
GEOMETRIAI ISMÉTLÉS

Geometriai szerkesztések ismételése

KÉSZÍTETTE: PUSZTAI JULIANNA

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Alapszerkesztések átismétlése, alkalmazása egyszerű, vegyes szerkesztési feladatokban.
Időkeret	4 óra
Ajánlott korosztály	8. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	0573, 0632, 0633, 0664, 0681, 0722, 0752, 0753, 0881, 0882, 0883, a 9. évfolyam 7, 8. modulok.
A képességfejlesztés fókuszai	<i>Geometriai alapfogalmak</i> , alapszerkesztések, fogalmak közötti összefüggések, alapszerkesztések alkalmazása, <i>Induktív, deduktív következtetés</i> : logikus gondolkodás, rendszerezés – háromszögek, négyszögek csoportosítása <i>Mértani eszközök</i> gyakorlott használata <i>Beszédképesség</i> : a geometriai fogalmak szabatos használata, definíciók, tulajdonságok, állítások, állítások tagadásának precíz megfogalmazása <i>Esztétikai</i> : igényesség az ábrák, szerkesztések külalakjában is.

AJÁNLÁS

A tanulók négyes csoportokban ülnek, egymással megvitathatják a tapasztalataikat, segíthetnek egymásnak. Az alapszerkesztéseket mindenkinek el kell végeznie, de a gyorsabban haladókra is gondoljunk az órai feladatlapok nehezebb feladványaival. Számukra a Feladatgyűjteményben is találhatunk összetettebb, gondolkodtatóbb, nehezebb szerkesztéseket.

Mindhárom óra rendszerező, az euklideszi geometriai szerkesztésekben való eligazodást, jártasság megszerzését szolgálja.

A tanulócsoporthoz az egyes szerkesztéseket megbeszélhetik, többféle szerkesztési menetet is javasolhatnak. Mi a lehetőségek közül a Feldolgozás menetében csak egyet szerepeltetünk, természetesen más szerkesztési menetek is elfogadhatók. A tanulóknak csak a sorrend sorszámozását kell a vázlatrajzokon jelölniük; az ügyesebb gyerekektől a szerkesztési menet pontokba foglalt leírását is kérhetjük.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Feladatlapok, Feladatgyűjtemény, mértani eszközök, írásvetítő fóliák

ÉRTÉKELÉS

Folyamatos szóbeli értékelés, a hiányosságok pótlására, hibák javítására is kiterjedően.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. Alapszerkesztések ismétlése			
1.	Alapszerkesztések: szakaszfelezés, szögfelezés, merőleges szerkesztés	rendszerezés, kombinativitás, analógiás gondolkodás	1. Feladatlap, 1. tanári melléklet: Ellenőrző fólia az 1. feladatlap 7. feladatához
2.	Háromszögszerkesztések; felmérő feladatlap	pontosság, önértékelés	2. Feladatlap, 2. tanári melléklet: Ellenőrző fóliák a 2. Feladatlaphoz, 2 oldal
3.	Háromszögszerkesztések alapesetei		
II. Háromszögszerkesztések			
1.	A háromszögek nevezetes vonalaival, pontjaival kapcsolatos tudnivalók		3. Feladatlap
2.	Háromszögek nevezetes vonalaival, pontjaival kapcsolatos szerkesztések	mértani eszközök használata, szerkesztés, esztétikai érzék, áttekintő készség	4. Feladatlap

III. Négyzsögszerkesztések			
1.	A négyzsögek tulajdonságai	rendszerezés, kombinativitás	0851. modul – 2. tanári melléklet: négyzsögdefiníció-kártyák,
2.	Négyzsög alapszerkesztések, vegyes szerkesztési feladatok	a tudott ismeretek alkalmazása, igényesség	5. Feladatlap

IV. Vegyes szerkesztési feladatok			
1.	Négyzsögek szerkeszthetősége	rendszerezés, kombinativitás	4. tanári melléklet: négyzsögek szerkeszthetősége, fólia 6. Feladatlap
2.	Szabályos sokszögek szerkesztése	a tanult ismeretek alkalmazása,	7. Feladatlap 1.
3.	Alapszerkesztések alkalmazása vegyes szerkesztési feladatokban	a tanult ismeretek alkalmazása,	7. Feladatlap 2.,3.,4.; 3. tanári melléklet: Ellenőrző fólia a 7. feladatlap 4. feladatához

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Alapszerkesztések ismétlése

1. Alapszerkesztések: szakaszfelezés, szögfelezés, merőleges szerkesztés

TUDNIVALÓ:

Az euklideszi szerkesztés azt jelenti, hogy a szerkesztéshez csak körző és egyenes vonalzó használata megengedett.

Az euklideszi szerkesztés lehetőségei:

1. Két pont összekötő egyenesét megrajzolhatjuk vonalzóval.
2. Két adott pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.
3. Adott pont körül adott körzőnyílással kört rajzolhatunk.
4. Két metsző egyenes metszéspontját megkereshetjük.
5. Ha egy kör és egy egyenes metszi egymást, akkor mindkét metszéspontjukat megkereshetjük.
6. Ha két kör metszi egymást, akkor mindkét metszéspontjukat megkereshetjük.

A házi feladat az 1. feladatlap 1-5. feladata volt. Az ellenőrzés kis csoportban hatékonyabb, mintha frontálisan dolgoznánk, mivel így minden tanuló megmutathatja a többieknek tudását, az esetleges hibákat együtt kijavíthatják. A tanulók a 4 fős csoportokban ülnek, összehasonlítják megoldásaikat, megbeszélnek az 5. kérdésre adandó válaszaikat, majd kijelölik a szóvivőt. A csoportokon belüli ellenőrzések után a tanár az 5. feladat kérdéseire sorban egy-egy csoport szóvivőjétől kér választ.

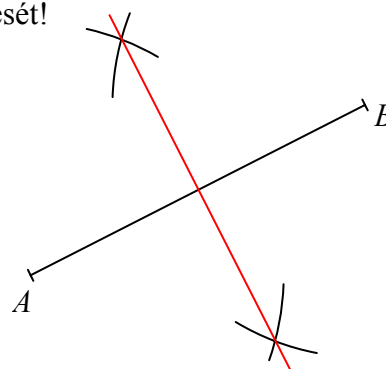
A 6. feladatot egyéni munkának adjuk. Olvassák el, gondolkozzanak, próbálkozzanak, akinek sikerült megtalálni a szerkesztés módját, jöjjön ki a táblához és mutassa be a többieknek! Mindenki végezze el a füzetében a szerkesztést!

Ezután feladjuk csoportmunkára az 1. feladatlap 7. feladatát, csoporton belül mindenki más szöveget szerkesszen! Az ellenőrzés írásvetítő fólia segítségével történhet (1. tanári melléklet).

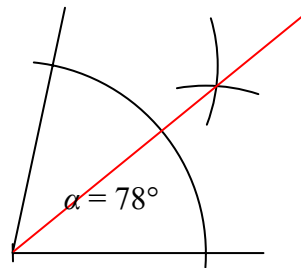
1. tanári melléklet – lásd a modul eszközei közt!

1. FELADATLAP

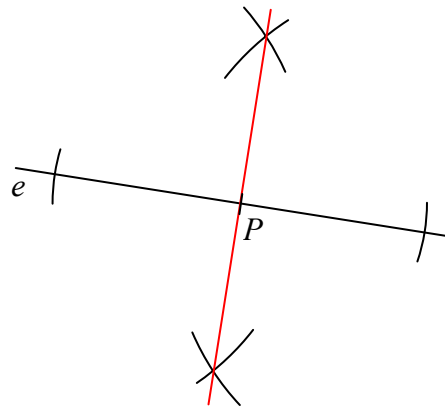
1. Rajzolj egy AB szakaszt! Szerkeszd meg a felező merőlegesét!



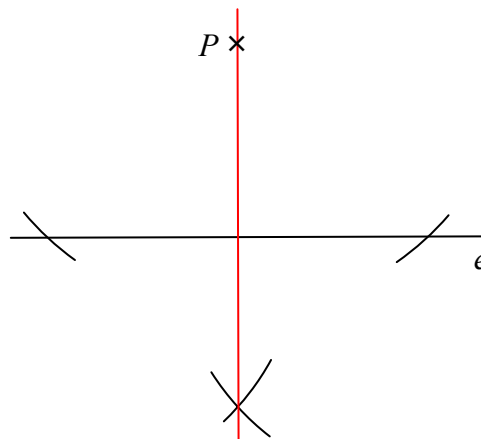
2. Rajzolj 78° -os szöget, szerkeszd meg a szögfelezőjét!



