0842. MODUL

PITAGORASZ-TÉTEL, GYÖKVONÁS

Pitagorasz-tétel

KÉSZÍTETTE: VÉPY-BENYHE JUDIT

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Pitagorasz-tétel megsejtése, kimondása, bizonyítása
Időkeret	3 tanóra
Ajánlott korosztály	8. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Tágabb környezetben:* Fizika (erő eredőjének számolása), Magyar nyelv (szövegértés) *Szűkebb környezetben:* Ötödik osztályos derékszögű koordinátarendszer témakör, Hetedik osztályos hatványozás fejezet, Nyolcadik osztályos négyzetgyökvonás témakör. *Ajánlott megelőző tevékenység:* Négyzetgyökvonás és négyzetre emelés gyakorlása, derékszögű koordináta rendszerben eligazodás felidézése *Ajánlott követő tevékenység:* Pitagorasz tételének használatával megoldható példák gyakorlása (geometriai példák, hétköznapi életből vett példák, szöveges feladatok…)
A képességfejlesztés fókuszai	*Számlálás, számolás:* Mélyítjük a négyzetgyökvonás ismeretét, kitekintünk az irracionális számok világába. *Mennyiségi következtetés:* Az oldalak négyzetösszegéből következtetünk a háromszög alakjára. *Becslés, mérés, valószínűségi következtetés:* Mért adatok alapján végezünk számításokat. *Szövegesfeladat-megoldás, problémamegoldás, metakognició:* „Ha…, akkor…” típusú állításokat értelmezünk és megfordításukat fogalmaztatjuk meg a gyerekekkel. Valamint megállapítjuk a gyerekekkel, az állítások igaz vagy hamis voltát. *Deduktív következtetés, induktív következtetés:* A Pitagorasz tétel tanításának során végigjárjuk az induktív tapasztalatszerzés, sejtés megfogalmazása, deduktív bizonyítás lépcsőfokait. Az állítások és megfordításaik kapcsán átismételjük az oszthatóságról tanultakat, és a négyszögek csoportosítását.

AJÁNLÁS

A tanulók többnyire négyes csoportokban dolgoznak, de fontos, hogy egyéni feladattal is kipróbálhassák magukat. Nagyon fontos a csoportokon belül kialakuló vita, érvelések, ellenérvek, a gondolkodás szabadsága, a másik véleményének figyelembevétele, egymás tisztelete. Az egyén szerepe fontosságának megtapasztalása a közösségben. Pozitív élményeket adhat: pl. poszter készítése az osztállyal. A szociális készség, valamint az esztétikai érzék fejlesztésére is módot adnak ezek az órák.
A tanulói tapasztalatcsere hangsúlyozása mellett ugyanilyen fontosnak kell lennie a frontális tanári munkának, amelynek folyamán a tanulók megerősítést kapnak a továbbhaladásuk szempontjából legfontosabb ismeretekben, illetőleg tisztázódnak meg nem értett anyagrészek.
Fontos frontálisan megbeszélni a Pitagorasz-tétel kimondását és bizonyítását.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Feladatlapok, feladatgyűjtemény, mellékletek, a modulhoz tartozó eszközök (lásd eszközlista), négyzethálós füzet és tábla, írásvetítő, körző, vonalzó, számológép (A számológép használata indokolt, hiszen nem tudnak hiszen nem tudnak kellő sebességgel négyzetgyököt vonni másképp. Ebben a modulban tudjuk a számológép használatát készséggé fejleszteni.), poszter készítéshez filctoll, nagy papír.

ÉRTÉKELÉS

Folyamatos szóbeli értékelés, a hiányosságok pótlására, hibák javíttatására is kiterjedően. Egyéni- és csoporteredmények pozitív értékelése. Ösztönözzünk arra, hogy a tanulók egymás munkáját is értékeljék, megbecsüljék, megdicsérjék. A csoportmunkákat lehet értékelni a csoportok által gyűjtött pontszámok alapján. Pontszámokat a jól megoldott feladatokért, és a szépen elkészített plakátokért, stb. adhat a tanár, illetve a többi csoport.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. A Pitagorasz-tétel			
1.	Mekkora a derékszögű háromszög átfogója? (A cél tetszőleges átfogó meghatározása rácspontokra rajzolt derékszögű háromszög esetén az átfogóra rajzolt négyzet területének segítségével.)	Következtetés, problémamegoldás, számolás	1. feladatlap, 2. tanári melléklet, vonalzó, négyzethálós füzet
2.	Derékszögű háromszög oldalaira rajzolt négyzetek területei (Gyakorlás: Az oldalakra rajzolt négyzetek területeinek meghatározása derékszögű rácsháromszögek esetén. Cél: A Pitagorasz-tétel megtapasztalása.)	Számolás	2. feladatlap, számológép, négyzethálós füzet
3.	Tétel kimondása (A Pitagorasz-tétel pontos megfogalmazása, megbeszélése.)	Indukció	3. feladatlap, vonalzó, filctollak, nagy lap poszter készítéshez
II. A Pitagorasz-tétel bizonyítása			
1.	A Pitagorasz-tétel bizonyítása geometriai úton (A tétel megértésére törekszünk, nem kell készség szinten tudnia a gyerekeknek ezt a bizonyítást, elég, ha együtt „felfedezteti” velük a tanár.)	Következtetés	3. feladatlap, 1. tanulói melléklet, négyzethálós füzet
2.	A Pitagorasz-tétel alátámasztása átdarabolással	Következtetés	1. tanulói melléklet

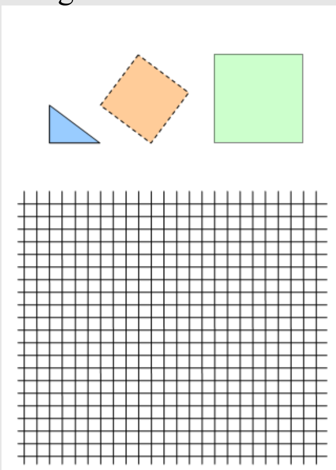
III. A Pitagorasz-tétel megfordítása			
1.	Állítások és megfordításuk (Gyakoroljuk az állítások megfordítását.)		4. feladatlap,
2.	Hegyes és tompaszögű háromszög oldalaira rajzolt négyzetek területei (Az a cél, hogy megtapasztalják a gyerekek, hogy tompaszögű és hegyesszögű háromszögeknél hogyan függ egymástól az oldalakra írt négyzetek területe.)	Számolás, megfigyelés, sejtés	5. feladatlap, számológép, négyzethálós füzet
3.	Háromszögek oldalai alapján következtetés hegyes-, tompa- vagy derékszögű tulajdonságára	Következtetés, dedukció	6. feladatlap, számológép, füzet, 3. tanári melléklet
4.	A Pitagorasz-tétel megfordításának kimondása	Általánosítás, összefüggés felismerése, indukció	

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. A Pitagorasz-tétel

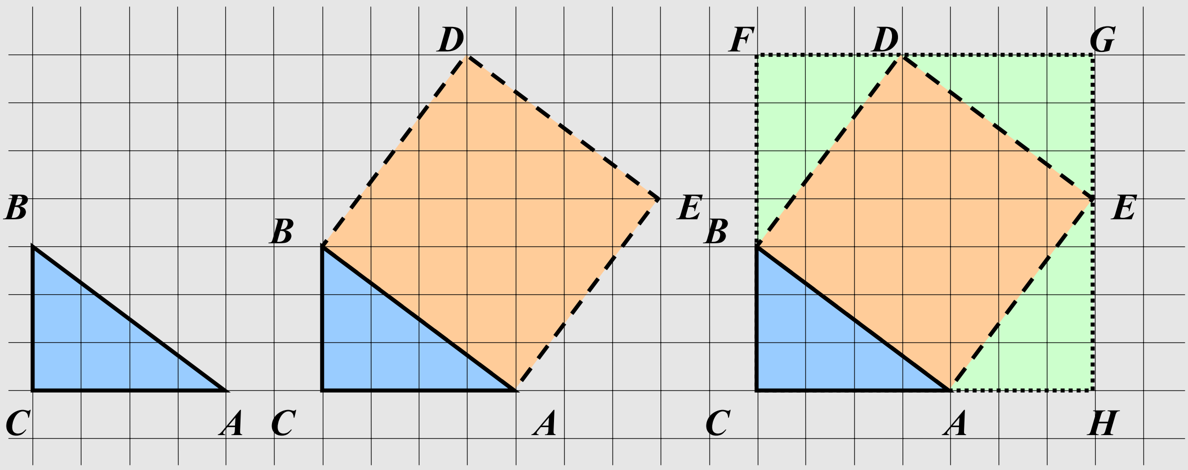
1. Mekkora a derékszögű háromszög átfogója?

2. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!



