0851. MODUL

GEOMETRIAI ISMÉTLÉS

Az alakzatokról tanultak ismétlése

KÉSZÍTETTE: PUSZTAI JULIANNA

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A geometriai alapfogalmak felelevenítése, rendszerezése, háromszögek, négyszögek, sokszögek csoportosítása, speciális háromszögek, négyszögek definíciói, tulajdonságaik összegyűjtése
Időkeret	4 óra
Ajánlott korosztály	8. osztály
Modulkapcsolódási pontok	0571, 0572, 0633, 0661, 0663, 0681, 0722, 0751, 0752, 0754, 0781, 0871., 9. évfolyam 7, 8. és 10. évfolyam 4.
A képességfejlesztés fókuszai	*Számolás, becslés:* szögszámítások. *Rendszerezés, kombinativitás:* alakzatok, háromszögek, négyszögek csoportosításai eltérő szempontok szerint. *Deduktív, induktív következtetés:* definíció és tulajdonság megkülönböztetése, állítások igazságának eldöntése, érvelés, ellenpélda megmutatása. *Beszédkészség:* a definíciók, tulajdonságok, érvek, ellenérvek szabatos megfogalmazása.

AJÁNLÁS

A tanulók többnyire négyes csoportokban dolgoznak, de szükséges, hogy egyéni feladattal is kipróbálhassák magukat. Nagyon fontos a csoportokon belül kialakuló vita, érvelések, ellenérvek, a gondolkodás szabadsága, a másik véleményének figyelembevétele, egymás tisztelete. Megtapasztalhatják az egyén szerepének fontosságát a közösségben. Pozitív élményeket adhat pl. poszter készítése az osztállyal. Az esztétikai érzék fejlesztésére is módot adnak ezek az órák.

A tanulói tapasztalatcsere hangsúlyozása mellett ugyanilyen fontosnak kell lennie a frontális tanári munkának, amelynek folyamán a tanulók megerősítést kapnak a továbbhaladásuk szempontjából legfontosabb ismeretekben, illetőleg tisztázódnak meg nem értett anyagrészek.

Ebben a modulban látszólag kevés eszköz használatára tettem javaslatot, mivel az itt szereplő tananyag már ismert, felelevenítéséhez legfontosabb eszköz az emlékezet, a logikus gondolkozás, a beszélgetés, differenciált feladatokon való gyakorlás.

Mivel a geometria eléggé nagy területét kell négy tanórában áttekinteni, fontos, hogy a gyerekek motiváltak legyenek az egész munkafolyamatban. Ezt segíti az egyéni- és csoportmunka váltakozása: mindenki felelős önmagáért és társaiért.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Feladatlapok, Feladatgyűjtemény, mértani eszközök

ÉRTÉKELÉS

Folyamatos szóbeli értékelés, a hiányosságok pótlására, hibák javíttatására is kiterjedően. Egyéni- és csoporteredmények pozitív értékelése. Ösztönözzük a tanulókat, hogy egymás munkáját is értékeljék, megbecsüljék, megdicsérjék. A témát felmérő dolgozat zárja, ezt osztályozzuk.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. Alakzatok szimmetriatulajdonságai			
1.	Bemelegítő a témakörre: a geometriai alakzatok és a tapasztalt világ kapcsolata	megfigyelő képesség, formaérzékelő, rendszerező képesség, vizualitás	1. tanári melléklet*:* alakzatnév-kártyák, 32 db; táblai körző, vonalzó, tanulóknak körző, vonalzó, színes ceruzák
2.	Középpontos és tengelyes szimmetria definíciója, síkbeli alakzatok szimmetriái	deduktív gondolkodás	1. Feladatlap
3.	Adott tulajdonságú pontok halmazai a síkon	rajzkészség	2. Feladatlap
II. Háromszögek tulajdonságainak ismétlése			
1.	Háromszögek tulajdonságai	deduktív, induktív következtetés	applikációs mágnesek vagy gyurmaragasztó, poszterkészítéshez csomagolópapír Tanulónként A4-es géppapír, rajzeszközök (filctoll, zsírkréta)
2.	Háromszögek csoportosítása oldalaik és szögeik szerint	rendszerezés	3. Feladatlap
3.	Feladatok háromszögek oldalai, belső szögei és külső szögei közötti összefüggésekre	számolás, alkalmazás	4. Feladatlap

III Négyszögek tulajdonságainak ismétlése			
1.	Négyszögek definíciói, tulajdonságai	induktív, deduktív következtetés	poszterkészítéshez szükséges eszközök, 2. tanári melléklet: 8-féle négyszögről négyszögdefiníció-kártyák, 9 db A3-as géppapír
2.	Négyszögek csoportosítása	rendszerezés	3. tanári melléklet: Ellenőrző fólia a 5. Feladatlaphoz 5. Feladatlap
3.	Feladatok négyszögek oldalai, belső szögei és külső szögei közötti összefüggésekre	megfigyelő képesség, logikus gondolkodás	6. Feladatlap

IV. Sokszögek, szabályos sokszögek tulajdonságainak ismétlése			
1.	Sokszögek fogalma, oldalak, szögek, átlók	induktív gondolkodás, általánosítás	7. Feladatlap
2.	Szabályos sokszögek fogalma, származtatása, szimmetriái	induktív gondolkodás, általánosítás	8. Feladatlap
3.	A házi feladat előkészítése		

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Alakzatok szimmetriatulajdonságai

1. Bemelegítő a témakörre: a geometriai alakzatok és a tapasztalt világ kapcsolata

Mivel a félév során – a Pitagorasz-tételt kivéve – még nem foglalkoztunk geometriával, ajánlatos lehet a már korábbról ismert geometriai alapfogalmak gyakorlati élet felől való ismételt megközelítése. Az itt leírt ötlet időigényes, de nagyon hasznos, segít a tanultakat feleleveníteni, rendszerezni.
A gyerekek az osztályba jövet a tanártól geometriai alakzatnév-kártyákat húznak. Körben ülnek vagy állnak a tábla előtt. A tanár elmondja, hogy egy történetet fog mesélni, és azt kéri a gyerekektől, hogy amikor valamely, a mesében szereplő tárgy, esemény kapcsán felismerik a kártyájukon olvasható alakzatot, akkor menjenek a táblához, és tegyék fel rá. Ez gyurmával vagy mágnestáblával megoldható.
A szövegben a kártyák alakzatnevei dőlt vastag, a valamely alakzatot felidéző, arra emlékeztető kifejezések (pl. orgonasíp → párh. egyenesek) álló vastag betűvel szerepelnek.

A kártyákon a következő alakzatnevek szerepelnek (1. tanári melléklet: alakzatnév-kártyák):

SÍK, TÉR, FÉLTÉR, PONT, EGYENES, FÉLEGYENES, SZAKASZ, OLDALÉL, TÁVOLSÁG, SZÖG, SZÖGTARTOMÁNY, SÍKIDOM, SOKSZÖG, KÖR, TEST, SZABÁLYOS SOKSZÖG, PÁRH. EGYENESEK, MERŐLEGES EGYENESEK, HÁROMSZÖG, NÉGYSZÖG, NÉGYZET, TÉGLALAP, DELTOID, ROMBUSZ, ÖTSZÖG, FÉLSÍK, SÁV, TÉGLATEST, KOCKA, HASÁB, GÖMB, HENGER.

1. tanári melléklet – lásd a modul eszközei közt!

Egy kirándulás története:

Kirándulni ment az osztály. A turistajelzés EGYENES, két**sáv**os aszfaltúton indult, egy nagy, SÍK mezőn át. Derűs idő volt, néhol látszottak csak a legutóbbi eső tócsái. Az egyiken át is hajtott mellettünk egy biciklista, hosszú, EGYENES keréknyomot hagyva maga után. „Nézd!” – kiáltott valaki: átszaladt előttünk, az útra MERŐLEGES irányban, egy nyúl! Már jegenyefasorok szegélyezték utunkat kétfelől, PÁRHUZAMOSan: érdekesebb lett a táj… De nem mélázhattunk soká: egy hirtelen jött zivatar pillanatok alatt bőrig áztatott! A lezúduló eső – sűrű, PÁRHUZAMOS, égi FÉLEGYENES-sereg – öt perce esett, mikor megszólalt Péter: „Már nagy KÖRöket paskolnak a cseppek a pocsolyákban, a nagyi szerint ez azt jelenti, hogy mindjárt eláll!” Igaza lett a nagyinak, s a nap a nyílt TÉRen hamar meg is szárított minket. Utunk– MERŐLEGESen keresztezve egy kisvasúti **sínpár**t – erdőbe vitt. Itt-ott értek csak talajt a lombok közt bejövő napsugarak, s Jancsi megszólalt: „Nézd, milyen vibráló PONTokban világítja meg az avart !” De Pali okosabb akart lenni, botjával a földre bökött: „Azok nem PONTok, csak fényfoltok, a PONT ez!”… Pedig az sem volt PONT még… Egy **útelágazás**nál kettévált a csapat. Mi nekivágtunk a kb. 30º-os hajlásSZÖGű meredeknek, a vár, tulajdonképpeni úticélunk felé. A bükkerdő fái **orgonasípok**ként magasodtak az ég felé. A régi vár romos volt már; TÉGLÁI inkább KOCKÁK voltak, némelyik meg nem is szabályos ***test.*** Csak ÖTSZÖG alapú bástyája állt, égre meredő óriási HASÁBKÉNT.

