0821. MODUL

BESZORZÁS, KIEMELÉS

Beszorzás és kiemelés, algebrai kifejezések szorzattá alakítása

KÉSZÍTETTE: BENYHE LÁSZLÓ

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Azonosság és egyenlőség megkülönböztetése, összegalak és szorzatalak felelevenítése. A beszorzás tudatosítása. Párhuzam az egész és törtszámok illetve az egész és törtkifejezések között. Oszthatóság algebrai egészekkel; párhuzamok az egész számok oszthatóságával. Szorzatból összeggé és összegből szorzattá alakítás képességének kialakítása; ezek gyakorlati alkalmazása a matematikán belül és a mindennapi életben.
Időkeret	6 óra
Ajánlott korosztály	8. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Tágabb környezetben:* Fejszámolás a mindennapi életben. *Szűkebb környezetben:* Algebrai kifejezések; számelmélet; területszámítás; egyenletmegoldás. *Ajánlott megelőző tevékenység:* Téglalap területének számítása, elsőfokú- és egyszerű másodfokú egyenlet megoldása; algebrai kifejezések fogalma, fajtái; műveletek algebrai kifejezésekkel. *Ajánlott követő tevékenység:* Nevezetes azonosságok. Szöveges feladatok.
A képességfejlesztés fókuszai	*Számlálás, számolás:* Azonosságok ellenőrzése behelyettesítéssel *Becslés, mérés, valószínűségi következtetés:* Biztos, lehet, lehetetlen kifejezések használata. *Szövegesfeladat-megoldás, problémamegoldás, metakogníció:* Geometriai és egyéb szituációk interpretálása az algebra nyelvén és fordítva, algebrai kifejezések interpretálása konkrét helyzetekre. *Rendszerezés, kombinativitás:* Párosítási feladatok, dominó és egyéb játékok, számok felírása sokféle szorzatalakban, algebrai kifejezések átalakítása minél többféleképpen *Deduktív következtetés, induktív következtetés:* Tapasztalatszerzés, érvelés, általánosítás a kiemelés és zárójelfelbontás szabályainak megalkotása során. Analógiák a számok oszthatósága és az algebrai kifejezések szorzattá alakíthatósága között.

AJÁNLÁS

A modul elején az ALGEBRAI DOMINÓ játékot (előzetes tudásfelméréskor) még egyénileg, frontális irányítással javasoljuk feldolgozni, míg a modul végén (az összefoglaló gyakorláskor) állandó csoportokban dolgozva, egymással versenyezve. Az ALGEBRAI OSZTÓKÁRTYÁKAT két, egymást követő órán is használjuk, ezek nagyon gyorsan játszható, egyszerű, élvezetes játékok. Egyénileg dolgozva, frontális irányítással javasoljuk feldolgozni. A kifejezőkészség fejlesztése áll előtérben ezekben a játékokban, mert minden gyereknek kell majd táblához mennie, és több pontot kap megfelelő indoklás esetén. A modul végén a PUZZLE-játékot csoportosan javasoljuk feldolgozni, egymással versenyezve, majd ugyanezek a csoportok tovább versenyezve játszhatnak az összefoglaló ALGEBRAI DOMINÓ játékban is. Itt a szociális készség, egymás segítése a közös győzelem érdekében viselkedés, megerősítése a cél.

TÁMOGATÓRENDSZER

Vastartalmú (ún. „mágneses") tábla és a modulhoz kapcsolódó eszközök. Az Algebrai Dominó kártyák apró mágnesesekkel a vastartalmú táblához erősíthetőek, valamint az Algebrai Osztókártyáknak legalább a piros tagjai is.