A mintapéldát frontálisan oldja meg együtt az osztály: a **2. tanári mellékletet** kivetítheti a tanár fólián, vagy rajzolhatja a négyzethálós táblára is. A fólia használata:
A színes síkidomokat ki kell vágni a fóliáról, és a tanári magyarázat során a négyzetrácsra kell helyezni az alábbi módon:

1. lépés **2. lépés** **3. lépés**

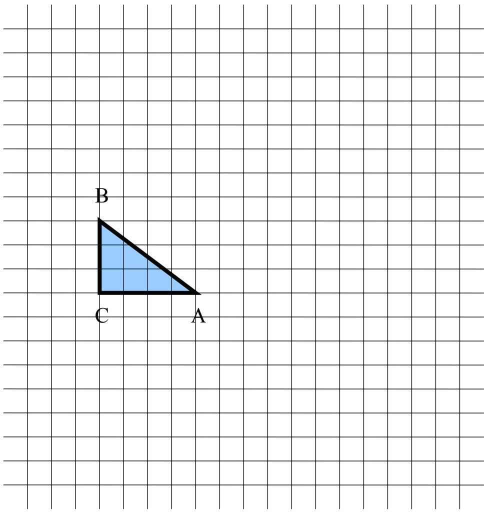


A gyerekek a műveleteket a füzetbe másolják, követve a tanárt. Ha a gyerekek emlékeznek a 3; 4; 5 pitagoraszi számhármasra, a gyökvonásnál megoldott feladatokból (0841. modul, Négyzetgyök fogalmának bevezetése, 1. feladatlap), akkor választhatunk más pitagoraszi számhármast. Pl. 6; 8; →10, vagy 5; 12; →13, esetleg 8; 15; →17

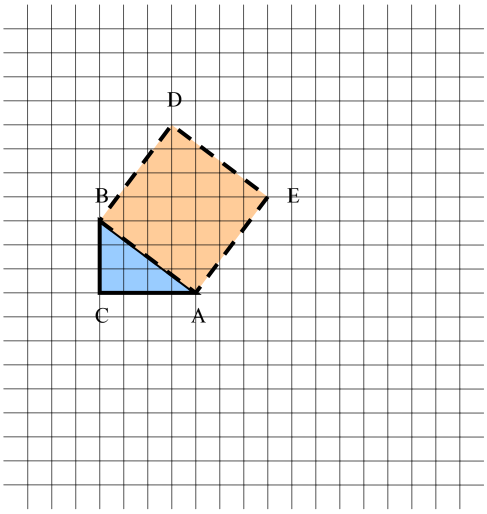
1. FELADATLAP

MINTAPÉLDA

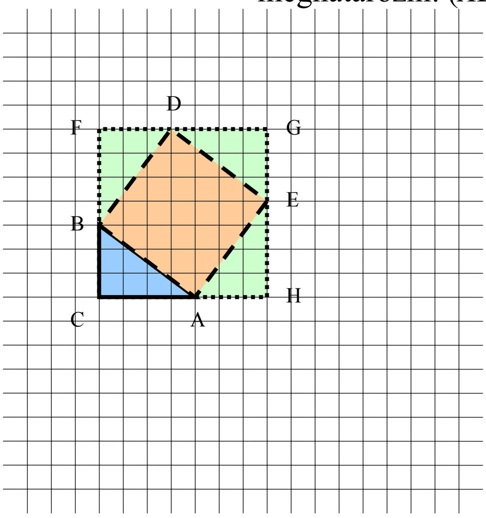
1. Mekkora a derékszögű háromszög átfogója, ha befogói 3 és 4 egység hosszúak?



Lerajzoljuk négyzethálóra a kérdéses háromszöget a megfelelő egységekkel. (*ABC* háromszög)



A 3. oldal hosszát a rárajzolt négyzet területének segítségével tudjuk meghatározni. (*ABDE* négyzet)



A négyzet területét egy nagyobb négyzet segítségével határozzuk meg. (*CFGH* négyzet)

