0853. MODUL

GEOMETRIAI ISMÉTLÉS

Terület síkon és gömbön

KÉSZÍTETTE: LÉNÁRT ISTVÁN, SZEREDI ÉVA

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Síkbeli és gömbi területfogalom vizsgálata. Kör területe és kerülete (ismétlés), körcikk területe, körív hossza
Időkeret	2 óra
Ajánlott korosztály	8. osztály
Modulkapcsolódási pontok	Szögekkel, sokszögekkel kapcsolatos fogalmak. Számfogalom, alapműveletek. Tört fogalma, szemléltetése.
A képességfejlesztés fókuszai	Síkbeli és gömbi tájékozódás. Metakogníció, logikus gondolkozás, mérlegelés- és döntésképesség

AJÁNLÁS

A terület fogalma sík és gömb összehasonlító geometriájának egyik leglátványosabb, legdrámaibb, az euklideszi szemlélet számára legmeglepőbb része. A síkbeli területmérési módszerek teljes kudarca, új utak keresése, a gömb tulajdonságainak alaposabb megismerése és kihasználása a gömbi terület mérésénél hatékony eszköz lehet – mint a sík-gömb összehasonlító geometriájával kapcsolatos moduloké általában – a síkbeli területfogalom eredményesebb, mélyebb és gyorsabb elsajátításában.
A síkbeli négyzet csodálatos tulajdonságai olyan geometriában érthetők meg igazán, ahol ilyen alakzat nem található, és más módszert kell keresnünk. Felemelő élmény, hogy a gömbi területfogalom és területmérés végül is nemcsak megvalósíthatónak, de sok tekintetben egyszerűbbnek bizonyul a síkbelinél.
Nagyon fontos eleme a modulnak a számfogalommal, számtani műveletekkel és mindenekelőtt a törtfogalommal kapcsolatos kísérletek, megfigyelések és meggondolások. A gömb valóban legtökéletesebb modellje az egységnek, és a gömbfelület különféle felbontásai a törtfogalom szemléltetésének és megértésének.
A gömbi területmérés remek lehetőséget ad arra, hogy a gyerekek felfedezzék és megértsék a kör középponti szögének és a körcikk területének, valamint a körív hosszának egyenes arányosságát, a közöttük fennálló összefüggéseket.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Lénárt István: Nem euklideszi kalandok a gömbön

ÉRTÉKELÉS

A modul feldolgozása során a szokottnál is erősebb különbségeket tapasztalhatunk gyorsabban és kevésbé gyorsan haladók teljesítménye között. Nagyon sok váratlan, előremutató, jó ötlet születhet, éppen a téma újszerűsége, másszerűsége miatt. Igen fontos, hogy a gyerekek csoportokban dolgozzanak, segítsék egymást, ötleteiket, gondolataikat együttműködve, közösen dolgozzák ki. Tanárként egyszerre kell figyelnünk a kiemelkedő egyéni teljesítmények és a jó együttműködés, jó csapatmunka jutalmazására, a lemaradók bátorítására is.

Törölt: 5

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszközök, Feladatok**
I. Területfogalom a síkon és a gömbön			
1.	Területmérés a síkon	A mérés, elsősorban a területmérés legfontosabb elemeinek felelevenítése, tudatosítása.	Síkbeli szerkesztő-eszközök, 1. feladatlap
2.	Területmérés a gömbön (kísérlet gömbi területegység választása; gömbi alakzatok könnyen meghatározható területtel)	A mérés fogalmának elmélyítése azáltal, hogy egy szokatlan környezetben alkalmazzuk eddigi ismereteinket.	gömbi szerkesztő-eszközök, narancs, olló, alufólia, 2. feladatlap
3.	Új gömbi területegység választása, az eddigi eredmények átfogalmazása	Arányosság fogalmának elmélyítése	3. feladatlap
II. Kör kerülete és területe			
1.	Emlékeztető	A kör kerületéről és területéről tanultak átismétlése,.	4. feladatlap 1.
2.	Kör és részeinek területe különböző, „természetes” egységek választása esetén	A körcikk területének és ívhosszának mérése különböző egységekkel. Analógia a körcikk és a gömbi kétszer derékszögű háromszög között. Tapasztalatszerzés a körcikk területe illetve ívhossza, és a középponti szöge között fennálló egyenes arányosságokról.	4. feladatlap 2., 3. körző, vonalzó
3.	Összefüggés a körcikk területe és a körcikket határoló körív hossza között	Induktív gondolkodás, összefüggések keresése	5. feladatlap

