0841. MODUL

PITAGORASZ-TÉTEL, GYÖKVONÁS

A négyzetgyök fogalmának bevezetése

KÉSZÍTETTE: VÉPY-BENYHE JUDIT

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A négyzetgyök fogalma, meghatározása
Időkeret	4 tanóra
Ajánlott korosztály	8. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Tágabb környezetben:* Fizika, Kémia, Magyar nyelv (szövegértés) *Szűkebb környezetben:* Ötödik osztályos derékszögű koordinátarendszer témakör, Hetedik osztályos számok és műveletek témakör, Hetedik osztályos hatványozás fejezet. Hetedik osztályos téglatest, hasáb felszín, térfogat témakör, kör területe fejezet, egyenletek megoldása mérlegelvvel, nevezetes számhalmazok, Hatodik osztályban algebrai kifejezésekről tanultak. *Ajánlott megelőző tevékenység:* Derékszögű koordináta rendszerben eligazodás felidézése; téglatest, hasáb felszín, térfogatának képlete, számolása; adott sugarú kör területének számolása; egyenletek megoldása mérlegelvvel, nevezetes számhalmazok átismétlése; algebrai kifejezés fogalma. *Ajánlott követő tevékenység:* Pitagorasz-tétel felfedeztetése tapasztalat útján
A képességfejlesztés fókuszai	*Számlálás, számolás:* Megismertetjük a gyerekeket a gyökvonással. Mélyítjük a hatványozás ismeretét, kitekintünk az irracionális számok világába. *Mennyiségi következtetés:* A négyzetre-emelést használva visszafelé következtetünk a négyzetgyökre. *Szövegesfeladat-megoldás, problémamegoldás, metakognició:* Négyzetgyökvonás műveletére vezető szöveges feladatokat oldunk meg. Matematikatörténeti érdekességek gyűjtésére bíztatjuk a gyerekeket, olvasnivalókat kínálunk ebben a témában.

AJÁNLÁS

A tanulók többnyire négyes csoportokban dolgoznak, de fontos, hogy egyéni feladattal is kipróbálhassák magukat. Nagyon fontos a csoportokon belül kialakuló vita, érvelések, ellenérvek, a gondolkodás szabadsága, a másik véleményének figyelembevétele, egymás tisztelete. Az egyén szerepe fontosságának megtapasztalása a közösségben. Pozitív élményeket adhat: pl. poszter készítése az osztállyal. A szociális készség, valamint az esztétikai érzék fejlesztésére is módot adnak ezek az órák.
A tanulói tapasztalatcsere hangsúlyozása mellett ugyanilyen fontosnak kell lennie a frontális tanári munkának, amelynek folyamán a tanulók megerősítést kapnak a továbbhaladásuk szempontjából legfontosabb ismeretekben, illetőleg tisztázódnak meg nem értett anyagrészek.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Feladatlapok, feladatgyűjtemény, mellékletek, a modulhoz tartozó eszközök (Lsd.: eszközlista), négyzethálós füzet és tábla, írásvetítő, körző, vonalzó, számológép (A számológép használata indokolt, hiszen nem tudnak hiszen nem tudnak kellő sebességgel négyzetgyököt vonni másképp. Ebben a modulban tudjuk a számológép használatát készséggé fejleszteni.), függvénytábla.

ÉRTÉKELÉS

Folyamatos szóbeli értékelés, a hiányosságok pótlására, hibák javíttatására is kiterjedően. Egyéni- és csoporteredmények pozitív értékelése. Ösztönözzünk arra, hogy a tanulók egymás munkáját is értékeljék, megbecsüljék, megdicsérjék. A csoportmunkákat lehet értékelni a csoportok által gyűjtött pontszámok alapján. Pontszámokat a jól megoldott feladatokért adhat a tanár, illetve a többi csoport.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. A négyzetgyökvonás bevezetése, ismerkedés a művelettel, $\sqrt{a}$ definíciója			
1.	Ismerkedés a négyzetgyökvonással egy geometria feladat kapcsán (Négyzet területének számolása, a gyökvonás, mint művelet szükségessége, Probléma felvetése: $x^2=25$.)	Probléma megoldó gondolkodás fejlesztése	1. feladatlap, 2. tanári melléklet, füzet, körző, vonalzó
2.	Művelet és inverze (Ismerkedés „matematikai játékgép” segítségével az inverz művelet fogalmával, kiemelve a négyzetre emelés műveletének inverz műveletét.)	Problémamegoldás, számolás	2. feladatlap, füzet
3.	Vegyes négyzetgyökvonásra vezető algebrai és geometriai feladatok (A gyökvonás műveletének alkalmazása különböző feladatoknál, könnyen számolható, egész megoldásra vezető feladatok.)	Alkalmazás, számolás	3. feladatlap, füzet
4.	$\sqrt{a}$ definíciója (Értse meg a meghatározást, és értelmezze a definícióban lévő kikötéseket és fontosságukat ($\sqrt{a}$ nem negatív szám, a nem negatív…))	Dedukció	

II. A számkör bővítése, az irracionális számok fogalma			
1.	$\sqrt{a}$ irracionális kifejezés vizsgálata egy geometriai feladatnál (Távolság számolása, ennek kapcsán ismerkedés $\sqrt{a}$ irracionális számmal.)	Fogalomalkotás	4. feladatlap, 3. tanári melléklet
2.	Az irracionális számok, Valós számok (A tanult számkörök átismétlése, az új számkör bevezetése.)	Rendszerezés	5. feladatlap 1. feladat
3.	Kerekítés (A kerekítés gyakorlása. Cél: az algoritmus készség szintű elsajátítása.)	Becslőképesség	Feladatgyűjtemény 7. feladat
4.	Halmazábra (Különböző számok tanult számkörbe sorolása.)	Rendszerezés	5. feladatlap 2. feladat
5.	TOTO		6. feladatlap

III. Gyökvonás számológéppel, becsléssel, függvénytáblával			
1.	Gyökvonás becsléssel – játék (Négyzetre emelés írásban, becslés gyakorlása.)	Számolás	füzet
2.	Gyökvonás függvénytáblával	Összefüggés felismerő képesség	1. tanulói melléklet: számok négyzete, 7. feladatlap
3.	Gyökvonás számológéppel	Számolás	számológép

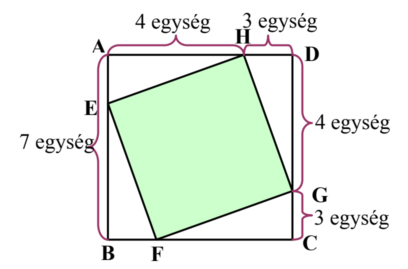
IV. A négyzetgyökvonás tulajdonságai, alkalmazása, gyakorlása			
1.	Hazudós játék négyzetgyökvonással kapcsolatban (Négyzetgyökvonás tulajdonságainak gyakorlása.)	Megfigyelés, sejtés, általánosítás	füzet
2.	Fekete Péter játék négyzetgyökvonással (A négyzetgyökvonás műveletének gyakorlása.)	Számlálás	4. tanári melléklet (kártya), számológép

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. A négyzetgyökvonás bevezetése, ismerkedés a művelettel, $\sqrt{a}$ definíciója

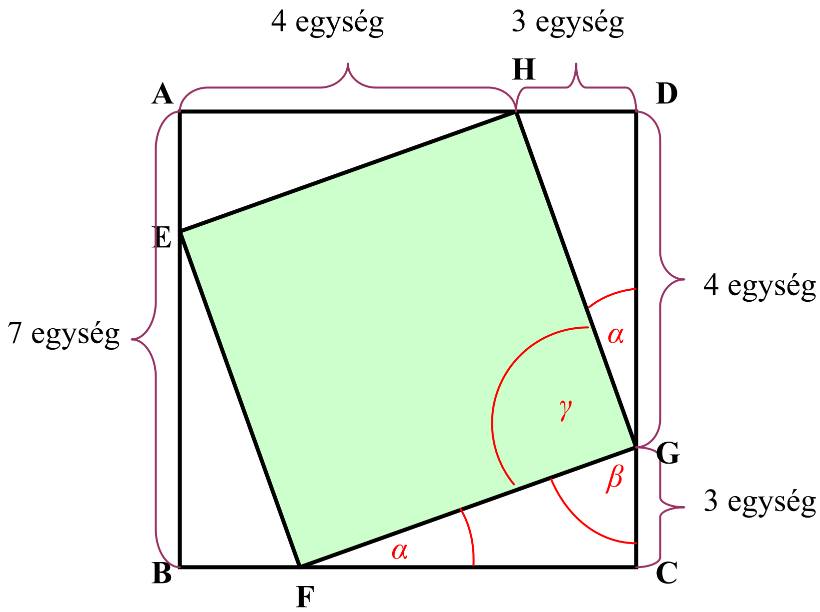
1. Ismerkedés a négyzetgyökvonással egy geometria feladat kapcsán

Ennek az anyagrésznek az átbeszéléséhez a **2. tanári melléklet**et, és az 1. feladatlapot használjuk. Frontálisan oldja meg a feladatot a tanár a gyerekekkel. Az ábrát kivetíti a tanár írásvetítő fólián (esetleg lerajzolja a táblára), filccel írhatja a fóliára a megoldást. Közben a gyerekek az 1. feladatlapot nézik a könyvben, oda írják be a közösen megbeszélt megoldást.
2. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!



1. FELADATLAP

1. Az ábrán látható ABCD négyzet négy oldalán négy pontot kijelölünk az ábrának megfelelően. Mekkora a halványzöld síkidom területe? Mekkorák az oldalai?



Először megállapítják közösen, milyen alakzat a besatírozott síkidom.
Minden oldala egyenlő, hiszen derékszögű, egybevágó háromszögek (pl. FGC háromszög) átfogóiról van szó. Minden szöge derékszög, mert az FGC derékszögű háromszögből $\alpha + \beta = 90°$, G csúcsnál lévő egyenes szögből $\alpha + \beta = 90°$, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ → $\gamma = 90°$. Ez az alakzat többi belső szögére is igaz.
Tehát a besatírozott síkidom minden szöge derékszög, minden oldala egyenlő hosszúságú: → Az alakzat négyzet.
Ezután a területet állapítják meg:

$$T_{EFGH} = T_{ABCD} - 4 \cdot T_{háromszög} = 7^2 - 4 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = 49 - 24 = 25$$

T = 25 területegység
Ha a besatírozott négyzet oldalát x-szel jelöljük, a területből adódik: $x^2 = 25$.
Ekkor megállapítják, hogy olyan szám lesz a megoldás, melynek négyzete 25, azaz ha önmagával szorzom, 25-öt kapok eredményül.→ $x = 5$ egység.
Itt ki kell térni arra, hogy vajon az $x^2 = 25$ egyenletnek vajon ez az egyetlen megoldása, esetleg tudnak-e más megoldást a gyerekek. Megbeszélik, hogy az $x = –5$ is gyöke az egyenletnek, de a feladatnak nem lehet megoldása, hiszen az oldal hossza nem lehet negatív szám.
Ez a művelet, melyet végeztünk a négyzetgyökvonás. $\sqrt{25} = 5$
Meg kell mutatni a $\sqrt{}$ jel rajzolását, megemlítve, hogy nem mindegy, hol van „vége”, tehát nem mindegy, hogy $\sqrt{25+24}$ $(=7)$ vagy $\sqrt{25}+24$ $(=29)$.
A másik megbeszélni való, hogy – bár az $x^2 = 25$ kifejezésnél x helyére két számot is írhatunk –, $\sqrt{25}$ kifejezésen (megállapodás szerint) 5-öt értünk.
Az egyenletmegoldásnál vigyázni kell arra, hogy nem mérlegelvvel, hanem következtetéssel, vagy lebontogatással oldjuk meg (Keressük azt a számot, melynek négyzete 25. Ez a szám az 5 vagy a –5)

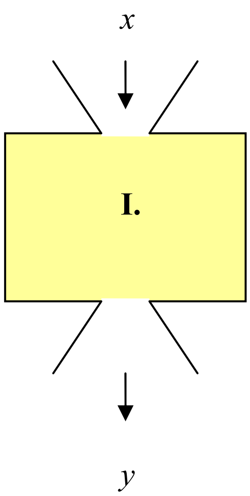
Az előző feladat megoldása közben az $x^2 = 25$ egyenlethez jutottunk.
Arra következtettünk, hogy $x = 5$.
$\sqrt{25} = 5$. (Olvasd: négyzetgyök 25)
Az $x = \sqrt{25}$ az $x^2 = 25$ egyenlet pozitív megoldása.
Ennek az egyenletnek van egy negatív megoldása is, a -5.
Az $x^2 = 3$ egyenletnek is két megoldása van, az $x = \sqrt{3} \approx 1,73$ és az $x = -\sqrt{3} \approx -1,73$.

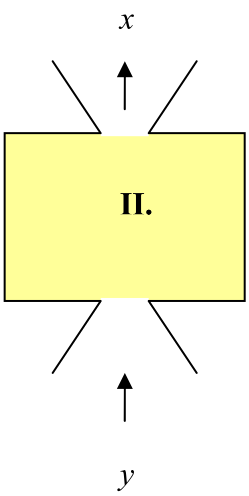
2. Művelet és inverze

A mintapélda frontális megbeszélése után önállóan vagy párosan kitölthetik a táblázatot, majd frontálisan ellenőrzik.

