cm oldalú rombuszokat, amelyeknek egy szöge 30°, 60°, 90°, 150°! Húzd meg a magasságokat, és számítsd ki a területüket! Mit tapasztalsz?

$m_1 = m_4 = 2$ cm; $m_2 = 3{,}3$ cm; $m_3 = 4$ cm;

$T_1 = T_4 = 8\ \mathrm{cm}^2$; $T_2 = 13{,}2\ \mathrm{cm}^2$; $T_3 = 16\ \mathrm{cm}^2$

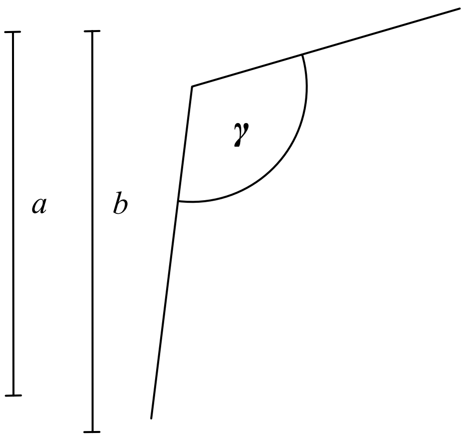
4. Egy paralelogramma és egy derékszögű háromszög alakú telek illeszkedik egymáshoz az ábrán látható módon. Hasonlítsd össze a területüket!

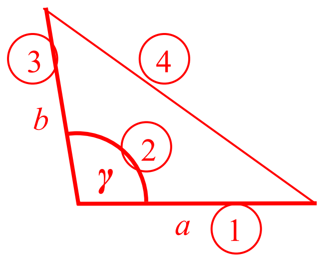


$$T_1 = \frac{\overset{20}{\cancel{40}} \cdot 37}{\cancel{2}} = 20 \cdot 37 = 740\ (\text{m}^2)$$

$$T_2 = 20 \cdot 37 = 740\ (\text{m}^2) \qquad T_1 = T_2$$

5. Szerkessz háromszöget az alábbi oldalakkal és szöggel, húzd be az egyik magasságot is, majd mérd meg a szükséges adatokat, és számítsd ki a háromszög kerületét, területét!





$a = 4{,}8$ cm; $b = 5{,}3$ cm

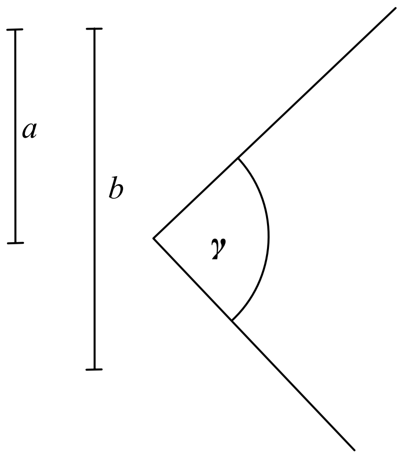
Szerkesztési-, mérési pontatlanságtól ill. a kerekítésektől függő eredmények:

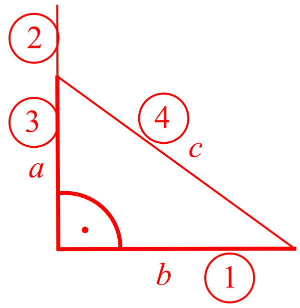
$c \approx 8{,}4$ cm; $m_a \approx 4{,}8$ cm; $m_b \approx 4{,}3$ cm

$K = a + b + c \approx 4{,}8 + 5{,}3 + 8{,}4 \approx 18{,}5$ (cm)

$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} \approx \frac{4{,}8 \cdot 4{,}8}{2} \approx 11{,}5\ (\text{cm}^2) \quad \text{vagy} \quad T = \frac{b \cdot m_b}{2} \approx \frac{5{,}3 \cdot 4{,}3}{2} \approx 11{,}4\ (\text{cm}^2)$$

6. Szerkessz háromszöget az alábbi oldalakkal és szöggel: a = 2,8 cm; b = 4,5 cm; γ = 90°! Számítsd ki az átfogót és a háromszög kerületét, területét!