3. Végezd fel egy egyenest, adj meg rajta egy pontot! Szerkeszd az egyenes adott pontjába merőlegest!



4. Végezd fel egy egyenest, jelöld ki rajta kívül egy P pontot! Szerkeszd az egyenesre a P pontból merőlegest!



5. Válaszolj a következő kérdésekre szóban:

– Hogyan kell szakaszt felezni? Mi a magyarázata annak, hogy így kell?

Az egyenlőszárú háromszög szimmetriatengelye felezi az alapot.

– Hogyan kell szöget felezni? Mi a magyarázata annak, hogy így kell?

Az egyenlőszárú háromszög szimmetriatengelye felezi a szarak által bezárt szöget.

– Mi a közös a szakaszfelező és a szögfelező szerkesztésében?

Mindkét esetben az egyenlőszárú háromszög szimmetriatengelyének tulajdonságait alkalmazzuk.

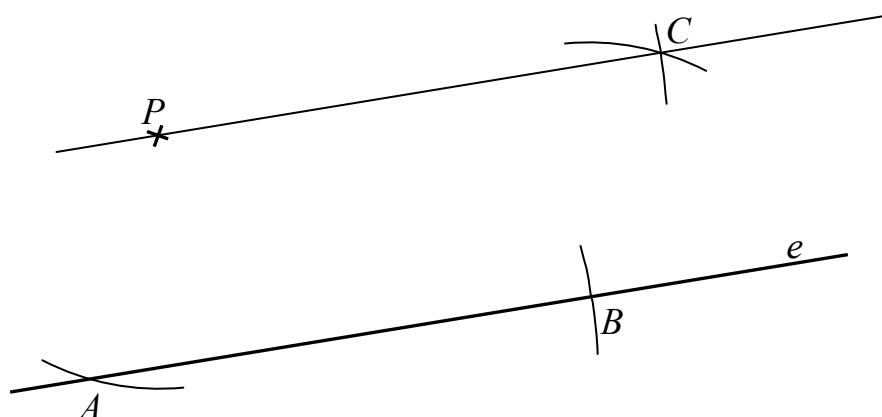
– Hogyan kell egyenes adott pontjába merőlegest szerkeszteni? Miért így kell?

Az egyenlőszárú háromszög szimmetriatengelye felezi az alapot és merőleges rá.

– Hogyan kell egyenesre egy adott külső pontból merőlegest szerkeszteni? Miért így kell?

Az egyenlőszárú háromszög szimmetriatengelye merőleges az alapra.

6. Szerkessz adott e egyenessel párhuzamos egyenest, rajta kívül adott P ponton át! Lilla így oldotta meg a feladatot. Találd ki, hogyan szerkesztett! Ha rájöttél, végezd el te is ugyanígy a párhuzamos szerkesztését a füzetedbe!



Lilla P középpontú tetszőleges sugarú körrel elmet szette az e egyenest (A), majd A -ból szintén tetszőleges sugarú körrel kijelölte az egyenesen B -t, ezután PA és AB oldalakkal paralelogrammát szerkesztett ($PABC$).

7. Szerkessz 60° -os, 120° -os, 30° -os, 15° -os szögeket! Milyen szögeket lehet még így a 60° -os szög felezésével illetve többszörözésével szerkeszteni?

7. feladat megoldása: 1. tanári melléklet írásvetítő fólia

8. Rajzolj kört! Végy fel a körvonalon egy P pontot! Szerkessz meg a kör P ponthoz tartozó érintőjét!

A P ponthoz tartozó sugárra merőleges szerkesztése

2. Háromszögszerkesztések; felmérő feladatlap

A 2. Feladatlap megoldása előtt rajzoljunk a táblára egy háromszöget! A gyerekek közreműködésével jelöljük be a csúcsokat, oldalakat, szögeket a szokásos módon! A mintapélda segítségével felelevenítjük, hogy minden szerkesztés első lépése a vázlatrajz készítése, amely a megoldott feladat elképzelt képét ábrázolja. A vázlatrajzot betűzzük, az adatokat színezzük, a szerkesztés lépéseit beszámozzuk, jobb csoportok le is írhatják a szerkesztés menetét.

A Feladatlap 1-3. feladatait felmérésnek szánjuk, ezért önálló munkát kérünk. Megmondjuk a gyerekeknek, hogy saját munkájukat fogják segítségünkkel ellenőrizni és értékelni. Az értékelés célja, hogy a következő szerkesztési órákon tudásuknak megfelelő nehézségű feladatokon dolgozhassanak, tudásuknak megfelelő tempóban. Célként a gyors, hibátlan, szép szerkesztést jelöljük meg.

Azt kérjük, hogy aki mind a három szerkesztést elvégezte, jelentkezzen, hogy megmondjuk neki, mennyi idő alatt készült el. Ezt a tanuló feljegyzi a füzetébe, és ha van még idő, tovább dolgozhat az 4. feladattal.

A feladatok megoldására és ellenőrzésére 20 percnél többet nem szánunk. Ha mindenki teljesítette a minimumot – remélhetően így lesz –, írásvetítő segítségével (2. tanári melléklet) feladatonként ellenőrizzük a szerkesztés helyességét.

2. tanári melléklet – lásd a modul eszközei közt!

A tanulók a főlíán megadott pontszámok alapján – tanári közreműködéssel – értékelik a munkájukat. A gyerekek így kapott egyéni eredményeit a tanár magának regisztrálja. A tapasztalatok alapján differenciálhatunk a következő órákon.

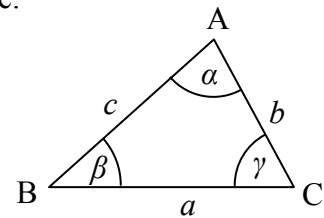
Háromszögek szerkesztése

A háromszögek csúcsainak, oldalainak, szögeinek szokásos jelölése:

A szerkesztési feladatok mindegyikéhez

- készíts vázlatrajzot, betűzve az oldalakat, szögeket;
- színezd az ismert adatokat;
- számozd a szerkesztés tervezett lépéseit!

A füzetedbe dolgozz!



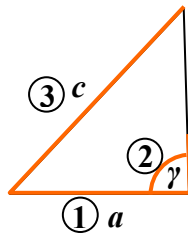
Mintafeladat

Szerkessz háromszöget, amelynek adott két oldala és egy szöge!

$$a = 3,8 \text{ cm}; c = 5 \text{ cm}; \gamma = 90^\circ$$

Megoldás első változat:

Vázlat:



A szerkesztés menete:

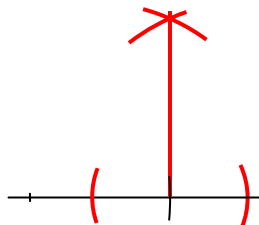
1. egy félegyenesre az a oldalt felmérjük,
2. az a oldal egyik végpontjába merőlegest szerkesztünk,
3. az a oldal másik végpontjából c sugarú körrel elmetsszük a merőlegest. Ez lesz a háromszög harmadik csúcspontja.

Szerkesztés lépésről lépésre:

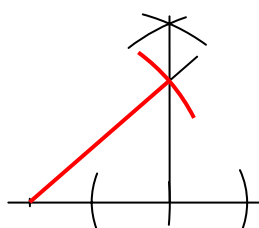
①.



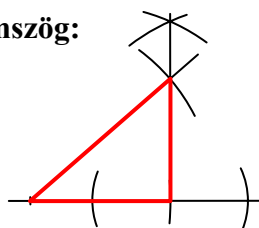
②.



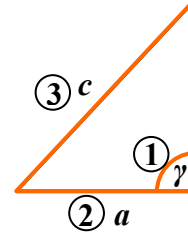
③.