2. FELADATLAP

1. Az alábbi ábrán egy matematikai gépet látsz. Az I. esetben a gép x számból matematikai műveletek végzése után kiszámítja y értékét. A II. esetben a gép fordított irányban működik, vagyis az előbb kidobott y számból számítja ki a bedobott x értékét. A táblázat a gépek működési szabályát mutatja. Töltsd ki a táblázat hiányzó részeit! (Találd ki, milyen művelete(ke)t végez a fordított irányban működő gép, illetve az eredeti, ha tudom a fordítva működés szabályát!)



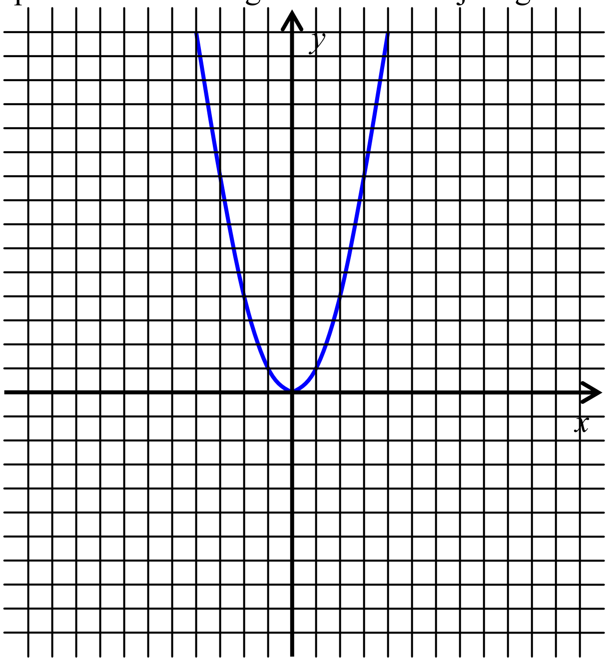


I.	II.
$x + 3 = y$	$y - 3 = x$
$x \cdot 5 = y$	$y : 5 = x$
$120 : x = y$	$120 : y = x$
$15 - x = y$	$15 - y = x$
$x - 11 = y$	$y - (-11) = x$
$4x - 10 = y$	$(y + 10) : 4 = x$
$(x - 1) \cdot 3 = y$	$y : 3 + 1 = x$
$x^2 = y \quad (x \geq 0)$	$\sqrt{y} = x$

Az utolsó esetről érdemes beszélgetni. Ott a gép működését nem lehet simán megfordítani, mert ugyanaz a kidobott érték két bedobott értékhez is tartozhat. Csak akkor lehet megfordítani, ha világosan megmondjuk, hogy a két lehetséges érték közül melyiket akarjuk visszakapni. Tehát a gyökvonás a négyzetre emelés fordított művelete, de mindig csak nem negatív számot jelenthet. Azt kell hangsúlyozni, hogy a **gyökvonás eredménye mindig nem negatív szám**.

A következő két feladatban a gyerekek az x^2, és a $\sqrt{x}$ függvény grafikonjával ismerkedhetnek meg érintőlegesen. Frontális vagy csoportmunkában való feldolgozásra ajánljuk.

2. Melyik függvény képe lehet az alábbi grafikon? Próbálj megfeleltetési szabályt találni!



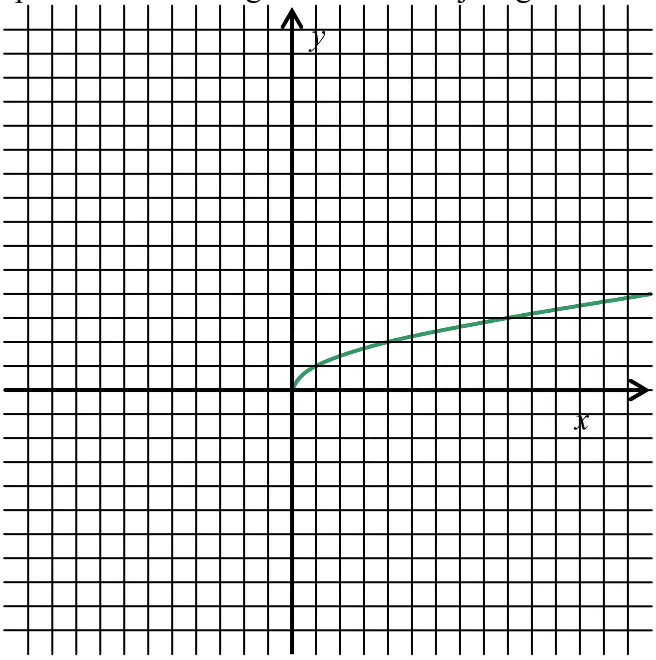
$y = x^2$

$x = \sqrt{y}$

Olvasd le a grafikonról a következő értékek párjait!

x	3	–1	1,5	2 vagy –2	1,7 vagy –1,7	0,5	2,2 vagy –2,2
y	9	1	2,2	4	3	0,2	5

3. Melyik függvény képe lehet az alábbi grafikon? Próbálj megfeleltetési szabályt találni!



$y = \sqrt{x}$

$x = y^2$

Olvasd le a grafikonról a következő értékek párjait!

x	9	4	1	9	–1	–	2,3
y	3	2	1	3	–	–2	1,5

3. Vegyes négyzetgyökvonásra vezető algebrai és geometriai feladatok

A 3. feladatlap feladatait fordított szakértői mozaik, szakértői mozaik módszerével vagy 4-5 fős csoportokban, esetleg önálló munkaként oldják meg a gyerekek. Az utóbbi két esetben feltétlenül meg kell beszélni a feladatok legalább egy részét frontálisan. Mindegyik feladat utolsó lépéseként a négyzetgyökvonás művelete szükséges. A feladatoknál mindenütt egész, fejben számolható megoldásokat kapnak eredményül a sikeresen megoldó gyerekek. A feladatok fokozatosan összetettebbek, nehezebbek a sorszám növekedésével.

3. FELADATLAP

1. Oldd meg az alábbi egyenletet! Ellenőrizd a megoldás helyességét!
$x(x-2)=36-2x$
$x \cdot x - 2x = 36 - 2x$
$x^2 = 36$
$x_1 = 6$; $x_2 = -6$

2. Egy téglalap egyik oldala épp háromszor akkora, mint a másik. Ha területe 147 cm^2, mekkora a két oldala?
T = 147 cm^2
$(3 \cdot a) \cdot a = 147$
$3a^2 = 147$
$a^2 = 49$
$a_1 = 7$; $a_2 = -7$, de az eredeti problémának csak az $a = 7$ cm lehet a megoldása.

3. Mekkora annak a kockának az éle, melynek felszíne 54 dm^2?

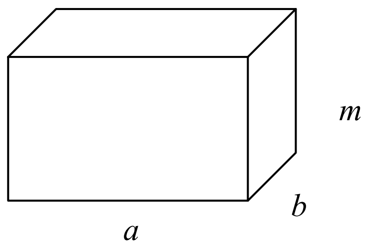
$A = 54$ dm^2
$6 \cdot a \cdot a = 54$
$a^2 = 9$
$a_1 = 3$; $a_2 = -3$, de az eredeti problémának csak az $a = 3$ dm lehet a megoldása.

4. Egy négyzet alapú egyenes hasáb alakú vázába 0,81 liter víz fér. Mekkora az alapéle, ha magassága 10 cm?
V = 0,81 l = 0,81 dm^3 = 810 cm^3
V = 810 cm^3
$a \cdot a \cdot m = 810$
$a^2 \cdot 10 = 810$
$a^2 = 81$
$a_1 = 9$; $a_2 = -9$, de az eredeti problémának csak az $a = 9$ cm lehet a megoldása.

5. Egy szabályos kör alakú virágágyás területe 3,14 m^2. Mekkora a kör sugara?
$T = 3,14$ m^2
$r^2 \cdot \pi = 3,14$
$r^2 = 1$
$r_1 = 1$; $r_2 = -1$, de az eredeti problémának csak az $r = 1$ m

lehet a megoldása.

6. Egy téglalap alaprajzú szobába 36 m^3 levegő fér. A szoba magassága 3 méter, szélessége a hosszának 75 %-a. Mekkora a szoba két oldala?



$b = 0{,}75\ a$
$V = 36\ m^3$
$a \cdot b \cdot m = 36$

$a \cdot 0{,}75\ a \cdot m = 36$ vagy $a \cdot \frac{3}{4}\ a \cdot m = 36$

$a \cdot 0{,}75\ a \cdot 3 = 36$
$a^2 = 12 : 0{,}75$
$a^2 = 16$
$a_1 = 4$; $a_2 = -4$, de az eredeti problémának csak az $a = 4$ m lehet a megoldása.
$b = 0{,}75 \cdot 4 = 3$
$b = 3$ m
A szoba két oldala 3 m, illetve 4 m.

4. $\sqrt{a}$ definíciója:

TUDNIVALÓ:

$\sqrt{a}$ -n azt a nem negatív számot értjük, amelyet önmagával megszorozva (vagyis négyzetre emelve) éppen a számot kapjuk. A gyökjel alatt szereplő a helyére csak nem negatív számokat helyettesíthetünk.
Pl. $\sqrt{49} = 7$, mert $7^2 = 49$ vagy $\sqrt{16} = 4$, mert $4^2 = 16$.

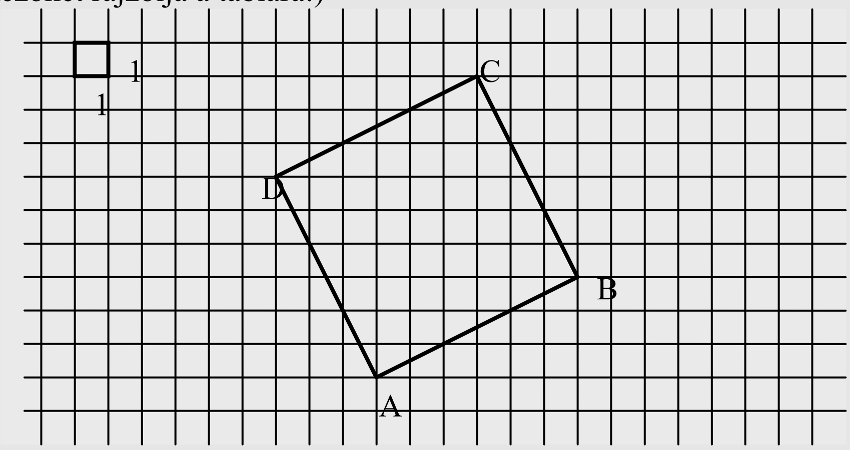
II. A számkör bővítése, az irracionális számok fogalma

1. $\sqrt{a}$ irracionális kifejezés vizsgálata egy geometriai feladatnál (távolság).

4. FELADATLAP

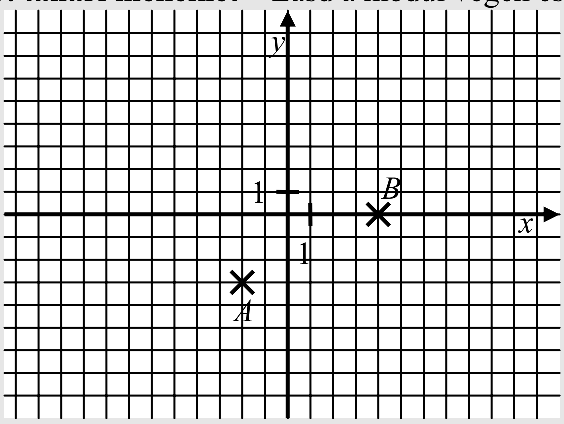
1. Mekkora távolságra van *A* (–2; –3) és a *B* (4; 0) pont egymástól a derékszögű koordináta rendszerben?

Lassabban haladó osztályokban, leegyszerűsíthető a feladat úgy, hogy az 1. feladatlap 1. feladatához hasonlóan a következő szöveggel adjuk fel a feladatot: Mekkora a négyzetrácsra rajzolt négyzet területe? Mekkorák az oldalai? (Ekkor nem kell koordinátarendszert rajzolni, a tanár a következőket rajzolja a táblára:)

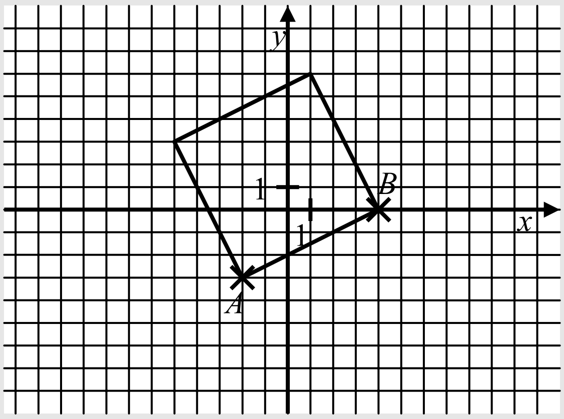


A feladatot frontálisan közösen oldják meg, a tanár a táblára rajzol, vagy a **3. tanári melléklet** fóliáit használhatja, a gyerekek a füzetükbe rajzolnak, a koordinátarendszer alá írják a számolást.