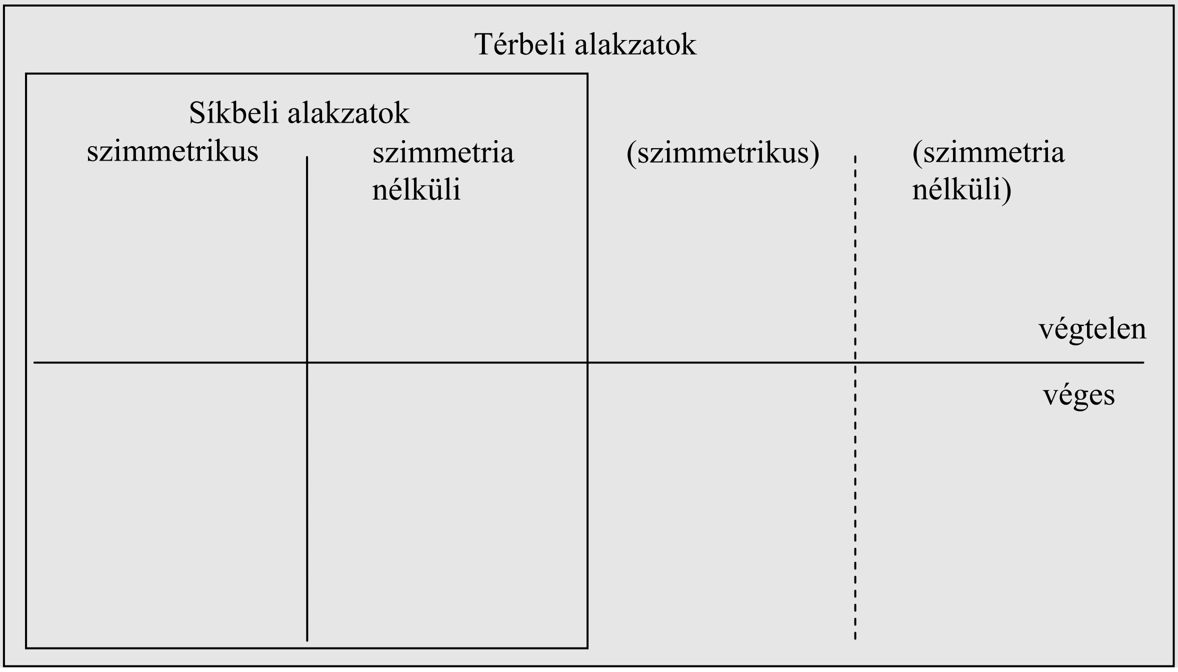
Mellette KÖR alakú káva – a hajdani kút egykor mély, HENGERes belseje tele törmelékkel. Lehangoló volt… Lent a többiek már vártak, egy friss fakitermelés HASÁBfáin ülve. „Ezek nem is HASÁBok, hanem HENGERek !” – szólalt meg megint Pali, mire nem állhattam meg: „Ezeket akkor is HASÁBfának, sőt, GÖMBfának hívják ! A belőlük rakott, NÉGYZETES HASÁB alakú fahalmazt pedig köbölnek. Mert a köb, »cubus«, latinul KOCKA; s ennek a kockának az OLDALÉLe éppen egy öl hosszú !”
Az erdőből tóhoz jutottunk, letáboroztunk. Lilla arra gondolt, hogy a víz, ahogy a fenti légTÉRt elválasztja a mélytől, két világot is elválaszt: fönn a madarak s lenn a halak hazáját. És e két FÉLTÉR határán, a **sima viz**en kacsák úsztak, jól látható SZÖGTARTOMÁNYokat húzva hullámokból. Néhány fiú futballozott – furcsa ez az angol „lábGÖMB” kifejezés –, mások végre fölengedhették ROMBUSZ és DELTOIDforma sárkányaikat. Mi **pokróc**ainkon kipakoltuk az elemózsiát az étel**doboz**ból a **szalvétá**ra, s **termosz**ból ittuk a finom teát.
A túlparton látszott a falu tornya – de addig körülkerülni a tavat nagyobb út volt még, mint a tényleges TÁVOLSÁG!... Végre megint a buszon ülve, azt mondtuk: Jó kirándulás volt!

♦ ♦ ♦

A mese végére tele lesz a tábla geometriai alakzatok rendezetlen neveivel. Ha valamelyik tanulónak még van a kezében kártya, akkor ő is tegye fel azt a táblára úgy, hogy mondjon valamilyen – akár a mesében szerepelt, akár hétköznapi – tárgyat, amelyhez köthető az alakzat.

Rendszerezés:
Rajzoljunk halmazábrát a táblára, „tér-” illetve „síkbeli alakzatok” részhalmazokkal! Feltétlenül mondjuk el, hogy – mivel a sík a tér része – a síkbeli alakzatok egyben térbeliek is. Megkérjük a gyerekeket, rendezzék át a megfelelő halmazokba a kártyáikat! Ezután felezzük el vízszintesen a halmazokat „végtelen” ill. „véges alakzatok” címekkel: a gyerekek finomítsák tovább az előző átrendezést ennek alapján! Végül a „síkbeli alakzatok” halmazt függőlegesen is kétfelé osztva, szimmetriatulajdonságok szerint is átcsoportosítunk.
A térbeli alakzatokat is érdemes lehet szimmetria szerint is csoportosítani; ha kevés az időnk, akkor ezt elhagyhatjuk.

A tábla felosztása végül ilyen legyen:



2. Középpontos és tengelyes szimmetria definíciója, síkbeli alakzatok szimmetriái

Frontális beszélgetésben megfogalmazzuk, hogy mit jelent a síkbeli alakzatok középpontos és tengelyes szimmetriája.

TUDNIVALÓ:

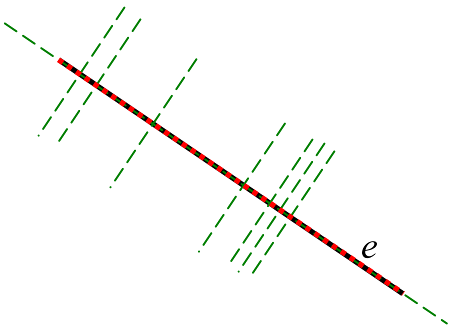
Egy alakzatot akkor nevezünk tengelyesen szimmetrikusnak, ha létezik – legalább egy – olyan egyenes, amelyre az alakzatot tengelyesen tükrözve önmagát kapjuk.
Egy alakzatot akkor nevezünk középpontosan szimmetrikusnak, ha létezik olyan pont, amelyre az alakzatot középpontosan tükrözve önmagát kapjuk.

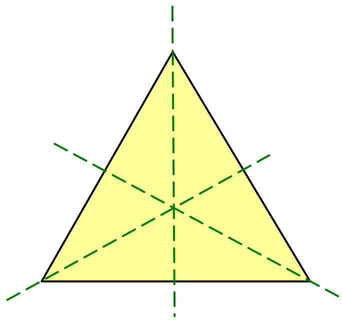
Megoldatjuk az 1. feladatlapot.
A gyerekek négyes csoportokban ülnek, elosztják egymás közt az A, B, C, D csoportbeli szerepeket. A kiosztás után mindenki önállóan a saját feladatát oldja meg, majd egymásnak megmutatják munkáikat; ellenőrzik, megbeszélik, kijavítva az esetleges hibákat.
A feladatlap megoldását frontális megbeszéléssel zárjuk le.

1. FELADATLAP

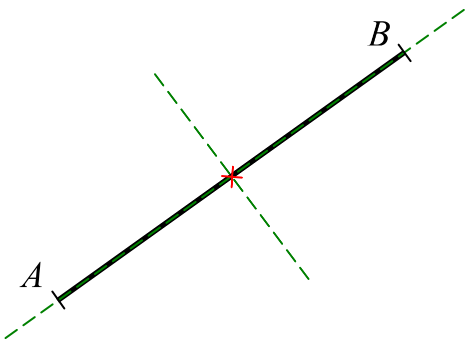
1. Rajzold be mindegyik ábrába zölddel a szimmetriatengelyeket – ha találsz, többet is –, pirossal pedig a szimmetriaközéppontot!

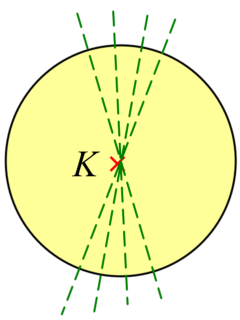
a)



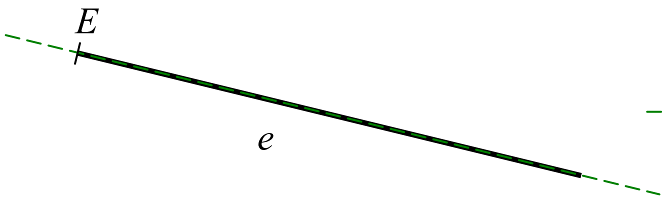


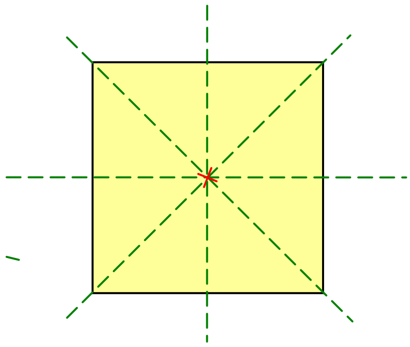
b)



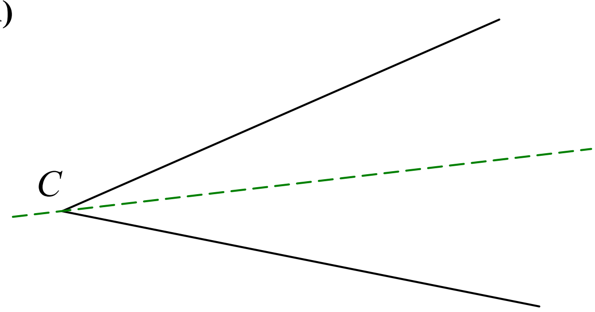


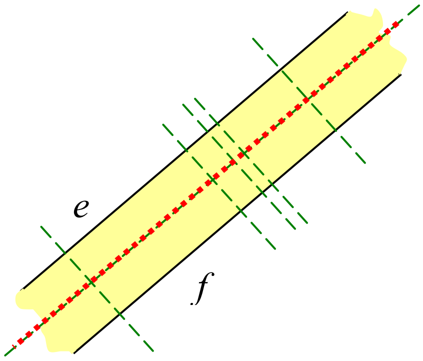
c)





d)





3. Adott tulajdonságú pontok halmazai a síkon

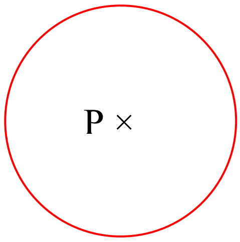
Sokszor lehet olyan feladatunk a geometriában – különösen szerkesztési példákban –, hogy bizonyos, adott közös tulajdonsággal rendelkező pontok halmazát kell meghatároznunk. Az ennek eredményéül kapott ponthalmazok szintén geometriai alakzatok.
Megoldatjuk a 2. feladatlap 1–6. feladatait. A gyorsabban haladók a 7–13. feladatokhoz is hozzáfoghatnak. A 14. feladatot a csoport közös megfogalmazása után mindenki önállóan írja le a füzetébe!
Szükséges előzetesen definiálnunk a távolság fogalmát: két geometriai alakzat távolsága a pontjaikat összekötő összes szakasz közül a legrövidebbnek a hossza.

Minden gyerek önállóan dolgozik, de a csoporttagok kérhetnek segítséget egymástól, sőt, ha szükséges, a tanártól is. Vita alakulhat ki a tanulók között a logikai „és” jelentéséről: mondjuk el, hogy ilyenkor az „és” azt jelenti, hogy az „és”-sel összekötött feltételeknek egyszerre kell teljesülniük. Az óra végéig dolgozhatnak, de hagyjunk időt az elvégzett feladatok frontális ellenőrzésére, megbeszélésére. Kérdezzük meg, hogy az egyes feladatok megoldása milyen geometriai alakzatot eredményezett!