$T_{CFGH} = (3 + 4)^2 = 49$

$T_{ABDE} = 49 - 4 \cdot T_{ABC} = 49 - 24 = 25$

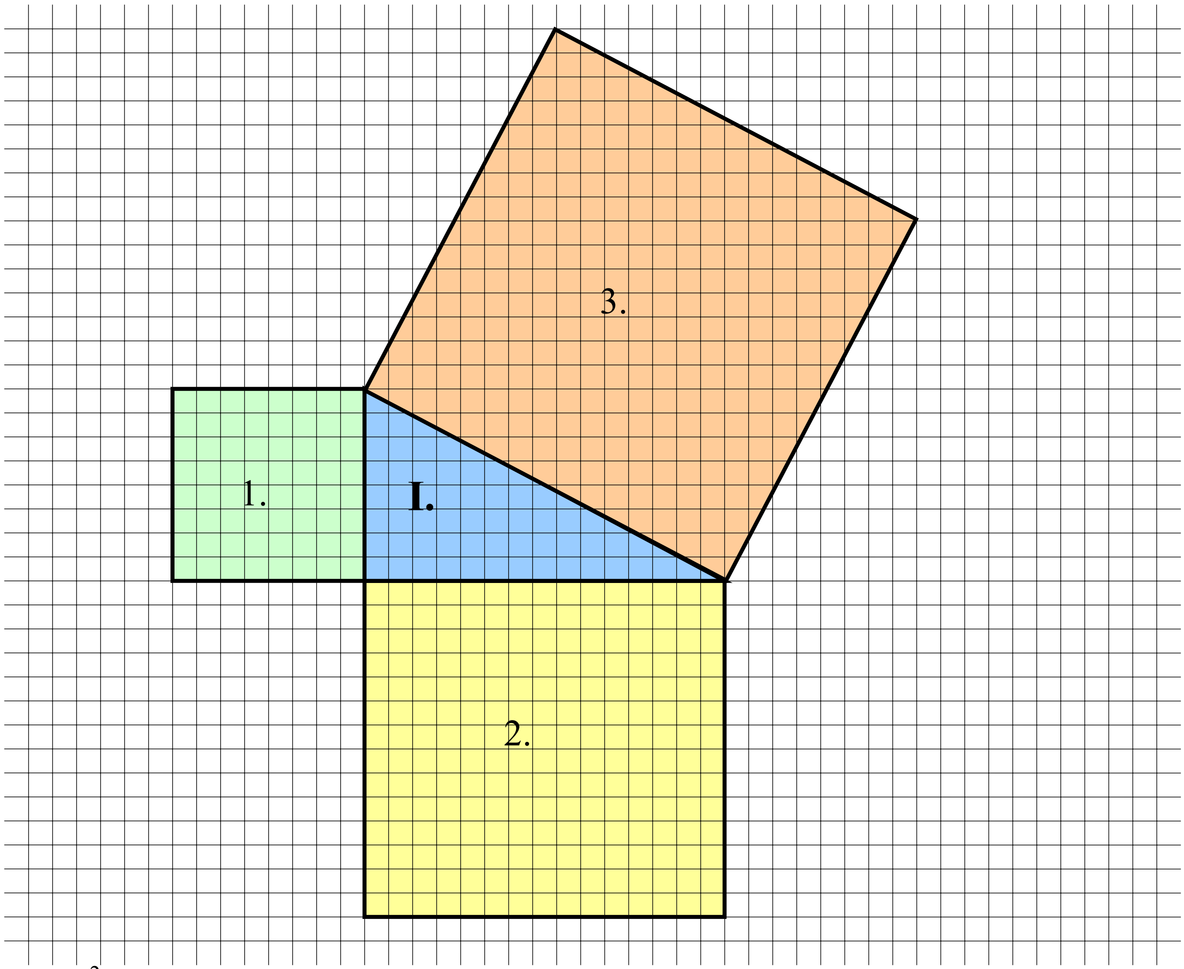
Az átfogó hossza $\sqrt{25} = 5$ egység

2. Derékszögű háromszög oldalaira rajzolt négyzetek területei

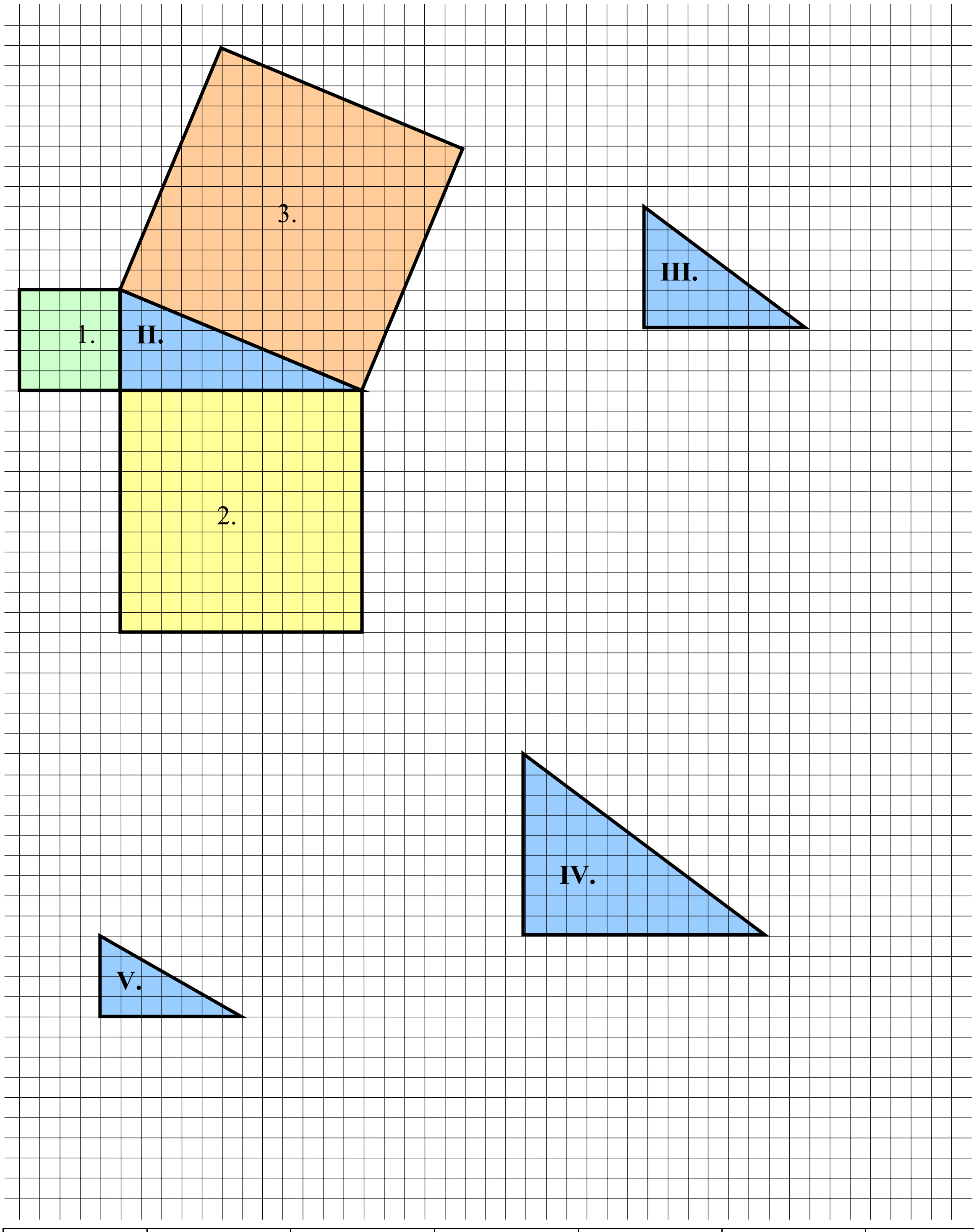
A 2. feladatlap 1. feladatának I. ábrája frontális munkára ajánlott. A többi feladatot utána már csoportokban megoldhatják a gyerekek. A gyorsabban haladó osztályokban fel lehet adni rögtön csoportmunkának az egész feladatot (kooperatív csoportmunkánál szakértői mozaik módszerével). Ha valamelyik csoport nem tudja elkezdeni a terület meghatározásokat az „elforgatott”, 3. számú négyzeteknél, segítségül emlékeztetheti őket a tanár a „0841. – A négyzetgyök fogalmának bevezetése” c. modulban a 4. feladatlap megoldására. Lapozzanak vissza, és elevenítsék fel!

2. FELADATLAP

1. Állapítsd meg a derékszögű háromszögek oldalaira írt négyzetek területeit, (egészítsd ki a hiányos ábrákat). Keress összefüggést a területek mérőszámai között! (A területegység egy négyzetrács.) Írd le az oldalak hosszát is! Foglald táblázatba a kiszámolt területeket, oldalakat a különböző háromszögeknél. Végül állapítsd meg az összefüggéseket a derékszögű háromszögek oldalhosszaira! (Jelölések: e.: egység; te.: területegység)



$T_{1.} = 8^2 = 64$ (területegység)
$T_{2.} = 15^2 = 225$ (területegység)
$T_{3.} = 529 – 240 = 289$ (területegység)
$a = 8$ (egység) $b = 15$ (egység) $c = 17$ (egység)



	T_1 (te.)	T_2 (te.)	T_3 (te.)	***a*** (e.)	***b*** (e.)	***c*** (e.)
I.	64	225	289	8	15	17
II.	25	144	169	5	12	13
III.	36	64	100	6	8	10
IV.	81	144	225	9	12	15
V.	16	49	65	4	7	$\sqrt{65}$

Tapasztalat: $T_1 + T_2 = T_3$ $a^2 + b^2 = c^2$.

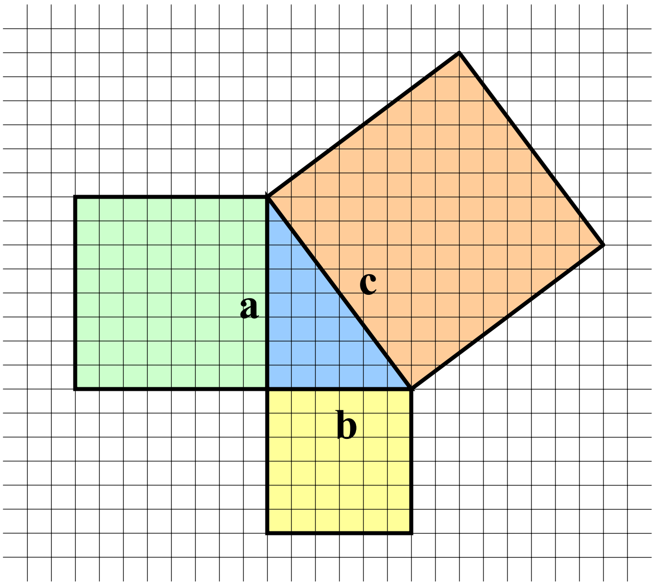
3. Tétel kimondása

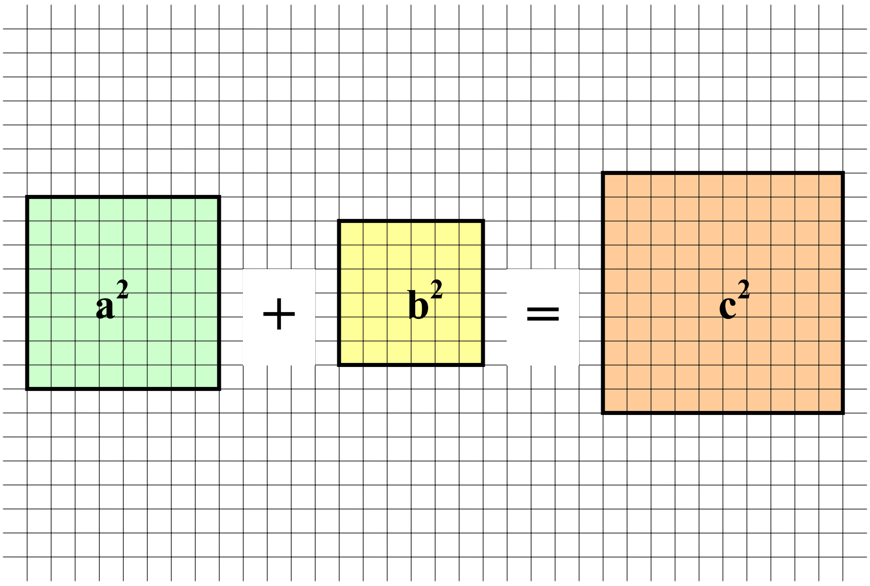
3. FELADATLAP

TUDNIVALÓ:

TÉTEL:
A derékszögű háromszög befogóira rajzolt négyzetek területeinek összege egyenlő az átfogóra rajzolt négyzet területével. Ez a Pitagorasz-tétel.
Ha a két befogót *a* és *b* betűvel jelöljük, az átfogót pedig *c* betűvel:

$$a^2 + b^2 = c^2$$





A tétel kimondásakor fel kell hívni néhány dologra a figyelmet!
1. Nem mindegy, melyik négyzet területe az összeg! Mindig az **átfogóra** rajzolt négyzet területe a két befogóra rajzolt négyzet területének összege!

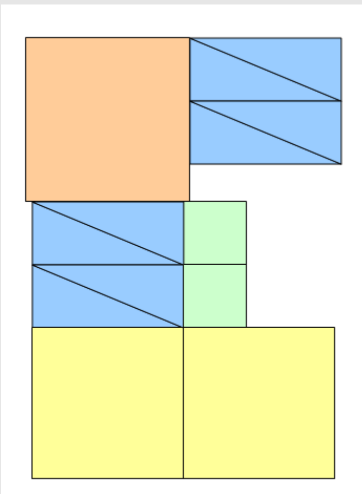
2. Nem feltétlenül kell ragaszkodni az *a, b, c* oldaljelölésekhez! Ha pl. a befogók jelölése *t* és *k*, az átfogó hossza pedig *u*, a Pitagorasz-tétel képlettel megfogalmazva $t^2 + k^2 = u^2$ –re módosul.