$a = 2{,}8$ cm; $b = 4{,}5$ cm;

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7{,}84 + 20{,}25} = \sqrt{28{,}09} = 5{,}3$ (cm);

$K = a + b + c = 2{,}8 + 4{,}5 + 5{,}3 = 12{,}6$ (cm); $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot b}{2} = 6{,}3$ (cm^2)

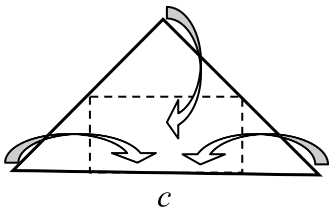
7. Szerkessz húrtrapézt, ha AB = 6 cm, DC = 3 cm, α = 60º! Számítsd ki a kerületét, területét!
$m \approx 2{,}6$ cm; $K = 15$ cm; $T \approx 11{,}7$ cm²

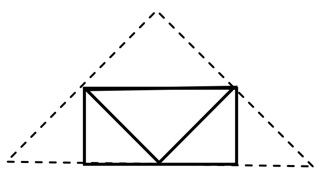
8. A táblázat deltoidokra vonatkozó adatokat tartalmaz. Számítsd ki a hiányzó adatokat!

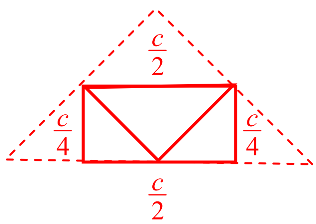
e	3 cm	5 m	360 mm	1,2 dm
f	48 mm	32 dm	0,5 m	1,2 dm
T	7,2 cm²	8 m²	9 dm²	72 cm²

9. Egy ház tűzfala trapéz alakú. Párhuzamos oldalai 8 m és 9,8 m, a köztük lévő távolság 5,6 m. Mennyi habarcs kell a bevakolásához, ha m²- enként 30 kg habarcsra van szükség?
$T = 49{,}84$ m²; 1495,2 kg ≈ 1,5 t habarcs.

10. Egy egyenlőszárú derékszögű háromszög alakú papírlap három sarkát behajtjuk az ábrán látható módon. Mekkora a kapott téglalap kerülete, ha a háromszöglap átfogója c = 4 cm?





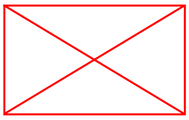


$$K = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} + \frac{c}{4} + \frac{c}{4} = \frac{3}{2} \cdot c = 6 \text{ (cm)}$$

11. Egyenlőszárú háromszög szára 5 cm, az alaphoz tartozó magassága 4 cm. Számítsd ki a háromszög kerületét és területét!
Pitagorasz-tétel $\Rightarrow$ $a/2 = 3$ cm; $K = 16$ cm; $T = 12$ cm²

12. Egy szökőkút medencéje szabályos háromszög alakú, amelynek oldala 15 m hosszú. Mekkora a vízfelület?
Pitagorasz-tétel $\Rightarrow$ $m \approx 12{,}99$ m; $T \approx 97{,}425$ m²

13. Egy téglalap adatai: *átló* = 6 cm; *b* = 3 cm. Szerkesztés és mérés nélkül állapítsd meg, milyen szöget zárnak be az átlói! (Vázlatot készíts!) Állításodat indokold! Mekkora a téglalap kerülete?