Kész a háromszög:

**Megoldás második változat:**

Vázlat:

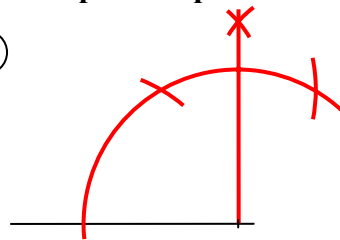


A szerkesztés menete:

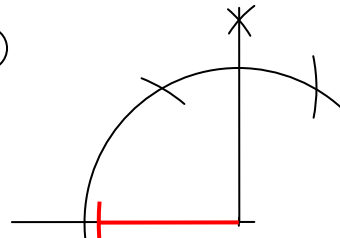
1. egy félegyenesre annak végpontjában derékszöget szerkesztünk,
2. egyik szárára felmérjük az a oldalt,
3. az a oldal másik végpontjából c sugarú körrel elmetsszük a derékszög másik szárát. Ez lesz a háromszög harmadik csúcspontja.

Szerkesztés lépésről lépésre:

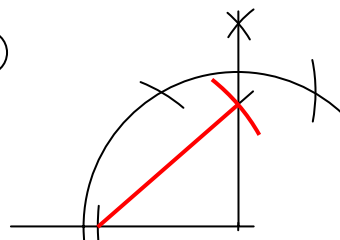
①.



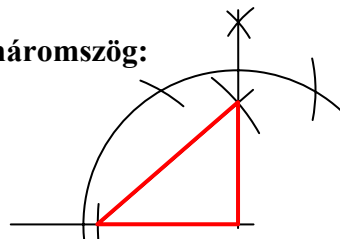
②.



③.

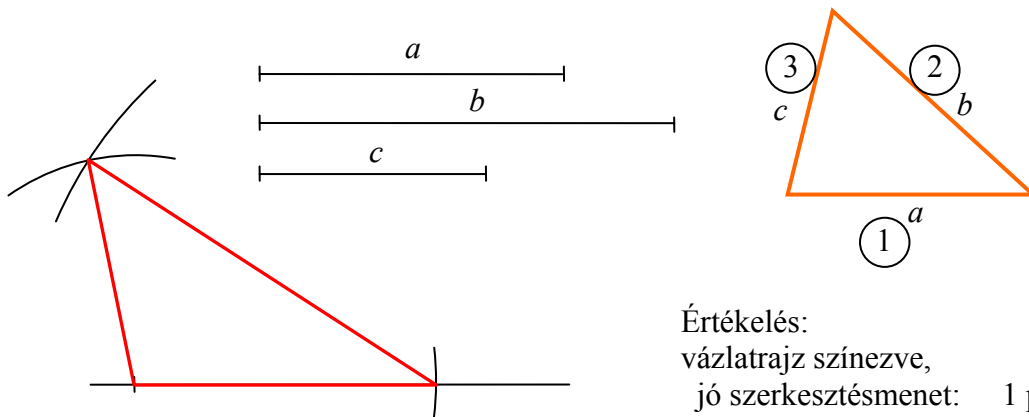


Kész a háromszög:



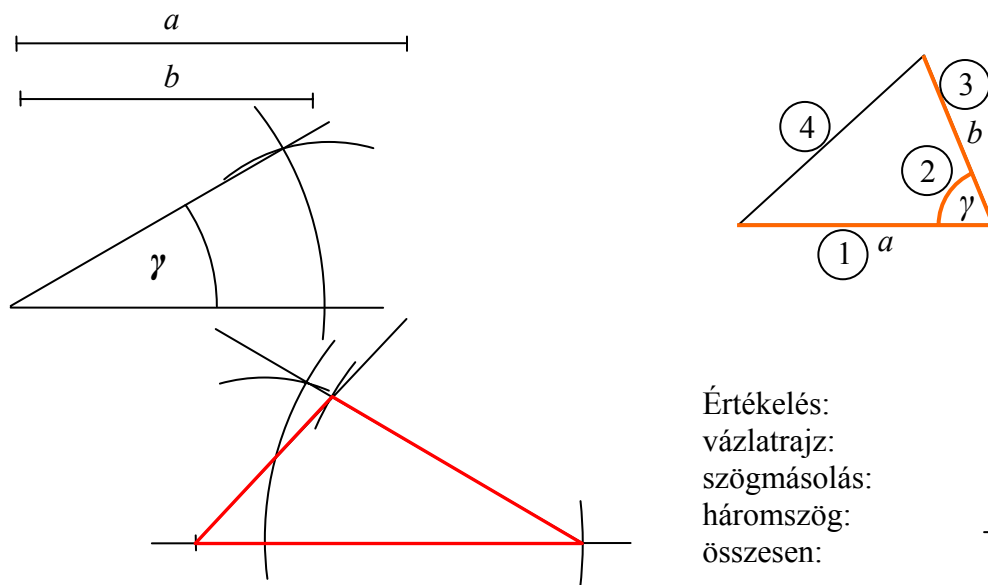
2. FELADATLAP

1. Szerkessz olyan háromszöget, amelynek adott a három oldala:



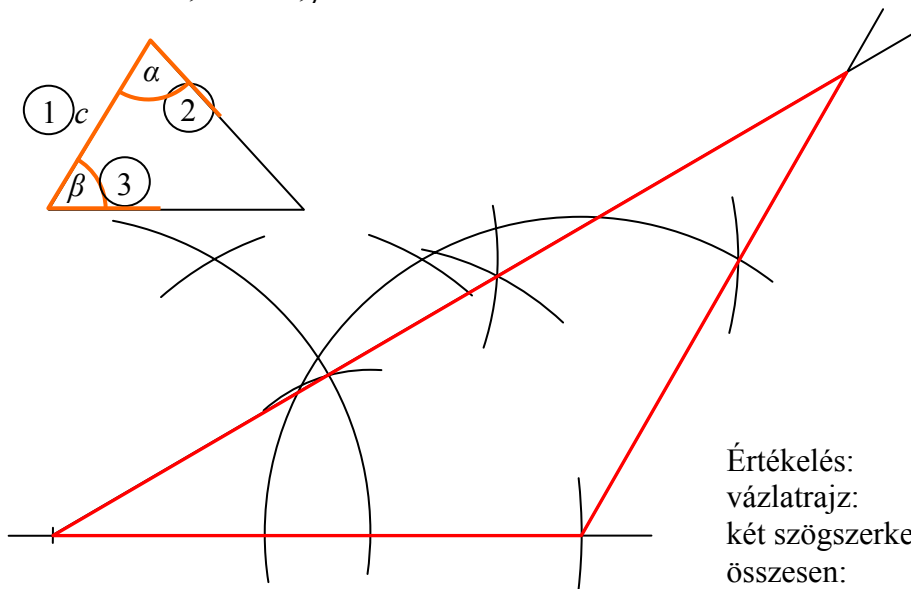
Értékelés:
 vázlatrajz színezve: 1 pont
 jó szerkesztésmenet: 1 pont
 szerkesztés: 1 pont
 összesen: 2 pont

2. Szerkessz háromszöget, amelynek adott két oldala és általuk közbezárt szöge!



Értékelés:
 vázlatrajz: 1 pont
 szögmásolás: 1 pont
 háromszög: 1 pont
 összesen: 3 pont

3. Szerkessz háromszöget egy oldalból és két szögből! A szögeket is szerkeszd!
 $c = 7 \text{ cm}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 120^\circ$



Értékelés:	
vázlatrajz:	1 pont
két szögszerkesztés:	2 pont
összesen:	3 pont

4. Szerkessz meg az 1-3. feladatok háromszögeinek egy-egy magasságát!

Értékelés:

A szerkesztések hibátlan megoldásáért elérhető: 8 pont

Aki 12 perc alatt elkészült, kap: +1 pontot

Aki 10 perc alatt elkészült, kap: +2 pontot

Aki 9 perc alatt elkészült, kap: +3 pontot

Aki 8 percnél rövidebb idő alatt elkészült, kap: +4 pontot

Elérhető: 12 pont

A gyerekek így értékelhetik munkájukat:

11-12 pont: gyorsan és jól dolgozom

9-10 pont: jól dolgozom, de ehhez időre van szükségem, vagy gyorsan dolgozom, de tévedek

8 pont: még gyakorolnom kell

8 pont alatt: segítségre van szükségem

Az eredmények ismeretében a gyerekekkel megbeszéljük a következő óra csoportbeosztását: a négyfős csoportokat azonos tudásszinten állókból alakítjuk ki: azok kerüljenek egy csoportba, akik gyorsan, jól tudnak szerkeszteni, valamint azok, akik több segítséget igényelnek.