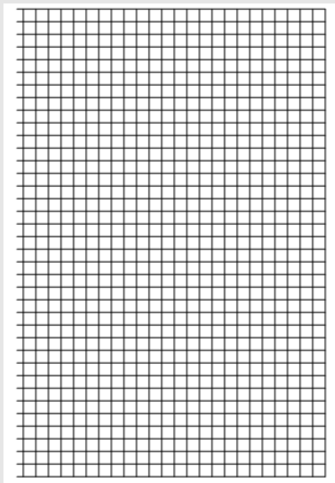
Magasabb óraszámban tanuló osztályokban a tétel kimondása után készíttethet a tanár a csoportokkal posztert a Pitagorasz-tétel szemléletes bemutatásáról.

II. A Pitagorasz-tétel bizonyítása

1. A Pitagorasz-tétel bizonyítása geometriai úton

A tétel kimondása után lássuk a bizonyítást! Fontos a szemlélet! Nem csak állítunk valamit, hanem alá is kell támasztani!
Kezdheti a tanár úgy, hogy a gyerekekkel kivágatja a **1. tanulói melléklet** síkidomait (ezt lehet előző órán házi feladatnak adni.), és megpróbálnak csoportokban vagy párosával bizonyítást találni a Pitagorasz-tételre a síkidomok mozgatásával. Segítségül lehet a négyzetrácsra is helyezni a síkidomokat.
1. tanulói melléklet – Lásd a modul végén, a tanulói munkafüzetben és a modul eszközei közt!



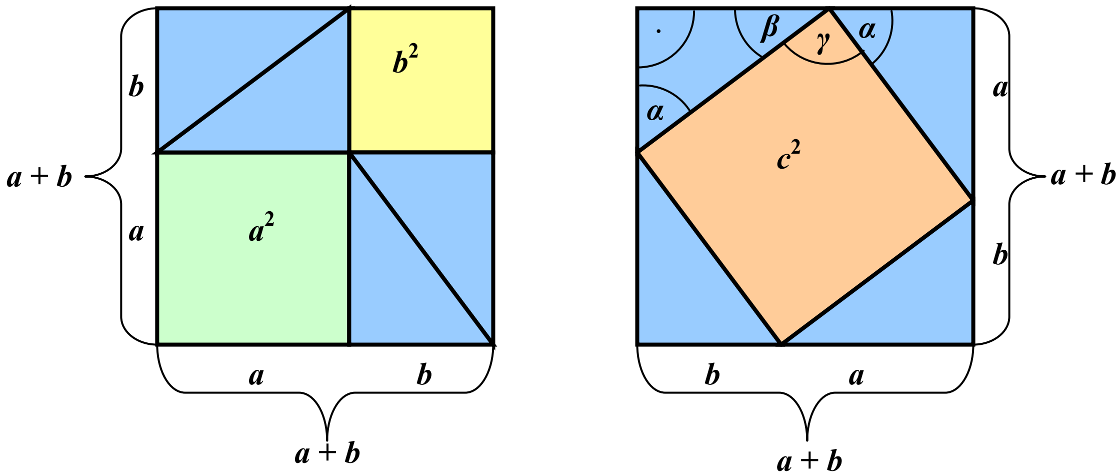


Egy klasszikus bizonyítást, és egy átdarabolásos „félbizonyítást” ismertetünk. Nagyon fontos, hogy az első bizonyítást részletesen beszélje végig a tanár frontálisan a gyerekekkel, hiszen ez az első eset, hogy klasszikus geometriai tételt és bizonyítását láthatják a gyerekek. Az is előfordulhat, hogy a melléklet segítségével (a négyzetek átdarabolásával) a gyerekek jönnek rá többféle bizonyításra. Ezeket érdemes végigbeszélni. A tétel bizonyítását nem kell a gyereknek megtanulnia, a megértése, a szemlélet elsajátítása a fontos. Következő órán jutalmazhatjuk ötös osztályzattal, azt a vállalkozó kedvű gyereket, aki vissza tudja mondani az osztály előtt a bizonyítást. Így az osztály is átismétli.
Ennek a tételnek a megfordítása is igaz, és azt is kimondjuk!

BIZONYÍTÁS:

Tekintsünk egy derékszögű háromszöget, melynek oldalait jelöljük a szokásos jelölésekkel (befogó: *a*, *b*, átfogó: *c*).
Rajzoljunk két $a + b$ oldalú négyzetet!
Az egyikbe bele tudunk rajzolni egy *a* oldalú, majd egy *b* oldalú négyzetet, valamint négy darabot az adott derékszögű háromszögből a bal oldali ábrán látható elrendezésben.

A másik nagy négyzet oldalaira váltakozva felmérjük a és b oldalakat. A pontokat az ábrán látható módon összekötjük. Így négy egybevágó derékszögű háromszöget kapunk és egy egyenlő oldalú négyszöget (miden oldalhossza c), rombuszt. Erről belátható, hogy négyzet: A derékszögű háromszögek belső szögeinek összege 180°, ebből a két hegyesszög összege ($\alpha + \beta$) 90°. Ez a két szög és a rombusz szöge (γ) egyenesszöget alkot. Ebből következik, hogy a rombusz szögei derékszögek, tehát négyzet. Ennek a négyzetnek az oldala a derékszögű háromszög átfogója (c).



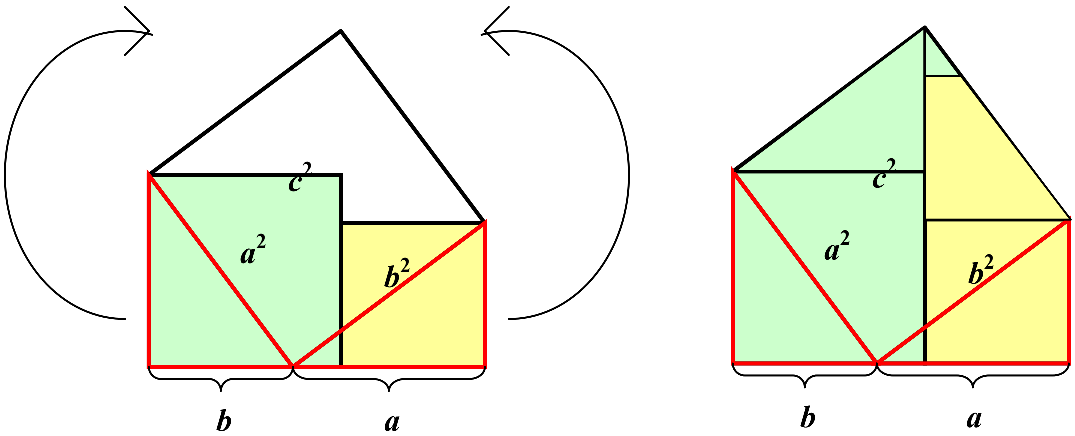
$\mathrm{T}_{\text{négyzet}} = a^2 + b^2 + 4 \cdot \mathrm{T}_{\text{háromszög}}$ $\qquad$ $\mathrm{T}_{\text{négyzet}} = c^2 + 4 \cdot \mathrm{T}_{\text{háromszög}}$

A jobb és bal oldali négyzetek egybevágók, tehát területeik is egyenlők. Ha mindkettő területeiből levonjuk a 4 darab háromszög területét, a maradék területek nyilván egyenlők.
Tehát: $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$

Azaz a két befogókra rajzolt négyzet területének összege az átfogóra rajzolt négyzet területével egyenlő.

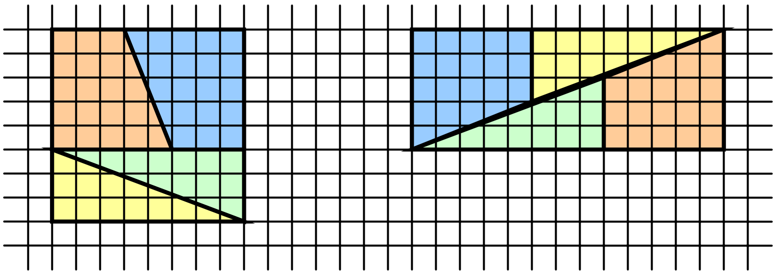
2. A Pitagorasz-tétel alátámasztása átdarabolással

Lássunk most egy „darabolásos” módszert az állítás alátámasztására! Most már magyarázat nélkül:



Most már tudjuk, hogy ez igaz, de ez nem bizonyítás. Az átdarabolás helyességét algebrai úton be kell még bizonyítani ahhoz, hogy ez valóban elfogadható bizonyítása legyen a Pitagorasz-tételnek. (Ezt most nem tesszük meg, majd középiskolában.)