Törölt: 5

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Területfogalom a síkon és a gömbön

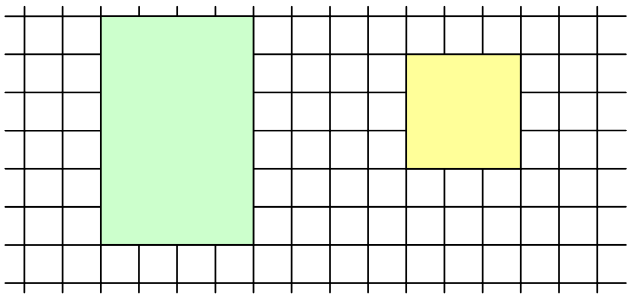
1 Területmérés a síkon

Először felelevenítjük a terület méréséről szerzett legfontosabb ismereteket. Kezdhetjük egy beszélgetéssel:
Tanár: Ha mérni akarunk hosszúságot, időt, súlyt, bármit, mivel kezdjük?
Gyerekek: Egységet választunk.
Tanár: Síkon mit szoktunk területegységnek választani?
Gyerekek: Olyan négyzetet, amelynek minden oldala egység hosszúságú.
Tanár: Hogyan mérünk a területegységgel?
Gyerekek: Hézagmentesen lefedjük az alakzatot vele.

1. FELADATLAP

1. A négyzetháló minden kis négyzetének 1 egységnyi hosszú az oldala, így a területe 1 területegység.
Írjátok az alakzatok mellé, hány hosszúságegység az oldaluk és hány területegység a területük.

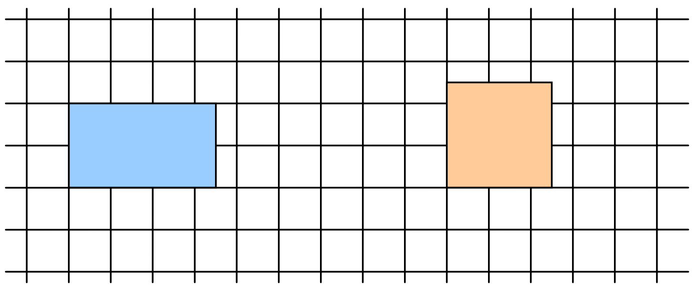
a)



$a = 4$; $b = 6$; $T = 24$ $a = 3$; $T = 9$

A következő néhány feladat megoldása során beszéljük meg, hogy szabad az egységeket darabolni is – például félbevágni, és annak a törtrészeivel is mérhetünk.

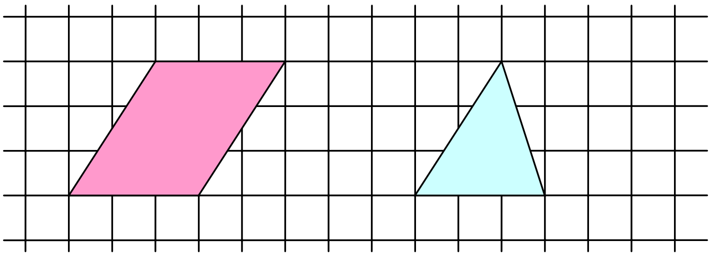
b)



$a = 3.5$; $b = 2$; $T = 7$ $a = 2{,}5$; $T = 6 + \frac{1}{4}$

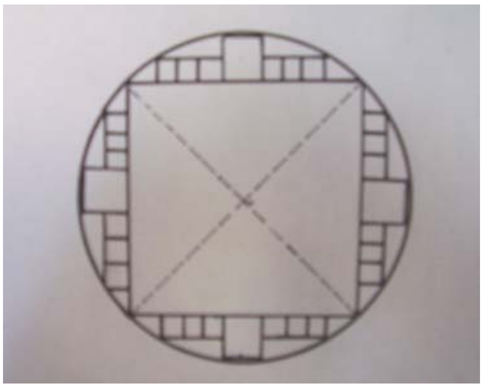
Törölt: 5

2. A következő alakzatokhoz először rajzolj velük egyenlő területű téglalapot, és annak mérd meg a területét a megadott egységgel.