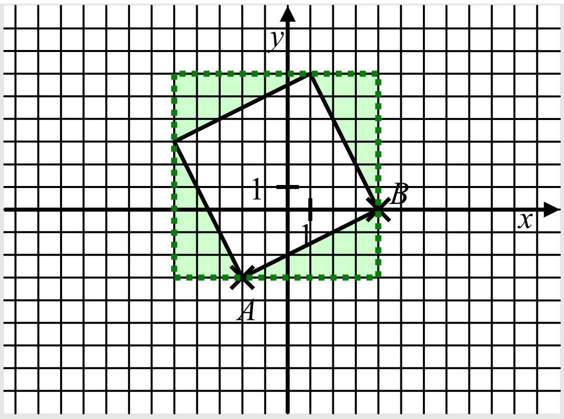
3. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!



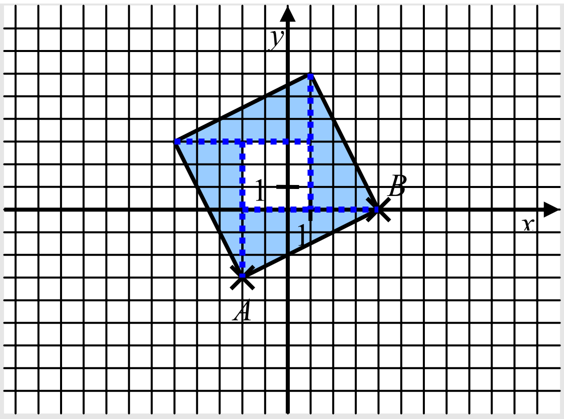
1/4. ábra



2/4. ábra

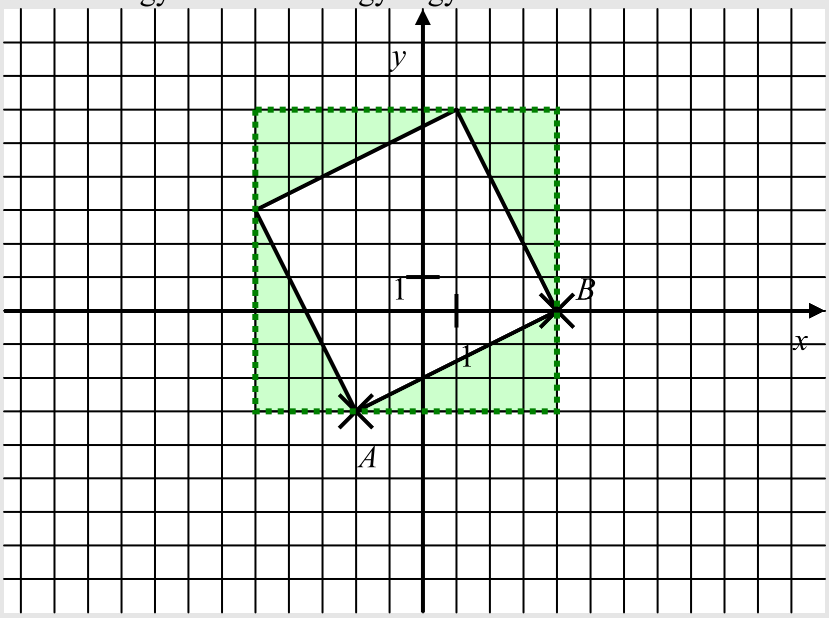


3/4. ábra



4/4. ábra

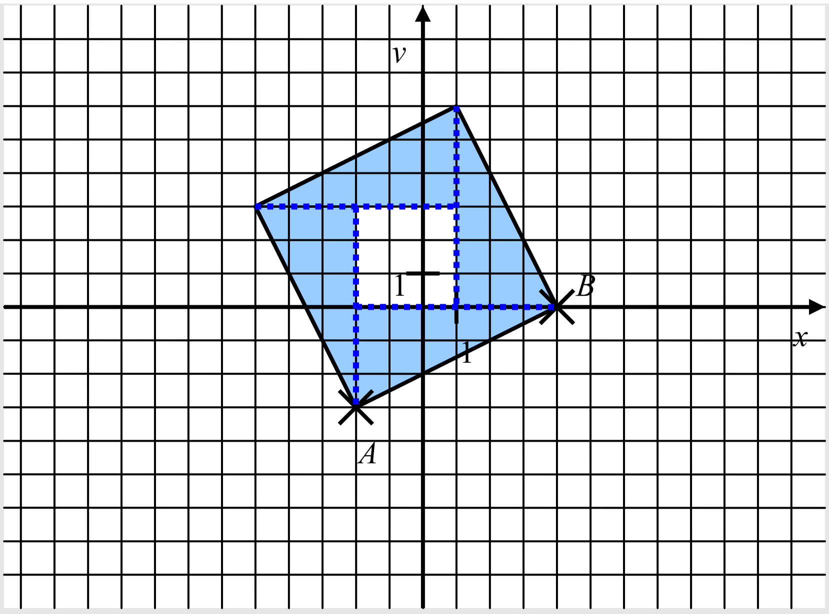
Két megoldási menetet ismertetek, ha van idő rá, mindkettő megbeszélhető a gyerekekkel. *AB* szakasz hosszát úgy tudjuk meghatározni (Pitagorasz-tétel hiányában, hiszen azt ezután ismerik meg), hogy a szakaszra négyzetet rajzolunk. (Ezt kétféleképpen tehetjük meg. Mindegy, melyiket választjuk, az ábrán látható az egyik lehetőség. Ha a gyerekeknek gondot okoz ennek a négyzetnek a megrajzolása a négyzethálón, érdemes megbeszélni frontálisan, hogyan lehet ezt megtenni.) Ha ennek a négyzetnek a területét kiszámoljuk, akkor már következtetni tudunk a négyzet oldalára négyzetgyökvonással.



I. A négyzet területét a négyzet köré írt, rácsvonalakon fekvő négyzet területének segítségével számíthatjuk ki.

$$T = 9^2 - 4 \cdot \frac{3 \cdot 6}{2} = 81 - 36 = 45$$

T = 45 területegység.



II. A négyzet területét a négyzet felosztásával kapott 4 háromszög és kisebb négyzet területének segítségével számíthatjuk ki.
T = 45 területegység. A négyzet oldala: $\sqrt{45}$

Ennél a résznél van alkalom frontálisan megbeszélni, hogy a $\sqrt{45}$ irracionális.
Először számológép és függvénytáblázat nélkül próbáljuk meg 1 tizedes jegy pontosságra meghatározni az értékét! Nyilván nem egész szám az eredmény. Tudjuk, hogy $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, tehát $\sqrt{45}$ értéke 6 és 7 között van. Ezután számoljuk ki 6,5 négyzetét írásban! Ezt csinálhatják a gyerekek a feladatlapra, vagy a füzetbe. Lehet padsoronként vagy csoportonként más-más számolásokat adni: $6{,}5^2 = 42{,}25$; $6{,}6^2 = 43{,}56$; $6{,}7^2 = 44{,}89$; $6{,}8^2 = 46{,}24$; $6{,}9^2 = 47{,}61$… Így megkapjuk $6{,}7^2 = 44{,}89$.
Ezek után megnézhetjük az eredményt számológépen.
$\sqrt{45} = 6{,}708203933\ldots$
(Ha van rá alkalom, érdemes számítógéppel is kiszámolni még több tizedes jegy pontosságra.)
Erről a számról be lehet bizonyítani, hogy végtelen és nem szakaszos. Ezért szükséges kerekítenünk.

A és *B* pont távolságának hossza megközelítőleg, két tizedes jegyre kerekítve 6,71 egység.

Idézzük fel a racionális számokról tanultakat!

2. Az irracionális számok, valós számok

Miután gyorsan átismétli az osztály frontálisan az ismert számhalmazokat (természetes, egész, racionális), a tanár kérdéseket tesz fel az osztálynak frontálisan: Mit gondoltok, hogy ha egy racionális számnak veszem a négyzetgyökét, kaphatok-e eredményül

- természetes számot;

Lehet, pl. $\sqrt{4} = 2$.

- egész számot;

Lehet, de csak olyan, ami egyben természetes szám is,

- olyan racionális számot, amelyik nem egész;

Lehet, pl.: $\sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9}$

- nem racionális számot?

Lehet, pl. $\sqrt{20}$. Nem tudjuk, hogy valóban nem racionális, de bebizonyítható.

Beszélgessen erről a kérdéskörről a tanár a gyerekekkel.

Meg lehet érdekességként említeni, hogy létezik egy legenda, mese, mely szerint azt a Pitagoreust aki elárulta, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális szám, halállal büntették. A társadalmat féltették a felismeréstől, hogy léteznek olyan számok, amik nem állíthatók elő két természetes szám arányaként.

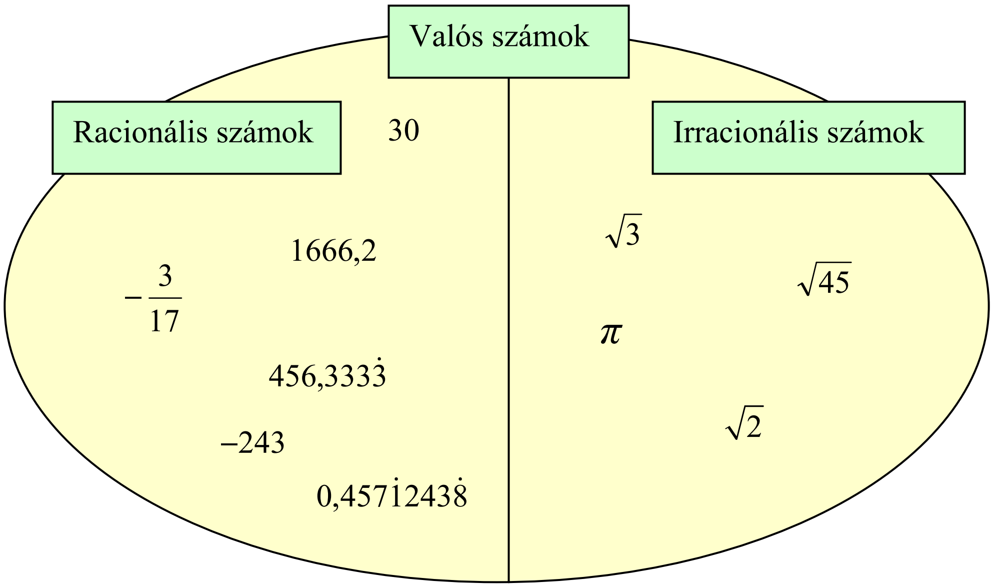
5. FELADATLAP

TUDNIVALÓ:

Minden racionális szám felírható $\frac{a}{b}$ alakban, ahol a és b egész ($b \neq 0$). A racionális számok tizedes tört alakja véges vagy végtelen szakaszos tizedes tört. Vannak nem racionális számok is: ezek tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos tizedes tört. Ezek az **irracionális számok**. Pl. ilyen a $\sqrt{2}$ és a π.

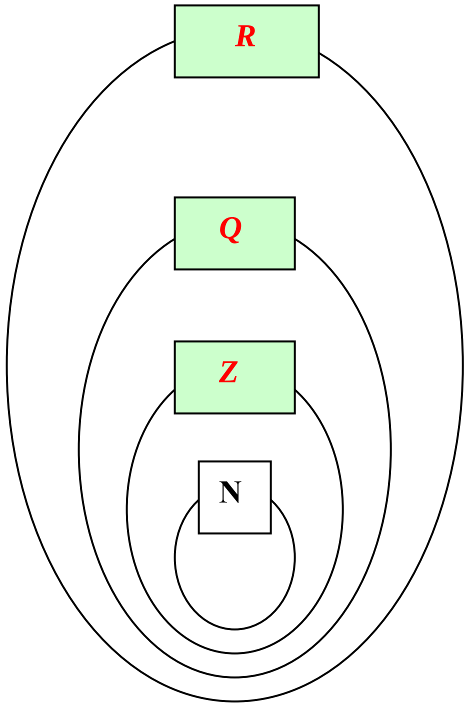
Racionális számokkal végzett bármely alapművelet **(+ ; – ; : ; ·)** eredménye is racionális szám.

Egy racionális szám négyzetgyöke nem biztos, hogy továbbra is racionális szám. Ezt úgy is mondjuk, hogy a gyökvonás kivezet a racionális számok halmazából. Pl. $\sqrt{2}$ -ről már 3000 éve bebizonyították, hogy nem írható fel két egész szám hányadosaként, azaz irracionális szám. Az irracionális és racionális számok együtt alkotják a **valós számok**at. A valós számok jele: **R**.