Nézzünk egy példát arra, hogy a látvány néha becsap, és nem elég átdarabolással bizonyítani egy állítást.
Állításunk a következő:
$8 \cdot 8 = 5 \cdot 13$, azaz 64 = 65 (Természetesen ez nem igaz, lássuk, hol a turpisság!)
A „bizonyítást” egy 8 egység oldalhosszúságú négyzet átdarabolásával végezzük. A négyzetet az ábrán látható módon háromszögekre és négyszögekre bontjuk, majd átdaraboljuk egy 5 és 13 egység oldalhosszúságú téglalappá.



Hol van a hiba az okoskodásban?

Ezt az átdarabolást akár a gyerekek is végigcsinálhatják négyzethálóból kivágott síkidomokkal, így megtapasztalhatják, hogy egy egységnyi négyzet valóban „eltűnik”, darabolással nem lehet észrevenni az okoskodásban a csalást.

A megoldás: A háromszögek területe egyenként: $\frac{3 \cdot 8}{2}$, azaz 12 egység. A két trapéz területe egyenként (egy téglalapra és egy derékszögű háromszögre bontva): $3 \cdot 5 + \frac{5 \cdot 2}{2}$ (Gyorsabban haladó osztályokban, ahol tanulták a trapéz területének képletét: $\frac{(3+5) \cdot 5}{2}$), azaz 20 egység.
Látható, hogy a négyzet területe megegyezik a 2 háromszög és a két trapéz területének összegével: $8 \cdot 8 = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 20$, de a nagy téglalap területe 1 egységgel nagyobb, mint a 2 háromszög és a két trapéz területének összege: $5 \cdot 13 \neq 2 \cdot 12 + 2 \cdot 20$, azaz az átdarabolás pontatlan volt!
Másik lehetséges okoskodás: az egyenes meredekségét már tanultuk, azon alapszik: a kék trapéz és a zöld háromszög látszólag egy egyenesbe eső oldalegyenesének nem egyezik meg a meredeksége. A háromszög átfogójának meredeksége: 3/8. A trapéz megfelelő oldalának meredeksége: 2/5. A két szám nem egyenlő.
A magasabb óraszámban tanuló gyerekekkel kutathatunk az interneten bizonyításokat a Pitagorasz-tétellel kapcsolatban. Utána a bizonyításról is lehet posztereket készíteni, akár úgy is, hogy a csoportok különböző bizonyítások bemutatását választják. Az elkészült posztereket jutalmazhatjuk pontokkal, vagy jutalmazhatják egymás munkáit is. (Pl.: Minden csapat szavazhat egy másik csapatra, akinek a munkája a legjobban tetszik, így az a csapat, amelyikre szavaztak, pontot kap.)

III. A Pitagorasz-tétel megfordítása

1. Állítások és megfordításuk

4. FELADATLAP

A feladatlap házi feladatnak adható, majd (vagy) frontálisan megbeszélhető.

1. Töltsd ki a táblázatot! Az első oszlopban állítások szerepelnek. Döntsd el, igazak-e! A harmadik oszlopba írd be az állítások megfordítását. Ezekről is döntsd el. Igazak-e!

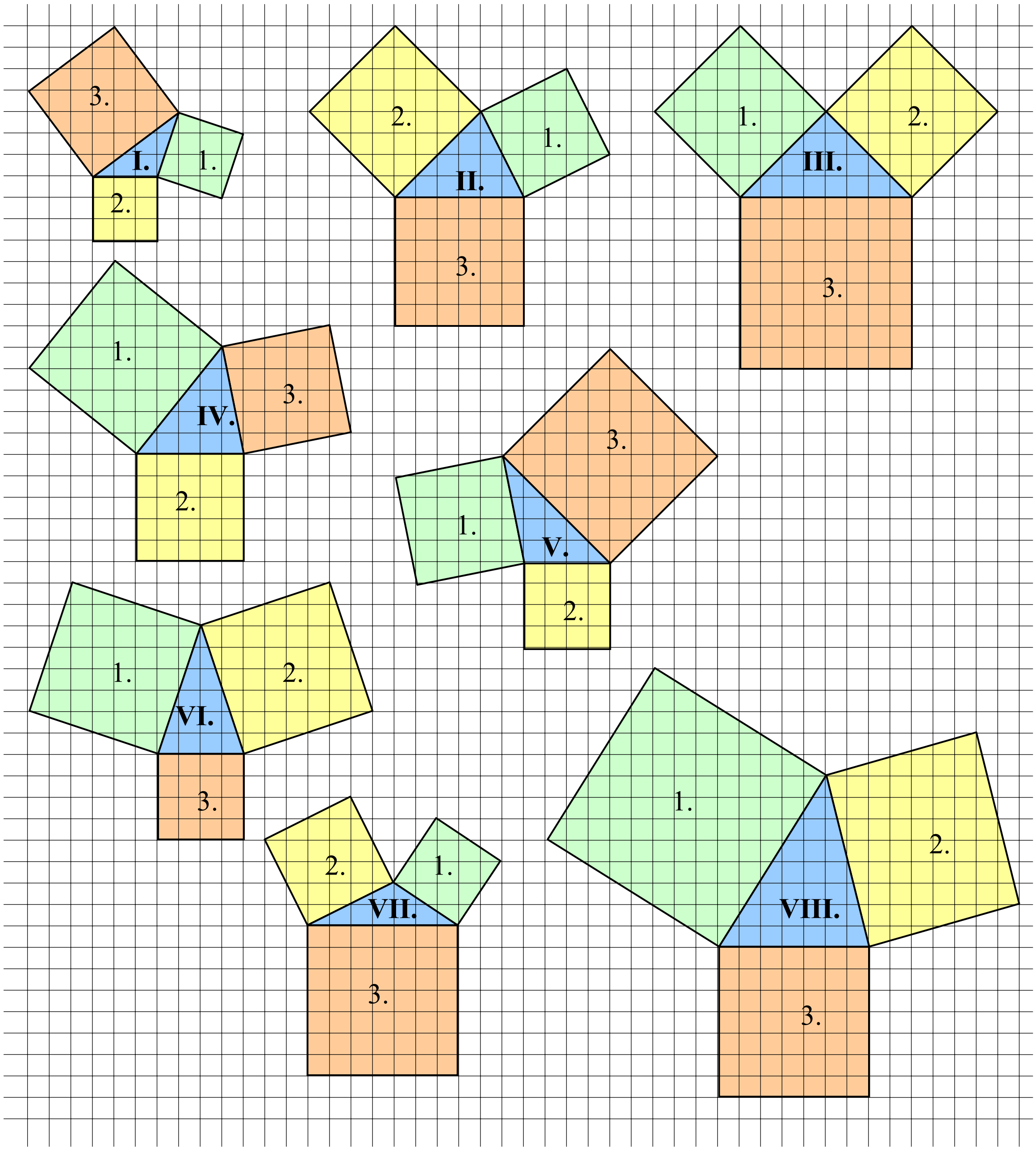
Állítás:	**igaz / hamis**	**Megfordítás:**	**igaz / hamis**
Ha egy autónak rossz az akkumulátora, akkor nem indul el.	I	Ha egy autó nem indul el, akkor rossz az akkumulátora.	H
Ha egy cipőben fáj a lábad, akkor az kicsi Rád.	H	Ha egy cipő kicsi Rád, akkor fáj a lábad benne.	I
Ha egy állatnak szárnya van, akkor az ló. (Nem a mesében!)	H	Ha egy állat ló, akkor szárnya van.	H
Aki sok répát eszik, jól fog tudni fütyülni.	?	Aki jól fütyül, sok répát evett (eszik).	?
Ha egy háromszög derékszögű, akkor a derékszöget közrezáró két oldalára rajzolt négyzetek területeinek összege egyenlő a harmadik oldalra rajzolt négyzet területével.	I	Ha egy háromszögre igaz, hogy két oldalára rajzolt négyzetek területeinek összege egyenlő a harmadik oldalra rajzolt négyzet területével, akkor a háromszög derékszögű.	? (I)

2. Hegyes és tompaszögű háromszög oldalaira rajzolt négyzetek területei

A feladatokat csoportokban oldhatják meg a tanulók. Ismét használható a szakértői mozaik módszer. Házi feladatnak is feladható, de csak akkor, ha legalább egyet megbeszélnek előtte közösen.
Előtte érdemes feleleveníteni a következőket: Minden háromszögre igaz, hogy nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van. A nagyobb oldalra nagyobb területű négyzet írható. Így, ha a négyzetek területének az összegét akarom vizsgálni, elegendő csak azt megnézni, hogy a legnagyobb szöggel szemközti oldalra írt négyzet területe egyenlő, kisebb vagy nagyobb a másik két oldalra írt négyzetek összegénél. E szempont szerint vizsgálódjanak a gyerekek! A táblázatot is e szempont szerint töltenék ki.