ÉRTÉKELÉS

Folyamatos szóbeli értékelés, a hiányosságok pótlására, a típushibák és az egyedi hibák javítására is kiterjedően. Ez főleg az ALGEBRAI DOMINÓ első használatánál fontos! Egyéni- és csoporteredmények pozitív értékelése. Ösztönözzünk arra, hogy a tanulók egymás munkáját is értékeljék (pl. páros munka, csoportmunka közben), megbecsüljék, megdicsérjék. A részletes pontozási javaslatokat az aktuális játékoknál közöljük. Folyamatos pozitív megerősítésekkel, dicséretekkel és egyéb módokon (pl. „pluszpont") is motiváljunk. Ezek elősegítésére ún. szorgalminak adható feladatotokat írtunk a modulleírásba és a Feladatgyűjteménybe is. Bizonyos szorgalmikért akár jeles osztályzat is adható.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszközök, Feladatok**
I. Azonosság és egyenlőség; szorzatalak és összegalak			
1.	A TOTÓ ellenőrzése (Az algebrai kifejezésekkel kapcsolatos előzetes ismeretek felelevenítése. Számolási műveletek; műveletek sorrendje. Algebrai kifejezések; zárójel felbontás és összevonás. Egyszerű egyenletek megoldása. Azonosság és egyenlőség megkülönböztetése. Összegalak és szorzatalak felismerése.)	Számolási képesség.	1. feladatlap/1.
2.	Az Algebrai Dominó játék (Számolási műveletek, műveletek sorrendjének ismeretének felmérése. Kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás felismerése. Hiányosságok feltárása, tipikus és egyedi hibák feltérképezése a beszorzással, kiemeléssel kapcsolatosan.)	Számolási műveletek; műveletek sorrendje.	Algebrai Dominó készlet (1. tanári melléklet)

II. Beszorzás: szorzatból csináljunk összeget!			
1.	Fejszámolás (A „tudat alatt” alkalmazott beszorzás felszínre hozása.)	Számolási kompetencia	
2.	A pincér és a három jóbarát (A szorzás disztributivitása az összeadásra nézve.)	Induktív közeledés a beszorzás fogalmához. Szövegértés.	2. feladatlap/1.
3.	Összetett téglalapok területeinek felírása többféleképpen (A disztributivitás szemléltetése. Ráhangolás az általános formulák felírására.)	Rész és egész kapcsolata	2. feladatlap/2.
4.	Általános formulák	Fogalomalkotás, általánosítás.	

III. Egytagú kifejezés szorzattá bontása			
1.	Az összetett számok és az egytagú algebrai kifejezések (Hasonlóság és különbözőség az összetett számok és az egytagú algebrai kifejezések szorzattá bontása között.)	Analógia és megkülönböztetés. Szabályalkotás.	3. feladatlap/1. 2. 3.
2.	Egy kifejezés osztóinak keresése az Algebrai Osztókártyás játék segítségével (A szabály felismerése és gyakorlása. Egy kifejezés többféleképpen történő felírása.)	Általánosítás. Alkalmazás. Szóbeli kifejezőképesség fejlesztése.	Algebrai Osztókártyák (2. tanári melléklet) és a Kiegészítő táblázat (3. tanári melléklet)

IV. A kiemelés: összegből csináljunk szorzatot!			
1.	Két kifejezés közös osztóinak keresése az Algebrai Osztókártyák segítségével (A szabály alkalmazása és gyakorlása. Egyszerre több kifejezés többféleképpen történő felírása, a szorzótényezők között azonosak keresése. Feladatok két kifejezés közös osztóinak keresésére.)	Analógia, kreatív következtetés. Rugalmas gondolkodás fejlesztése. Induktív közelítés a kiemelés fogalmához.	Algebrai Osztókártyák (2. tanári melléklet) és a Kiegészítő táblázat (3. tanári melléklet) 4. feladatlap/1., 2.
2.	A kiemelés (A kiemelés fogalma, „receptje”. Összeg szorzattá alakítása.)	Szabályalkotás. Algoritmus felállítása.	4. feladatlap/3.

V. A kiemelés gyakorlati alkalmazásai			
1.	Kiemelés a fejszámolásban (A fejszámolás egyszerűbbé és gyorsabbá tétele.)	Kombinatív képesség, kreatív és rugalmas gondolkodás. Számolási képesség.	
2.	Egyszerűsítés (Törtkifejezések egyszerűsítése. Törtszámok és törtkifejezések egyszerűsítése közötti párhuzam. Törtkifejezések helyettesítési értékeinek gyorsabb kiszámolása.)	Alkalmazás, számolási képesség.	5. feladatlap/1. 5. feladatlap/2.
3.	Hiányos magasabb fokú egyenletek megoldása	Probléma megoldás.	5. feladatlap/3.
4.	Fejszámolásos trükkök (A „rácsodálkozás”, mint motivációs forrás kihasználása.)	Kreatív gondolkodásra serkentés.	