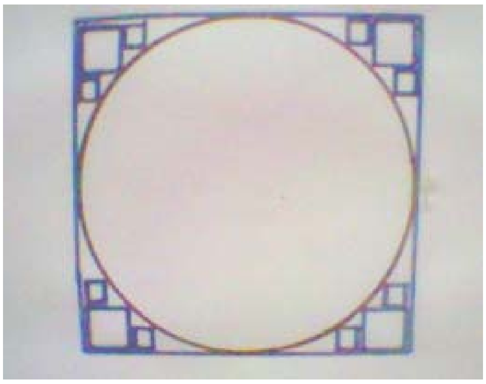
$a = 3$; $m = 3$; $T = 9$ $a = 3$; $m = 3$; $T = 4.5$

Ha egységnégyzetnél kisebb síkbeli területdarabot akarunk megmérni, akkor a négyzet egyik legcsodálatosabb tulajdonsága segít. Az egységnégyzetet könnyen fel tudjuk darabolni négy kisebb, egyenlő területű négyzetre. Ha még ezek is túl nagyok, akkor tovább szeleteljük a kisebb négyzeteket. Ezzel a módszerrel akármilyen síkdarab területét vagy pontosan megmérhetjük, vagy tetszőleges kis hibával megközelíthetjük.
Ha például kör területére vagyunk kíváncsiak, akkor négyzetekkel ezt a területet nem tudjuk teljes pontossággal megmérni. Ha viszont előre megadunk bármilyen kis hibahatárt, akkor négyzetekkel megközelíthetjük a kör területét a megadott hibahatáron belül:



Itt a körbe írt nagy négyzettel kezdtük a mérést. Mivel ez nem volt elég pontos, hozzáillesztettük a négy kisebb négyzetet, majd a huszonnégy, egészen pici négyzetet. A közelítést, egyre kisebb négyzetekkel, addig folytathatjuk, amíg a mért eredmény a hibahatáron belülre kerül.
Ezzel a módszerrel a kör igazi területénél mindig valamivel kisebb értéket kapunk.

Lehet-e a másik irányból, a nagyobb értékek felől közelíteni? Lehet! Olyan négyzetből kell kiindulnunk, amelyik a kört magában foglalja, és ebből a nagy négyzetből farigcsálunk le kisebb és kisebb négyzeteket:



Legjobb, ha a két előbbi módszert együtt használjuk! Ekkor alulról is, felülről is közelítjük a pontos értéket.

2. Területmérés a gömbön

A gyerekek alkossanak szabadon négyes csoportokat! Osszuk ki a csoportoknak a gömböket!

Beszélgessünk velük arról, hogyan lehet területet mérni a gömbön.
Lehet-e a síkbeli négyzetet itt is felhasználni?
Osszunk ki ollót és alufóliát! Vágjanak ki alufóliából körülbelül hat centiméter oldalú síknégyzetet, és próbálják rásimogatni a gömbre! Nem sikerül – vagy a szélénél, vagy a közepén ráncosodik.
Mi legyen hát a gömbi területegység? Mi lenne a legtermészetesebb választás – olyan, amiről a síkon szó sem lehet? Hallgassuk meg a javaslatokat, majd válasszuk a teljes gömbfelület területét egységnek.

Csoportos munkában beszéljék meg a válaszokat a 2. feladatlap 1 feladatának kérdéseire, majd frontálisan beszéljük meg az eredményeket!

2. FELADATLAP

A síkbeli négyzet nem illeszthető bele a gömbfelületbe, ezért nem lehet terület mérésére használni a gömbön.

1. Mit nevezhetnénk a gömbön négyzetnek?
Próbáljatok olyan definíciókat alkotni, melyek minél több tulajdonságukban megfelelnek a síkbeli négyzetnek!

A gyerekek alkossanak szabadon négyes csoportokat! Osszuk ki a csoportoknak a gömböket!
Szóforgóval csoportokban alkossatok definíciókat, amelyek megfelelnek a síkbeli négyzetnek!
Szakértői mozaik: Zsákutcás kísérletek a síkbeli eljárások gömbi alkalmazására:

Első csoport: Rajzolj egyforma gömbi négyzeteket (olyan gömbi négyszögeket, amelyeknek minden oldala egyforma hosszú, és minden szöge egyforma nagy), és próbálj négy négyzetet egymás mellé, egy csúcspont köré illeszteni úgy, hogy ne maradjon rés közöttük!