Fontos elbeszélgetni a gyerekekkel a valós számhalmaz világáról. Itt nem kell ragaszkodni a tökéletes matematikai megfogalmazáshoz, a tételek bizonyításához, stb., mindössze megfoghatóvá, elképzelhetővé kell tenni nekik ezt a számhalmazt. Pl. hány darab valós szám létezik? Hány darab irracionális? Melyikből van szerintük több? Tudunk-e a két valós szám között mindig mondani egy harmadikat? Van-e két racionális között mindig egy irracionális? Hogyan tudunk irracionális számot „készíteni”?
Lsd. 7. osztályos tankönyv Számok és műveletek c. fejezet „A racionális számokon is túl” (Itt is csak kitekintő, kiegészítő anyagrésznek ajánlható.)
Szemléletes megközelítés a kalapból való számjegyek húzogatása. Készítsünk egy 0 és 1 közti számot! Képzeljük el, hogy van egy kalapom, amiben 0-tól 9-ig benne vannak a számjegyek. Felírok egy 0-t és egy tizedes vesszőt, majd elkezdem húzogatni a számjegyeket sorban, mindig visszatéve a kihúzottat, és felírom őket egymás után a tizedesvessző mögé. Ezt a „végtelenségig” csinálom. Ennek a példának a végiggondolása szemlélteti, mennyivel több irracionális szám létezik, mint ahány racionális. (Ahhoz, hogy racionális eredményt kapjak, az kell, hogy egy idő után csak nullát húzzak a kalapból, vagy állandóan ismétlődjön egy pár szám, amit kihúzok. Erre érezhetően igen csekély esély van.)
Jól szemléltethetjük a valós számokat a számegyenes pontjaival is. Elmondhatjuk, hogy a valós számok már teljesen „lefedik” a számegyenest, míg a racionálisak csak pontokat „hagynak rajta”.

1. Töltsd ki a hiányzó adatokat a zöld háttérrel jelölt részeken!



Természetes számok:
Jele: N
{0; 1; 2; 3…}
Műveletek: +; ·
Kivezető művelet az egész számok halmazába: – (kivonás)

Egész számok:
Jele: **Z**
{0; –1; 1; –2; 2; –3…}
Műveletek: +; –; ·
Kivezető művelet a racionális számok halmazába: **:** (osztás)

Racionális számok:
Jele: Q
$\frac{a}{b}$ alakban felírható számok, ahol a és b egész szám.
Műveletek: +; –; ·; :
Kivezető művelet a valós számok halmazába: $\sqrt{\ }$ (gyökvonás)

Valós számok:
Jele: **R**
Tizedes tört alakban felírható számok.
Műveletek: +; –; ·; :; $\sqrt{\ }$

Az irracionális számoknak csak közelítő értékét tudjuk leírni tizedes tört alakban.
A $\sqrt{45}$ századokra kerekített értéke 6, 71, az ezredekre kerekített értéke 6,708 stb.
Akármilyen pontossággal meg tudjuk adni a $\sqrt{45}$ kerekített értékét. Ha pontosan szeretnénk leírni a kapott eredményt, mint például a 3. feladatlapon, akkor a $\sqrt{45}$ kifejezést kell írnunk.
Az előző feladat eredménye tehát:
$d_{AB} = \sqrt{45}$ egység
$d_{AB} \approx 6{,}71$ egység

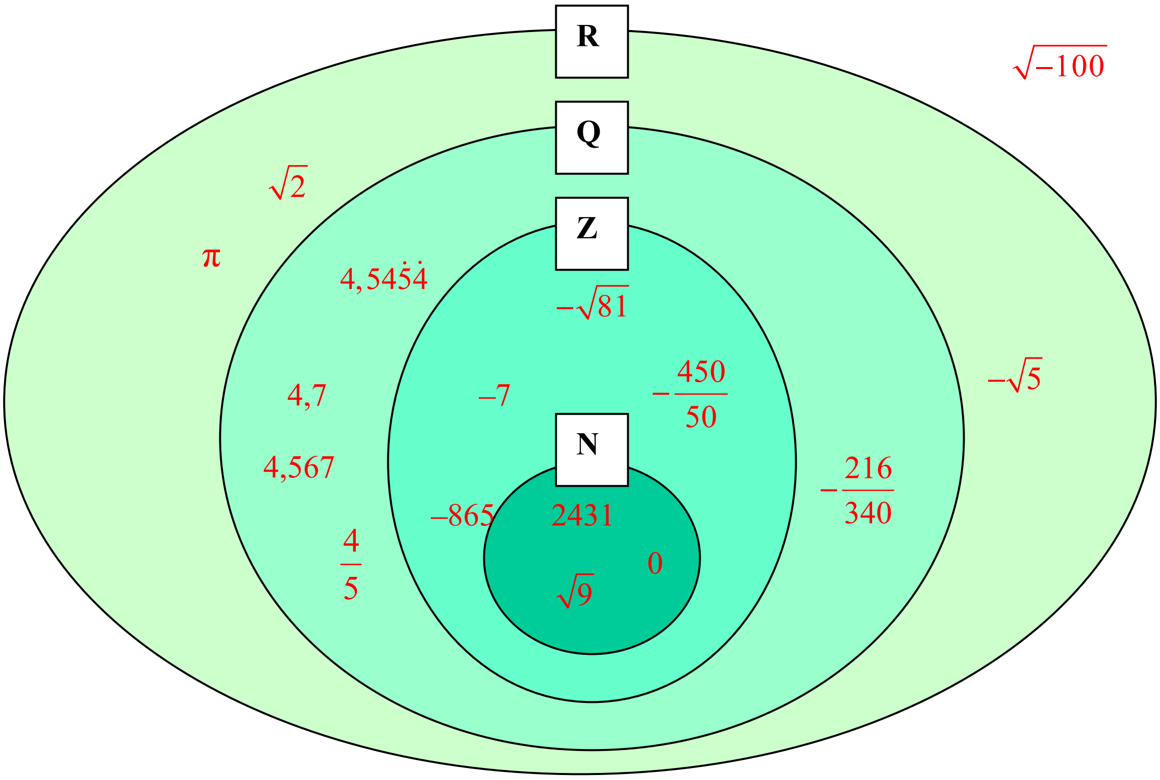
3. Kerekítés

Ismétlésként és gyakorlásként megnézhetjük a geometriai feladat (4. feladatlap) eredményét 1, 2, 3… tizedes jegyre kerekített értékeit is. Gyakorlásnak adható a feladatgyűjtemény 7. feladata.

4. Halmazábra

2. Írd a halmazábra megfelelő helyére a számokat!

-7; $4{,}7$; $\sqrt{2}$; 2431; $-\sqrt{5}$; $4{,}567$; 0; $\frac{4}{5}$; $\sqrt{-100}$; $-\frac{450}{50}$; $4{,}54\dot{5}\dot{4}$; -865; $-\sqrt{81}$; π; $\sqrt{9}$; $-\frac{216}{340}$



Ezt a halmazábrát a tanár kitöltheti a gyerekekkel együtt, vagy a gyerekek csoportokban, majd frontálisan ellenőrzik. A számok megfelelő halmazokba sorolását azonban nem kell a tanulóknak számonkérés szintjén tudniuk.

5. TOTÓ

6. FELADATLAP

1. TOTÓ (Négyzetgyökvonás)
Döntsd el, melyik állítás az, ami mindig igaz (1), melyik lehetetlen (2), illetve nem mindig igaz (x)!

1.	a^2 nem negatív szám.	1
2.	$\sqrt{a}$ csak akkor értelmezett, ha *a* pozitív vagy nulla.	1
3.	$\sqrt{9} = -3$	2
4.	$\sqrt{a}$ pozitív (a≥0). (*a* =0-ra nem igaz)	X
5.	$\sqrt{a}$ felírható két egész szám hányadosaként (tört alakban, ahol a számláló és a nevező egész számok), ha a≥0.	X
6.	$\sqrt{a}$ alatt azt a nem negatív számot értjük, amelyet önmagával megszorozva éppen *a* számot kapjuk. (a≥0)	1
7.	$^-\sqrt{16} = {}^-4$	1
8.	$\sqrt{a}$ irracionális szám. (a≥0)	X
9.	a^2 csak akkor értelmezett, ha *a* nem negatív.	2
10.	a^2 és $-\sqrt{a}$ egymás ellentettjei. (a≥0) (Ha *a*=0, akkor igaz.)	X
11.	$\sqrt{a}$ olyan szám, melynek négyzete *a*. (a≥0)	1
12.	$\sqrt{a}$ és $-\sqrt{a}$ egymás ellentettjei. (a≥0)	1
13.	$\sqrt{a}$ valós szám.	1
+1	$\sqrt{a^2} = a$ (Ha *a* negatív, nem igaz.)	X

III. Gyökvonás számológéppel, becsléssel, függvénytáblával

1. Gyökvonás becsléssel – játék

Házi feladatnak adható: 100-ig a négyzetszámokat írják fel a gyerekek a füzetükbe.

Érdemes először megfigyelni frontális munka keretében a négyzetre emelésnél a következőket:

$7^2 = 49$;
$70^2 = 4900$; $\qquad 70^2 = (7 \cdot 10)^2 = 7^2 \cdot 10^2 = 49 \cdot 100 = 4900$
$700^2 = 490000$; $\qquad 700^2 = (7 \cdot 100)^2 = 7^2 \cdot 100^2 = 49 \cdot 10000 = 490000$

Ezek felkerülnek a táblára és a gyerek füzetébe, majd a gyerekek csapatokban dolgoznak. A tanár felír a táblára egy négyzetgyökvonást (először pl. $\sqrt{1600}$; $\sqrt{810000}$; $\sqrt{0,01}$; stb.). Ezek értékét megpróbálják a csapatok meghatározni. Természetesen az a csapat nyer, amelyik a leggyorsabban mondja be a jó eredményt. Amelyik csapat rossz eredményt mond be, kimarad abból a körből, többet nem tippelhet. Később irracionális számot ír fel a tanár (pl.

$\sqrt{19}$), és a gyerekek megpróbálják adott időn belül minél pontosabban közelíteni számológép és függvénytáblázat használata nélkül. Tulajdonképpen sorozatos négyzetre emelést végeznek.

$4^2 = 16 < 19 < 25 = 5^2$
$4{,}5^2 = 20{,}\ 25$
$4^2 < 19 < 4{,}5^2$
$4{,}3^2 = 18{,}\ 49$
$4{,}3^2 < 19 < 4{,}5^2$
$4{,}4^2 = 19{,}\ 36$
$4{,}3^2 < 19 < 4{,}4^2$
$4{,}35^2 = 18{,}\ 9225$
$4{,}35^2 < 19 < 4{,}4^2$
stb…

A csapatok attól függően kapnak pontot, minél közelebb jutottak az eredményhez az adott idő végén.

2. Gyökvonás függvénytáblával

Egy játékos fejszámolással indítunk:
Egy labdát, babzsákot, játékmacit, stb. dobálnak egymásnak a gyerekek. A dobó mond egy számot és kéri a négyzetgyökét attól, akinek dobta. (Pl. Dobó: Mennyi 49-nek a négyzetgyöke?) Ha sikerül jól válaszolni a labda fogadójának (Fogadó: 7.), akkor ő adhatja a labdát tovább egy újabb kérdéssel. (Pl. Mennyi 10000-nek a négyzetgyöke?) Az újabb fogadónak kell válaszolnia. Ha a fogadó nem tudja a választ, visszakérdezhet olyan módon, hogy visszadobja a labdát a kérdezőnek az eredeti kérdéssel: (A példában: Mennyi 10000-nek a négyzetgyöke?) Ha a kérdező sem tudja a saját kérdésére a választ, vagy rosszul válaszol, akkor kiesik. Ha a kérdező tudja, akkor a fogadó esik ki. Ekkor a kérdező újra dobhat, egy új szám kitűzésével, természetesen egy másik fogadónak. Ha visszakérdezéskor valamelyik már kiesett gyerek jelentkezik, és jól válaszol, akkor visszakerülhet a játékba. Egy idő után a bennmaradókat jutalmazhatjuk.
Ha nehezen indul, vagy elakad a játék, akkor a tanár dobálhatja a labdát néhányszor. Érdemes a 10 páros hatványait behozni a játékba.
Játék közben a 100 alatti négyzetszámok fenn lehetnek a táblán. A játék végén gyűjtsünk össze a táblán és a gyerekek füzetében is olyan számokat, amelyekből könnyű négyzetgyököt vonni. Szerepeljenek közöttük a 10 páros hatványai is. Beszéljük meg az észrevételeket. .
Ezeken a példákon keresztül szépen megfigyelhető a szabály. A játék során ki fog derülni, hogy 49-nek, 4900-nak könnyű fejben meghatározni a négyzetgyökét, míg 490-nek nem.
Ezután önállóan vagy párban dolgozva megoldják a gyerekek a 7. feladatlap 1. feladatát (vagy a feladatból egy pár sort). Az eredményeket frontálisan megbeszélik.