VI. Rendszerező gyakorlás			
1.	A Puzzle-játék (Téglalapok összerakása mozaikokból. Szemléltető játék a beszorzás és kiemelés kapcsolatára. Az azonosság fogalmának ismétlése.)	Alkalmazás. Kommunikációs képesség fejlesztése.	Puzzle-játék: Összefoglaló táblázat (4. tanári melléklet) 6 készlet mozaik-lapocska (5. tanári melléklet); 6db téglalap-kirakó (7. tanári melléklet); 6db Megoldó-lap (6. tanári melléklet)
2.	Ismétlő kérdések	Rendszerezés.	
3.	Rendszerező ismétlés a Algebrai Dominó játék segítségével	Rendszerezés. Szóbeli kifejezőkészség fejlesztése.	Algebrai Dominó készlet (1. tanári melléklet)

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Azonosság és egyenlőség; szorzatalak és összegalak

1. A TOTÓ ellenőrzése

Javasolt idő: 13+1 perc.
Eszközök: munkafüzet.
Munkaforma: frontális.

Fontos, hogy **már az előző órán adjuk fel** házi feladatnak a TOTÓ-t, hogy legyen idejük átgondolni a gyerekeknek. A TOTÓ a témakörhöz kapcsolódó összes szükséges előismeretet átismétli. Ellenőrzését mindenképpen javasoljuk, de a részletes megbeszélés sok időt elvehet! A TOTÓ elég nehéz ahhoz, hogy a tökéletesen megoldókat akár jeles osztályzattal is jutalmazzuk, sőt, még akár a 10 találatosok is kaphatnak valami jutalmat. (Ezt a jutalmazást motivációs céllal érdemes előre közölni a diákokkal.)
Ha elfelejtettük feladni a TOTÓ-t előző órán, akkor vagy csak néhányat kiválasztva önálló munkában oldják meg (pl. 6 darabot 6 perc alatt, a többi lecke), vagy ha állandó csoportok vannak az osztályban, akkor a csoport tagjai egymás között feloszthatják a példákat, majd az eredményeket közlik a csoport szóvivőjével. Így 6 perc alatt mindegyikkel kész lehetnek.

1. FELADATLAP

1. Azonosság-TOTÓ
Töltsd ki a TOTÓ-t az alábbiak szerint!
1 = A változók (betűk) helyére bármilyen számot írva az egyenlet igaz.
2 = Nincs olyan szám, amelynél igaz az egyenlet!
X = Az előbbiek egyike sem teljesül, azaz van olyan szám (akár több is), hogy az egyenlet igaz, de nem minden számra.
Ha nehéznek gondolod, egyszerű számok behelyettesítésével próbálkozz, hogy megkapd a helyes választ!

1.	$(a-b)\cdot 3=3a-3b$	1
2.	$x^2-4=-20$	2
3.	$7{,}7=3x-4{,}3$	X $(x=4)$
4.	$10\cdot(y\cdot z)=10y\cdot 10z$	X $(y=0 \text{ és } z=0)$
5.	$6k+3=6\cdot(k+3)$	2
6.	$6-\frac{a+2b}{2}=6-\frac{a}{2}-b$	1
7.	$d-c=c-(2c-d)$	1
8.	$x^3+10=2$	X $(x\neq -2)$
9.	$(-3)\cdot(y-1)=-3y-3$	2
10.	$2=(2m-2m)\cdot(2-2m)$	2
11.	$2y=(2x+y)-(2x-y)$	1
12.	$\frac{10f\cdot(g+2)}{(g+2)\cdot 2}=f\cdot 5$	X $(g\neq -2)$
13.	$(-5a)^2=25a^2$	1
+1.	$\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$	X $(x\neq 0)$

EMLÉKEZTETŐ

Az olyan egyenletet, amelyekben a változók (a „betűk”) helyére bármilyen megengedett számot írva az egyenlőség igaz marad, **azonosságnak** nevezzük.

Az ellenőrzés, megbeszélés folyamán tisztázni kell a gyerekekben, hogy az azonosság (az 1-ek) tágabb fogalom az egyenlőségnél, hiszen minden azonosság egyenlőség is egyben, de nem minden egyenlőség azonosság.

TUDNIVALÓ:

Az azonosság jele: $\equiv$
Az egyenlőség jele: $=$
A nem-egyenlőség jele: $\neq$

(De nem hiba, ha az azonosságot is csak „sima” = jellel jelöljük.)