5. FELADATLAP

1. Gyűjtsünk tapasztalatot a nem derékszögű háromszögek oldalaira rajzolt négyzetek területeiről! Töltsd ki a táblázatot!



	Milyen szögű?	T_1	T_2	T_3	Tapasztalat
I.	tompa	10	9	25	$T_1+T_2<T_3$
II.	hegyes	20	32	36	$T_1+T_2>T_3$
III.	derék	32	32	64	$T_1+T_2=T_3$
IV.	hegyes	41	25	26	$T_1+T_2>T_3$
V.	tompa	26	16	50	$T_1+T_2<T_3$
VI.	hegyes	40	40	16	$T_1+T_2>T_3$
VII.	tompa	13	20	49	$T_1+T_2<T_3$
VIII.	hegyes	89	68	49	$T_1+T_2>T_3$

A háromszögoldalakra írt területek és a háromszög szögei közötti összefüggést gyorsabban haladó osztályokban írják le önállóan a füzetbe a gyerekek, majd ellenőrzik, egyeztetik a tanárral frontálisan.
Lassabban haladó osztályokban elég, ha csak megbeszélik a tapasztalataikat a gyerekek a tanárral frontálisan. Az állítás nem számon kérendő tananyag.

ÖSSZEGZÉS:

Ha egy háromszög legnagyobb szögével szemközti oldalára írt négyzet területe kisebb, mint a másik két oldalra állított négyzetek területének összege, akkor az hegyesszögű.
Ha egy háromszög legnagyobb szögével szemközti oldalára írt négyzet területe a másik két oldalra állított négyzetek területének összegével. akkor az derékszögű.
Ha egy háromszög legnagyobb szögével szemközti oldalára írt négyzet nagyobb, mint a másik két oldalra állított négyzetek területének összege. akkor az tompaszögű.

3. Háromszögek oldalai alapján következtetés hegyes-, tompa- vagy derékszögű tulajdonságára

6. FELADATLAP

1. Az alábbi táblázatban háromszögek adatait látod a szokásos jelöléseket használva. Töltsd ki a hiányzó értékeket, valamint állapítsd meg, derék-, tompa- vagy hegyesszögű háromszögről van szó!

A táblázatot kitölthetik csoportmunkaként, páros munkaként, vagy önállóan is. Egy része házi feladatnak is adható.

	I.	**II.**	**III.**	**IV.**	**V.**	**VI.**
***a* oldal**	5	7	50	2	16	20
***b* oldal**	3	5	46	5,2	30	16
***c* oldal**	4	11	37	4,8	34	< 12
a^2	25	49	2500	4	256	400
b^2	9	25	2116	27,04	900	256
c^2	16	121	1369	23,04	1156	< 144
α	= 90°	< 90°	< 90°	< 90°	< 90°	> 90°
β	< 90°	< 90°	< 90°	= 90°	< 90°	< 90°
γ	< 90°	> 90°	< 90°	< 90°	= 90°	< 90°
Háromszög fajtája szögek szerint	derék-szögű	tompa-szögű	hegyes-szögű	derék-szögű	derék-szögű	tompa-szögű

Megjegyzés: Érdemes megbeszélni a gyerekekkel, hogyan lehet a legpraktikusabban kideríteni a három oldalhossz négyzetéből a szögek nagyságát. Nyilván a két kisebb szám négyzetét kell összeadni, és hasonlítani a harmadik négyzethez, hiszen tompa- és derékszögű háromszög esetén ez lesz nagyobb vagy egyenlő. A hegyesszögű háromszögnél nem kell a többi lehetőséget is végignézni, hiszen csak hegyesszög lehet a többi oldallal szemben.

A **3. tanári melléklet**hez tartozó játék gyakorlásra szolgál.
3/a. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

a = 10 cm b = 8 cm c = 6 cm	a = 15 cm b = 9 cm c = 12 cm	a = 1,3 m b = 1,2 m c = 0,5 m	a = 26 dm b = 100 cm c = 240 cm
a = 10 cm b = 26 cm c = 24 cm	a = 8 cm b = 17 cm c = 15 cm	a = 80 dm b = 100 dm c = 60 dm	a = 16 mm b = 3,4 cm c = 3 cm
a = 40 cm b = 30 cm c = 50 cm	a = 30 cm b = 16 cm c = 34 cm	a = 0,8 m b = 1,5 m c = 1,7 m	a = 2,4 cm b = 1,8 cm c = 0,3 dm
a = 7 cm b = 5 cm c = 3 cm	a = 100 cm b = 50 cm c = 60 cm	a = 1,5 dm b = 1,2 dm c = 0,5 dm	a = 27 dm b = 100 cm c = 2400 mm
a = 8 cm b = 13 cm c = 9 cm	a = 20 cm b = 27 cm c = 15 cm	a = 4,7 km b = 7,1 km c = 3,8 km	a = 3,6 cm b = 49 mm c = 0,028 m
a = 60 cm b = 50 cm c = 90 cm	a = 20 cm b = 14 cm c = 27 cm	a = 7,2 cm b = 4,5 cm c = 9,1 cm	a = 550 cm b = 2 m c = 56 dm
a = 8 cm b = 11 cm c = 9 cm	a = 80 cm b = 90 cm c = 40 cm	a = 3,5 cm b = 1,5 cm c = 3,4 cm	a = 470 cm b = 50 dm c = 6,7 m
a = 8 cm b = 5 cm c = 1 cm	a = 3,6 cm b = 6,8 cm c = 2,4 cm	a = 4 cm b = 5 dm c = 3 cm	a = 76 mm b = 3,9 cm c = 0,36 dm

Játék: A gyerekeknek osztunk egy-egy kártyát véletlenszerűen. A kártyán egy háromszög oldalainak hosszai szerepelnek a szokásos jelölésekkel. A táblán, vagy írásvetítőn szerepelnek a csoportosítás szempontjai. (Lsd. lentebb!)
Meg kell találniuk egymást az azonos csoportba tartozó háromszög oldalait jelölő kártyákkal rendelkező gyerekeknek. A csoportok: (Minden sor egy csoport a mellékletben, a következő sorrendben):

3/b. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

A.	derékszögű háromszög, $\alpha = 90°$
B.	derékszögű háromszög, $\beta = 90°$
C.	derékszögű háromszög, $\gamma = 90°$
D.	tompaszögű háromszög, $\alpha > 90°$
E.	tompaszögű háromszög, $\beta > 90°$
F.	tompaszögű háromszög, $\gamma > 90°$
G.	hegyesszögű háromszög
H.	nem háromszög.

Ez a feladat kooperatív csoportbontására is alkalmas (a négy fős csoportok létrehozására). Ha a tanár előre szeretné a csoportokba kerülőket meghatározni, a kártyákat ennek megfelelően kell a kezükbe adni. (A kártyák hátuljára rá lehet írni a tanulók nevét, akinek szánjuk, ha nem véletlenszerűen akarjuk a csoportokat létrehozni. A háromszögek csoportba sorolásának nehézsége a sorban balról jobbra növekszik, tehát differenciáltan oszthatjuk, ha heterogén csoportokat akarunk létrehozni. Nyilván a legjobb képességű gyerek kapja a legjobboldalibb, legnehezebb kártyát egy csoporton belül.)
A 3/b. tanári melléklet írásvetítőn kivetíthető, vagy kiírható a táblára. Az egymást leggyorsabban megtaláló csoport kaphatja a legtöbb pontot, a következő kevesebbet, és így tovább.
Ha a tanár nem játszatja el a játékot, a háromszögek szögei szerinti csoportosítását házi feladatnak is adhatja. Erre szolgál a feladatgyűjteményben leírt 3. feladat. E feladatban ugyanazok a háromszögek adatai szerepelnek a táblázatban, mint a 3. tanári mellékletben. A gyerekeknek el kell dönteniük, melyik háromszög melyik felsorolt csoportba tartozik (a háromszögek természetesen össze vannak keverve, nem úgy, mint a tanári mellékletben). Így kevésbé játékos, mozgalmas a feladat megoldása. A feladat nehézségi szintje fokozatosan nő. Nem érdemes az egész feladatot feladni, mert nagyon időigényes. Lehet differenciáltan két-két sort adni egy gyereknek, vagy a gyerekek maguk választhatják meg azt a két sort, amit megcsinálnak házi feladatnak.