Sohasem sikerülhet, mert a szabályos gömbi négyszög mindegyik szöge nagyobb derékszögnél, tehát egy csúcspont köré nem lehet négy szabályos négyszöget átfedés nélkül beilleszteni.

Második csoport: Rajzolj gömbi négyzetet, és próbáld a szimmetriatengelyei mentén négy egyforma, kisebb gömbi négyzetté szétvágni!

Ez sem lehetséges: a szétvágásnál nem szabályos négyszögeket, hanem gömbi deltoidokat kapunk.

Harmadik csoport: Rajzolj gömbi téglalapot (olyan gömbi négyszögeket, amelyeknek két-két szemben fekvő oldala egyforma hosszú, és minden szöge egyforma nagy – például úgy, hogy egy gömbkétszög két végéből levágunk egyforma egyenlőszárú háromszögeket), és próbáld gömbi négyzetekkel lefedni, lemérni a területét!

Ez sem megy, mert a gömbi téglalap szögei sem lehetnek derékszögek, csak tompaszögek.

Negyedik csoport: lehet-e a gömbháromszög területét is „alap szorozva magasság” képletével mérni és kiszámítani? Próbáljunk meg egy gömbkétszöget valahol (nem a közepén) két háromszögre szétvágni az egyik oldalára emelt merőlegessel! Kiszámíthatjuk-e a gömbkétszög területét úgy, hogy a két háromszög mindegyikére alkalmazzuk az „alap szorozva magasság” képletet, és összeadjuk a két számot?

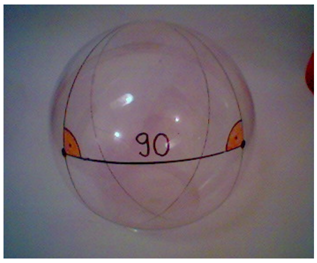
Törölt: 5

(Mindegyik módszer rossz a gömbön.)

2. Az egész gömb felszíne legyen 1 gömbi területegység!
Nézzük meg akkor, milyen gömbi formáknak, alakzatoknak tudjuk könnyen meghatározni a területét!

a) Mennyi a félgömb területe, ha a területegység az egész gömb felszíne? Fél egység.

b) Mekkora a háromszor derékszögű háromszög területe, ha a területegység az egész gömb felszíne?




Mivel nyolc egyforma ilyen háromszög befedi a gömböt, átfedések és hézagok nélkül, ezért egy-egy ilyen gömbháromszög területe $\frac{1}{8}$ egység.

Törölt: 5

3. Mekkora egy gömbkétszög területe, ha az egész gömb felszínét tekintjük területegységnek, és a gömbkétszög szöge:

a) 90 fok $\frac{1}{4}$ egység

b) 60 fok $\frac{1}{6}$ egység

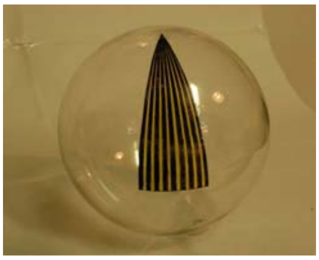
c) 270 fok $\frac{3}{4}$ egység

d) 135 fok $\frac{3}{8}$ egység

e) alfa fok

Ha a gömbkétszög nyílásszöge α fok, akkor a területe úgy aránylik az egész gömb felszínéhez, mint α fok a 360 fokhoz; tehát a terület $\frac{\alpha}{360}$ területegység.

4. Mekkora egy kétszer derékszögű háromszög területe, ha a területegység az egész gömb felszíne és a háromszög harmadik szöge:



a) 90 fok $\frac{1}{8}$ egység

b) 60 fok $\frac{1}{12}$ egység

c) 270 fok $\frac{3}{8}$ egység

d) 135 fok $\frac{3}{16}$ egység

e) 45 fok $\frac{1}{16}$ egység

f) alfa fok

Ha a kétszer derékszögű háromszög harmadik szöge α fok, akkor a területe feleakkora, mint az ugyanilyen nyílásszögű gömbkétszögé, vagyis $\frac{\alpha}{2 \cdot 360} = \frac{\alpha}{720}$ területegység.