A következőkre javasolt idő: 6 perc.
Írjuk át a TOTÓ megfelelő soraiban az $=$ jeleket $\equiv$ jelre.
Fontos, hogy 3-4 esetben (a 1. 4. 5. 6. 7. 9. 12. 13. sorok közül) végigbeszéljük a gyerekekkel, hogy az egyenletek mely oldalán található **szorzatalak** és melyiken **összegalak**! Ezen fogalmak pontos megléte nélkül a beszorzás és kiemelés tanítása nagyon nehéz lesz!
Elemezzük ki pl. az 5. sort:
Hogyan lehetne minél kevesebb változtatással azonossággá alakítani?
Az alábbi elnevezésekkel együtt írjuk fel a következőket a táblára:

$$\overbrace{\underbrace{6k}_{\text{tagok}}+\underbrace{18}}^{\text{összeg}}=\overbrace{\underbrace{6}\cdot\underbrace{(k+3)}_{\text{tényezők}}}^{\text{szorzat}} \qquad \text{vagy} \qquad \overbrace{\underbrace{6k}_{\text{tagok}}+\underbrace{3}}^{\text{összeg}}=\overbrace{\underbrace{6}\cdot\underbrace{\left(k+\tfrac{1}{2}\right)}_{\text{tényezők}}}^{\text{szorzat}}$$

2. Az Algebrai Dominó játék

Az asztalra helyezett dominókártyákból mindenki vegyen el magának ugyanannyit (pl. mindenki egyet, vagy mindenki kettőt, ahogy a tanár mondja). A tanár indítja el a játékot úgy, hogy kirakja a nála lévő kártyát a tábla közepére. Figyeljetek, és ha valakinél (valamelyik csoportnál) ott van a folytatás, az rakja ki mellé a táblára a sajátját. Az nyer, akinek (amelyik csoportnak) először elfogynak a kártyái. A pontozást a tanár közli.

Javasolt idő: 20 perc.
Eszközök: Algebrai Dominó készlet (**1. tanári melléklet**).
Munkaforma: frontális-egyéni vagy frontális-csoportos.
1. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

				$2\,(x+3)$	$(y+2x)\cdot b$
$by+2bx$	$4k+40$	$2\cdot(2k+20)$	$80\cdot 30+80\cdot 7$	$80\cdot 37$	$(15+n)\cdot 4$
$60+4n$	$y\cdot(b+m)$	$by+my$	$6\cdot(2x-9)$	$12x+(-54)$	$4n\cdot 17y$
$68ny$	$8\cdot(7x-6)$	$56x-48$	$(R+D)\cdot 2$	$R\cdot 2+D\cdot 2$	$6\cdot(3\cdot 7)$
$18\cdot 7$	$6\,(8-2x)$	$48-12x$	$(3-x)\cdot 2$	$6-2x$	$(-15)\cdot 46$
$46\cdot 8-46\cdot 23$	$3a-3b$	$3\,(a-b)$	$(-5a)^2$	$25a^2$	$10y\cdot 10z$
$100yz$	$6k+18$	$6\cdot(k+3)$	$4x^2-2x$	$2x\,(2x-1)$	$19\cdot 73$
$20\cdot 73-73$	$ty+ny$	$(t+n)\cdot y$	$43m+9m$	$52m$	$2u+4u$
$6u$	$(3k-2c)\,m$	$3km-2cm$	$(5-2x)\cdot 3$	$15-6x$	$3\cdot(2a-a)$
$3a$	mc^2-m	$(c^2-1)\cdot m$	$(3-x)\cdot(-2)$	$2x-6$	$(3-ab)\cdot 2$
$6-2ab$	$3m\cdot 4m$	$12m^2$	$29\cdot 47$	$30\cdot 47-47$	$H\cdot(OH)$
H^2O	$3\cdot(y-2)$	$(-6)+3y$	$-(R-CD)$	$CD-R$	$101\cdot 27$
$100\cdot 27+27$	w^3	$w\cdot w\cdot w$	$63\cdot 5$	$(63\cdot 10):2$	$(D-R)\cdot NS$
$DNS-RNS$	$57\cdot(10:3)$	$(57\cdot 10):3$	$A\cdot B\cdot C$	$C\cdot B\cdot A$	$6+2x$