4. A Pitagorasz-tétel megfordításának kimondása

A tapasztalataink alapján kimondhatjuk:

TÉTEL:

PITAGORASZ-TÉTEL MEGFORDÍTÁSA**:** Ha egy háromszög két oldalára igaz, hogy a rájuk rajzolt négyzetek területeinek összege egyenlő a harmadik oldalra rajzolt négyzet területével, akkor az a háromszög derékszögű.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Szerkeszd meg az alábbi háromszögeket a szokásos jelölésekkel:

$a = 8$ cm
$b = 6$ cm

a) $\gamma_1 = 60°$;
b) $\gamma_2 = 90°$;
c) $\gamma_3 = 120°$.

Mérd le mindhárom esetben a harmadik oldal hosszát! Mit tapasztalsz?
$c_1 = 7{,}2$ cm; $c_2 = 10$ cm; $c_2 = 12{,}2$ cm; Minél nagyobb a γ szög, annál nagyobb a c oldal.

2. Töltsd ki a táblázatot! Az első oszlopban állítások szerepelnek. Döntsd el, igazak-e! A harmadik oszlopba írd be az állítások megfordítását. Ezekről is döntsd el. Igazak-e!

Állítás:	**igaz / hamis**	**Megfordítás:**	**igaz / hamis**
Aki kíváncsi, hamar megöregszik.	Eldönthető, igaz-e?	Aki hamar megöregszik, az kíváncsi.	h
Ha egy szám osztható 3-mal és 4-gyel, akkor osztható 12-vel is.	i	Ha egy szám osztható 12-vel, akkor osztható 3-mal és 4-gyel is.	i
Ha egy háromszög egyenlőszárú, akkor van két egyenlő szöge.	i	Ha egy háromszögnek van két egyenlő belső szöge, akkor az egyenlőszárú.	i
Ha egy szám osztható 6-tal és 9-cel, akkor osztható 54-gyel is.	h	Ha egy szám osztható 54-gyel, akkor osztható 6-tal és 9-cel is.	i
Ha egy négyszög téglalap, akkor paralelogramma.	i	Ha egy négyszög paralelogramma, akkor az téglalap.	h
A deltoid tengelyesen szimmetrikus. (Ha egy négyszög deltoid, akkor az tengelyesen szimmetrikus.)	i	Ha egy négyszög tengelyesen szimmetrikus, akkor az deltoid.	h
Ha egy téglalap négyzet, akkor az rombusz is egyben.	i	Ha egy téglalap rombusz, akkor az négyzet.	i
A paralelogramma szembelévő szögei egyenlők. (Ha egy négyszög paralelogramma, akkor szembelévő szögei egyenlőek.)	i	Ha egy négyszög szembelévő szögei egyenlők, akkor a négyszög paralelogramma.	i
Ha egy négyszög trapéz, akkor rombusz is.	h	Ha egy négyszög rombusz, akkor az trapéz is.	i

3. Az alábbi háromszögeket sorold be a megfelelő csoportba (a háromszög oldalhosszait és szögeit a szokásos módon jelöltük). A csoport betűjelét írd a háromszögek oldalhosszai alá!

A. derékszögű háromszög, $\alpha = 90°$

B. derékszögű háromszög, $\beta = 90°$

C. derékszögű háromszög, $\gamma = 90°$

D. tompaszögű háromszög, $\alpha > 90°$

E. tompaszögű háromszög, $\beta > 90°$

F. tompaszögű háromszög, $\gamma > 90°$

G. hegyesszögű háromszög

H. nem háromszög.

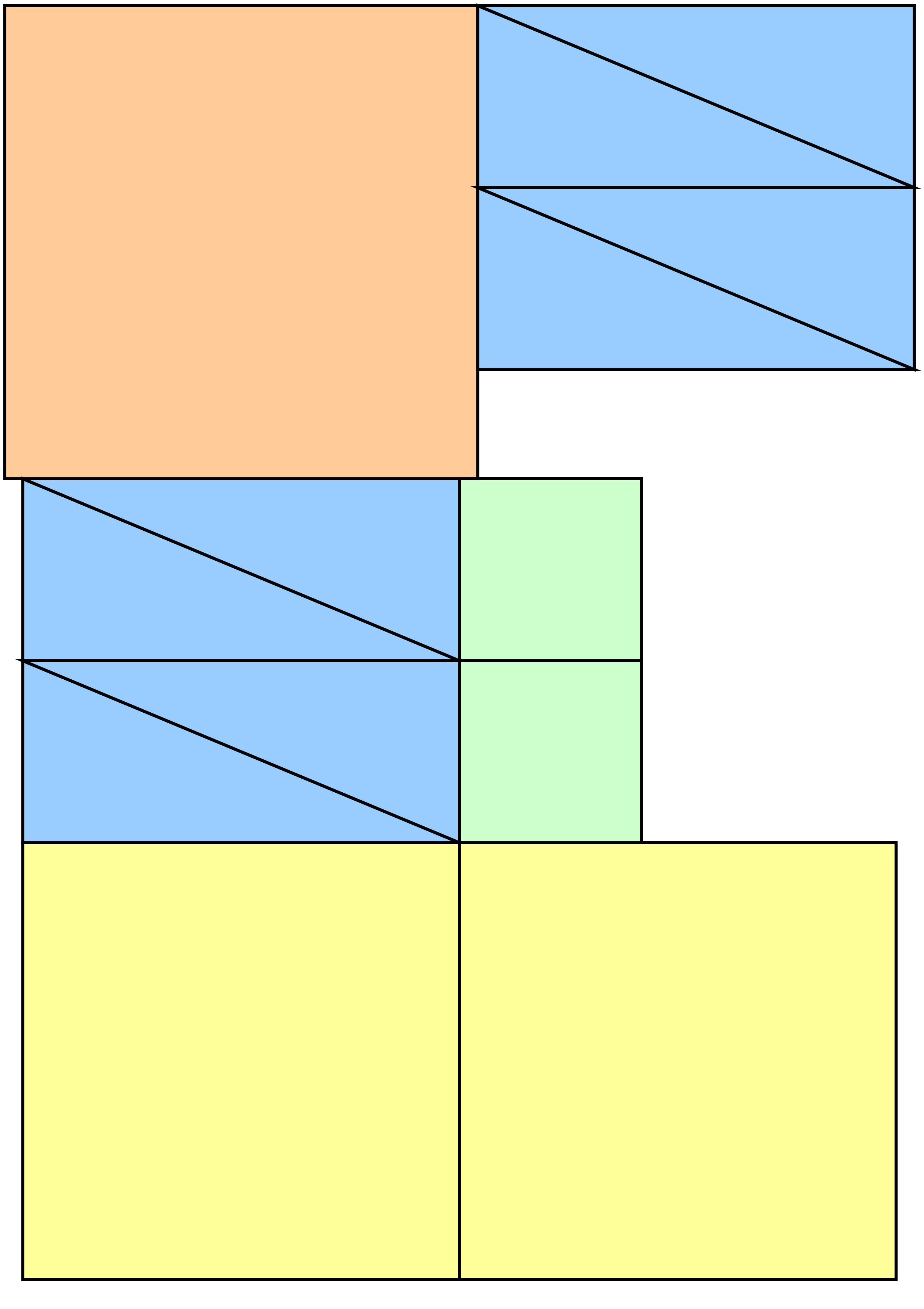
a)	$a = 10$ cm $b = 8$ cm $c = 6$ cm *A*	$a = 7$ cm $b = 5$ cm $c = 3$ cm *D*	$a = 8$ cm $b = 13$ cm $c = 9$ cm *E*	$a = 15$ cm $b = 9$ cm $c = 12$ cm *A*
b)	$a = 10$ cm $b = 26$ cm $c = 24$ cm *B*	$a = 60$ cm $b = 50$ cm $c = 90$ cm *F*	$a = 40$ cm $b = 30$ cm $c = 50$ cm *C*	$a = 8$ cm $b = 11$ cm $c = 9$ cm *G*
c)	$a = 20$ cm $b = 27$ cm $c = 15$ cm *E*	$a = 30$ cm $b = 16$ cm $c = 34$ cm *C*	$a = 100$ cm $b = 50$ cm $c = 60$ cm *D*	$a = 8$ cm $b = 17$ cm $c = 15$ cm *B*
d)	$a = 80$ cm $b = 90$ cm $c = 40$ cm *G*	$a = 20$ cm $b = 14$ cm $c = 27$ cm *F*	$a = 3{,}6$ cm $b = 6{,}8$ cm $c = 2{,}4$ cm *H*	$a = 8$ cm $b = 5$ cm $c = 1$ cm *H*

e)	a = 1,5 dm b = 1,2 dm c = 0,5 dm ____*D*____	a = 1,3 m b = 1,2 m c = 0,5 m ____*A*____	a = 4 cm b = 5 dm c = 3 cm ____*H!!!*____	a = 7,2 cm b = 4,5 cm c = 9,1 cm ____*F*____
f)	a = 0,8 m b = 1,5 m c = 1,7 m ____*C*____	a = 3,5 cm b = 1,5 cm c = 3,4 cm ____*G*____	a = 4,7 km b = 7,1 km c = 3,8 km ____*E*____	a = 80 dm b = 100 dm c = 60 dm ____ *B* ____
g)	a = 27 dm b = 100 cm c = 2400 mm ____*D*____	a = 16 mm b = 3,4 cm c = 3 cm ____ *B* ____	a = 2,4 cm b = 1,8 cm c = 0,3 dm ____*C*____	a = 550 cm b = 2 m c = 56 dm ____*F!!!*____
h)	a = 470 cm b = 50 dm c = 6,7 m ____*G*____	a = 76 mm b = 3,9 cm c = 0,36 dm ____*H*____	a = 3,6 cm b = 49 mm c = 0,028 m ____*E*____	a = 26 dm b = 100 cm c = 240 cm ____*A*____

0842 – 1/a. tanulói melléklet (2 oldal)

Osztályonként 8 készlet (csoportonként 1 készlet) kartonpapírra nyomva pontosan ebben a méretben.