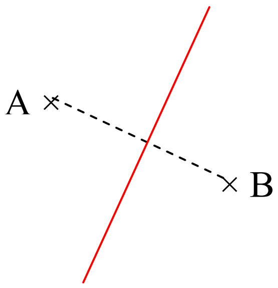
2. FELADATLAP

Színezd be a síknak azokat a pontjait, amelyek az adott tulajdonsággal rendelkeznek! Milyen alakzatokat kaptál?

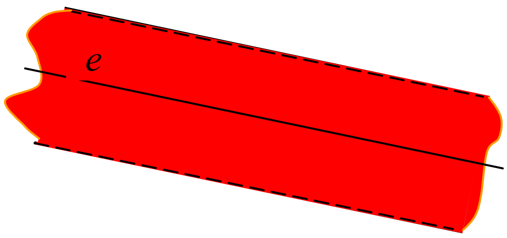
1. a *P* ponttól 2 cm távolságra vannak



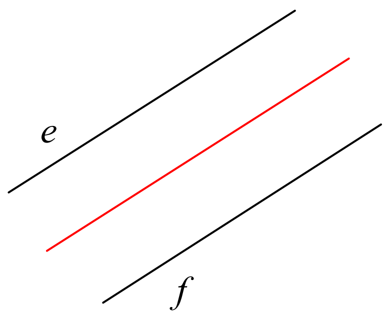
2. két ponttól egyenlő távolságra vannak



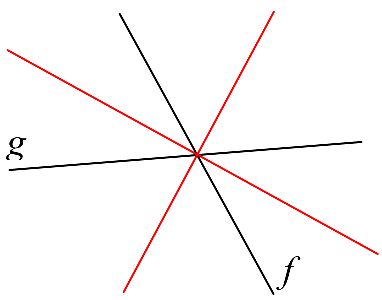
3. az ***e*** egyenestől 2 cm- nél kisebb távolságra vannak



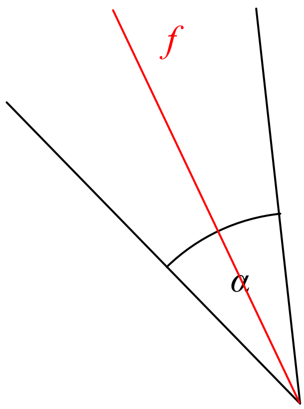
4. két párhuzamos egyenestől egyenlő távolságra vannak



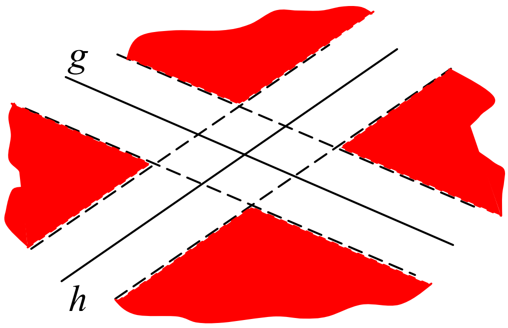
5. két metsző egyenestől egyenlő távol vannak



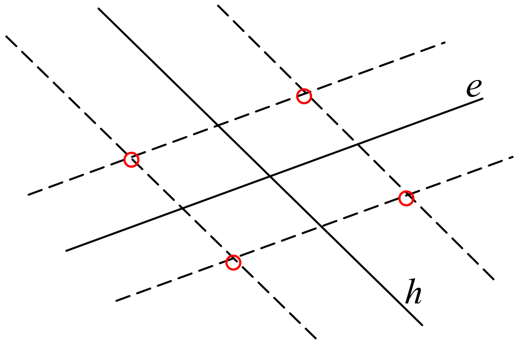
6. *α* szög száraitól egyenlő távol vannak



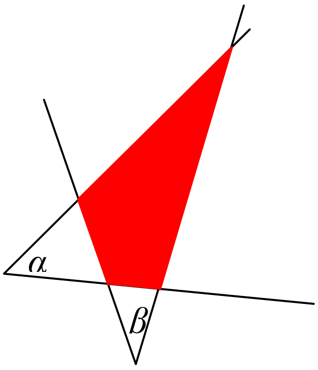
7. *h* és *g* egyenesektől 10 mm-nél nagyobb távolságra vannak



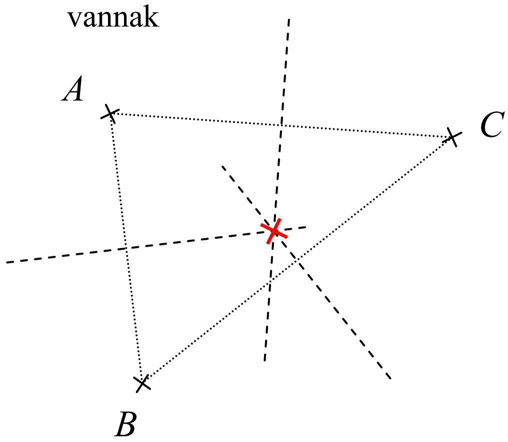
8. *e* egyenestől 1 cm-re és *h* egyenestől 15 mm-re vannak



9. mindkét szögtartományban benne vannak



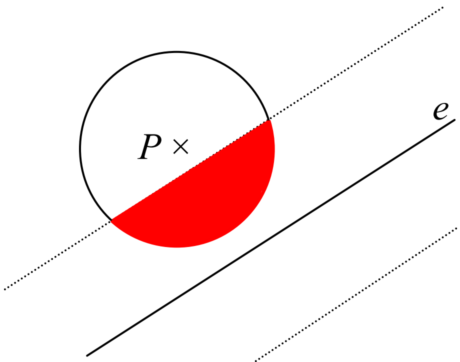
10. *A, B* és *C* ponttól egyenlő távol vannak

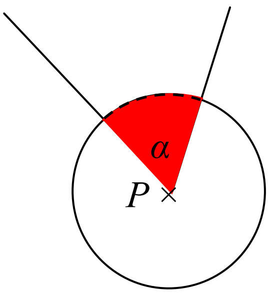


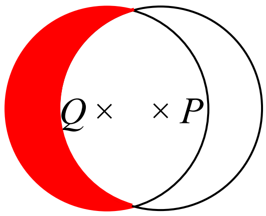
11.
P ponttól és *e* egyenestől való távolságuk egyaránt $\leq 1{,}5$ cm

12.
elemei az α szögtartománynak, és a szög csúcsától < 2 cm-re vannak

13.
a *P* ponttól ≥ 2 cm-re és a *Q* ponttól ≤ 2 cm-re vannak







14. Fogalmazzátok meg, hogy milyen azonos tulajdonsággal rendelkeznek:

a) a körvonal pontjai, Adott ponttól adott távolságra lévő pontok halmaza a síkban

b) a gömbfelület pontjai, Adott ponttól adott távolságra lévő pontok halmaza a térben

c) egy egyenessel párhuzamos egyenes pontjai, Az egyenestől adott távolságban lévő pontok halmaza a síkban

d) a szakaszfelező merőleges pontjai, A szakasz két végpontjától egyenlő távolságban lévő pontok halmaza a síkban

e) a szögfelező pontjai! Írjátok le ezeket a meghatározásokat! A szög száraitól egyenlő távolságban lévő pontok halmaza a szögtartományban.

Házi feladatnak adhatjuk az 1. feladatlap többi feladatának megoldását.
Szorgalmiként a 2. feladatlapból válogathatnak az érdeklődő gyerekek.
Elmondjuk, hogy a következő órán a háromszögekről tanultakat ismételjük, készüljenek erre korábbi tankönyveik, füzeteik lapozgatásával.

II. Háromszögek tulajdonságainak ismétlése

1. Háromszögek tulajdonságai

Bemelegítés: **staféta játék** a különböző háromszögfajták tulajdonságairól.
A tanár azt kéri a gyerekektől, akik állnak a helyükön, hogy sorban mindenki mondjon egy igaz állítást általában a háromszögről. Ha úgy látjuk, hogy már minden lényeges tulajdonság elhangzott, akkor a továbbiakban ugyanígy mondassunk igaz állításokat a derékszögű, az egyenlőszárú és az egyenlő oldalú háromszögről is. Aki olyan tulajdonságot mond, ami már elhangzott, vagy túl sokáig gondolkozik, az kiesik a játékból, és leül. A többiek folytatják. Ha már minden tanuló szerepelt, újra kezdjük az első tanulóval. A legtovább állva maradókat jutalmazzuk. Ha közben valamilyen téves vagy zavarkeltő állítás hangzik el, akkor sem állunk meg, hanem emlékeztetőül a táblára írjuk, és a játék után megbeszéljük. A staféta akkor jó és élvezetes, ha gyorsan pörögnek a mondatok egymás után, és nem sok időt vesz el az órából.

Feladat az ismétléshez:
A gyerekek 4 fős heterogén csoportokban ülnek.
Szóban kiadjuk a feladatot:
„Osszátok el majd csoporton belül egymás közt az A, B, C, D szerepeket, és mindenki rajzoljon egy A4-es lapra egy olyan, szép, nagy háromszöget, ami a választásának megfelel! Jelöljétek a csúcsokat, oldalakat, szögeket, húzzatok be magasságokat, szimmetriatengelyeket, és írjátok az ábra mellé a tanult jelölések felhasználásával az adott háromszög tulajdonságait! Színezéssel, vonalak kiemelésével, az ábra és az írás szép elrendezésével tegyétek munkátokat érthetővé, élvezhetővé! Önállóan dolgozzatok, a végén nemcsak a csoporttársaknak, hanem az osztálynak is bemutatjátok munkátokat.”

A táblára kerüljön föl a csoportbeosztás és egy rövid gondolatébresztő:

A: háromszög, B: derékszögű háromszög, C: egyenlőszárú háromszög, D: szabályos háromszög	oldalak, szögek, magasságok, szimmetria, összefüggések

Miután mindenki elkészült, és a csoportban megbeszélték, esetleg kiegészítették egymás munkáját, először az „A” feladattal dolgozó gyerekek hozzák ki a lapjaikat, egymás mellé felteszik a táblára, a többiek pedig megnézik a „kiállítást”, értékelik társaik feladatmegoldásait tartalom és külalak szempontjából. Ugyanígy történik a „B”, „C”, „D” feladatrészt megoldó tanulók lapjainak bemutatása, teljesítményük közös értékelése is. A legszebb munkákból poszter készülhet, vagy faliújságra kerülhetnek.

2. Háromszögek csoportosítása oldalaik és szögeik szerint

Felelevenítjük, hogy a háromszögek csoportosíthatók oldalaik és szögeik szerint: megbeszéljük, hogy melyik csoportba milyen háromszögek tartoznak. Frontális munka. Felhívjuk a tanulók figyelmét a Tanulói munkafüzetben szereplő definíciókra és a háromszögek tulajdonságait összefoglaló táblázatra.