3. Háromszögszerkesztések alapesetei

Vizsgáljuk meg a 2. feladatlap 1. feladatának megszerkesztett háromszögeit! A tanulók hasonlítsák össze saját háromszögüket más tanulókéival! Megállapíthatják, hogy ezek a háromszögek egybevágók. Ugyanígy járjunk el a 2., 3. feladatbeli háromszögekkel is! Megállapíthatjuk, hogy a háromszögek ugyanazzal a három egymástól független adattal egyértelműen megszerkeszthetőek, vagyis, ha több háromszöget szerkesztünk ezekkel az adatokkal, akkor azok egybevágók lesznek.

A feladatlap a háromszög szerkesztésének alapeseteit mutatta be. Foglaljuk össze a háromszögek szerkesztésének ezeket az alapeseteit! Elolvastatjuk a munkafüzetben a Tudnivalót.

TUDNIVALÓ:

A háromszög egyértelműen megszerkeszthető, ha

1. Adott 3 oldala
2. Adott 2 oldal és a közbezárt szög
3. Adott 1 oldal és a rajta fekvő 2 szög
4. Adott 2 oldal és a nagyobbikkal szemben fekvő szög.

Házi feladatot adhatunk az előző, 0851 modul Feladatgyűjteményének példáiból, vagy e modul Feladatgyűjteményének 1-3 példáiból, illetve, akinél szükséges, attól kérjük az órai szerkesztések javítását.

II. Háromszögszerkesztések

1. A háromszögek nevezetes vonalaival, pontjaival kapcsolatos tudnivalók

A gyerekek az előző órán megbeszélt csoportbeosztás szerint ülnek.

A házi feladat ellenőrzése csoportokon belül történik: a csoporttagok egymás megoldásait megnézik, megbeszélik, és ha valamit nem értenek, tanári segítséget kérnek.

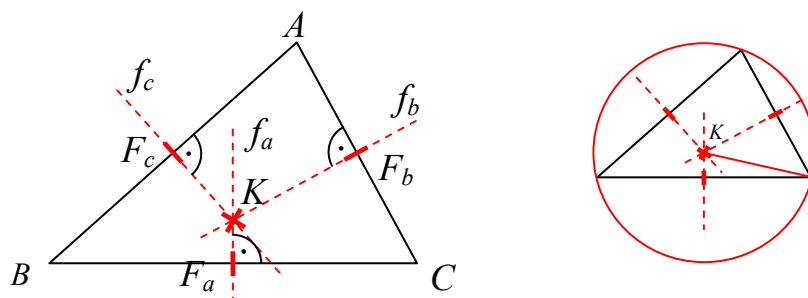
Ezen az órán sok szép feladat kerül sorra, könnyebbtől a nehezebbekig. A 3. feladatlappal felelevenítjük a háromszög nevezetes vonalaival kapcsolatos ismereteiket (1-3. feladatok). Új anyagként (4. feladat), gyorsabban haladó osztályokban foglalkozhatunk a súlyvonallal is. A 9. évfolyamon bővebben tanulják, de egy már ismert fogalomra építve.

3. FELADATLAP

1. Szerkessz háromszöget, amelynek oldalai: 3,4 cm; 4,5 cm; 5 cm! Szerkessz meg minden oldal felező merőlegesét!

- Milyen tulajdonságú pontok az oldalak felező merőlegesének pontjai?
- Milyen tulajdonságú a felező merőlegesek metszéspontja?
- Rajzold meg a háromszög köré írható kört!

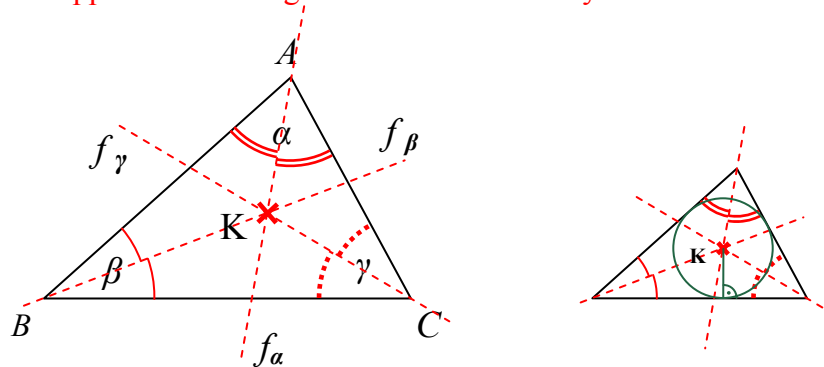
AB oldal felező merőlegesének pontjai egyenlő távolságban vannak A-tól és B-től, BC oldal felező merőlegesének pontjai egyenlő távolságban vannak B-től és C-től, következésképpen e két felező merőleges metszéspontja egyenlő távolságban van a háromszög mindhárom csúcspontjától, tehát a háromszög köré írt kör középpontja. Természetesen a harmadik oldal felező merőlegese is átmegy a középponton.



2. Szerkessz háromszöget, amelynek oldalai: 3,4 cm; 4,5 cm; 5 cm! Szerkeszd meg minden szögének a szögfelezőjét!

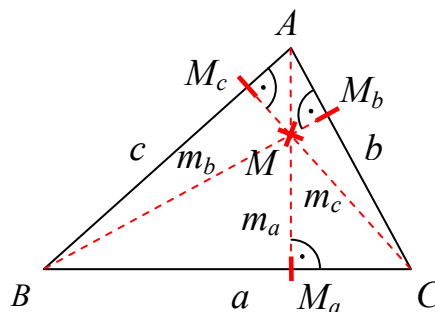
- Milyen tulajdonságú pontok a szögfelező pontjai?
- Milyen tulajdonságú a szögfelező metszéspontja?
- Rajzold meg a háromszögbe írható kört!

Az α szög szögfelezőjének pontjai egyenlő távolságban vannak a háromszög AB és AC oldalegyeneseitől, β szög szögfelezőjének pontjai egyenlő távolságban vannak a háromszög BA és BC oldalegyeneseitől, vagyis e két szögfelező metszéspontja egyenlő távolságban van a háromszög mindhárom oldalától tehát a háromszög beírt körének középpontja. A kör sugarát úgy kapjuk meg, hogy a középpontból merőlegest bocsátunk valamelyik oldalra.



3. Szerkessz háromszöget, amelynek oldalai: 3,4 cm; 4,5 cm; 5 cm! Szerkeszd meg a háromszög magasságpontját! (Magasság: a csúsból a szemközti oldalra bocsátott merőleges.)

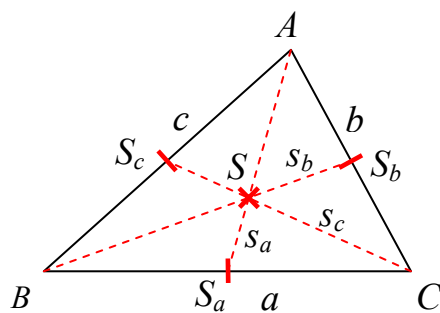
A háromszögek minden oldalához tartozik egy magasság. A magasságvonalak metszéspontja a háromszög magasságpontja.



– Új ismeretként gyorsabban haladó (heti 4 órában tanuló) osztályokban bevezethetjük a súlyvonal, súlypont fogalmát.

Megmondhatjuk, hogy van még egy nevezetes vonala a háromszögeknek (középiskolában bővebben tanulják majd), súlyvonalnak hívják, mivel, ha a háromszöget bármely csúcspontjában felfüggesztve egyensúlyi állapotba kerül, akkor ez a vonal a csúcson átvezető függőleges irány. A súlyvonal a háromszög csúcspontját a szemközti oldal felezőpontjával köti össze. Kartonpapírból el is készíthetünk bemutatásra egy modellt, behúзва a súlyvonalakat, megmutatva, hogy ezek 1 pontban találkoznak, ezt nevezzük súlypontnak. A súlypontjában felfüggesztett háromszög bármely helyzetben nyugalomban van. (Vékony kötőtűre felszúrva a modellháromszöget, be tudjuk mutatni az egyensúlyi helyzeteket, azt is, hogy ha nem súlypontban függesztjük fel, akkor nem marad nyugalomban, hanem elfordul.)