7. FELADATLAP

1. Számold ki számológép használata nélkül a kifejezések pontos értékét!

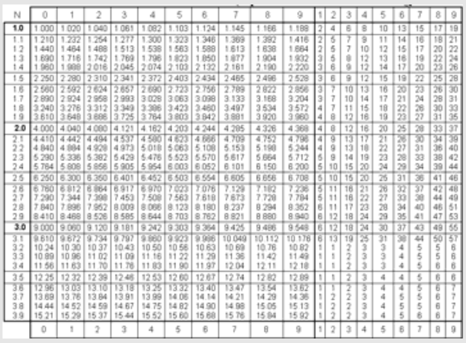
a)	$\sqrt{36}=$	6	$\sqrt{8100}=$	90	$\sqrt{1600}=$	40
b)	$\sqrt{3600}=$	60	$\sqrt{40000}=$	200	$\sqrt{0,04}=$	0,2
c)	$\sqrt{360000}=$	600	$\sqrt{1000000}=$	1000	$\sqrt{640\cdot10^3}=$	800 $(=\sqrt{64\cdot10^4})$
d)	$\sqrt{0,36}=$	0,6	$\sqrt{900}=$	30	$\sqrt{0,0001}=$	0,01
e)	$\sqrt{0,0036}=$	0,06	$\sqrt{0,25}=$	0,5	$\sqrt{64\cdot10^6}=$	$8\cdot10^3$
f)	$\sqrt{0,000036}=$	0,006	$\sqrt{0,0016}=$	0,04	$\sqrt{0,0025}=$	0,05
g)	$\sqrt{36\cdot10^{14}}=$	$6\cdot10^7$	$\sqrt{10^8}=$	10^4	$\sqrt{4\cdot10^{12}}=$	$2\cdot10^6$

Azt tapasztaltuk, ha tudjuk egy számnak a négyzetgyökét, akkor könnyen számolhatjuk az adott szám 100-szorosának (10^2), 10000-szeresének (10^4)…, 0,01-ának (10^{-2}), 0,0001-ének (10^{-4})… a négyzetgyökét. (A fontos csak az, hogy 10-nek páros hatványával legyen megszorozva.)

Pl.: $\sqrt{25\cdot10^{200}}=5\cdot10^{100}$

A „Számok négyzete" c. táblázat használata (**1. tanulói melléklet**): A táblázat használatának módját felfedeztethetjük a gyerekekkel.

1. tanulói melléklet – Lásd a modul végén, a tanulói munkafüzetben és a modul eszközei közt!



…

Minden előzetes tájékoztatás nélkül a tanár egyenként felad 1 és 100 közötti számokat, melyeknek a négyzetgyökét meg kell határozniuk a táblázat segítségével csoportokban dolgozva. Amelyik csapat előbb mond helyes eredményt, az kap pontot. Időt kell adni a gyerekeknek, hogy amikor rájött valaki a helyes algoritmusra, elmondja a többieknek is a csoportjában. (Aztán elmondhatja egy kiválasztott gyerek az egész osztálynak is frontálisan.)
Fontos megbeszélni, hogy a táblázatból csak közelítő értékeket tudunk meghatározni, ráadásul kevesebb tizedes jegyre, mint számológéppel.
(Először olyan számokat adjunk föl a gyerekeknek, melyek közvetlenül megtalálhatók a táblázatban. Pl.:

$\sqrt{57}=7,55$

$\sqrt{61}=7,81$

$\sqrt{11,9} = 3,45$

$\sqrt{1,04} = 1,02$

$\sqrt{57,3} = 7,57$

$\sqrt{70,9} = 8,42$

$\sqrt{10,05} = 3,17$

$\sqrt{55,5} = 7,45$

Ezután olyan számok négyzetgyökét kérdezheti a tanár, melyek már nem szerepelnek a táblázatban, kénytelenek a gyerekek a szám értékéhez legközelebb álló számot megkeresni, és ennek a négyzetgyökét leolvasni.

$\sqrt{24} \approx \sqrt{24,01} = 4,9$

$\sqrt{35} \approx \sqrt{35,05} = 5,92$

$\sqrt{55} \approx \sqrt{55,06} = 7,42$

$\sqrt{36,2} \approx \sqrt{36,24} = 6,02$

$\sqrt{30} \approx \sqrt{35,05} = 5,48$

$\sqrt{15} \approx \sqrt{14,98} = 3,87$ (A közelítő érték kisebb, mint a keresett érték!)

$\sqrt{8} \approx \sqrt{7,952} = 2,82$

Ha ezt sikerült begyakorolni, jöhet a 100-nál nagyobb, 1-nél kisebb számok négyzetgyökének keresése. Szintén nem kell előzetes magyarázatot adni, az algoritmust előkészítettük, a gyerekek csoportokba dolgozva maguk is kitalálhatják.

$\sqrt{6400} = \sqrt{64 \cdot 10^2} = 8 \cdot 10 = 80$ Ezt még fejből is tudhatják, érdemes megbeszélni frontálisan a műveletet, és leírni a táblára.

$\sqrt{5791} = \sqrt{57,91 \cdot 10^2} \approx 7,61 \cdot 10 = 76,1$

$\sqrt{1421} = \sqrt{14,21 \cdot 10^2} \approx 3,77 \cdot 10 = 37,7$

$\sqrt{466,6} = \sqrt{4,666 \cdot 10^2} \approx 2,16 \cdot 10 = 21,6$

$\sqrt{40400} = \sqrt{4,04 \cdot 10^4} \approx 2,01 \cdot 100 = 201$

$\sqrt{86440} = \sqrt{8,644 \cdot 10^4} \approx 2,94 \cdot 100 = 294$

$\sqrt{0,1156} = \sqrt{11,56 \cdot 10^{-2}} \approx 3,4 \cdot 0,1 = 0,34$

$\sqrt{0,9101} = \sqrt{91,01 \cdot 10^{-2}} \approx 9,54 \cdot 0,1 = 0,954$

$\sqrt{68230000} = \sqrt{68,23 \cdot 10^6} \approx 8,26 \cdot 1000 = 8260$

Megfigyeléseinket kihasználva minden szám négyzetgyökének számolásakor tudjuk alkalmazni a „Számok négyzete” c. táblázatot. (1. tanulói melléklet.)

1 és 100 közötti szám négyzetgyöke:

Pl.: Mennyi az értéke $\sqrt{36,19}$ -nak?

A táblázat adatai közül a kérdéses 36,19 a 36,12 és a 36,24 közé esik. A második számhoz van közelebb az értéke (Az első számmal 7 század a különbség, míg a másodikkal csak 5 század).

Ezek után kikeressük, hogy a 36, 24 századokra kerekített értéke éppen $6{,}02^2$. Tehát $\sqrt{36{,}19} \approx 6{,}02$.

Táblázatban nem szereplő érték négyzetgyöke:

Pl.: Mennyi az értéke $\sqrt{3619}$-nek?

$3619 = 36{,}19 \cdot 10^2$ (Egy 1 és 100 közötti szám, és egy páros kitevőjű 10 hatvány szorzatára kell bontani a számot.) → $\sqrt{3619} = \sqrt{36{,}19 \cdot 10^2} \approx 6{,}02 \cdot 10 = 60{,}2$

2. Számold ki „Számok négyzete” c. táblázat (1. tanulói melléklet) segítségével az alábbi számok közelítő értékét!

a) $\sqrt{4718} = \sqrt{47{,}18 \cdot 10^2} \approx 6{,}87 \cdot 10 = 68{,}7$

b) $\sqrt{198} = 14{,}1$

c) $\sqrt{84536} = 291$

d) $\sqrt{0{,}0034} \approx 0{,}0583$

e) $\sqrt{7122356} \approx 2670$

f) $\sqrt{0{,}15} \approx 0{,}387$

3. Gyökvonás számológéppel

Innentől kezdve a gyerekek használhatják a számológépet. Érdemes esetleg gondot fordítani arra, hogy a tanár bemutassa, hogy manapság kétféleképpen kell a számológéppel gyököt vonni: Van olyan gép, melyen előbb kell a $\sqrt{\ }$ jelet megnyomni, és aztán az értéket, valamint van olyan, melyen fordítva. Kicsit a számológép műveleti sorrend-betartását is vizsgálhatják. Pl.: $\sqrt{25+11}$ értéke hogyan számolható számológéppel?

Esetleg, ha a gyerekek kíváncsiak, hogyan lehet számítógépen négyzetgyököt vonni, megmutathatja a tanár. Sajnos a Microsoft Windows számológépén a gyökvonás művelete nagyon bonyolult. (Csak a tudományos nézetben van gyökvonás (Nézet menüpont Tudományos), az is csak a négyzetre emelés inverzeként hozható elő (a szám beírása után az Inv felirat kipipálása, majd x^2 gombra kattintva). Ezt csak érdekességként ajánlom említeni az osztályban.)

A számológép használata alkalmas arra, hogy pl. a házi feladatként vagy önálló munkaként elkészített 7. feladatlap 2. feladatát ellenőrizzék.

IV. A négyzetgyökvonás tulajdonságai, alkalmazása, gyakorlása

1. Hazudós játék négyzetgyökvonással kapcsolatban

A négyzetgyökvonásról tanultakkal kapcsolatban lehet egy hazudós játékot játszani. Minden csapat ír 2 igaz, 1 hamis állítást. Pl.:

1.) $\sqrt{400} = 20$;

2.) Minden valós számnak létezik négyzete;

3.) Minden valós a számra: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

A 3. állítás hamis.

Az állításokat felolvassa a csapat, a többi csapat – némi konzultáció után – tippel, melyik lehet a hamis állítás. Amelyik csapat eltalálja, kap 1 pontot. Az a csapat, amelyik készítette az állításokat, annyi pontot zsebel be, ahány csapat nem találta el, melyik állítása hamis. Ezután egy másik csapat olvassa fel az állításait. A játék addig tart, amíg minden csapat 3 állítását meghallgatták. (A játékot érdemes úgy kezdeni, hogy a tanár elmondja a saját három állítását (akár a fent szereplő példát) bemelegítésként. A csapatok ebből a három állításból keresik meg a hamisat. A helyesen tippelő csapatok mindegyike kap egy-egy pontot. Így rögtön látnak példát, milyen típusú állításokat kell írniuk.)

2. Fekete Péter játék négyzetgyökvonással

A 4. tanári melléklet kártyáit adjuk oda a gyerekeknek. A játékot játszhatják kettesével, hármasával vagy négyes csapatokban is. Minden együtt játszó csapatnak egy készletnyi kártyára van szüksége (31 db). A játék a Fekete Péter játék szabályai szerint megy. A kártyákat megkeverik, 4 lapot osztanak minden játékosnak, többit lefelé fordítva az asztal közepére talonba teszik. Az első játékos megnézi a négy kártyáját. Ha van közte pár (két azonos érték; pl. egyik kártyán $\sqrt{49}$ van, a másikon 7 van feltüntetve), leteszi az asztalra (többiek ellenőrzik, valóban pár-e), és a következő játékoson a sor. Ha nincs pár a négy lap között (vagy nem veszi észre), a talonból kell húznia egy újabb lapot, és ekkor kerül sor a következő játékosra. Ez így megy körbe, amíg elfogy a talon. Utána a soron következő játékos az előtte lévő játékostól fog húzni lapot, ha nem tud párt lerakni. A kártyák között van egy páratlan lap (ez a Fekete Péter, itt a $\sqrt{-25}$). Az nyer, akinek először fogynak el a kártyái. A vesztes az, akinek a kezében a legvégén a Fekete Péter marad.