A tulajdonságaik segítségével egyértelműen meghatározhatjuk, vagyis **definiálhatjuk** a különböző fajtájú háromszögeket.
Több lehetséges meghatározás közül választhatunk, és megállapodhatunk például a következő definíciókban:

– Egyenlőszárú háromszögnek nevezzük az olyan háromszöget, amelynek két oldala egyenlő.

– Szabályos háromszögnek nevezzük az olyan háromszöget, amelynek minden oldala egyenlő.

– Hegyesszögű háromszögnek nevezzük az olyan háromszöget, amelynek minden szöge hegyesszög.

– Derékszögű háromszögnek nevezzük az olyan háromszöget, amelynek van derékszöge.

– Tompaszögű háromszögnek nevezzük az olyan háromszöget, amelynek van tompaszöge.

TUDNIVALÓ:

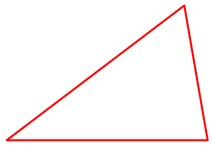
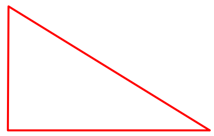
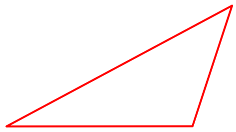
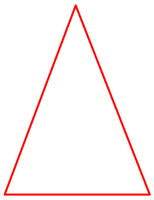
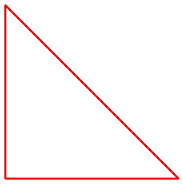
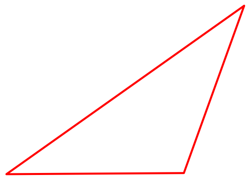
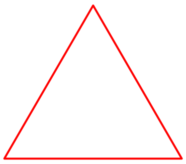
Háromszögek fajtái és tulajdonságaik:

Minden háromszögre érvényes:	bármely két oldalának összege nagyobb, mint a harmadik, belső szögeinek összege 180°, külső szögeinek összege 360°
Egyenlőszárú háromszög:	két oldala és két szöge egyenlő, az alaphoz tartozó magasság felezi az alapot és a szárak által bezárt szöget, és szimmetriatengely.
Egyenlő oldalú, szabályos háromszög:	oldalai és szögei egyenlők, minden magasság felezi a hozzá tartozó oldalt, szögfelező és szimmetriatengely.
Hegyesszögű háromszög:	minden szöge hegyesszög, magasságpont a háromszögön belül van.
Derékszögű háromszög:	van derékszöge, a derékszögű csúcs egyben magasságpont, érvényes a Pitagorasz-tétel.
Tompaszögű háromszög:	van tompaszöge, magasságpont a háromszögön kívül van.

Oldassuk meg a 3. Feladatlapot! Minden tanuló önállóan dolgozzon, de csoporton belül segíthetnek egymásnak. A tanár munka közben ellenőriz, ha kell, segít.

3. FELADATLAP

Rajzolj a táblázat megfelelő helyeire megfelelő háromszögeket!

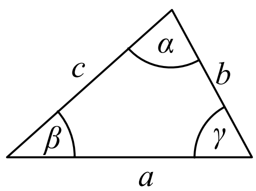
	Hegyesszögű	Derékszögű	Tompaszögű
3 különböző oldal			
Egyenlőszárú			
Egyenlő oldalú (szabályos háromszög)		nincs ilyen	nincs ilyen

3. Feladatok háromszögek oldalai, belső szögei és külső szögei közötti összefüggésekre

Alkalmazásra, gyakorlásra a 4. Feladatlapot adjuk. A gyerekek csoportmunkában, megbeszélve, vitatkozva dolgozhatnak. A megoldást frontálisan ellenőrizzük. Minden esetben hangozzék el az indoklás is.
Ha van idő az órán is, házi feladatnak is a Feladatgyűjtemény 1-6. feladatai közül válogathatunk. Elmondjuk, hogy a következő órán a négyszögekről tanultakat ismételjük, készüljenek erre korábbi tankönyveik, füzeteik lapozgatásával.

4. FELADATLAP

1. Melyik háromszöget lehet megszerkeszteni, melyiket nem? Válaszodat indokold!



a) $a = 3$ cm, $b = 4{,}2$ cm, $\gamma = 60°$
igen

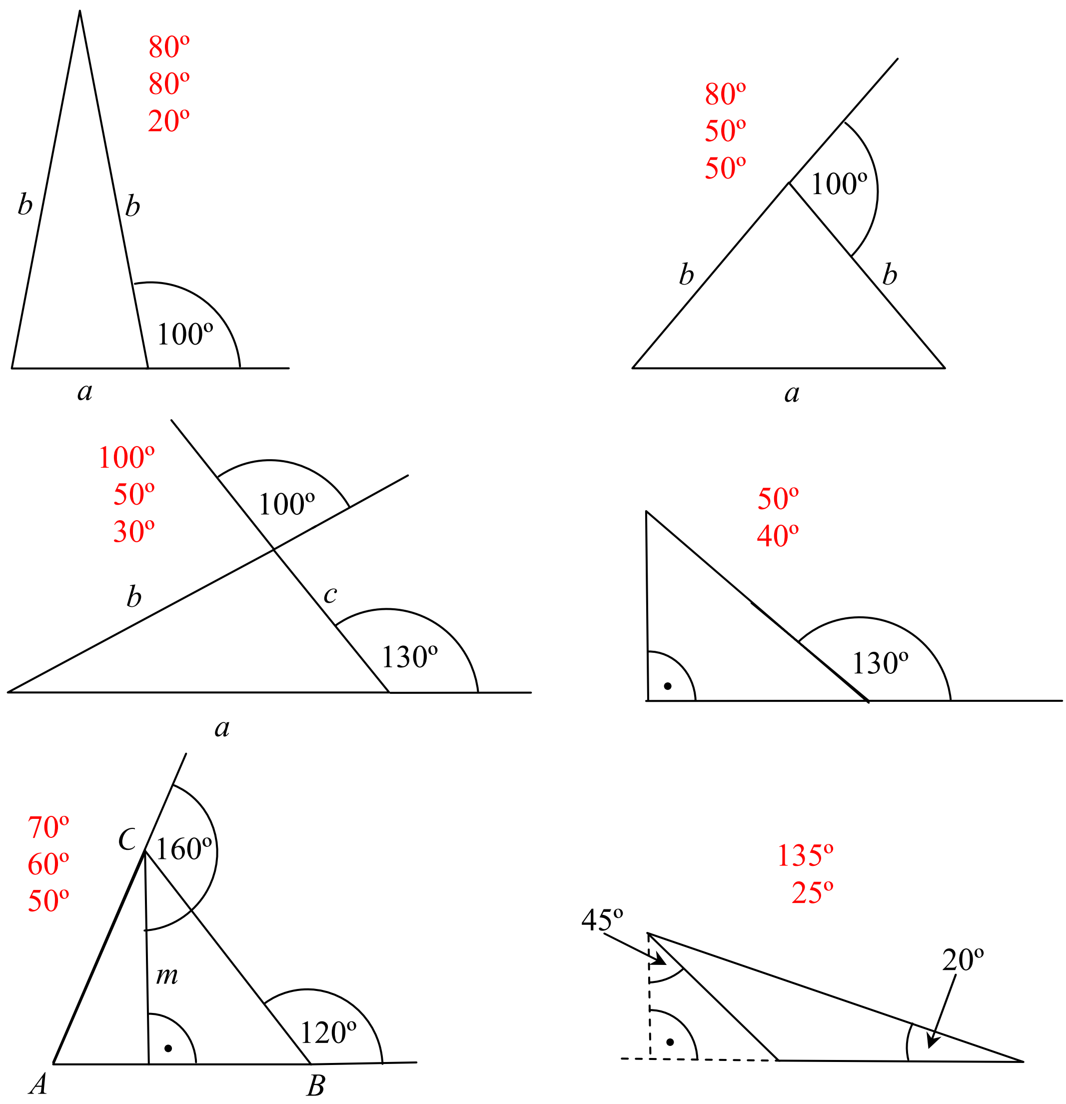
b) $a = 3$ cm, $b = 42$ mm, $c = 72$ mm
nem, mert a + b = c ellentmond a háromszög-egyenlőtlenségnek.

c) $a = 3{,}5$ cm $b = 4{,}2$ cm $c = 72$ mm
igen

d) $a = 3$ cm, $\beta = 120°$, $\gamma = 90°$
nem, mert szögösszege > 180°

e) $\alpha = 40°$, $\beta = 120°$, $\gamma = 20°$
nem egyértelmű, végtelen sok hasonló háromszöget határoz meg.

2. Hány fokosak a háromszögek szögei?



III. Négyszögek tulajdonságainak ismétlése

Házi feladat ellenőrzése: frontális megbeszélés, ha szükséges, javítással

1. Négyszögek definíciói, tulajdonságai

Bemelegítés: staféta játék a különböző négyszögfajták tulajdonságairól. A tanár azt kéri a gyerekektől, akik állnak a helyükön, hogy sorban mindenki mondjon egy igaz állítást a trapézról, deltoidról, paralelogrammáról és így tovább a négyszögekről. A játék menete hasonló, mint a múlt órán.

Ezután 2-3-4 fős csoportokat alakítunk ki úgy, hogy 8 csoport legyen. Minden csoport kap egy definíciókártyát – 2. tanári melléklet –, a tanulók tudásszintjétől függően sorsolással vagy a tanár megítélése szerint.

2. tanári melléklet – lásd a modul eszközei közt!

A csoportok feladata, hogy egy fekvő helyzetű A3-as papírlap egyik felére rajzolják le a definícióval adott négyszög ábráját, amelyen színezéssel, vonalvastagításokkal, jelölésekkel emeljék ki annak jellemző tulajdonságait – egyenlő, párhuzamos, merőleges oldalak, egyenlő szögek, átlók merőlegessége, felezései, különféle szimmetriák –, majd az ábra mellé az ismert geometriai jelölésekkel is írják le ezeket. Kérjük a szimmetriatengelyt szaggatott vonallal, a szimmetriaközéppontot egy *C*-nek nevezett ponttal (szokásos módon) jelölni.
A tanár, körbejárva, segíti a csoportok munkáját kérdésekkel, tanácsokkal.
Ha mindenki elkészült, készítsenek posztert, majd az „alkotók” mutassák be ábráikat osztálytársaiknak, kiselőadás keretében.
Ez a poszter a akár a témakör végéig is fennmaradhat osztálydekorációként.
A matematikai gondolkodásmód fejlődéséhez elengedhetetlen, hogy a diákok tisztában legyenek a definíciókkal és a belőlük következő állításokkal, tulajdonságokkal. Hívjuk fel a tanulók figyelmét, hogy a munkafüzetben minden négyszögnek szerepel egy definíciója, valamint összefoglaló táblázat is található a négyszögek tulajdonságairól. Ez a táblázat a következő, 5. Feladatlap előkészítésekor is hasznos lehet.

2. Négyszögek csoportosítása

A gyerekek üljenek 4-es heterogén csoportokban! Oldassuk meg a 5. feladatlapot!