4. Szerkessz háromszöget, amelynek oldalai: 3,4 cm; 4,5 cm; 5 cm! Szerkeszd meg a háromszög súlypontját! (Súlyvonal: a háromszög csúcspontját a szemközti oldal felezőpontjával köti össze.)

**TUDNIVALÓ:****A háromszögek nevezetes vonalai:**

- oldalfelező merőleges
- szögfelező
- magasságvonal: egy csúsból a szemközti oldalra bocsátott merőleges szakasz
- súlyvonal: egy csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz

Metszéspontjaik:

- köréírt kör középpontja
- beírt kör középpontja
- magasságpont
- súlypont

2. Háromszögek nevezetes vonalaival, pontjaival kapcsolatos szerkesztések

A 4. feladatlap az alapszerkesztésekről valamint a nevezetes vonalakról és pontokról tanultak együttes gyakorlására alkalmas. Az 1-2. feladatot, valamint a 3. feladattól kezdve az a) pontokat mindenki, az ügyesebbek a 3. feladattól kezdve a feladatok többi pontjait is oldják meg! Ez azt jelenti, hogy a lassabban haladóknak 6 szerkesztés jut, de ez se legyen kötelező. Az a fontos, hogy amit megoldanak, azt biztonsággal értsék és tudják. Az ügyesebbeknek 12 feladat jutott. Haladjanak sorban, vitassák meg a szerkesztés mikéntjét, és nem baj, ha marad házi feladatnak is valamennyi.

A gyerekek csoportmunkában, önállóan dolgoznak. Járjunk körbe, ha szükséges, segítsünk – leginkább a nehezebben haladó csoportoknak –, de a jobbakat hagyjuk önállóan küzdeni, csak ellenőrizni, biztatni menjünk néha oda hozzájuk. Ha valamelyik feladatnál különös nehézséget tapasztalunk, szerkesszük meg együtt a táblánál! Ez az óra nem könnyű sem gyerekeknek, sem tanárnak, de ha jól sikerül megszervezni, és a gyerekek jól tudnak csoportban, kreatívan együttműködni, akkor nagyon hasznos lesz.

Házi feladatnak az órán meg nem oldott feladatok közül, vagy a Feladatgyűjtemény 1–7. feladataiból válogathatunk.

4. FELADATLAP

Szerkessz háromszöget a megadott adatokból, majd végezd el a kért szerkesztést!

1. $a = 3$ cm; $b = 4,5$ cm; $\gamma = 45^\circ$. Szerkessz meg a háromszög köré írható kört!
Az oldalfelező merőlegesek metszéspontja adja a kör középpontját.
2. $a = 4,5$ cm; $b = 4,5$ cm; $\gamma = 60^\circ$. Szerkessz meg a háromszögbe írható kört!

A szögfelezők metszéspontja adja a kör középpontját. Sugara a középpontból bármely oldalra bocsátott merőleges szakasz hossza.

3. Szerkeszd meg a következő háromszögek magasságpontját:

a) $a = 4$ cm; $b = 5$ cm; $c = 6$ cm

Háromszögön belül

b) $a = 5$ cm; $b = 3,5$ cm; $c = 2,5$ cm

Háromszögön kívül

c) Hol van a derékszögű háromszögek magasságpontja?

A derékszögű csúcspon.

4. $a = 5$ cm; $c = 4$ cm; $\gamma = 45^\circ$. Szerkeszd meg a súlypontot!

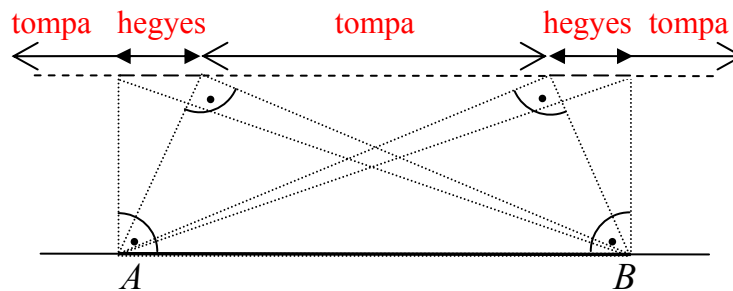
Két megoldás lehetséges, mert a kisebbik oldallal szemközti szög adott!

5. Adott egy háromszög $AB = 4,5$ cm-es oldala és $m_c = 2$ cm-es magassága.

a) Szerkeszd meg a háromszög lehetséges C csúcsainak helyét!

Az AB oldallal párhuzamos, tőle 2 cm-re haladó egyenesek.

b) Szerkessz a fenti adatokkal, közös AB oldallal, hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszögeket! Dolgozhatsz az a) feladat ábráján!



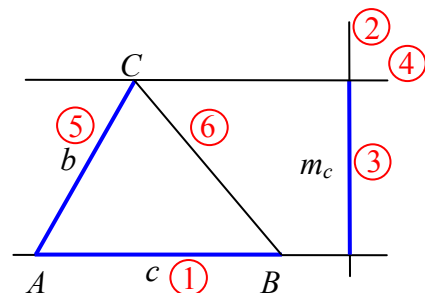
6. Szerkessz háromszöget két oldalból és egy magasságból:

a) $b = 5,5$ cm; $c = 6$ cm; $m_c = 5$ cm

Párhuzamos szerkesztés c -vel

b) $b = 5,5$ cm; $c = 6$ cm; $m_a = 3,5$ cm

merőleges állítás a egyenesére



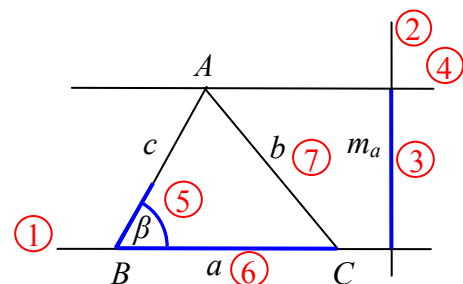
7. Szerkessz olyan háromszöget, amelynek adatai:

a) $a = 5$ cm; $m_a = 3,5$ cm; $\beta = 50^\circ$

Párhuzamos szerkesztés a -val

b) $a = 4,5$ cm; $m_c = 3$ cm; $\gamma = 75^\circ$

Párhuzamos szerkesztés c egyenesével



III. Négyzsögszerkesztések

1. A négyszögek tulajdonságai

A házi feladat ellenőrzése után bemelegítésként rövid „Ki vagyok én?” játékkal ismételjük át a speciális négyszögek tulajdonságait. Ennek során egy tanulót kihívunk a tábla elé, a többieknek pedig felmutatunk egy négyszögdefiníció-kártyát a 0851 – 2. tanári melléklet-éből – vagy a tanuló háta mögött felírjuk a táblára a négyszög nevét. A főszereplő egy-egy osztálytársának felteszi a kérdést, hogy „Ki vagyok én?”, a kérdezett pedig egy igaz állítást mond az adott négyszögről. Ha az osztály úgy ítéli, hogy a kérdezett hamisat állít, hangosan mondjon egy előre megbeszélt szót: pl. „Hamis!”, vagy más, a gyerekeknek tetsző játékos megjegyzést! De ne engedjük félrevezetni a kérdezőt!

Ha sikerült a négyszög nevét kitalálni, a játék új gyerekekkel, új négyszöggel folytatódik.

2. Négyszög alapszerkesztések, vegyes szerkesztési feladatok

A négyszögek tulajdonságainak megbeszélése után az 5. feladatlappal dolgozunk.

A tanulók itt is tudásszintjük szerint kialakított négyes csoportokban ülnek. Csoporton belül párokban dolgoznak, önállóan. A feladatok a) és b) pontjain szabadon osztozva, minden pár egyik tagja csak az egyiket, másik tagja csak a másikat szerkeszti meg; majd páron belül megbeszélik egymás munkáját; végül ellenőrzik is megoldásaikat a csoporton belüli másik pár hasonló megoldásaival összevetve.

A gyorsabban haladó csoportok párjai ezután áttérhetnek a c) és d) pontok megoldására (a 3. feladattól kezdve), ugyanilyen munkarend szerint. Ha szükséges, kérhetnek tanári segítséget.