Törölt: 5

5. Van még másféle gömbháromszög, amelynek a területét könnyű meghatározni. Azok a gömbháromszögek, amelyeknek valamelyik kiegészítő háromszöge éppen az eredeti háromszög tükörképe:

A következő kérdéseket szakértői mozaik módszerével tűzhetjük ki a gyerekek számára:

a) Hogyan lehet ilyen háromszög területét meghatározni a gömbkétszög tulajdonságai alapján?

b) Hogyan lehet ilyen háromszög területét meghatározni a gömbháromszögek tulajdonságai alapján?

A két háromszög egymás tükörképi párja, tehát területük egyenlő. Ezért az ilyen háromszögek területe éppen fele egy gömbkétszög területének.

Úgy is meg lehet határozni az ilyen háromszög területét, hogy átdarabolással kétszer derékszögű háromszöggé alakítjuk. Megkeressük a két háromszögből álló gömbkétszög középpontját, és a középponton át meghúzzuk a gömbkétszög egyenlítőjét, amelyik a gömbkétszög mindkét oldalára merőleges.

Az egyenlítő ugyanakkora kis sárga háromszöget vágott le a sárga háromszögből, amekkora kis piros háromszöget a piros háromszögből. Ezért az egyenlítő és a két, rá merőleges oldal olyan kétszer derékszögű háromszögeket adnak (az egyik nagyjából sárga és kicsit piros, a másik nagyjából piros és kicsit sárga), amelyeknek területe azonos a teljesen sárga, illetve a teljesen piros háromszög területével.

3. Új gömbi területegység választása, az eddigi eredmények átfogalmazása

Vessük fel újra a gyerekeknek az egység kérdését a gömbi területmérésnél. Beszéljük meg, hogy, ha a területegység az egész gömb felszíne, akkor az összes többi gömbi felületdarab területe egynél kisebb törtszám lesz.

Hogyan érhetnénk el, hogy kevesebb dolgunk legyen törtekkel, és gyakrabban használhassunk egész számokat?

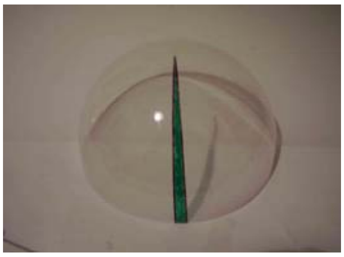
Meg kell változtatnunk a gömbi területegységet valamilyen, az egész gömbfelületnél sokkal kisebb geometriai formára!

Kérjünk a gyerekektől javaslatokat? Eresszék szabadon fantáziájukat! Párokban adjanak leírásokat lehetséges gömbi területmérésről! Gyakran a legvadabb ötletek járnak legközelebb az igazsághoz!

3. FELADATLAP

Törölt: 5

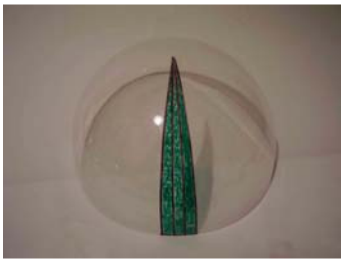
Válasszunk egy olyan kétszer derékszögű háromszöget, amelynek a harmadik szöge éppen 1 fok! Hegyes, vékony, hosszúkás háromszöget kapunk:



Nevezzük EZT a háromszöget 1 gömbi területegységnek (és ne az egész gömbfelületet)!
A formája miatt farkasfognak is hívhatjuk ezt a vékony háromszöget.
Ezzel a területegységgel mérve mekkora az alábbi gömbi felületdarabok területe?

a) Kétszer derékszögű gömbháromszög, amelynek harmadik szöge 2°
2 gömbi területegység

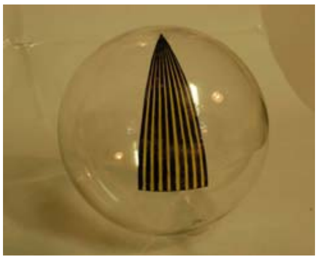
Kétszer derékszögű gömbháromszög, amelynek harmadik szöge 3°
3 gömbi területegység



b) Teljes gömb
720 gömbi területegység

Félgömb
360 gömbi területegység

c) alfa nyílásszögű kétszer derékszögű háromszög
α gömbi területegység



alfa nyílásszögű gömbkétszög
2α gömbi területegység

Törölt: 5

d)

negyedgömb:
180 gömbi területegység

nyolcadgömb:
90 gömbi területegység

e) olyan gömbháromszög területe, amelynek valamelyik oldalához csatlakozó kiegészítő háromszöge az eredeti háromszög tükörképe, és az oldallal szemközti szöge α fok:
α gömbi területegység

II. A kör kerülete és területe

1. Emlékeztető

A foglalkozás kezdetén a gyerekekkel átismételtetjük, mit tudnak a kör kerületéről és területéről.