Feladat: előbb kiegészíteni egy meghatározást a speciális négyszög nevével; aztán a meghatározásban így szereplő *két* négyszög képeit a hálózatos ábrában megkeresni, és a meghatározás sorszámát az *őket összekötő vonal* üres négyzetébe beírni.
Úgy töltessük tehát ki a táblázat egy-egy sorát, hogy a benne említett két négyszöget *vonal kösse össze* a hálózati ábrán! Néhol több megoldás is elfogadható (a hálózat zárójeles számai).

A feladatlap első néhány sorával foglalkozzunk közösen, hogy a gyerekek előtt világos legyen a teendő. Utána csoporton belül lehet vitatkozni, beszélgetni, tanári segítséget kérni, de mindenki a saját munkafüzetébe dolgozzon. Ha elkészültek, írásvetítővel ellenőrzünk: 3. tanári melléklet: Ellenőrző fólia a 5. Feladatlaphoz!

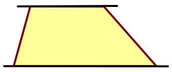
3. tanári melléklet – lásd a modul eszközei közt!

TUDNIVALÓ:

Négyszögek fajtái és tulajdonságaik:

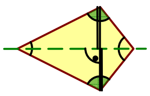
Minden négyszög:	szögeinek összege 360º.
Minden konvex négyszög:	külső szögeinek összege 360º.
Konkáv négyszög:	van homorú szöge.

Trapéz:



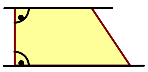
van párhuzamos oldalpárja;
a szárakon fekvő szögek összege 180º.

Deltoid:



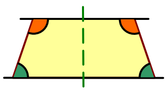
tengelyesen szimmetrikus egyik átlójára, amely:
felezi a másik átlót, és merőleges rá;
felezi a végpontjait tartalmazó szögeket;
a végpontjaiból kiinduló oldalpárok és a két oldalán fekvő szögek egyenlők.

Derékszögű trapéz:



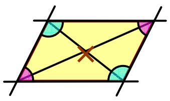
van párhuzamos oldalpárja;
az egyik száron fekvő szögek derékszögek;
a másik száron fekvő szögek összege is 180º.

Húrtrapéz:



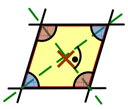
tengelyesen szimmetrikus az alapok felezőmerőlegesére;
húrnégyszög;
van párhuzamos oldalpárja; szárai egyenlők;
a szárakon fekvő szögek összege 180º;

Paralelogramma:



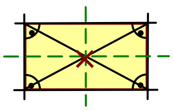
középpontosan szimmetrikus; átlói felezik egymást;
szembenlévő oldalai páronként párhuzamosak és egyenlő hosszúak;
a szomszédos szögek összege 180º; szemközti szögei egyenlők.

Rombusz:



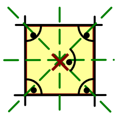
középpontosan és tengelyesen szimmetrikus;
átlói felezik egymást és merőlegesek egymásra;
szembenlévő oldalai páronként párhuzamosak; minden oldala egyenlő;

Téglalap:



középpontosan és tengelyesen szimmetrikus; húrnégyszög;
átlói felezik egymást és egyenlők;
szembenlévő oldalai páronként párhuzamosak és egyenlő hosszúak;
minden szöge egyenlő.

Négyzet:



középpontosan és tengelyesen szimmetrikus; húrnégyszög;
átlói felezik egymást, merőlegesek és egyenlők;
szembenlévő oldalai páronként párhuzamosak;
minden oldala, minden szöge egyenlő.

A négyszögeket is definiálhatjuk (egyértelműen meghatározhatjuk) tulajdonságaik alapján.

Több lehetséges meghatározás közül választhatunk, és megállapodhatunk például a következő definíciókban:

– A trapéz olyan négyszög, amelynek van párhuzamos oldalpárja.

– A deltoid olyan négyszög, amelynek van csúcsponton átmenő szimmetriatengelye.

– A derékszögű trapéz olyan trapéz, amelynek van derékszöge.

– A húrtrapéz olyan trapéz, amely tengelyesen szimmetrikus az alapok felező merőlegesére.

– A paralalogramma olyan négyszög, amelynek van két párhuzamos oldalpárja.

– A rombusz egyenlő oldalú paralalogramma.

– A téglalap egyenlő szögű paralalogramma.

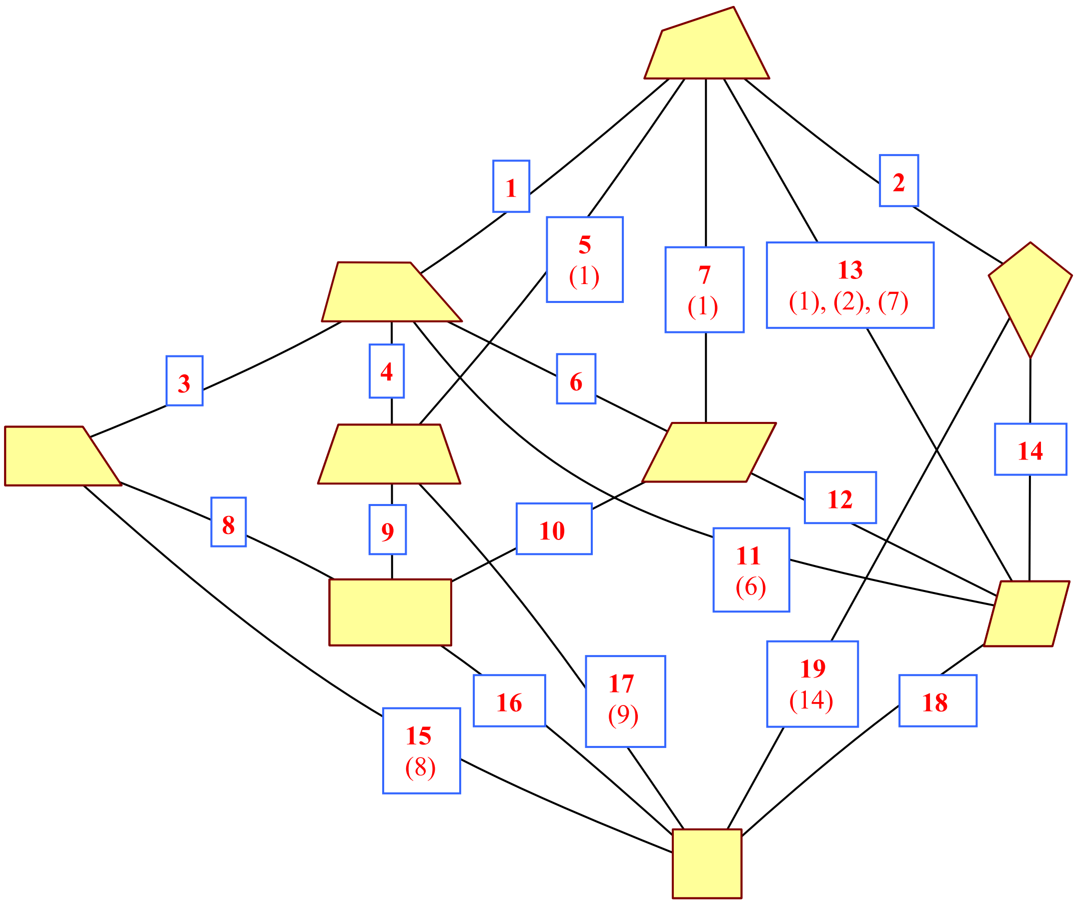
– A négyzet olyan négyszög, amelynek minden oldala és minden szöge egyenlő.

5. FELADATLAP

Megjegyzés: Természetesen a zárójelbe tett megoldások is elfogadhatóak.

Egészítsd ki a meghatározást a speciális négyszög nevével!
Írd a meghatározás sorszámát az ábra megfelelő vonalaira!

1. Olyan **négyszög**, amelynek	**van párhuzamos oldalpárja:**	trapéz..................
2. Olyan **négyszög**, amelynek	**legalább egyik átlója szimmetriatengely:**	deltoid..................
3. Olyan **trapéz**, amelynek	**van derékszöge:**	derékszögű trapéz
4. Olyan **trapéz**, amelynek	**alapokon fekvő szögei páronként egyenlők:**	húrtrapéz.............
5. Olyan **négyszög**, amelynek	**van oldalfelező szimmetriatengelye:**	húrtrapéz.............
6. Olyan **trapéz**, amelynek	**másik oldalpárja is párhuzamos:**	paralelogramma....
7. Olyan **négyszög**, amelynek	**van szimmetria-középpontja:**	paralelogramma....
8. Olyan **derékszögű trapéz**,	amelynek **másik oldalpárja is párhuzamos:**	téglalap................
9. Olyan **húrtrapéz,** amelynek	**másik oldalpárja is párhuzamos:**	téglalap................
10. Olyan **paralelogramma**,	amelynek **van derékszöge:**	téglalap................
11. Olyan **trapéz**, amelynek	**legalább egyik átlója szimmetriatengely:**	rombusz...............
12. Olyan **paralelogramma**,	amelynek **szomszédos oldalai egyenlők:**	rombusz...............
13. Olyan **négyszög**, amelynek	**oldalai egyenlők:**	rombusz...............
14. Olyan **deltoid**, amelynek	**van párhuzamos oldalpárja:**	rombusz...............
15. Olyan **derékszögű trapéz**, melynek	**legalább egy átlója szimmetriatengely:**	négyzet................
16. Olyan **téglalap**, amelynek	**szomszédos oldalai egyenlők:**	négyzet................
17. Olyan **húrtrapéz,** amelynek	**legalább egyik átlója szimmetriatengely:**	négyzet................
18. Olyan **rombusz**, amelynek	**van derékszöge:**	négyzet................
19. Olyan **deltoid**, amelynek	**van két szomszédos derékszöge:**	négyzet................



3. Feladatok négyszögek oldalai, belső szögei és külső szögei közötti összefüggésekre

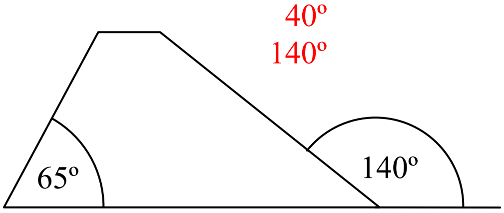
Kezdjünk hozzá a 6. feladatlap megoldásához! Tanácsoljuk a gyerekeknek, hogy a feladatlap négyszögeinek szimmetriatengelyeit, szimmetriaközéppontját – amennyiben vannak – még a megoldás megkezdése előtt jelöljék be: ugyanis a szimmetriák előzetes megállapítása segíthet bizonyos szögpárok egyenlőségének felismerésében.
A feladatlappal óra végéig dolgozzanak a csoportok! Házi feladat lehet a Feladatgyűjtemény 7-10. feladataiból válogatva.

6. FELADATLAP

Határozd meg a négyszögek szögeit!