A feladatokat sorban egymás után oldják meg, egyet sem kihagyva! A gyengébb csoportok tanulóitól 4-5 szerkesztést – párjukkal együtt 8-10 szerkesztéssel való foglalkozást – elvárhatunk, de lényegesebb, hogy azt, amit megoldottak, értsék és tudják. A jobbaknak 8 szerkesztés (16 szerkesztési feladat) áll rendelkezésére, de tőlük sem várjuk minden feladat megoldását, hiszen egy-egy probléma megvitatása időigényes, viszont nagyon hasznos. A meg nem oldott feladatokkal otthon is foglalkozhatnak.

Hívjuk fel a gyerekek figyelmét arra, hogy mindig készítsenek vázlatrajzot, azon betűzzék a csúcsokat, oldalakat, színezzék az adatokat, majd tervezzék meg a szerkesztés menetét!

A pirossal közölt szerkesztési menet a legtöbb feladat esetében csak egyike a lehetséges és egyaránt helyes szerkesztési meneteknek.

5. FELADATLAP

Minden szerkesztés előtt vedd fel az adatokat; készíts vázlatrajzot, jelöld rajta számozással a szerkesztés menetét!

1. Szerkessz négyzetet, ha adott

a) $a = 3,4$ cm

b) *átlója* = 5,2 cm

Az átló felező merőlegesére a metszéspontból mindkét oldalra felmérjük az átló felét.

2. Szerkessz téglalapot, ha

a) $a = 34$ mm; $b = 5,2$ cm

b) $b = 3,8$ cm; *átlója* = 7 cm

b fölé egyenlőszárú háromszöget szerkeszteni $\text{átló}/2$ szárral.

3. Szerkessz rombuszt, ha adott

a) $a = 6 \text{ cm}; \alpha = 130^\circ$

Szögmérővel 130° -os szöget rajzolunk, szárait rámérjük az a oldalt, tükrözéssel megszerkesztjük a negyedik csúcsot.

b) $a = 6 \text{ cm}; \text{átlója} = 3 \text{ cm}$

Az átló mindkét partjára a oldallal egyenlőszárú háromszögeket szerkesztünk.

c) $e = 4,7 \text{ cm}; f = 83 \text{ mm}$

Az e átló felező merőlegesére a metszéspontból mindkét oldalra felmérjük f átló felét.

d) $AC \text{ átló} = 7 \text{ cm}; \alpha = 71^\circ$

α szög felezőjére átlót felmérni, átló felező merőlegesével α szarait el metszeni.

4. Szerkessz paralelogrammát, ha

a) adott két oldala és egy szöge

A szög szárait (csúcsa: A) rámérjük az oldalakat (végpontjaik: B és D), és BD felezőpontjára középpontos tükrözéssel megszerkesztjük a negyedik csúcsot.

b) adott két oldal és egy átló

A két oldallal és az átlóval háromszöget szerkesztünk, majd az átló felezőpontjára középpontos tükrözéssel megszerkesztjük a negyedik csúcsot.

c) $a = 29 \text{ mm}; m_a = 5 \text{ cm}; \alpha = 75^\circ$ párhuzamosszerkesztés a -val

d) $a = 63 \text{ mm}; b = 40 \text{ mm}; m_b = 3,5 \text{ cm}$ párhuzamosszerkesztés b -vel

5. Szerkessz deltoidot, ha

a) két oldala 3 cm és 4 cm , szimmetriaátlója 5 cm

A két oldallal és az átlóval háromszöget szerkesztünk, majd az átlóra tükrözéssel megszerkesztjük a negyedik csúcsot.

b) két oldala 3 cm és 4 cm , nem-szimmetria-átlója 5 cm

Az átló egyik partjára a oldallal, másik partjára b oldallal egyenlőszárú háromszögeket szerkesztünk.

c) $AB = 6 \text{ cm}; AC \text{ szimmetriaátló} = 4,5 \text{ cm}; \angle DAB = 40^\circ$

$\angle DAB$ felezőjére átlót felmérni, AB oldallal $\angle DAB$ szarait el metszeni

A kapott deltoid konkáv lesz.

d) $DA = 5,3 \text{ cm}; DB \text{ nem-szimmetriaátló} = 3,5 \text{ cm}; \angle CDA = 100^\circ$

DB fölé egyenlőszárú \triangle -et szerkeszteni DA szárral, DB felező merőlegesét a DA szára D csúcsban felmért $\angle CDA$ másik szarával el metszeni

Az óra során a tanár folyamatosan figyeli a csoportok haladását, figyeli, hogy ki miben szorul segítségre. Házi feladatnak adhatjuk azokat a feladatokat, amelyeket az órán a csoporttárs oldott meg. Adjuk mégegyszeri, otthoni megoldásra azokat a feladatokat, amelyeknél segítséget igényeltek. Lehet az órai tapasztalatok alapján a Feladatgyűjteményből vagy az órán kevésbé sikeres, ill. sorra nem került szerkesztésekből is válogatni.

IV. Vegyes szerkesztési feladatok

1. Négyszögek szerkeszthetősége

A házi feladat ellenőrzése után a 4. tanári melléklet négyszöggráf-fóliájának segítségével megbeszéljük, hogy az egyes speciális négyszögek hány adatból szerkeszthetőek. Természetesen ezek egymástól független adatok kell, legyenek!

4. tanári melléklet – lásd a modul eszközei közt!

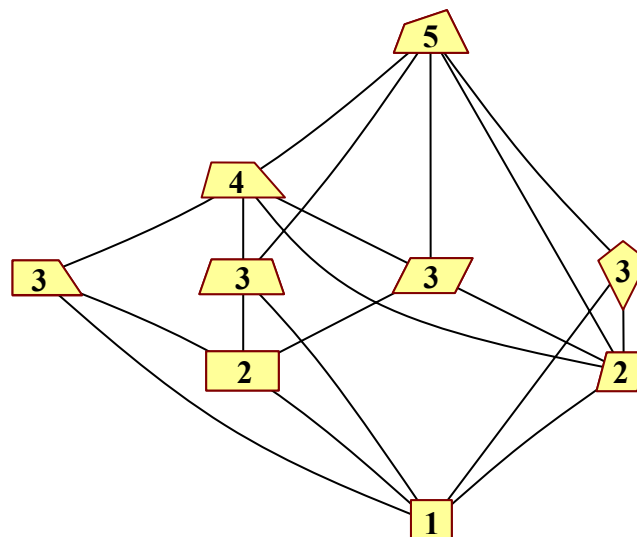
A megbeszélés után oldjuk meg az 6. feladatlapot! Ügyesebb gyerekeknek adjuk csoportmunkára, csak a végén legyen frontális ellenőrzés, kevésbé önálló tanulókkal együtt oldjuk meg.

6. FELADATLAP

A következő táblázat hasznos tudnivalókat rejt.

A harmadik oszlopban egy-egy mondat első részét olvashatod. A kettőspont után következik a mondat befejező része, de ezt Neked kell leírnod! A táblázat kitöltésekor gondold a négyszögek tulajdonságaira! Segíthet a táblázat alatt látható négyszögháló.

Az egyes négyszögfajták megszerkesztéséhez szükséges adatok száma		
Általános négyszög:	5	mert átlójával 2 háromszögre bontható, de az átlóra illeszkedő oldala a két háromszögnek: közös $(\Rightarrow 2 \cdot 3 - 1 = 5 \text{ adat})$;
Trapéz:	4	az általános négyszög 5 adatából 1 adat: az alapok párhuzamossága;
Derékszögű trapéz:	3	a trapéz 4 adatából 1 adat: a derékszög ;
Húrtrapéz:	3	a trapéz 4 adatából 1 adat: a tengelyes szimmetria tulajdonság ;
Paralelogramma:	3	a trapéz 4 adatából 1 adat: a középpontos szimmetria, vagy a szárak párhuzamossága ;
Deltoid:	3	az általános négyszög 5 adatából 2 adat: 1 adat a szimmetriaátló és 1 adat az átlómerőlegesség, vagy 2-2 szomszédos oldal egyenlősége ;
Téglalap:	2	a húrtrapéz 3 adatából 1 adat: a másik tengelyes szimmetria, vagy a száron fekvő szögek egyenlősége , vagy a paralelogramma 3 adatából 1 adat: a középpontos szimmetria ;
Rombusz:	2	a deltoid 3 adatából 1 adat: a másik szimmetriaátló ;
Négyzet:	1	a rombusz 2 adatából 1 adat: az oldalfelezőkre vonatkozó tengelyes szimmetria , vagy a téglalap 2 adatából 1 adat: az átlókra vonatkozó tengelyes szimmetria .