EMLÉKEZTETŐ:

Az r sugarú kör kerülete: $K = 2 \cdot r \cdot \pi$

Az r sugarú kör területe: $T = r^2 \cdot \pi$

4. FELADATLAP

1. Számítsd ki az 5 dm sugarú kör kerületét mm, illetve a területét mm^2 pontossággal!

$K \approx 3142$ mm; $T \approx 785\,398\ mm^2$.

2. Kör és részeinek területe különböző, „természetes” egységek választása esetén

Beszélgessünk a gyerekekkel arról, hogy amikor ezeket a képleteket alkalmazzuk, milyen területegységet használunk. Attól függően, hogy a sugarat milyen hosszúságegységben mértük, dm^2-t, cm^2-t, mm^2-t. Tehát valójában a számításaink azt mondják meg, hogy hány kis

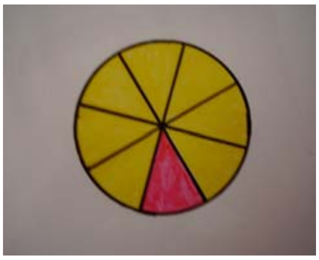
Törölt: 5

egységnégyzettel tudjuk lefedni a kört. Láttuk már korábban, hogy akármilyen kicsi négyzetekkel is próbálkozunk, soha nem tudjuk pontosan lefedni vele a kört. Ezzel függ össze, hogy, mivel a π értékét csak közelítőleg tudjuk megadni, nem tudunk a kör területére pontos értéket mondani.

Megpróbálkozhatnánk-e a kör esetében is valami más alakzattal, olyannal, amivel pontosan le lehet fedni a kört? Gondolkozzunk a gömb mintájára! Ott először a teljes gömbfelszín területével próbálkoztunk, azt választottuk egységnek. Válasszuk most egységnek egy teljes kör területét! De melyiket? Köröknél ez nem egyértelmű. Választhatjuk például az egység sugarú kör területét.

Beszélgethetünk arról is, visszalapozva az előző óra gömbi feladataira, hogy a a gömb alakzatai párba állíthatók a kör részeivel. Észrevehetik például, hogy a kör inkább egy félgömb rokona, hogy a gömbkétszögnek nincs párja a kör részei között, de a körcikk sok mindenben hasonlít a kétszer derékszögű háromszöghöz.

2. Válasszuk egységnek az 1 cm sugarú kört! Mekkora egy körcikk területe, ha a területegység az egész kör területe és a körcikk középponti szöge



a)	90 fok	¼ egység
b)	60 fok	1/6 egység
c)	270 fok	¾ egység
d)	135 fok	3/8 egység
e)	alfa fok	

Ha a körcikk nyílásszöge α fok, akkor a területe úgy aránylik az egész kör területéhez, mint α fok a 360 fokhoz; tehát a terület $\frac{\alpha}{360}$ területegység.

Mi lehetne a gömbi farkasfog megfelelője a körben?
Elég valószínű, hogy rájönnek, hogy az 1 fokos körcikk egy jó alakzat lesz.

3. Válasszunk egy olyan körcikket, amelynek a nyílásszöge éppen 1 fok! Hegyes, vékony, hosszúkás háromszögre emlékeztető alakzatot kapunk:

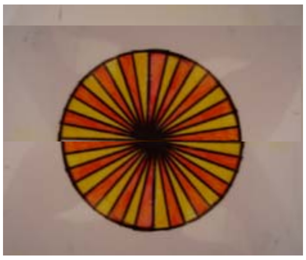
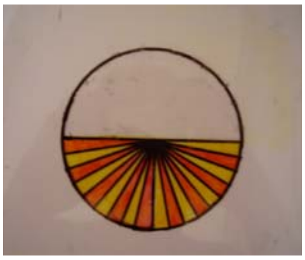
a k3. Feladatlapének

a) Háromszög-e ez valójában? Indokold meg válaszodat! Nem, mert egyik oldala nem egyenes vonalszakasz.
Nevezzük EZT a pici körcikket 1 területegységnek (és ne az egész kört!)