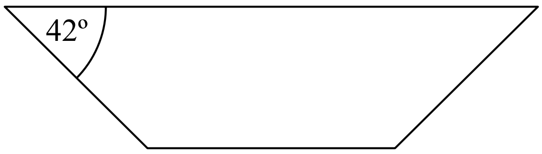
trapéz

115°
40°
140°



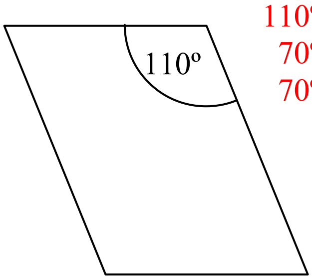
szimmetrikus trapéz

42°
138°
138°



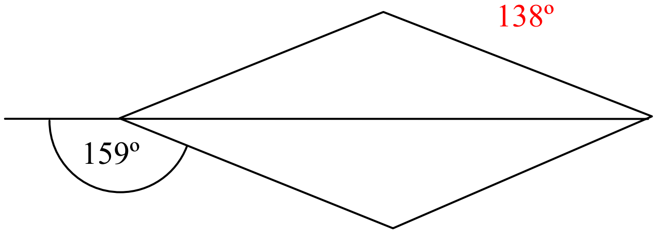
paralelogramma

110°
70°
70°



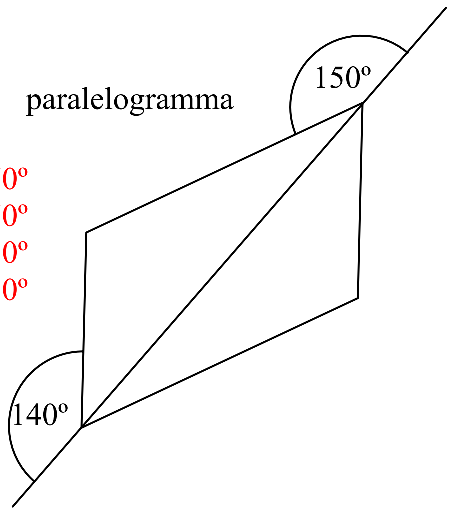
rombusz

42°
42°
138°
138°



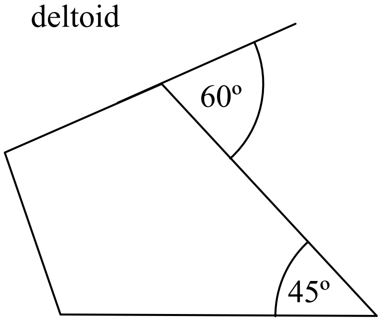
paralelogramma

70°
70°
110°
110°



deltoid

120°
120°
75°



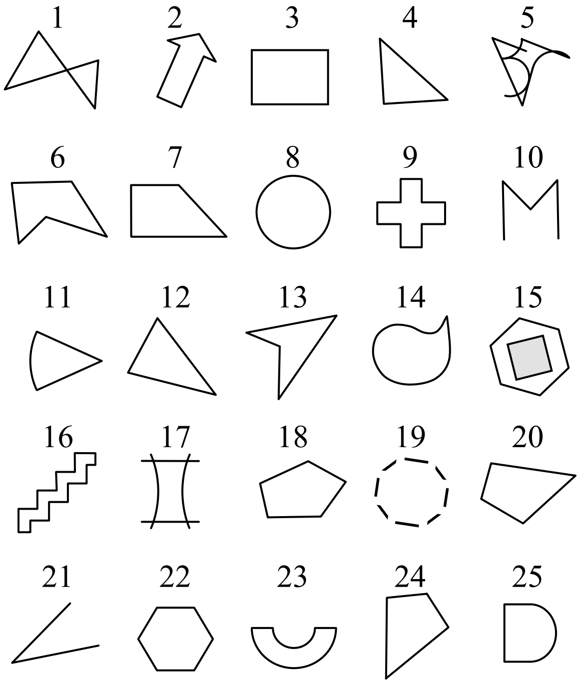
IV. Sokszögek, szabályos sokszögek tulajdonságainak ismétlése

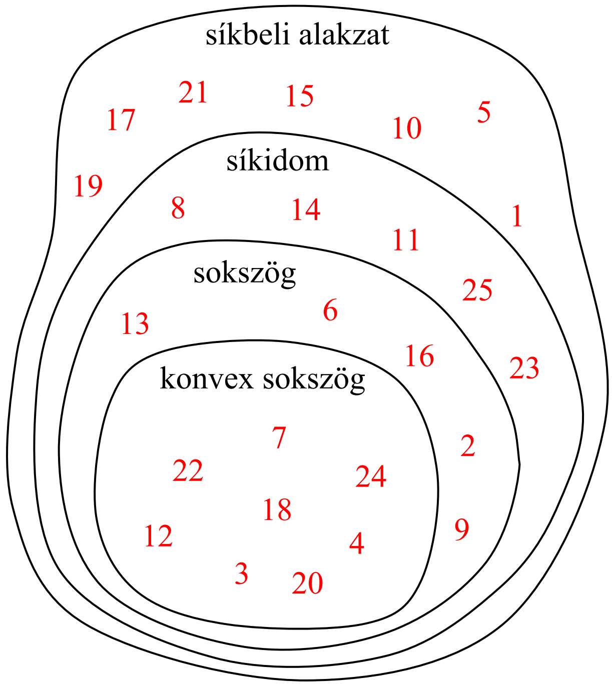
1. Sokszögek fogalma, oldalak, szögek, átlók

A 7. feladatlap 1. feladatával ismételhetjük a sokszög fogalmát.
A feladatlap mindhárom feladatát csoportmunkára ajánljuk, frontális ellenőrzéssel.

7. FELADATLAP

1. A következő alakzatok közül melyik síkidom, melyik sokszög, melyik konvex sokszög? Írd az alakzatok sorszámait a halmazábrába!





TUDNIVALÓ:

A háromszöget, négyszöget, ötszöget … vagyis a záródó töröttvonallal (sokszögvonallal) határolt síkrészt sokszögnek nevezzük.

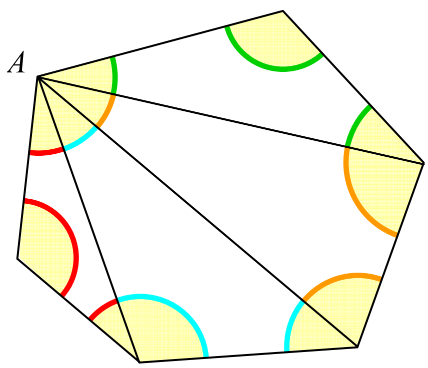
Ahány oldalú a sokszög, annyi csúcsa és annyi szöge van. Minden csúcsához pontosan 2 oldal csatlakozik, az oldalai csak csúcsokban találkoznak.

2. Az ábrán egy hatszöget látsz. Figyeld meg:

a) 1 csúcsából kiindulva hány átlóját húzhatjuk meg a hatszögnek, és számold ki, hány átlója van összesen; egy csúcsból 3 átló, összesen 9 átló

b) az 1 csúcsból kiinduló átlói hány háromszögre bontják a hatszöget, és számold ki a háromszögek belső szögeinek összegét; 4 háromszög, szögeiknek összege 720°

c) a háromszögek és a hatszög belső szögeit, és állapítsd meg a hatszög belső szögeinek összegét! A háromszögek belső szögei teljesen lefedik a hatszög belső szögeit, 720°



3. Rajzoljatok a füzetetekbe konvex 4-, 5-, 7-, 8-oldalú sokszögeket! Csoportban dolgozzatok, osszátok el magatok között, hogy ki, melyik sokszöggel foglalkozzon!
Válaszoljatok a következő kérdésekre a táblázat kitöltésével!

a) Egy csúcsból hány átló húzható a sokszögbe?
b) Hány átlója van összesen?
c) Az 1 csúcsból kiinduló átlói hány háromszögre bontják a sokszöget?
d) Mennyi a sokszög belső szögeinek összege?

	három-szög	négyszög	ötszög	hatszög	hétszög	nyolcszög	n-oldalú sokszög
1 csúcsból kiinduló átlók száma	0	1	2	3	4	5	$n-3$
összes átlók száma	0	2	5	9	14	20	$\frac{n\cdot(n-3)}{2}$
1 csúcsból kiinduló átlói ennyi háromszögre osztják	1	2	3	4	5	6	$n-2$
belső szögeinek összege	180°	360°	540°	720°	900°	1080°	$(n-2)\cdot 180°$

2. Szabályos sokszögek fogalma, származtatása, szimmetriái

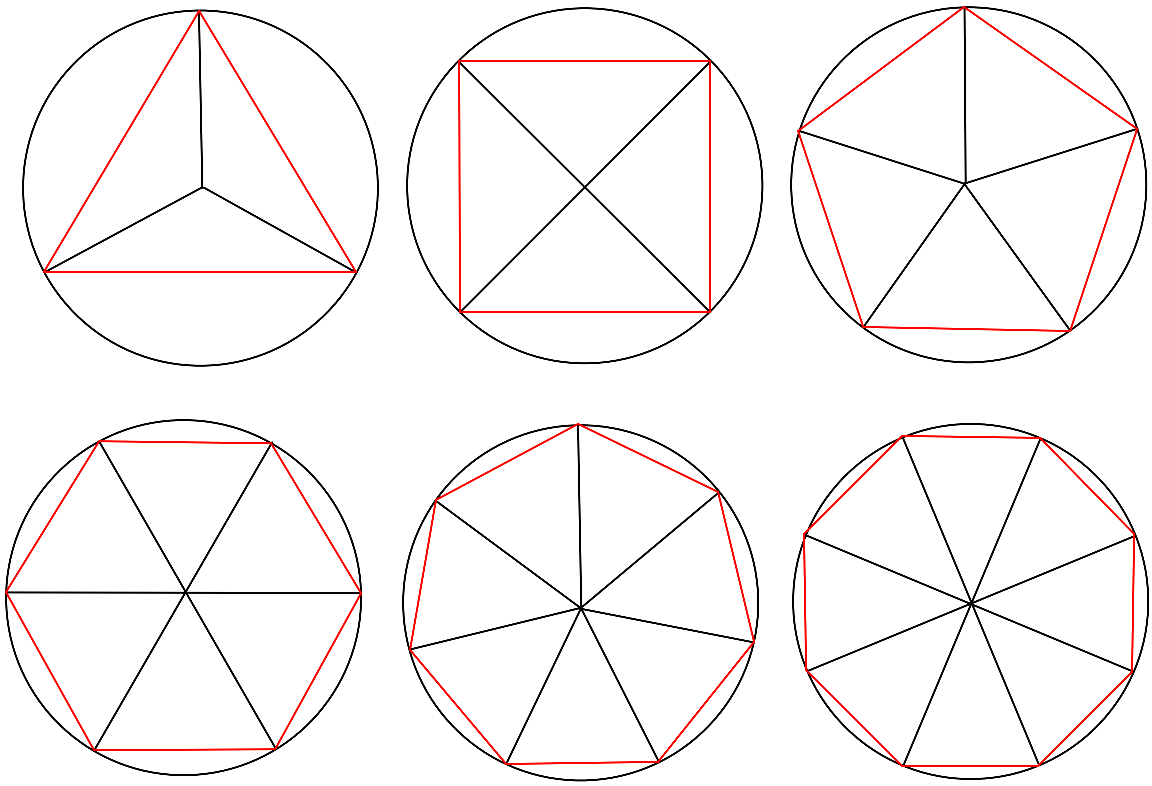
TUDNIVALÓ:

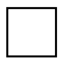
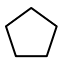
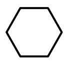
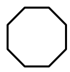
A szabályos sokszög oldalai és szögei egyenlők.