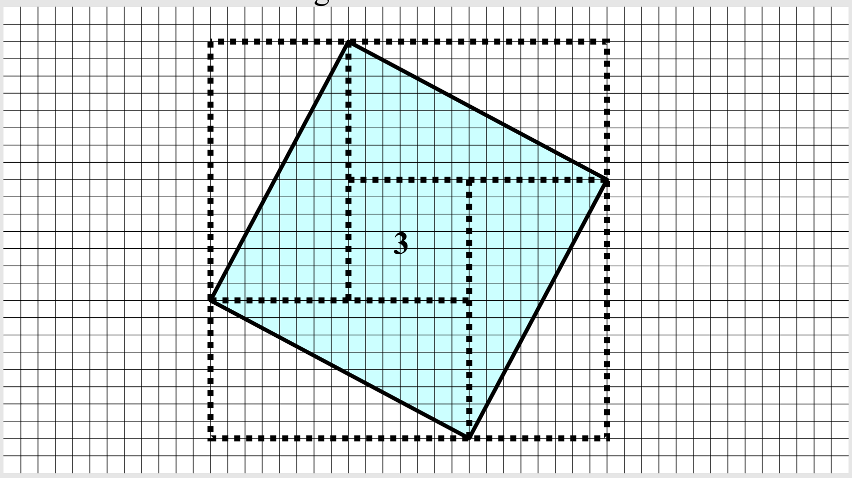
4. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

≈5,099	2	≈3,1623	10
9	0	7	5
12	–1	–3	≈1,4142
4	6	8	Pótlap
$\sqrt{26}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{100}$
$\sqrt{81}$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{49}$	$\sqrt{25}$
$\sqrt{144}$	$-\sqrt{1}$	$-\sqrt{9}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{16}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{-25}$

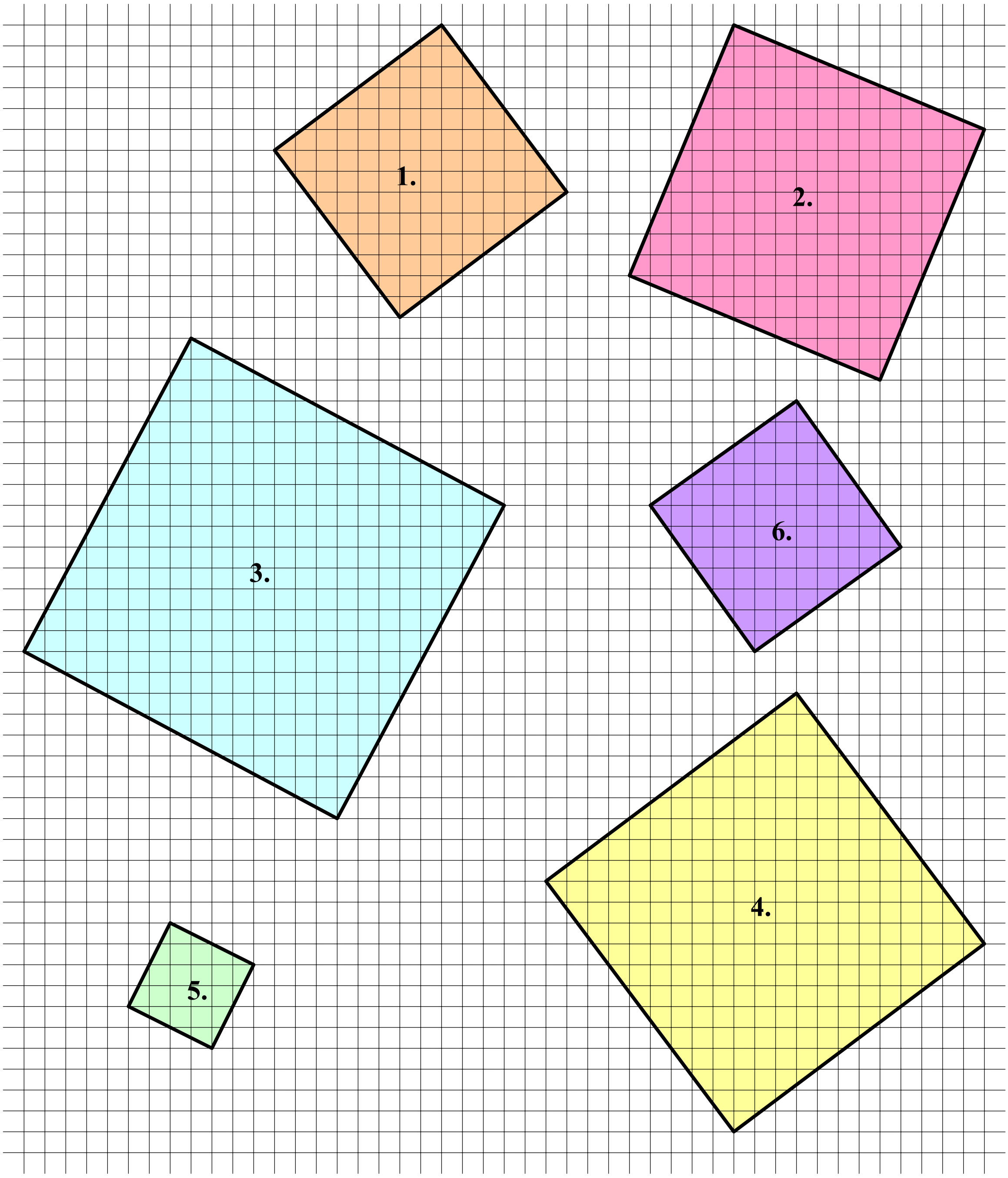
FELADATGYŰJTEMÉNY

Szöveges feladatok gyökvonással

A következő feladathoz számológép használható, csoportos vagy egyéni feldolgozásra, vagy házi feladatnak is adható. Nagyon fontos lenne, hogy ebből a feladatból legalább egy pár négyzet oldalát kiszámolják a gyerekek, ugyanis ez a feladat készíti elő a Pitagorasz-tételnél szükséges területszámolásokat. 1.-4. négyzeteinek oldalai egész számok, 5.-6. négyzetek oldalai irracionális számok.
Segítség: Ha a tanuló (-csoport) nem tud belekezdeni a feladatba, akkor segítségül, emlékeztetőül írásvetítőn vagy lapon meg lehet mutatni neki(k) az **5. tanári melléklet** ábráját.
5. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!



1. Mekkorák a négyzetek oldalai? Az egység 1 négyzetrácsoldal.



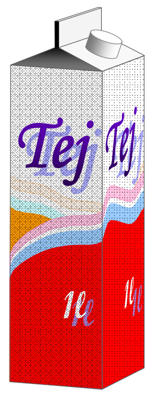
Megoldás:

$T_1 = 14^2 - 4 \cdot (6 \cdot 8 : 2) = 196 - 96 = 100$ vagy $T_1 = 4 \cdot (6 \cdot 8 : 2) + 2^2 = 96 + 4 = 100$ $a_1 = 10$ egység	$T_2 = 17^2 - 4 \cdot (5 \cdot 12 : 2) = 289 - 120 = 169$ vagy $T_2 = 4 \cdot (5 \cdot 12 : 2) + 7^2 = 120 + 49 = 169$ $a_2 = 13$ egység
$T_3 = 23^2 - 4 \cdot (8 \cdot 15 : 2) = 529 - 240 = 289$ vagy $T_3 = 4 \cdot (8 \cdot 15 : 2) + 7^2 = 240 + 49 = 289$ $a_3 = 17$ egység	$T_4 = 21^2 - 4 \cdot (9 \cdot 12 : 2) = 441 - 216 = 225$ vagy $T_4 = 4 \cdot (9 \cdot 12 : 2) + 3^2 = 216 + 9 = 225$ $a_4 = 15$ egység

$T_5 = 6^2 - 4 \cdot (4 \cdot 2 : 2) = 36 - 16 = 20$ vagy $T_5 = 4 \cdot (4 \cdot 2 : 2) + 2^2 = 16 + 4 = 20$ $a_5 = \sqrt{20}$ egység ≈ 4,47 egység	$T_6 = 12^2 - 4 \cdot (5 \cdot 7 : 2) = 144 - 70 = 74$ vagy $T_6 = 4 \cdot (5 \cdot 7 : 2) + 2^2 = 70 + 4 = 74$ $a_6 = \sqrt{74}$ egység ≈ 8,6 egység

A következő 4 feladat (2.–5.) adható csoportmunkának (szakértői mozaik, vagy fordított szakértői mozaik módszerével), vagy házi feladatnak, esetleg önálló munkának órán.

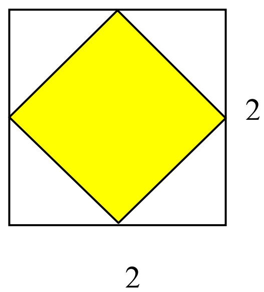
2. Egy 1 literes (téglatest alakú) dobozos tejnek egyik éle 16 cm. Milyen hosszú a másik két éle, ha ezek hossza egyenlő?



$V = 1000\ cm^3$
$a^2 \cdot 16 = 1000$
$a^2 = 62{,}5$
$a = 7{,}91$ cm

3. Oldd meg az egyenletet!
$(x - 6) \cdot x = -3\,(1 + 2x)$
$x^2 - 6x = -3 - 6x$
$x^2 = -3$
Nincs megoldás.

4. Mekkora a sárga négyzet területe és oldalhossza, ha a nagy négyzet oldala 2 egység?
Területe fele az eredetinek, azaz 2 területegység.
$a = \sqrt{2}$ egység



5. Töltsd ki a táblázat hiányzó adatait, ha T a kör területe, d az átmérője, r a sugara!

T	78,5 dm^2	314 cm^2	1 m^2	56 mm^2
r	5 dm	10 cm	≈ 0,56 m = 56cm	≈ 4,22 mm
d	10 dm	20 cm	≈ 112 cm	≈ 8,44 mm

6. Oldd meg az egyenletet!
$(x - 2)^2 = -2\,(7 + 2x)$

7. Kerekíts!

	Ezresre	**Századra**	**Egyesre**	**1 tizedes jegyre**	**2 tizedes jegyre**	**3 tizedes jegyre**
2 900,6082	3 000	2 900	2 901	2 900,6	2 900,61	2 900,608
888 877,1	889 000	888 900	888 877	888 877,1	888 877,10	888 877,100
899,9751	1 000	900	900	900,0	899,98	899,975
0,018 997 8	0	0	0	0	0,02	0,019

8. Mekkora annak a kockának a térfogata, melynek felszíne

a) 6 cm^2; a = 1 cm V = 1 cm^3
b) 24 m^2; a = 2 m V = 8 m^3
c) 600 mm^2; a = 10 mm V = 1000 cm^3
d) 1350 mm^2; a = 15 mm V = 3375 cm^3
e) 102 cm^2? $a \approx$ 4,12 cm V ≈ 69,9 cm^3

9. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $x^2 = 16$ $x = -4; x = 4$
b) $x^2 + 11 = 75$ $x = -8; x = 8$
c) $x(x+6) = x^2 - 18$ $x = -3$
d) $4x + 169 = x(x+4)$ $x = 13; x = -13$
e) $(8 - x)x = 3 + 8x$ Nincs megoldás.
f.) $2x(3 - x) = 6x - 8$ $x = 2; x = -2$

10. Számold ki a téglalapok oldalait, kerületét, ha tudod, hogy

a) egyik oldala épp kétszer akkora, mint a másik, és területe 32 cm^2;
a = 4 cm; b = 8 cm; K = 24 cm

b) egyik oldala $\frac{2}{3}$ része a másik oldalhossznak, és területe 2400 mm^2;
a = 60 mm; b = 40 mm; K = 200 cm

c) egyik oldala 38%-kal hosszabb, mint másik oldala, és területe 34,5 m^2!
a = 5 m; b = 6,9 m; K = 23,8 m