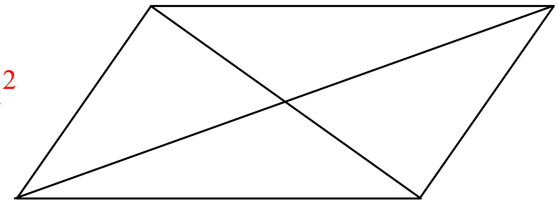


$\beta = 60°$

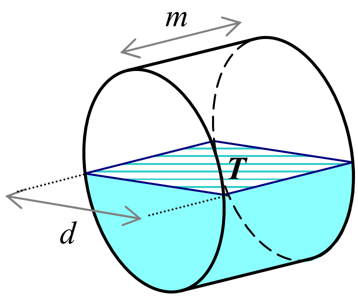
Pitagorasz-tétel $\Rightarrow$ $a \approx 5{,}2$ cm
$K_{\text{téglalap}} \approx 16{,}4\ \text{cm}^2$

14. A paralelogramma egyik oldala 6 cm, a hozzá tartozó magasság pedig 2,4 cm. Átlói a paralelogrammát négy háromszögre osztják. Számítsd ki ezeknek a területét!

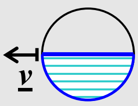
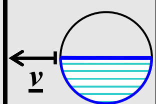
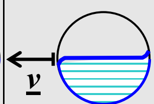
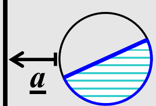
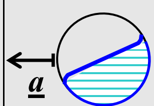
$T_{\text{paralelogramma}} = 14{,}4\ \text{cm}^2$; $T_{\text{háromszög}} = 3{,}6\ \text{cm}^2$



15. Egy oldalán fekvő henger alakú edény félig van tele vízzel. Mekkora az edényben lévő folyadékfelszín területe, ha az alapkör átmérője $d = 14$ cm és a henger magassága is $m = 14$ cm? Milyen négyszöglap alakja van ekkor a folyadékfelszínnek? Változik-e a folyadékfelszín alakja és mérete, ha a henger egyenletes sebességgel, lassan gurul?



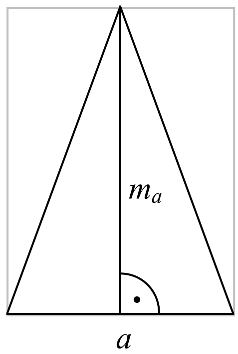
$T = d \cdot m = 14 \cdot 14 = 156\ (\text{cm}^2)$
A folyadékfelszín négyzet alakú. Ha a henger gurul, a folyadékfelszín alakja és mérete nem változik. (Iránya is megmarad "vízszintes"-nek.)

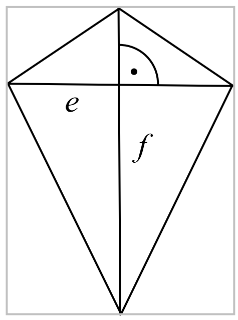
a gördülés \ a henger belső súrlódása		elhanyagolható	nem elh.
állandó sebességű	lassú	 v	
	gyors	 v	 v
egyenletesen gyorsuló		 a	 a

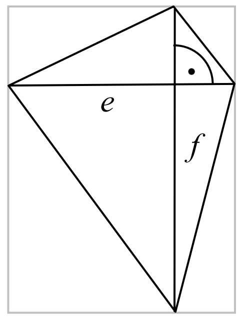
Megjegyzés a Tanárnak:

Fontos a feladat szövegében az „egyenletes sebességgel, lassan" kitétel.
A gyorsuló, valamint a folyadék- és belső hengerfelszín közti nem elhanyagolható súrlódással történő mozgás folyadékfelszín-eseteit – az érdeklődőbb tanulók kedvéért – a táblázat mutatja.

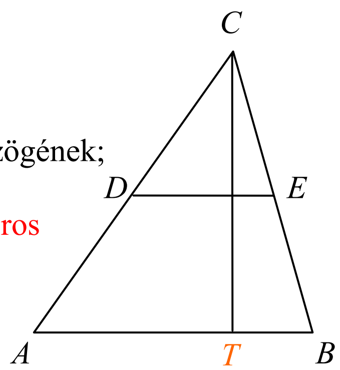
16. Számítsd ki és hasonlítsd össze az ábrákon látható egyenlőszárú háromszög és deltoid területét, ha adataik: a = 3 cm és m_a= 4 cm; ill. e = 3 cm és f = 4 cm! Becsüld meg a harmadik ábra négyszögének területét, ha ennek átlói is merőlegesek, hosszuk is e = 3 cm és f = 4 cm – de egyik sem szimmetriaátló! Ki is tudod számítani a területét?