Törölt: ép a
Törölt: gömbös kép
Törölt: párja
Törölt: 5

b) Ezzel a területegységgel mérve mekkora az alábbi kördarabok területe?

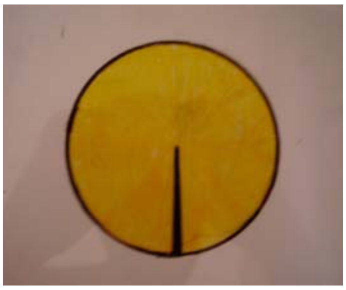
teljes kör:	félkör:	α nyílásszögű körcikk:
360 területegység	180 területegység	α területegység


2. Összefüggés a körcikk területe és a körcikket határoló körív hossza között

5. FELADATLAP

1. Válasszuk most továbbra is területegységnek az r sugarú körben az 1 fokos körcikket!
Egy körcikket mindig két sugár és egy körív határol. Ilyen kis körcikkekkel le tudjuk fedni az egész kört.



a) Hány darab kell az egész kör lefedéséhez? 360 db
Mennyi egy ilyen 1 fokos körcikk területe (a kör hagyományos területképletével számolva)? $t=\frac{r^2\cdot\pi}{360}$

Itt most mindenképpen meg kell kérdezni, hogy az eredményt milyen területegységben kaptuk. Vissza kell térni ahhoz a gondolathoz, hogy ennek a képletnek az alkalmazásánál négyzetekkel mérjük a kör területét, mégpedig olyan négyzetekkel, amelyek oldala a sugárhoz tartozó hosszúságegység: ha a sugár cm-ben adott, akkor cm², ha mm-ben, akkor mm², stb.

b) Hányszor fér rá az 1 fokos körcikket határoló körív a teljes kör kerületére? 360-szor
Mennyi az 1 fokos körcikket határoló körív hossza (a kör hagyományos kerületképletével számolva)? $i=\frac{2r\cdot\pi}{360}$

c) Hány 1 fokos körcikk szükséges egy α nyílásszögű körcikk lefedéséhez? Mennyi ennek a területe, és mekkora körív határolja, ha

$\alpha = 90$ fok: 90 db $t=\frac{r^2\cdot\pi}{360}\cdot 90=\frac{r^2\cdot\pi}{4}$ $i=\frac{2r\cdot\pi}{360}\cdot 90=\frac{2r\cdot\pi}{4}$

$\alpha = 60$ fok: 60 db $t=\frac{r^2\cdot\pi}{360}\cdot 60=\frac{r^2\cdot\pi}{6}$ $i=\frac{2r\cdot\pi}{360}\cdot 60=\frac{2r\cdot\pi}{6}$

$\alpha = 270$ fok: 270 db $t=\frac{r^2\cdot\pi}{360}\cdot 270=\frac{3r^2\cdot\pi}{4}$ $i=\frac{2r\cdot\pi}{360}\cdot 270=\frac{6r\cdot\pi}{4}$

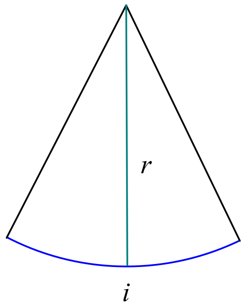
$\alpha = 135$ fok: 135 db $t=\frac{r^2\cdot\pi}{360}\cdot 135=\frac{3r^2\cdot\pi}{8}$ $i=\frac{2r\cdot\pi}{360}\cdot 135=\frac{6r\cdot\pi}{8}$

Törölt: 5

$\alpha = \alpha$ fok: α db $t = \frac{r^2 \cdot \pi}{360} \cdot \alpha = \frac{\alpha \cdot r^2 \cdot \pi}{360}$ $i = \frac{2r \cdot \pi}{360} \cdot \alpha = \frac{2\alpha r \cdot \pi}{360}$

d) Keress összefüggést a körcikk területe és kerülete között!

2. A körcikk területét könnyen kiszámíthatjuk a határoló ív hosszából és a sugárból. A háromszög területképletével rokon, ahhoz hasonló eredményt kapunk:



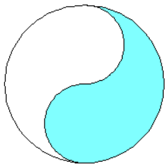
$$T = \frac{i \cdot r}{2}$$

Az előbb kapott területképletet megpróbálhatod megmagyarázni.