1. tanulói melléklet SZÁMOK NÉGYZETE (http://www.totha.fullnet.hu/mat10/negyzettabla.htm)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.000	1.020	1.040	1.061	1.082	1.103	1.124	1.145	1.166	1.188	2	4	6	8	10	13	15	17	19
1.1	1.210	1.232	1.254	1.277	1.300	1.323	1.346	1.369	1.392	1.416	2	5	7	9	11	14	16	18	21
1.2	1.440	1.464	1.488	1.513	1.538	1.563	1.588	1.613	1.638	1.664	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1.3	1.690	1.716	1.742	1.769	1.796	1.823	1.850	1.877	1.904	1.932	3	5	8	12	13	16	19	22	24
1.4	1.960	1.988	2.016	2.045	2.074	2.103	2.132	2.161	2.190	2.220	3	6	9	12	14	17	20	23	26
1.5	2.250	2.280	2.310	2.341	2.372	2.403	2.434	2.465	2.496	2.528	3	6	9	12	15	19	22	25	28
1.6	2.560	2.592	2.624	2.657	2.690	2.723	2.756	2.789	2.822	2.856	3	7	10	13	16	20	23	26	30
1.7	2.890	2.924	2.958	2.993	3.028	3.063	3.098	3.133	3.168	3.204	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.8	3.240	3.276	3.312	3.349	3.386	3.423	3.460	3.497	3.534	3.572	4	7	11	15	18	22	26	30	33
1.9	3.610	3.648	3.686	3.725	3.764	3.803	3.842	3.881	3.920	3.960	4	8	12	16	19	23	27	31	35
2.0	4.000	4.040	4.080	4.121	4.162	4.203	4.244	4.285	4.326	4.368	4	8	12	16	20	25	28	33	37
2.1	4.410	4.442	4.494	4.537	4.580	4.623	4.666	4.709	4.752	4.796	4	9	13	17	21	26	30	34	39
2.2	4.840	4.884	4.928	4.973	5.018	5.063	5.108	5.153	5.198	5.244	4	9	13	18	22	27	31	36	40
2.3	5.290	5.336	5.382	5.429	5.476	5.523	5.570	5.617	5.664	5.712	5	9	14	19	23	28	33	38	42
2.4	5.764	5.808	5.856	5.905	5.954	6.003	6.052	6.101	6.150	6.200	5	10	15	20	24	29	34	39	44
2.5	6.250	6.300	6.350	6.401	6.452	6.503	6.554	6.605	6.656	6.708	5	10	15	20	25	31	36	41	46
2.6	6.760	6.812	6.864	6.917	6.970	7.023	7.076	7.129	7.182	7.236	5	11	16	21	26	32	37	42	48
2.7	7.290	7.344	7.398	7.453	7.508	7.563	7.618	7.673	7.728	7.784	5	11	16	22	27	33	38	44	49
2.8	7.840	7.896	7.952	8.009	8.066	8.123	8.180	8.237	8.294	8.352	6	11	17	23	28	34	40	46	51
2.9	8.410	8.468	8.526	8.585	8.644	8.703	8.762	8.821	8.880	8.940	6	12	18	24	29	35	41	47	53
3.0	9.000	9.060	9.120	9.181	9.242	9.303	9.364	9.425	9.486	9.548	6	12	18	24	30	37	43	49	55
3.1	9.610	9.672	9.734	9.797	9.860	9.923	9.986	10.049	10.112	10.176	6	13	19	25	31	38	44	50	57
3.2	10.24	10.30	10.37	10.43	10.50	10.56	10.63	10.69	10.76	10.82	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3.3	10.89	10.96	11.02	11.09	11.16	11.22	11.29	11.36	11.42	11.49	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3.4	11.56	11.63	11.70	11.76	11.83	11.90	11.97	12.04	12.11	12.18	1	1	2	3	3	4	5	6	6
3.5	12.25	12.32	12.39	12.46	12.53	12.60	12.67	12.74	12.82	12.89	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3.6	12.96	13.03	13.10	13.18	13.25	13.32	13.40	13.47	13.54	13.62	1	1	2	3	4	4	5	6	7
3.7	13.69	13.76	13.84	13.91	13.99	14.06	14.14	14.21	14.29	14.36	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3.8	14.44	14.52	14.59	14.67	14.75	14.82	14.90	14.98	15.05	15.13	1	2	2	3	4	5	5	6	7
3.9	15.21	15.29	15.37	15.44	15.52	15.60	15.68	15.76	15.84	15.92	1	2	2	3	4	5	6	6	7
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.0	16.00	16.08	16.16	16.24	16.32	16.40	16.48	16.56	16.65	16.73	1	2	2	3	4	5	6	6	7
4.1	16.81	16.89	16.97	17.06	17.14	17.22	17.31	17.39	17.47	17.56	1	2	2	3	4	5	6	7	7
4.2	17.64	17.72	17.81	17.89	17.98	18.06	18.15	18.23	18.32	18.40	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4.3	18.49	18.58	18.66	18.75	18.84	18.92	19.01	19.10	19.18	19.27	1	2	3	3	4	5	6	7	8
4.4	19.36	19.45	19.54	1962	19.71	19.80	19.89	19.98	20.07	20.16	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.5	20.25	20.34	20.43	20.52	20.61	20.70	20.79	20.88	20.98	21.07	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.6	21.16	21.25	21.34	21.44	21.53	21.62	21.72	21.81	21.90	22.00	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4.7	22.09	2218	22.28	2237	22.47	22.56	22.66	22.75	22.85	22.94	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.8	23.04	23.14	2323	23.33	23.43	23.52	23.62	23.72	23.81	23.91	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.9	24.01	24.11	24.21	24.30	24.40	24.50	24.60	24.70	24.80	24.90	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.0	25.00	25.10	25.20	25.30	25.40	25.50	25.60	25.70	25.81	25.91	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.1	26.01	26.11	26.21	26.32	26.42	26.52	26.63	26.73	26.83	26.94	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.2	27.04	27.14	27.25	27.35	27.46	27.56	27.67	27.77	27.88	27.98	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.3	2809	28.20	28.30	28.41	28.52	28.62	28.73	28.84	28.94	29.05	1	2	3	4	5	6	7	9	10
5.4	29.16	29.27	29.38	29.48	29.59	29.70	29.81	29.92	30.03	30.14	1	2	3	4	6	7	8	9	10
5.5	30.25	30.36	30.47	30.58	30.69	30.80	30.91	31.02	31.14	31.25	1	2	3	4	6	7	8	9	10
5.6	31.36	31.47	31.58	31.70	31 81	31.92	32.04	32.15	32.26	32.38	1	2	3	5	6	7	8	9	10
5.7	32.49	32.60	32.72	32.83	32.95	33.06	33.18	33.29	33.41	33.52	1	2	3	5	6	7	8	9	10
5.8	33.64	33.76	33.87	33.99	34.11	34.22	34.34	34.46	34.57	34.69	1	2	4	5	6	7	8	9	11
5.9	34.81	34.93	35.05	35.16	35.28	35.40	35.52	35.64	35.76	35.88	1	2	4	5	6	7	8	10	11
6.0	36.00	36.12	36.24	36.36	36.48	36.60	36.72	3684	36.97	37.09	1	2	4	5	6	7	9	10	11
6.1	37.21	37.33	37.45	37.58	37.70	37.82	37.95	38.07	38.19	38.32	1	2	4	5	6	7	9	10	11
6.2	38.44	38.56	38.69	38.81	38.94	39.06	39.19	39.31	39.44	39.56	1	3	4	5	6	8	9	10	11
6.3	39.69	39.82	39.94	40.07	40.20	40.32	40.45	40.58	40.70	40.83	1	3	4	5	6	8	9	10	11
6.4	40.96	41.09	41.22	41.34	41.47	41.60	41.73	41.86	41.99	42.12	1	3	4	5	6	8	9	10	12
6.5	42.25	42.38	42.51	42.64	42.77	42.90	43.03	43.16	43.30	43.43	1	3	4	5	7	8	9	10	12
6.6	43.56	43.69	43.82	43.96	44.09	44.22	44.36	44.49	44.62	44.76	1	3	4	5	7	8	9	11	12
6.7	44.89	45.02	45.16	45.29	45.43	45.56	45.70	45.83	45.97	46.10	1	3	4	5	7	8	9	11	12
6.8	46.24	46.38	46.51	46.65	46.79	46.92	47.06	47.20	47.33	47.47	1	3	4	5	7	8	10	11	12
6.9	47.61	47.75	47.89	48.02	48.16	48.30	48.44	48.58	48.72	48.86	1	3	4	6	7	8	10	11	13

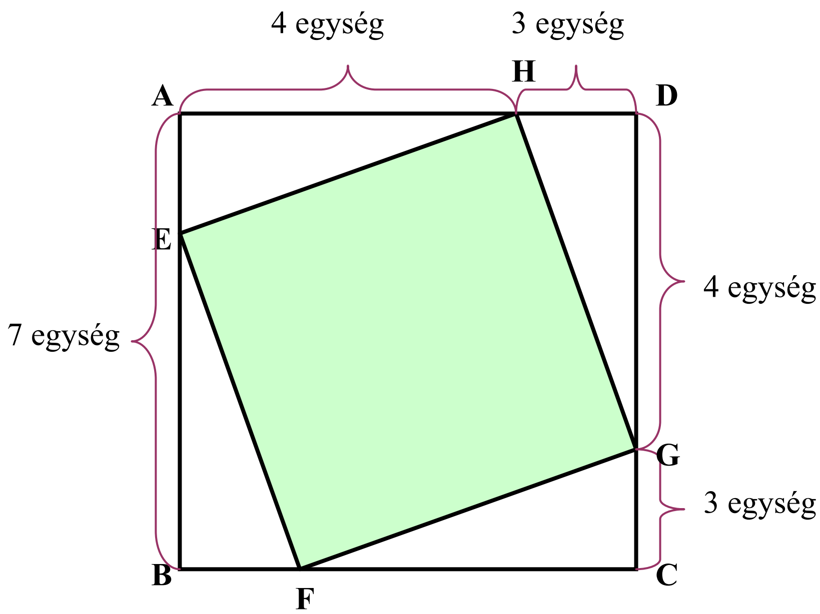
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7.0	49.00	49.14	49.28	49.42	49.56	49.70	49.84	49.98	50.13	50.27	1	3	4	6	7	8	10	11	13
7.1	50.41	50.55	50.69	50.84	50.98	51.12	51.27	51.41	51.55	51.70	1	3	4	6	7	9	10	11	13
7.2	51.84	51.98	52.13	52.27	52.42	52.56	52.71	52.85	53.00	53.14	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7.3	53.29	53.44	53.58	53.73	53.88	54.02	54.17	54.32	54.46	54.61	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7.4	54.76	54.91	55.06	55.20	55.35	55.50	55.65	55.80	55.95	56.10	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7.5	56.25	56.40	56.55	56.70	56.85	57.00	57.15	57.30	57.46	57.61	2	3	5	6	8	9	11	12	14
76	57.76	57.91	58.06	58.22	58.37	58.52	58.68	58.83	58.98	59.14	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7.7	59.29	59.44	59.60	59.75	59.91	60.06	60.22	60.37	60.53	60.68	2	3	5	6	8	9	11	12	14
7.8	60.84	61.00	61.15	61.31	61.47	61.62	61.78	61.94	62.09	62.25	2	3	5	6	8	9	11	13	14
7.9	62.41	62.57	62.73	62.88	63.04	63.20	63.36	63.52	63.68	63.84	2	3	5	6	8	10	11	13	14
8.0	64.00	64.16	64.32	64.48	64.64	64.80	64.96	65.12	65.29	65.45	2	3	5	6	8	10	11	13	14
8.1	65.61	65.77	65.93	66.10	66.26	66.42	66.59	66.75	66.91	67.08	2	3	5	7	8	10	11	13	15
8.2	67.24	67.40	67.57	67.73	67.90	68.06	68.23	68.39	68.56	68.72	2	3	5	7	8	10	12	13	15
8.3	68.89	69.06	69.22	69.39	69.56	69.72	69.89	70.06	70.22	70.39	2	3	5	7	8	10	12	13	15
8.4	70.56	70.73	70.90	71.06	71.23	71.40	71.57	71.74	71.91	72.08	2	3	5	7	8	10	12	14	15
8.5	72.25	72.42	72.59	72.76	72.93	73.10	73.27	73.44	73.62	73.79	2	3	5	7	9	10	12	14	15
8.6	73.96	74.13	74.30	74.48	74.65	74.82	75.00	75.17	75.34	75.52	2	3	5	7	9	10	12	14	16
8.7	75.69	75.86	76.04	76.21	76.39	76.56	76.74	76.91	77.09	77.26	2	4	5	7	9	11	12	14	16
8.8	77.44	77.62	77.79	77.97	78.15	78.32	78.50	78.68	78.85	79.03	2	4	5	7	9	11	12	14	16
8.9	79.21	79.39	79.57	79.74	79.92	80.10	80.28	80.46	80.64	80.82	2	4	5	7	9	11	13	14	16
9.0	81.00	81.18	81.36	81.54	81.72	81.90	82.08	82.26	82.45	82.63	2	4	5	7	9	11	13	14	16
9.1	82.81	82.99	83.17	83.36	83.54	83.72	83.91	84.09	84.27	84.46	2	4	5	7	9	11	13	15	16
9.2	84.64	84.82	85.01	85.19	85.38	85.56	85.75	85.93	86.12	86.30	2	4	6	7	9	11	13	15	17
9.3	86.49	86.68	86.86	87.05	87.24	87.42	87.61	87.80	87.98	88.17	2	4	6	7	9	11	13	15	17
9.4	88.36	88.55	88.74	88.92	89.11	89.30	89.49	89.68	89.87	90.06	2	4	6	8	9	11	13	15	17
9.5	90.25	90.44	90.63	90.82	91.01	91.20	91.39	91.58	91.78	91.97	2	4	6	8	10	11	13	15	17
9.6	92.16	92.35	92.54	92.74	92.93	93.12	93.32	93.51	93.70	93.90	2	4	6	8	10	12	14	15	17
9.7	94.09	94.28	94.48	94.67	94.87	95.06	95.26	95.45	95.65	95.84	2	4	6	8	10	12	14	16	18
9.8	96.04	96.24	96.43	96.63	96.83	97.02	97.22	97.42	97.61	97.81	2	4	6	8	10	12	14	16	18
9.9	98.01	98.21	98.41	98.60	98.80	99.00	99.20	99.40	99.60	99.80	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

0841 – 2. tanári melléklet

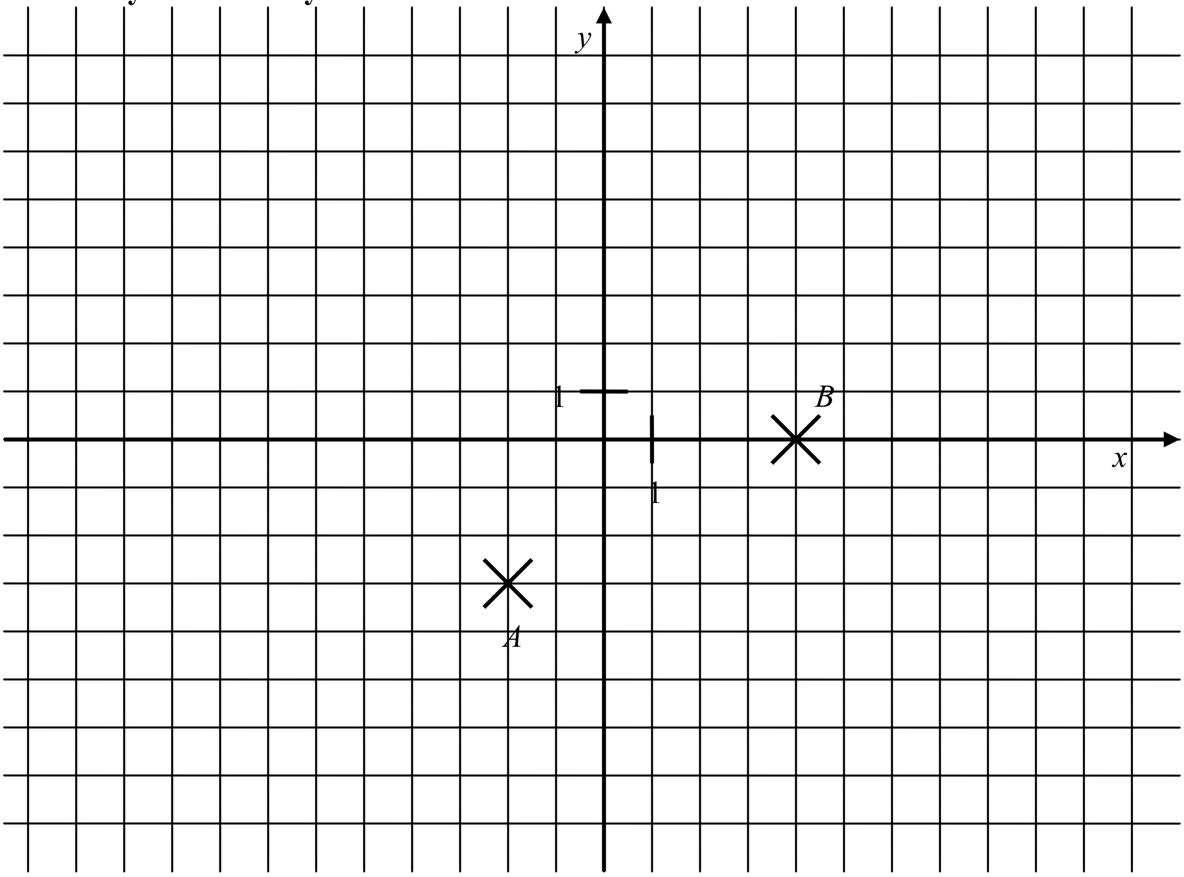
Fóliára nyomva osztályonként 1 db ebben a méretben.