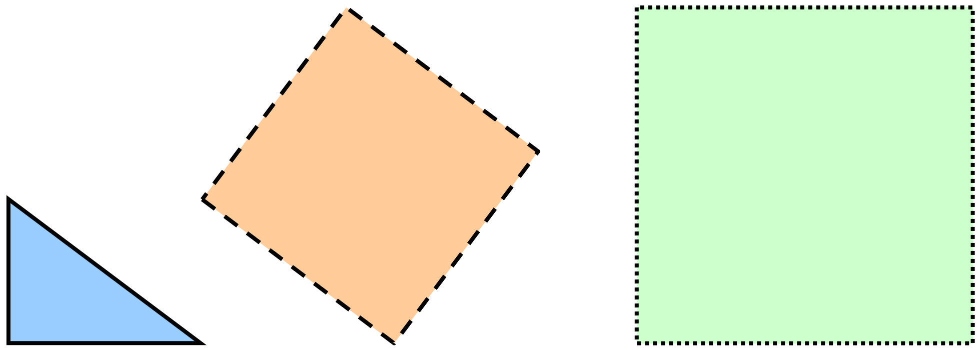
Az 1. oldal lévő négyzetek és háromszögek a fekete vonalak mentén szétvágandók.

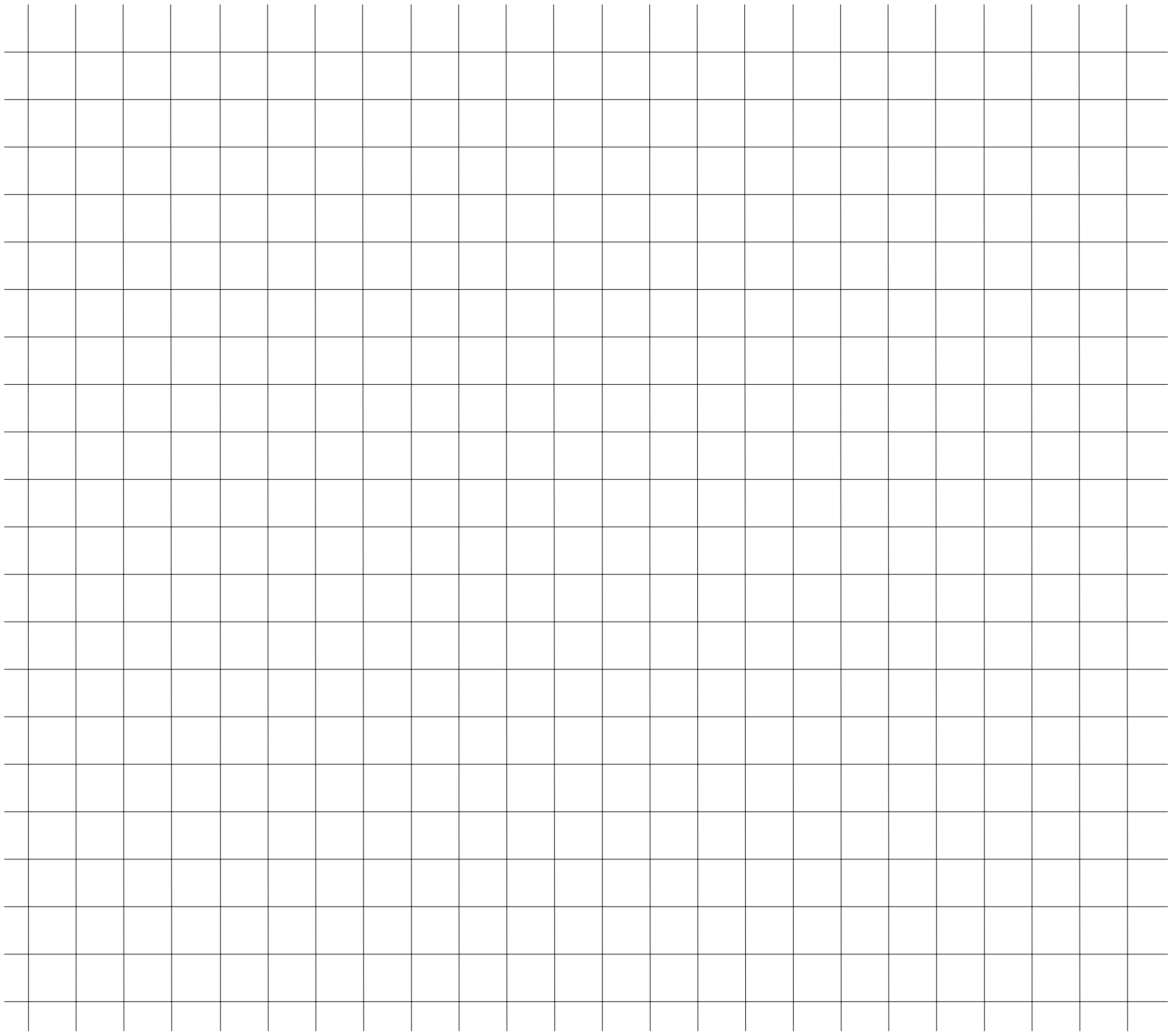


0842 – 1/b. tanulói melléklet

0842 – 2. tanári melléklet

Írásvetítő fóliára nyomva ebben a méretben (osztályonként 1 db).





0842 – 3/a. tanári melléklet

Osztályonként 1 db kártya készlet kartonpapírra nyomva ebben a méretben (Fekete vonalak mentén szétvágandó).

a = 10 cm b = 8 cm c = 6 cm	a = 15 cm b = 9 cm c = 12 cm	a = 1,3 m b = 1,2 m c = 0,5 m	a = 26 dm b = 100 cm c = 240 cm
a = 10 cm b = 26 cm c = 24 cm	a = 8 cm b = 17 cm c = 15 cm	a = 80 dm b = 100 dm c = 60 dm	a = 16 mm b = 3,4 cm c = 3 cm
a = 40 cm b = 30 cm c = 50 cm	a = 30 cm b = 16 cm c = 34 cm	a = 0,8 m b = 1,5 m c = 1,7 m	a = 2,4 cm b = 1,8 cm c = 0,3 dm
a = 7 cm b = 5 cm c = 3 cm	a = 100 cm b = 50 cm c = 60 cm	a = 1,5 dm b = 1,2 dm c = 0,5 dm	a = 27 dm b = 100 cm c = 2400 mm

a = 8 cm b = 13 cm c = 9 cm	a = 20 cm b = 27 cm c = 15 cm	a = 4,7 km b = 7,1 km c = 3,8 km	a = 3,6 cm b = 49 mm c = 0,028 m
a = 60 cm b = 50 cm c = 90 cm	a = 20 cm b = 14 cm c = 27 cm	a = 7,2 cm b = 4,5 cm c = 9,1 cm	a = 550 cm b = 2 m c = 56 dm
a = 8 cm b = 11 cm c = 9 cm	a = 80 cm b = 90 cm c = 40 cm	a = 3,5 cm b = 1,5 cm c = 3,4 cm	a = 470 cm b = 50 dm c = 6,7 m
a = 8 cm b = 5 cm c = 1 cm	a = 3,6 cm b = 6,8 cm c = 2,4 cm	a = 4 cm b = 5 dm c = 3 cm	a = 76 mm b = 3,9 cm c = 0,36 dm

0842 – 3/b. tanári melléklet
Írásvetítő fólián a következő A4-es ábra (osztályonként 1 db):

I. derékszögű háromszög, $\alpha = 90°$

J. derékszögű háromszög, $\beta = 90°$

K. derékszögű háromszög, $\gamma = 90°$

L. tompaszögű háromszög, $\alpha > 90°$

M. tompaszögű háromszög, $\beta > 90°$

N. tompaszögű háromszög, $\gamma > 90°$

O. hegyesszögű háromszög

P. nem háromszög.