Ez egy egyszerűsített, 40 darabos dominó készlet. Minden elemhez pontosan egy csatlakozik (az összesített táblázatban a mellette lévő), és az utolsó darab csatlakozik az elsőhöz (körbeilleszkedés). Van 2 darab pótkártya is a készletben, melyre magunk írhatunk fel elveszett, vagy kiegészíteni kívánt elemeket.
A játék egyik célja a diákok műveletekkel kapcsolatos eddigi tudásának felmérése, az esetleges típushibák, egyedi hibák kiszűrése a műveletek elvégzésével kapcsolatban. A másik célja a beszorzással és a kiemeléssel kapcsolatos előzetes sejtéseik, hipotéziseik felmérése.
Lehet, hogy kicsit döcögősen fog menni a játék, és még valószínűleg nem fogják érteni a diákok a kártyák közötti azonosságokat. Ezért ne menjünk bele olyan magyarázatokba, hogy „Miért azt a kártyát kell kirakni?”, hiszen erről fog szólni az elkövetkező 4–5 óra. Elég, ha a kártyákon lévő változók megegyezéséből találják ki a folytatást.
Ha ezt a játékot didaktikai szempontból nem előzetes tudásfelmérőnek, hanem gyakorlás és rögzítés céljából kívánjuk használni, akkor erre az órára érdemes előrehozni a beszorzásra

rávezető „pincéres” feladatot és a fejszámolást. Ekkor ezt a játékot csak a következő óra elején vegyük elő, a téglalapok területeinek felírása előtt. Időhiány esetén kihagyhatjuk, át is ugorhatunk rajta. Bár, a játék öröme lehet, hogy olyan mértékben növeli a tanulók motivációját, amely később kifizetődik.
Az Algebrai Dominó játék még a modul végén, összefoglalásként is előkerül! Akkor már nem csak megfelelő elemeket kell megtalálniuk a gyerekeknek, hanem meg kell majd mondaniuk az elemek azonossága között elvégzendő művelet(ek)et is. Ha az általunk javasolt felépítéssel tanítunk, akkor most a döcögős előzetes tudásfelmérést követően a modul végén valószínűleg egy sokkal élvezetesebb, heurisztikusabb, „Igen, most már ezt is értem és tudom!” érzéssel gazdagodhatnak a gyerekek.
Javasoljuk, hogy most még egyénileg játsszanak a gyerekek, a modul végén pedig csoportokban. Vagy most még változó csoportokban egyéni pontozással, a végén pedig állandó csoportokkal, csoportos pontozással.
A játék begyakorlásához, ha szükséges, az egyéni játékot javasoljuk, de pontozás nélkül.

Előkészület: A 40 dominókártya közül válasszunk ki annyi egymáshoz illeszkedő darabot úgy, hogy eggyel több kártya maradjon, mint amennyit a gyerekek kihúznak. (Ehhez segítségként használhatjuk a dominók kicsinyített, összefoglaló táblázatát az **1. tanári melléklet**ben.) Így már nem körbe, hanem láncba fognak illeszkedni a kártyák. A lánc egyik végén lévő kártyát vegyük magunkhoz! Ezzel a kártyával fogjuk elindítani a játékot! A többi kártyát összekeverve helyezzük el a tanári asztalon, írással lefelé fordítva.

1. Egyéni játék, pontozás nélkül: A játék begyakorlásához ajánlott.
Az asztalra helyezett dominókártyákból minden gyerek vegyen el magának ugyanannyit (pl. mindenki egyet, vagy mindenki kettőt, ahogy a tanár mondja), majd a tanár elindítja a játékot, és kirakja a nála lévő kártyát a tábla közepére. Minden gyerek a helyén figyelje a táblát. Ha valakinél ott a folytatás, jelentkezik, majd a tanár engedélyével kimegy a táblához, és kirakja. Egyszerre csak egy gyerek legyen a táblánál, és csak a jó kártyát rakhatja ki! Az nyer, akinek először elfogynak a kártyái.
A játékban *holtpont* alakulhat ki, ha nem veszi észre az adott gyerek, hogy nála van a folytatás. Ilyenkor vagy körbemegyünk és megkeressük, vagy „Nézzétek meg a körülöttetek ülők kártyáját, hogy kinél van a folytatás!” vezényszóval átjuthatunk a holtponton.
Jutalmazzuk meg azt a gyereket, aki észreveszi, ha valaki rossz kártyát akar kirakni. (De ne a játékban szereplő pontozással, hanem egyéb, a tanórán megszokott pluszponttal, „piros ponttal”. Ha minden gyereknél csak egy darab kártya van, nem lesz túl izgalmas a játék. Ha többször akarnak a gyerekek játszani, érdemes pontozásos rendszert bevezetni.)