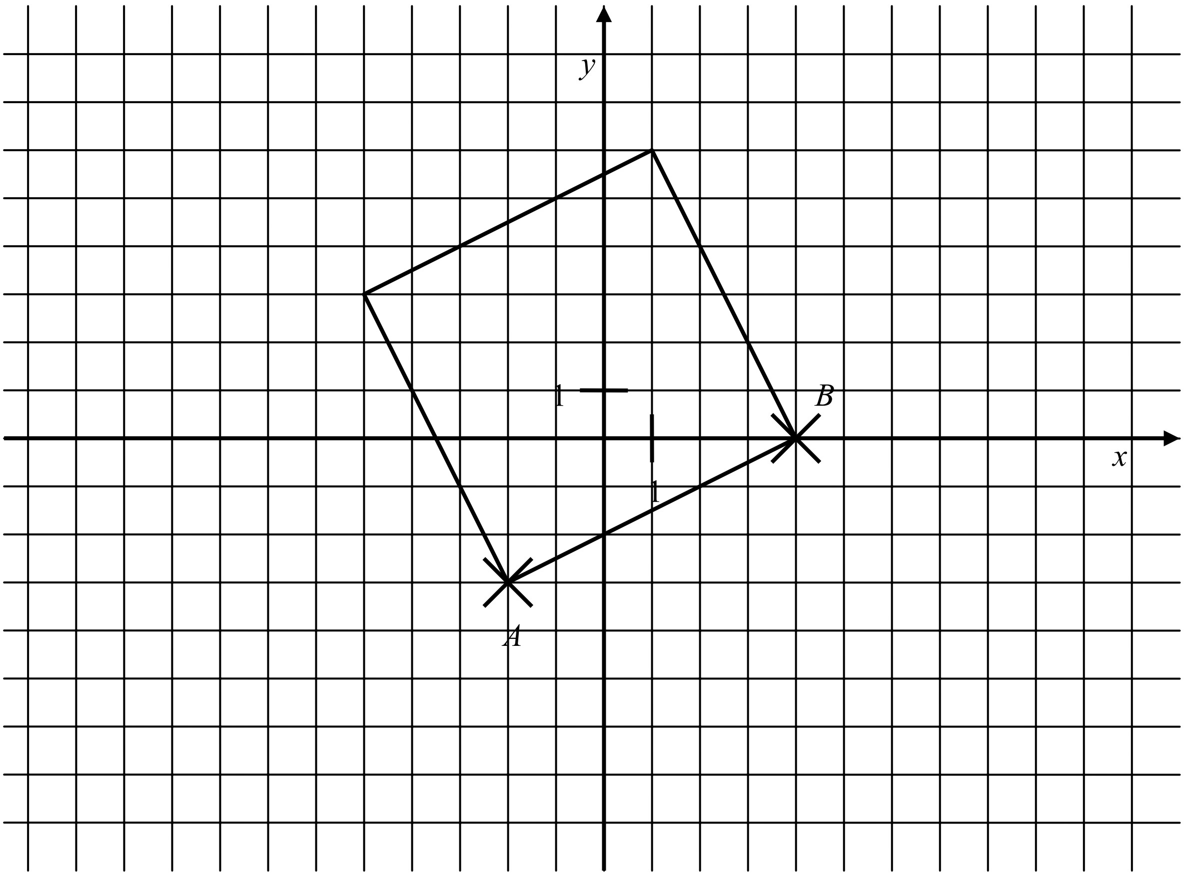
1. Az ábrán látható ABCD négyzet négy oldalán négy pontot kijelölünk az ábrának megfelelően. Mekkora a besatírozott síkidom területe? Mekkorák az oldalai?

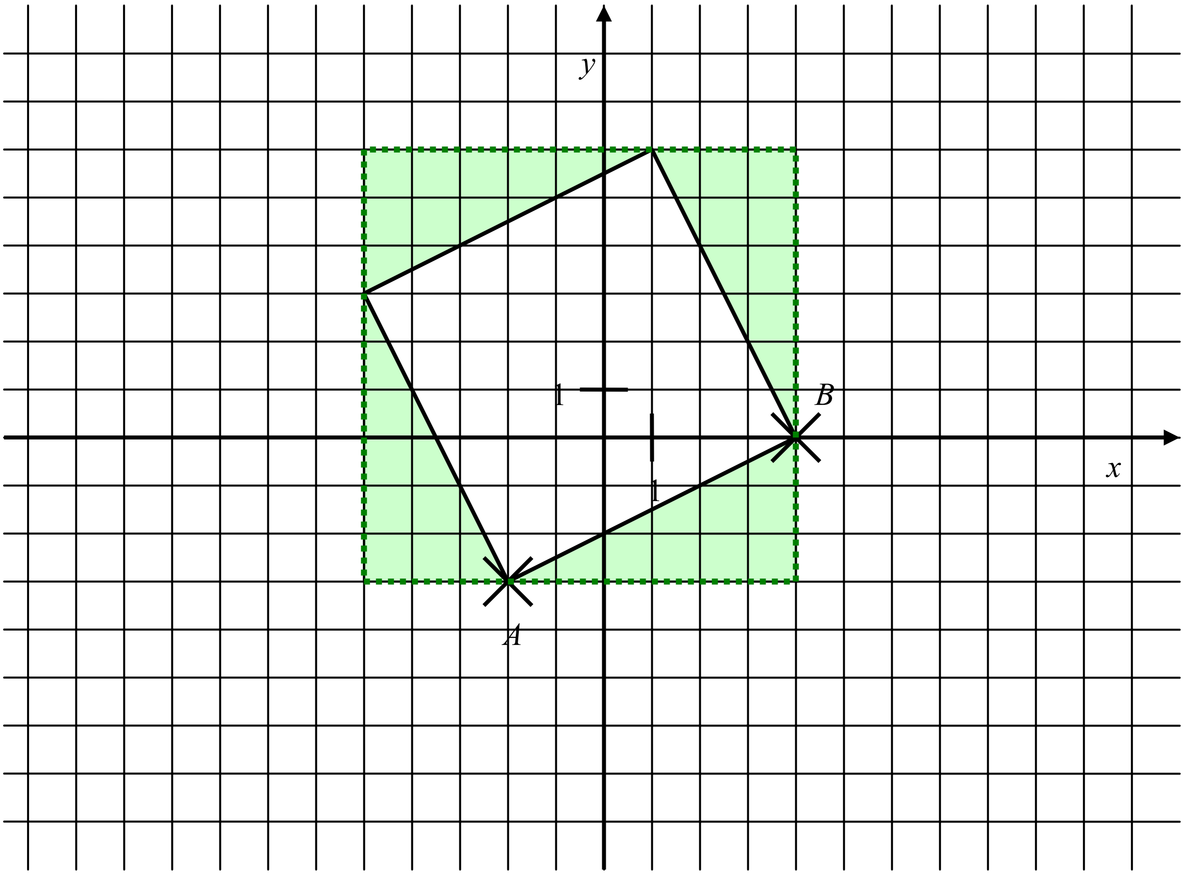


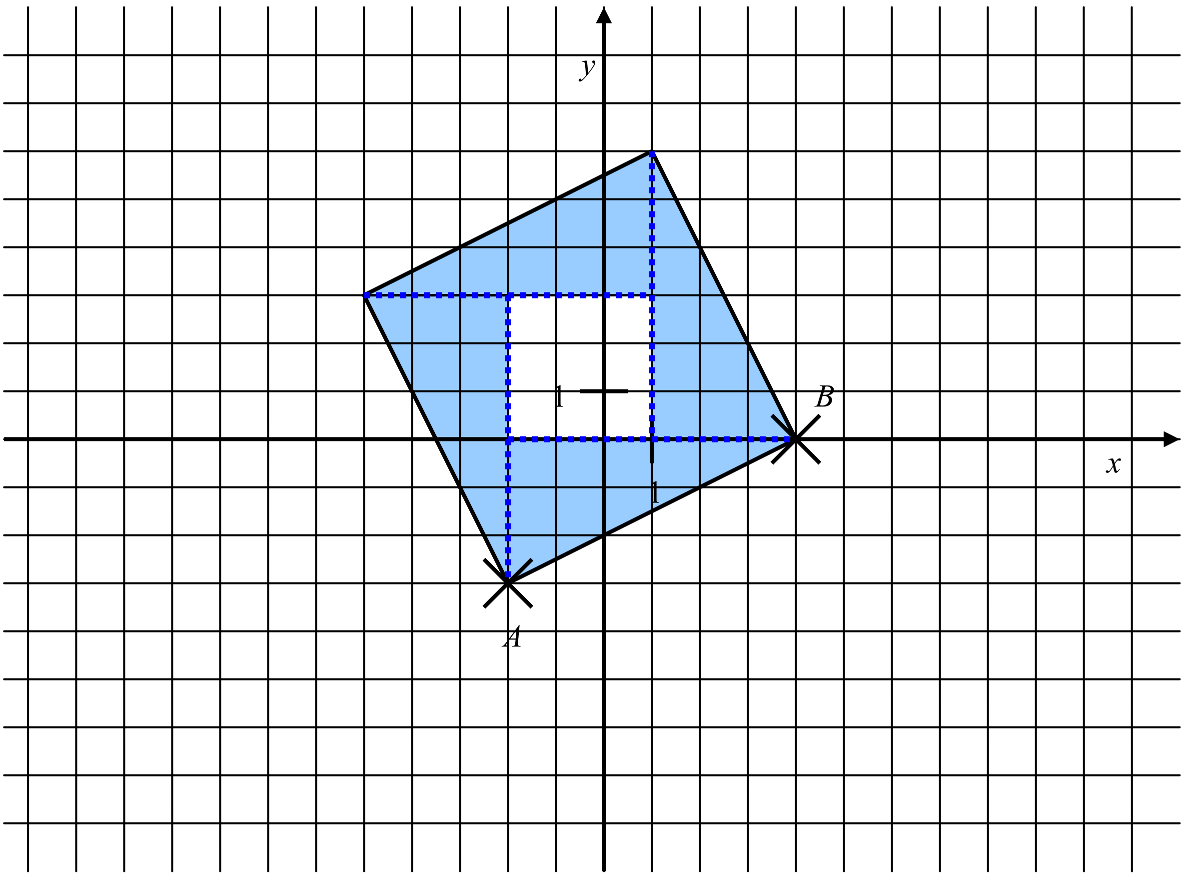
0841 – 3. tanári melléklet (2 oldal)

Fóliára nyomva osztályonként 1 db ebben a méretben.






y
1
1
B
x
A


y
1
1
B
x
A

0841 – 4. tanári melléklet (2 oldal, 32 db kártya Fekete Péter játékhoz)

Kartonlapra nyomva csoportonként 1 készlet ebben a méretben. (A fekete vonal mentén szétvágandó.)

≈5,099	2	≈3,1623	10
9	0	7	5
12	–1	–3	≈1,4142
4	6	8	Pótlap

$\sqrt{26}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{100}$
$\sqrt{81}$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{49}$	$\sqrt{25}$
$\sqrt{144}$	$-\sqrt{1}$	$-\sqrt{9}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{16}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{-25}$

0841 – 5. tanári melléklet

Géppapírra nyomva csoportonként 1 darab ebben a méretben.

Segítség a csoportoknak a Feladatgyűjtemény 1. feladatának megoldásához.