Az 8. Feladatlap alkalmas az egyenlőszárú háromszögekből történő származtatás, valamint a szabályos sokszögekre vonatkozó általános összefüggések bemutatására. A feladatlapot a gyerekek párban vagy négyes csoportokban oldják meg. Az ellenőrzés frontális.
Említhető a két szabályossokszög-típus érdekes eltéréseként: a páratlan oldalúakban a szimmetriatengelyek mind oldal- és szögfelezők is – a páros oldalúakban e két tulajdonság kettéválik.

8. FELADATLAP

Körlapokat sugaraikkal egybevágó körcikkekre osztottunk.
– Mekkorák a körcikkek középponti szögei? Írd be az ábrákba!
– Kösd össze az ábrákon a sugarak és a kör metszéspontjait!
Figyeld a kapott szabályos sokszöget felépítő egyenlőszárú háromszögeket, és töltsd ki a táblázatot!



							n-oldalú szabályos sokszög
Hány szimmetriatengelye van?	3	4	5	6	7	8	n
Van-e szimmetriaközéppontja?	nincs	van	nincs	van	nincs	van	ha n páros: van, ha n páratlan: nincs
Hány °-osak a belső szögei?	60°	90°	108°	120°	128,6°	135°	$180° - \frac{360°}{n}$
Hány °-osak a külső szögei?	120°	90°	72°	60°	51,4°	45°	$\frac{360°}{n}$
Hány °-osak a középponti szögei?	120°	90°	72°	60°	51,4°	45°	$\frac{360°}{n}$

3. A házi feladat előkészítése

Elmondjuk a gyerekeknek, hogy a következő három órán ún. euklideszi szerkesztésekkel foglalkozunk. Megbeszéljük velük, hogy van másféle szerkesztés is, pl. a derékszög rajzolása derékszögű vonalzóval, mérnökök „görbe vonalzói”…
Felelevenítjük a 7. osztályban tanultakat a 0852 modul tanulói munkafüzetében összefoglalt euklideszi szerkesztés megengedett lépéseinek átolvasásával, megbeszélésével.
Házi feladatnak adjuk a 0852-es modul 1. Feladatlapjának 1-5. feladatait.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1.

a) Mekkorák lehetnek az egyenlőszárú derékszögű háromszög szögei?

90º; 45º; 45º

b) Mekkorák lehetnek az egyenlőszárú tompaszögű háromszög szögei?

α < 45º; β < 45º; γ > 90º

c) Egyenlőszárú háromszög egyik szöge 50º-os, mekkorák a többi szögei?

50º; 80º vagy 65º; 65º

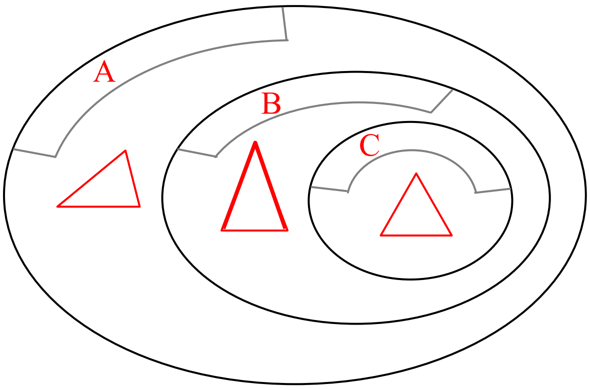
d) Egy háromszög két külső szöge 120º-os és 90º-os, mekkorák a többi szögei?

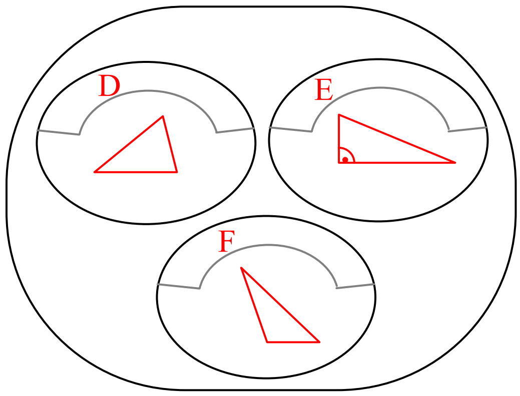
60º; 90º; 30º

e) Mekkorák a háromszög belső szögei, ha arányuk:

1: 1: 3;	2: 3: 4;	5: 6: 7, illetőleg	8: 5: 5?
36º; 36º;108º	40º; 60º; 80º	50º; 60º; 70º	80º; 50º; 50º

2. Milyen két szempont szerint csoportosítottuk a háromszögeket? Írd be a hiányzó halmazábra-címkéket, rajzolj be egy-egy megfelelő háromszöget!

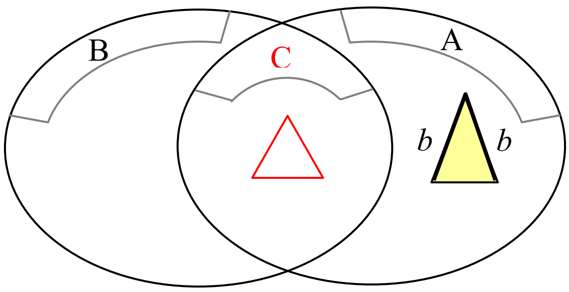


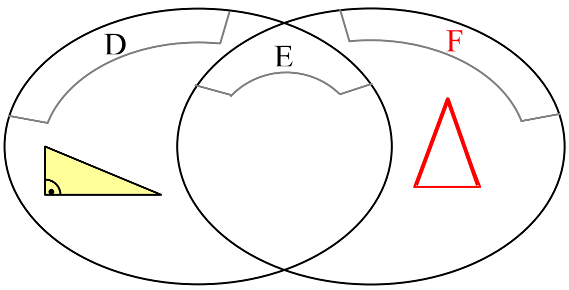


A: háromszögek
B: egyenlőszárú háromszögek
C: egyenlő oldalú háromszögek

D: hegyesszögű háromszögek
E: derékszögű háromszögek
F: tompaszögű háromszögek

3. Írd be a hiányzó címkét, rajzolj be egy-egy megfelelő háromszöget!

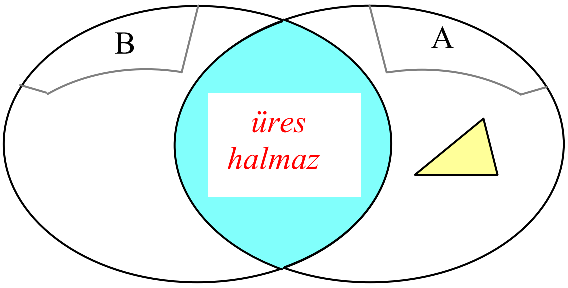


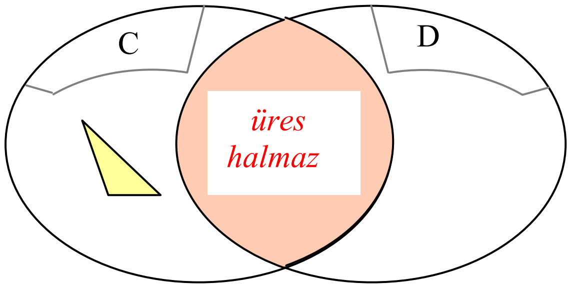


A: egyenlőszárú háromszög
B: van 60°-os szöge
C: szabályos háromszög

D: derékszögű háromszög
E: van 45°-os szöge
F: egyenlőszárú háromszög

4. Milyen háromszögek tartoznak a két halmazábra színezett részeihez? Válaszodat indokold!



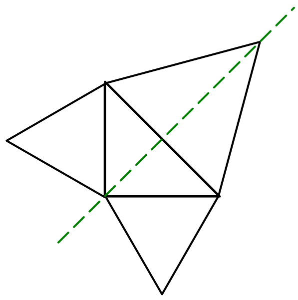


A: hegyesszögű háromszög
B: vannak 45°-nál kisebb szögei (van legalább kettő) ⇒ „B" a tompaszögű △-ek egy részhalmaza

C: tompaszögű háromszög
D: szögei 45°-nál nagyobbak
⇒ „D"a hegyesszögű △-ek egy részhalmaza

5. A háromszögek mely csoportjaira igazak a következő kijelentések?
a) szögei nem nagyobbak 60°-nál; szabályos háromszög
b) szögei nem kisebbek 60°-nál. szabályos háromszög

6. Egyenlőszárú derékszögű háromszög oldalaira szabályos háromszögeket szerkesztünk. A kapott sokszögnek van-e szimmetriatengelye, szimmetria-középpontja? Hány fokosak a belső szögei?



Van szimmetriatengely.

Nincs szimmetria-középpont.

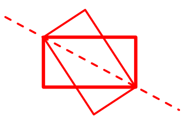
60º; 165º; 60º; 165º; 60º; 210º

7. Melyik állítás igaz? Véleményedet indokold!

– Minden olyan négyszög, amelynek 2-2 oldala egyenlő, deltoid. nem, pl. paralelogramma
– Van olyan derékszögű trapéz, amelyik rombusz. igen, a négyzet
– Minden tengelyesen tükrös négyszög középpontosan is tükrös. nem, pl. deltoid, húrtrapéz
– Minden tengelyesen tükrös négyszög köré kör szerkeszthető. nem, deltoid, rombusz
– Van olyan deltoid, amelyiknek négy tükörtengelye van. igen, a négyzet
– Van olyan szimmetrikus trapéz, amely paralelogramma. igen, a téglalap (a négyzet is helyes válasz: az is téglalap)

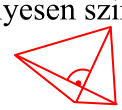
8. Döntsd el, hogy a következő állítások igazak vagy hamisak! Hamis állítás esetén véleményedet ellenpéldával igazold!

– Ha egy négyszög rombusz, akkor az deltoid és paralelogramma is. Igaz
– A téglalap átlója szimmetriatengely. Hamis



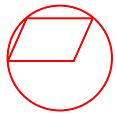
– Minden négyzet trapéz. Igaz

– Ha egy négyszög átlói merőlegesek, akkor tengelyesen szimmetrikus.