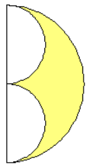
$$T = \frac{r^2 \cdot \pi}{360} \cdot \alpha = \frac{2}{2} \cdot \frac{r^2 \cdot \pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r}{2} \cdot \frac{2r \cdot \pi}{360} \cdot \alpha = \frac{r}{2} \cdot i$$

FELADATGYŰJTEMÉNY

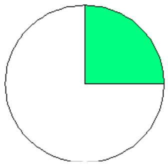
1. Mennyi az alábbi síkalakzatok területe és kerülete? Jelöld a nagy kör sugarát *r*-rel!



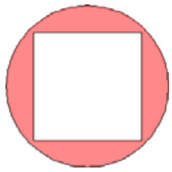
$$T=\frac{r^2\pi}{2}$$
$$K=\frac{2r\pi}{2}+2\cdot\frac{2\left(\frac{r}{2}\right)\pi}{2}$$



$$T=\frac{r^2\pi}{2}-2\cdot\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2\pi}{2}$$
$$K=\frac{2r\pi}{2}+2\cdot\frac{2\left(\frac{r}{2}\right)\pi}{2}$$



$$T=\frac{r^2\pi}{4}$$
$$K=\frac{2r\pi}{4}+2r$$



$$T=r^2\pi-\left(\frac{2r}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$K=2r\pi+4\frac{2r}{\sqrt{2}}$$

2. A képen egy háromszor derékszögű gömbi háromszöget látsz.

a) Mennyi a területe és kerülete?

$T=90$ gömbi területegység; $K=3\cdot\frac{2r\pi}{4}$

b) Mennyi a területe és kerülete egy kis beszínezett háromszögnek?

$t=\frac{T}{6};\ k=\frac{3}{2}\cdot\frac{2r\pi}{4}$

3. Mekkora a körcikkek kerülete és területe, ha a sugarat *r* és a nyílásszöget α jelöli?

a) $r = 5$ cm és $\alpha = 30$ fok $\quad k=5\cdot\left(\pi\cdot\frac{30}{180}+2\right)=\frac{5\pi}{6}+10(\text{cm});\ t=\frac{i\cdot r}{2}=\frac{25\pi}{12}\left(\text{cm}^2\right)$

b) $r = 2$ cm és $\alpha = 45$ fok $\quad k=2\cdot\left(\pi\cdot\frac{45}{180}+2\right)=\frac{\pi}{2}+4(\text{cm});\ t=\frac{i\cdot r}{2}=\frac{\pi}{2}\left(\text{cm}^2\right)$

c) $r = 10$ cm és $\alpha = 50$ fok $\quad k=10\cdot\left(\pi\cdot\frac{50}{180}+2\right)=\frac{50\pi}{18}+20(\text{cm});\ t=\frac{i\cdot r}{2}=\frac{250\pi}{18}\left(\text{cm}^2\right)$

d) $r = 8$ m és $\alpha = 20$ fok $\quad k=8\cdot\left(\pi\cdot\frac{20}{180}+2\right)=\frac{8\pi}{9}+16(\text{m});\ t=\frac{i\cdot r}{2}=\frac{32\pi}{9}\left(\text{cm}^2\right)$

e) $r = 5$ mm és $\alpha = 100$ fok $\quad k=5\cdot\left(\pi\cdot\frac{100}{180}+2\right)=\frac{25\pi}{9}+10(\text{mm});\ t=\frac{i\cdot r}{2}=\frac{125\pi}{18}\left(\text{mm}^2\right)$

4. Számítsd ki a hiányzó adatot, ha a körcikk területét *t*, a sugarat *r*, és a határoló körív hosszát *i* jelöli.

a) $r = 3$cm; $i = 8$ cm $\quad t=\frac{i\cdot r}{2}=\frac{8\cdot 3}{2}=12\left(\text{cm}^2\right)$

b) $r = 2$ dm; $i = 15$ cm $\quad t=\frac{i\cdot r}{2}=\frac{15\cdot 20}{2}=150\left(\text{cm}^2\right)$

c) $r = 1{,}5$ dm; $t = 3\ \text{dm}^2$ $\quad i=\frac{2t}{r}=\frac{2\cdot 3}{1{,}5}=4(\text{dm})$

d) $i = 25$ cm; $t = 5\ \text{dm}^2$ $\quad r=\frac{2t}{i}=\frac{2\cdot 500}{25}=40(\text{cm})$

Törölt: 5