2. Szabályos sokszögek szerkesztése

7. FELADATLAP

1. Hány adat szükséges a szabályos sokszögek megszerkesztéséhez? **1 adata egyértelműen meghatározza a szabályos sokszöget, mivel a középponti egyenlőszárú háromszögek minden szögét ismerjük, elegendő vagy a szabályos sokszög oldalát (a középponti egyenlőszárú háromszög alapját), vagy a köré írható kör sugarát (a középponti egyenlőszárú háromszög szárát) megadni.**

a) Szerkessz szabályos hatszöget, ha a köré írható kör sugara $r = 2,5$ cm!

A kör adott pontjából a sugárral elmetszeni a kört; a metszésbe leszúrva újra; ismételni 5-ször.

b) 7 cm átmérőjű körbe szerkessz szabályos nyolcszöget!

$r = 3,5$ cm kör átmérőjére a középpontban merőlegest állítani \Rightarrow a 2 átmérő kimetsz 4 csúcsot; az átmérők által bezárt 4 derékszöget felezni \Rightarrow a szögfelezők kimetszik a köztes 4 csúcsot.

c) Szerkessz szabályos háromszöget 5 cm sugarú körbe!

Az a) megoldás menetét követni; majd minden második metszéspontot összekötni.

3. Alapszerkesztések alkalmazása vegyes szerkesztési feladatokban

2. Figyeld az ábra jelöléseit, és szerkessz trapézt, ha:

a) $a = 65$ mm; $b = 4$ cm; $d = 32$ mm; $\alpha = 60^\circ$

a oldal, 60° -os szög, d szár, párhuzamos a -val, b szár

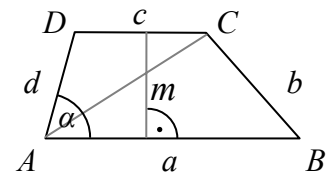
**b) szimmetrikus, és $a = 65$ mm; $d = b = 3,5$ cm; $m = 2,5$ cm
párhuzamosszerkesztés a -val, száakkal kimetszeni D és C -t**

c) derékszögű ($\alpha = 90^\circ$), és $a = 53$ mm; $c = 2$ cm; AC átló = 4 cm

c -re D -ben merőlegest állítani, ezt C -ből CA átlóval elmetszeni, a kapott A -n keresztül c -vel párhuzamost szerkeszteni, erre A -ból a -t rámérni

d) $a = 71$ mm; $c = 39$ mm; $d = 4,3$ cm; AC átló = 57 mm

c fölé d és CA oldalakkal háromszöget szerkeszteni, a kapott A -n keresztül c -vel párhuzamost szerkeszteni, erre A -ból a -t rámérni



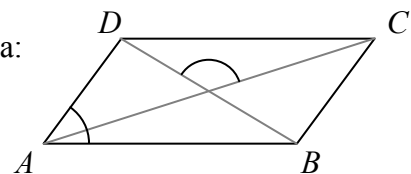
3. Figyeld az ábra jelöléseit, és szerkessz paralelogrammát, ha:

a) $AB = 4,5$ cm, $AC = 7,5$ cm, BAD szög = 60°

AB , B végpontjába 120° , A -ból AC -vel elmetszeni.

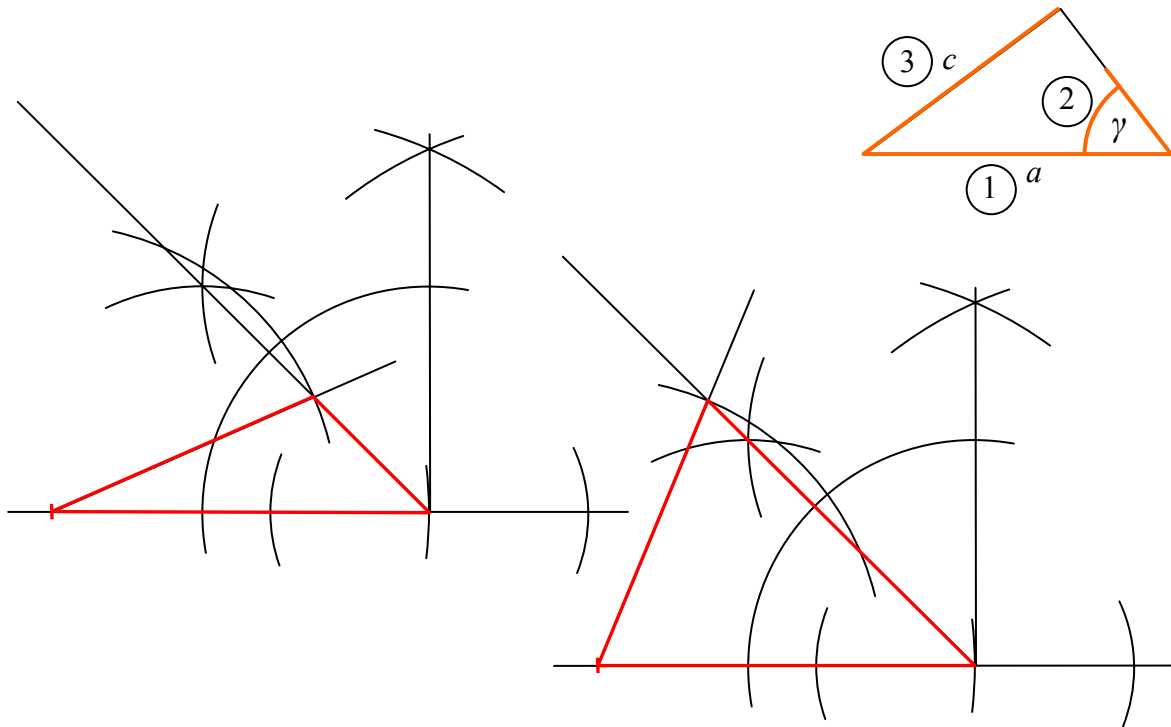
b) $AC = 6$ cm, $BD = 4$ cm és az általuk bezárt szög 60°

60° -os szög, szárait meghosszabbítani a csúcson túl (60° -ban metsző egyenesek), metszéspontból egyik egyenesre kétfelé $AC/2$ -t, metszéspontból másik egyenesre kétfelé $BD/2$ -t felmérni.



4. Szerkessz háromszöget, amelynek két oldala és egy szöge a következő:

$a = 5$ cm; $c = 3,8$ cm; $\gamma = 45^\circ$.



Ha két oldal és a kisebbikkel szemközi szög adott, a szerkesztés nem egyértelmű: két megoldás lehetséges. (Két nem egybevágó háromszög.)

4. feladat megoldása: 3. tanári melléklet írásvetítő fólia

3. tanári melléklet – lásd a modul eszközei közt!

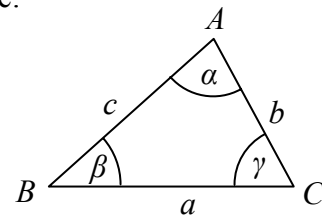
FELADATGYŰJTEMÉNY

A háromszögek csúcsainak, oldalainak, szögeinek szokásos jelölése:

A szerkesztési feladatok mindegyikéhez

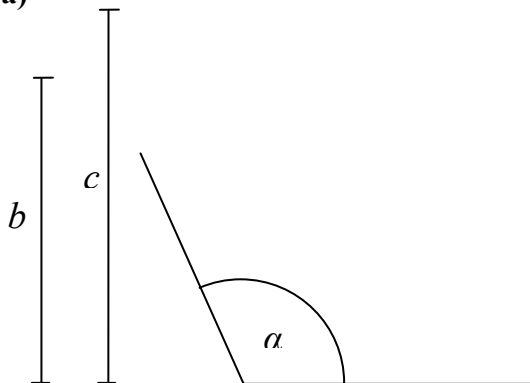
- készíts vázlatrajzot, betűzve az oldalakat, szögeket;
- színezd az ismert adatokat;
- számozd a szerkesztés tervezett lépéseit!

A füzetedbe dolgozz!