Hamis

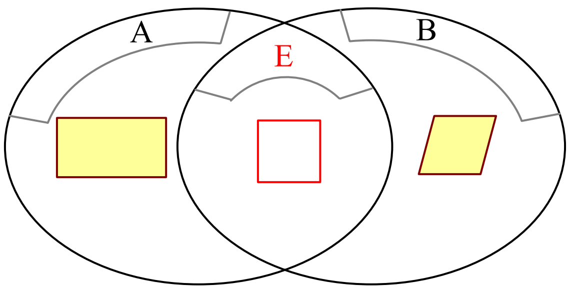
– Minden paralelogramma köré írható kör.

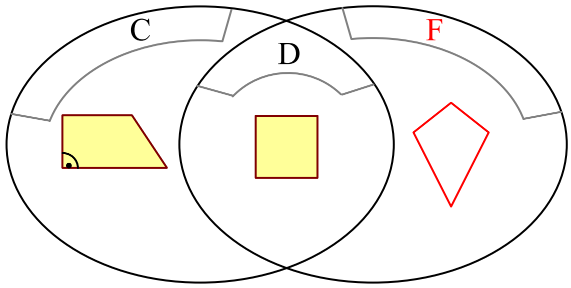


Hamis

– A szabályos háromszög magasságai szögfelezők is. Igaz

9. Rajzold be a hiányzó négyszöget, és írd be a nevét!





A: téglalap
B: rombusz
E: négyzet

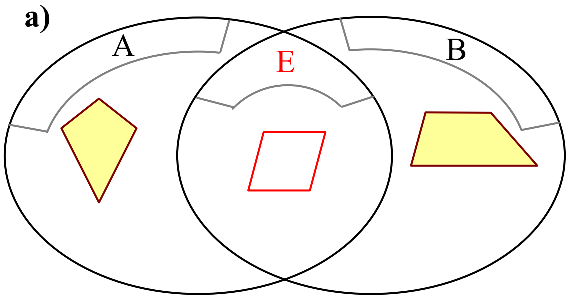
C: derékszögű trapéz
D: négyzet
F: deltoid (rombusz is elfogadható)

10. Rajzolj olyan négyszöget, amelynek:

a) átlói merőlegesek és van derékszöge; négyzet, deltoid
b) átlói merőlegesek és nincs derékszöge; rombusz, deltoid
c) átlói merőlegesek és van két derékszöge; négyzet
d) átlói merőlegesek és van tompaszöge; rombusz, deltoid
e) átlói merőlegesek és van homorúszöge! konkáv deltoid

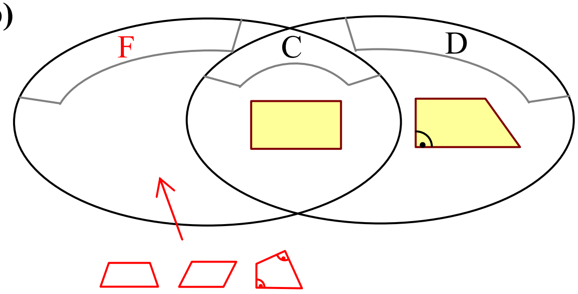
11. Rajzold be a hiányzó négyszöget, és írd be a nevét!
A **b)** feladatban legalább 2 különböző, helyes választ keress!

a)



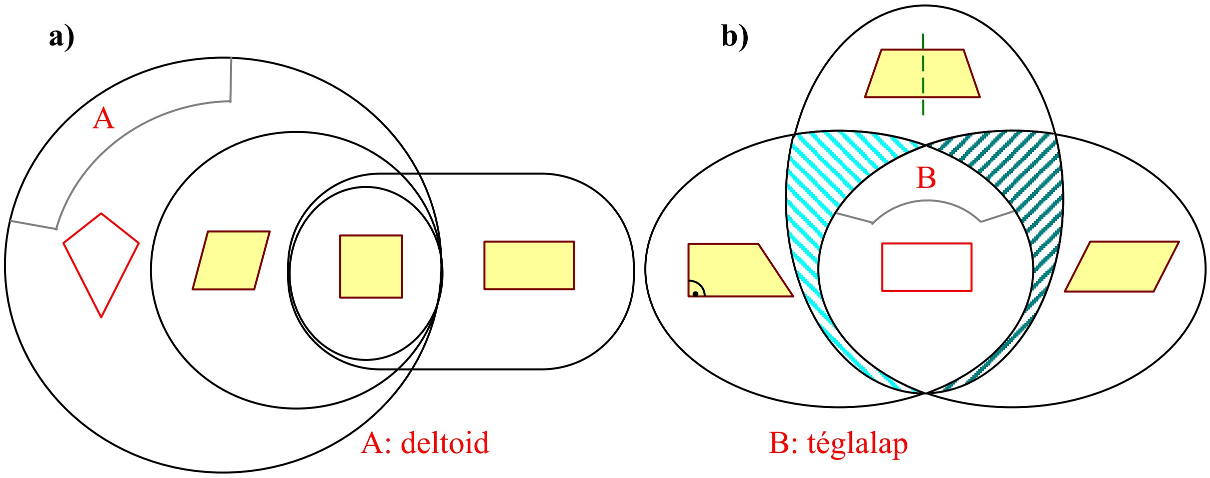
A: deltoid
B: trapéz
E: rombusz

b)



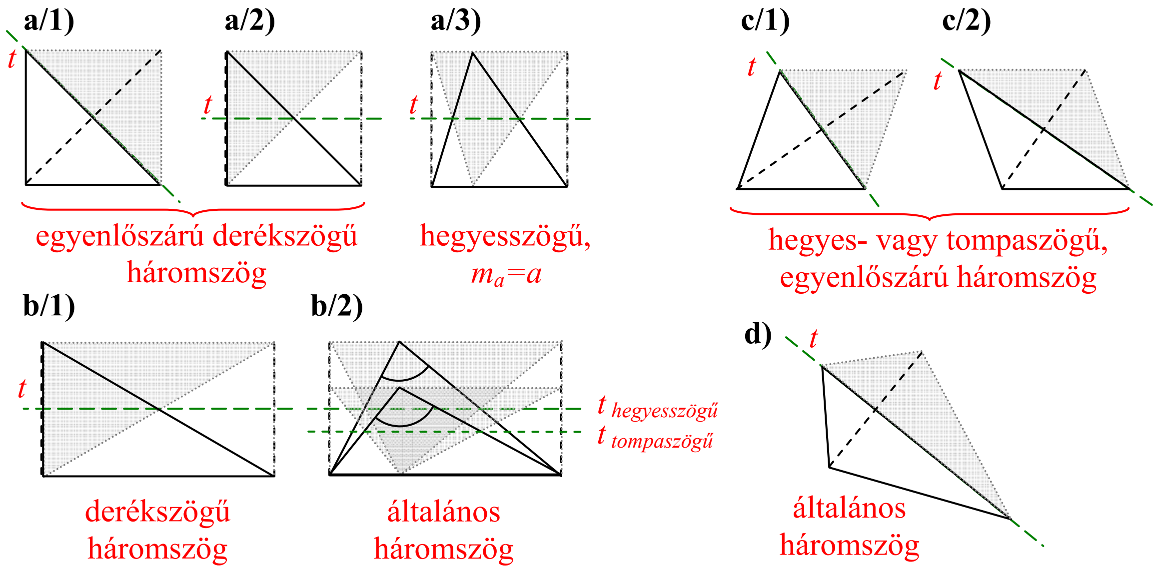
C: téglalap
D: derékszögű trapéz
F: három helyes válasz van: húrtrapéz; paralelogramma; húrnégyszög

12.
a) Melyik az a négyszöghalmaz, amely egyaránt tartalmazza a négyzetet és a rombuszt is, de a téglalapot nem? Rajzold be, és írd be a nevét!
b) Rajzold be és írd a címkére annak a négyszögnek a nevét, amely az ábra mindhárom halmazába egyaránt beletartozik! Vannak-e az ábrán olyan halmazrészek, ahová nem tartozhat semmilyen négyszög? Válaszodat indokold!



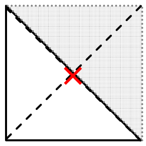
b) Két terület van, amely nem tartalmazhat négyszöget:
: nincs olyan derékszögű trapéz, amely tengelyesen szimmetrikus, de másik oldalpárja nem párhuzamos;
: nincs olyan paralelogramma, amely tengelyesen szimmetrikus, de nincs derékszöge.

13. Egy háromszöget tengelyesen tükröztünk, így a két háromszög csúcsai egy négyszöget feszítenek ki. Az eredeti háromszög minden csúcsa vagy négyszögcsúcsba, vagy négyszögoldalra esik.
Milyen lehetett az eredeti háromszög, ha a kapott négyszög:
a) négyzet; **b)** téglalap; **c)** rombusz; **d)** deltoid ? Válaszaidat rajzzal igazold!



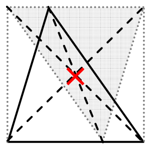
14. Oldd meg a fenti, 13. sz. feladatot úgy, hogy a kérdés középpontos tükrözésre vonatkozzon! Válaszaidat rajzzal igazold!

a/1)



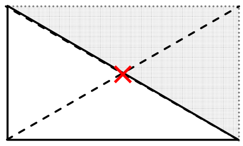
egyenlőszárú derékszögű

a/2)



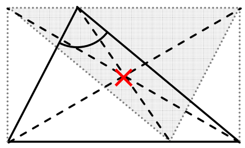
hegyesszögű, $m_a=a$

b/1)



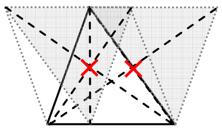
derékszögű háromszög

b/2)

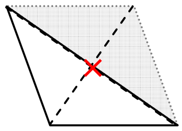


általános háromszög

c/1)



c/2)



hegyes- vagy tompaszögű, egyenlőszárú háromszög

d)

Deltoidot így nem kaphatunk. A deltoid nem középpontosan szimmetrikus síkidom.

c/3) c/1) és c/2) a következő diszkusszió speciális esetei:
Legyen a,b,c △-oldal; m_a az a-hoz tartozó magasság!
Szerkesszünk a feladat szerint a oldalú rombuszt!

$m_a > a$ ⇒ nincs megoldás

$m_a = a$, (derék- | hegyesszögű △) ⇒ 1 megoldás: ld. a/1), a/2)

$m_a < a$, $a \le b$, $a \le c$, hegyesszögű △ ⇒ 2 megoldás: ld. c/1)

$m_a < a$, [$b < a < c$ | $c < a < b$ | (a=b | a=c) , tompaszögű △] ⇒ 1 megoldás: ld. c/2)

$m_a < a$, ($a < b < c$ | $a < c < b$) , tompaszögű △ ⇒ nincs megoldás