Mindhárom esetben $T = 6\ \text{cm}^2$.



17. Az ABC háromszögben D és E az oldalakat felezi.

a) Becsüld meg:

– hányszorosa ABC háromszög kerülete és területe a DEC háromszögének;
2-szeres ill. 4-szeres

– hányszorosa $ABED$ trapéz területe a DEC háromszögének? 3-szoros

b) Számold ki területüket, ha AB = 6 cm; m = 40 mm!

$T_{ABC\triangle} = 12\ \text{cm}^2$; $T_{ABED\ \text{trapéz}} = 9\ \text{cm}^2$; $T_{DEC\triangle} = 3\ \text{cm}^2$

c) Számítsd ki a kerületüket is, ha BC = 0,5 dm!

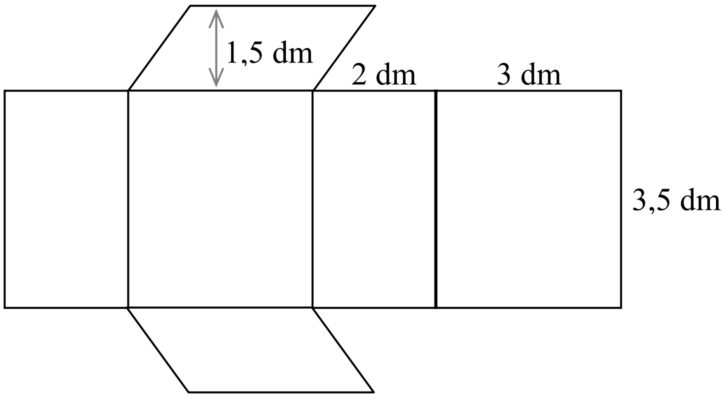
Pitagorasz-tétel $\Rightarrow$ $TB = 3$ cm $\Rightarrow$ $ABC\triangle$ egyenlőszárú $\Rightarrow$ $AC = 5$ cm;

$K_{ABC\triangle} = 16$ cm; $K_{ABED\ \text{trapéz}} = 14$ cm; $K_{DEC\triangle} = 8$ cm

18. Egy kocka lapjának területe 6,25 dm². Mekkora a felszíne és a térfogata? Hányszor akkora annak a kockának a felszíne és a térfogata, amelyiknek éle az eredeti kockáénak 2-szerese, 3-szorosa?

a = 2,5 dm; A = 37,5 dm²; V = 15,625 dm³
a' = 2 · a esetén A' = 4 · A; V' = 9 · V;
a'' = 3 · a esetén A'' = 9 · A; V''= 27 · V.

19. Számítsd ki a hálózattal adott test felszínét és térfogatát! Mi ennek a testnek a neve?



Paralelogramma alapú hasáb.

$A = 2 \cdot 3 \cdot 1,5 + 10 \cdot 3,5 = 44\ (\text{dm}^2)$;

$V = 2 \cdot 3 \cdot 1,5 \cdot 3,5 = 31,5\ (\text{dm}^3)$

20. Egyenlőszárú háromszög alapú hasáb alapháromszögének adatai: b = 17 cm; m_a = 15 cm. A hasáb magassága 22 cm. Számítsd ki a felszínét és a térfogatát!

$\frac{a}{2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$ (cm); $A = 1340\ \text{cm}^2$; $V = 2640\ \text{cm}^3$

21. Hány m³ nyersolaj tölt meg egy olyan távvezetéket, amelynek belső átmérője 24 cm, hosszúsága 200 km?

$V = 0,12^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 10^5 \approx 9047,8\ (\text{m}^3)$