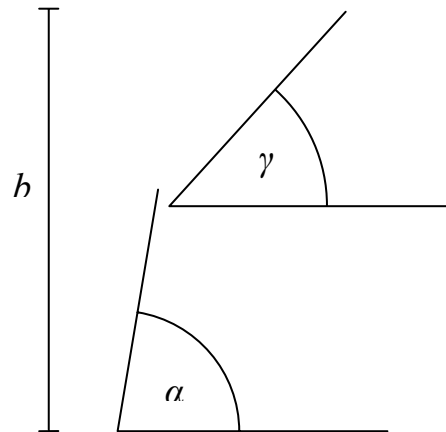


1. Szerkessz háromszöget a megadott adatokból!

a)



b)



- a) α -t lemásolni (csúcsa: A); száraira rámérni c -t és b -t (a metszéspontok a B és C csúcsok)
 b) α -t lemásolni (csúcsa: A); egyik szárára rámérni b -t (metszéspont: C csúcs); C -be másolni ugyanezen szárra az (A csúcs felé nyíló) γ -t; α és γ másik szárainak metszéspontja a B csúcs.

2. Szerkessz háromszöget a megadott adatokból!

a) $a = 54$ mm; $b = 3,4$ cm; $\gamma = 120^\circ$

γ -t megszerkeszteni (C csúcs); száraira rámérni b -t és a -t (A és B csúcsok)

b) $a = 4,2$ cm; $b = 0,62$ dm; $\alpha + \beta = 150^\circ$

$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$; innen a megoldás azonos az a) pont-belivel

3.

a) Egy háromszög adatai a következők: $a = 3$ cm; $\beta = 40^\circ$; $\gamma = 110^\circ$. Vedd fel az adatokat (szögmérőt is használj), és szerkessz!

Az a szakasz végpontjaiba (B és C) felmérni β -t és γ -t; ezek másik szárainak metszéspontja A .

b) Egy háromszög leghosszabb oldala 6,5 cm és szögeinek aránya 1 : 2 : 3. Szerkessz!

$180^\circ : (1 + 2 + 3) = 30^\circ$; a háromszög szögei: 30° ; 60° ; 90° .

A megadott, leghosszabb oldal végpontjaiba szerkeszteni a 30° -os és 60° -os szögeket; másik száraik metszéspontja lesz a (leghosszabb oldallal szemközti) 90° -os szög csúcsa.

4. Szerkessz háromszöget, ha ez egy

a) szabályos háromszög, és a magassága 3 cm;

egymástól 3 cm-re párhuzamosok; az egyiknek egy pontjába (A) 60° -os szöget szerkeszteni; a szögcsúcs és a másik egyenes metszéspontja C ; A -ból AC -vel az egyenest el metszeni: B .

b) egyenlőszárú háromszög, a magassága 3 cm és szárszöge 45° ;

45° -os szöget szerkeszteni (csúcsa: C); szögfelezőt szerkeszteni és C -től rámérni 3 cm-t; e pontban merőlegest állítani a szögfelezőre; a merőleges és a szögcsúcsok metszéspontjai: A ; B .

c) egyenlőszárú háromszög, a magassága 3 cm és az alapon fekvő szöge 45° !

egymástól 3 cm-re párhuzamosok; az egyiknek egy pontjába (A) 45° -os szöget szerkeszteni; a szögcsúcs és a másik egyenes metszése C ; C -ből AC -vel az alap egyenesére visszametszeni: B .

5. $a = 5,5$ cm; $b = 4,8$ cm; $\gamma = 75^\circ$. Szerkeszd meg a háromszög magasságpontját!

Háromszög: γ -t megszerkeszteni (C csúcs); száira rámérni b -t és a -t (A és B csúcsok)

Magasságpont: merőleges szerkesztések a csúcsokból a szemközti oldalakra; metszéspontjuk.

6. Szerkessz háromszöget, ha egyik oldala $a = 45$ mm, az oldalhoz tartozó magassága $m = 3$ cm és β szöge:

- a) $\beta = 75^\circ$; Az a szakasztól ($\equiv BC$ szakasz) 45 mm-re párhuzamos szerkesztése; B -be megszerkeszteni β -t (mindhárom esetben szerkeszthető); β szögcsúcsa és a párhuzamos egyenes metszéspontja A ; A -t és C -t összekötni.
- b) $\beta = 90^\circ$;
- c) $\beta = 120^\circ$

7. Egy háromszög a oldala 4 cm, a rajta lévő két szög: $\beta = 60^\circ$ és $\gamma = 30^\circ$. Szerkeszd meg, majd tükrözd: Háromszög: az a szakasz végpontjaiba β és γ megszerkesztése; metszésük A .

- a) az a oldalára, deltoid (húrdeltoid)
- b) a b oldalára, egyenlőoldalú háromszög
- c) a c oldalára, 120° -os szárszögű egyenlőszárú háromszög
- d) az a oldal felezőpontjára! téglalap

Milyen sokszöget alkot az eredeti és a tükrözött háromszög?

8. Szerkessz szabályos hatszöget, ha egy oldala $a = 3,3$ cm!

$r = 3,3$ cm kör adott pontjából r -rel metszeni a kört; a metszésbe leszúrva újra; ismételni $5 \times$.

9. Szerkessz egyenlőszárú háromszögekből szabályos nyolcszöget! A háromszögek szárai 2,5 cm-esek.

45° -os szöget szerkeszteni (csúcsa: K); K köré $r = 2,5$ cm kört írni; a szögcsúcsokkal való metszéspontok távolságával – mindig az új metszésbe leszúrva – még $7 \times$ körbemetszeni a kört. Szomszédos metszéspontokat összekötni \Rightarrow nyolcszögoldalú és a háromszögek alapjai; a metszéspontokhoz tartozó sugarakat behúzni \Rightarrow az egyenlőszárú háromszögek szárai.

10. Szerkessz $ABCD$ paralelogrammát a következő adatokból:

- a) $AB = 5,2$ cm; $BC = 2,5$ cm és $AC = 5,7$ cm

AC átló fölé – azonos körüljárással – háromszögeket szerkeszteni, amelyeknek másik két oldala BC és AC . A körívmetszések az AC egyik oldalán a B , másik oldalán a D csúcsot adják.

- b) $AB = 3$ cm; $BD = 3$ cm; DAB szög = 60° 60° -os rombusz

AB felvétele; A -ba 60° -os szög szerkesztése; B -ből BD -vel elmetszeni a másik szögcsúcsot (D); BD másik oldalára háromszöget szerkeszteni AB és AD (szintén 3 cm) oldalakkal (C).

- c) $AB = 2$ cm; $AC = 4$ cm; CAB szög = 90°

AB felvétele; A -ba merőlegest állítani; rámérni AC -t (C); C -n át AB -vel párhuzamos szerkesztése; C -ből – a B -vel átellenes oldalon – elmetszeni a párhuzamost AB -vel (D).

11. Szerkessz deltoidot, ha $a = 35$ mm, $b = 5,6$ cm, a két oldal által bezárt szög pedig derékszög!

a felvétele; egyik végpontjába merőlegest állítani; rámérni b -t; a és b másik végpontjain át tengelyt fektetni; erre tükrözni a derékszögű csúcsot; képét összekötni a és b végpontjaival.

12. Egy trapéz egyik alapja: $AB = 6$ cm; egyik szára: $AD = 2,5$ cm; egyik átlója: $AC = 4,2$ cm és az A csúcsnál lévő szöge 75° . Szerkeszd meg!

CDA szöget (105°) felvenni, egyik szárára *DA*-t felmérni, *A*-ból a másik szögcsúcs *AC*-vel elismerni – *C* csúcs –, a kapott *DC* alappal *A*-n át párhuzamost szerkeszteni, erre *A*-ból *AB*-t rámérni – *B* csúcs.

13. Szimmetrikus trapéz két alapja 8 cm és 4 cm, van 60° -os szöge. Szerkeszd meg, majd tükrözd a hosszabb alapjára! Milyen sokszöget kaptál?

8 cm-es alap; egyik végpontjába 60° -os szög szerkesztése 4 cm-es körzőnyílással; másik végpontjába 60° -os szög szerkesztése 4 cm-es körzőnyílással; a két metszés összekötése az alap végpontjaival és egymással. A hosszabb alapra tükrözéssel szabályos hatszöget kapunk.