2. Egyéni játék, pontozással: Maximum 19 fős tanulólétszámig javasolt, hogy minden diáknak legalább kettő kártyája legyen. Sokféle pontozás elképzelhető: pl. az I. helyezett gyerek (amelyik gyereknek először elfogynak a kártyái): n pont (n fős osztály esetén); II. hely: $n-1$ pont; III. hely: $n-2$ pont; aztán $n-3$; $n-4$; …3; 2; 1 pontok.
DE! Ha valaki rossz kártyát akar kirakni, vagy nem veszi észre, hogy nála van a jó kártya, az (–5) pontot, azaz 5 hibapontot kap.
Néhány kör után az összesített egyéni pontszámok alapján jutalmazhatunk, bár a gyűjtött pontszám inkább a szerencsén, mint a tudáson múlik.

3. Csoportos játék, pontozás nélkül: 19 fős tanulólétszám felett javasolt. A kezdet ugyanaz, de minden gyerek csak egy darab kártyát vesz el magának a tanári asztalra elhelyezettek közül. Ez után osszuk őket lehetőleg egyenlő létszámú, 3–6 fős csoportokra. A csoporttagok egymásnak segítve kereshetik a folytatást. Az a csapat nyer, ahol először elfogy minden kártya. De továbbra is egyszerre csak egy gyerek legyen a táblánál!

4. Csoportos játék, csoportos pontozással: Például: I. csapat (az a csapat, ahol minden kártya elfogyott): 30 pont; II. csapat: 20 pont; III. csapat: 10 pont. Ha valaki rossz kártyát akar kirakni, vagy egy csapat nem veszi észre, hogy nála van a jó kártya, akkor (–5) pontot, azaz 5 hibapontot kapnak.

Több játék esetén, állandó csapatok mellett a csapatpontszámokat minden forduló után írjuk fel a táblára.

5. Csoportos játék, egyéni pontozással: Akkor javasolt, ha minden fordulóban új csapatok alakulnak. A pontozás összesítése itt egyénileg történik, nehezebben követhető. Egyéni helyezések szerint adunk pontokat, amiket fordulónként, csapatonként összesíthetünk.
Például: I. helyezett gyerek (amelyik gyereknek először elfogy a kártyája): n pont (n fős osztály esetén); II. hely: $n - 1$ pont; III. hely: $n - 2$ pont; aztán $n - 3$; $n - 4$; …3; 2; 1 pontok.
Továbbra is, ha valaki rossz kártyát akar kirakni, vagy nem veszi észre, hogy nála van a jó kártya, akkor (–5) pontot, azaz 5 hibapontot kap. Így lehet, hogy a csoportok közül nem annak lesz a legtöbb pontja, ahol a győztes gyerek volt, ezért végig izgalmasabb lesz a játék.

Bármelyiket is választjuk, új játék esetén érdemes bevenni a játékba újabb, a maradékból választott kártyákat, de vigyázzunk, hogy az egymáshoz illeszkedőség megmaradjon, és továbbra is $n + 1$ maradjon. A lánc végét vegyük magunkhoz, amivel majd elindítjuk a játékot.

Házi feladatnak javasolt a Feladatgyűjtemény I./1. feladata, mellyel a TOTÓ-ban elkövetett hibákat lehet korrigálni, valamint előkészíteni a továbbiakat. A I./2. feladatot is érdemes megoldatni a gyerekekkel, de az is elég, ha csak a rendszerező összefoglalásnál adjuk fel. Az I./3. feladat csak szorgalmi feladatként javasolt.

II. Beszorzás: szorzatból csináljunk összeget!

Gyorsan ellenőrizzük a feladott házi feladatot, a Feladatgyűjtemény I./1. feladatát. A kapott szó: ARBEGLA, azaz visszafelé olvasva ALGEBRA. Magát az ALGEBRA szót másodpercek alatt kitalálhatják a diákok, de csak a helyesen megoldók fogják csak tudni, hogy visszafelé kell olvasni. A helyesen megoldókat jutalmazhatjuk.
Az egytagú többtagúval való beszorzás műveletét annyira gyakran használjuk, hogy már észre sem vesszük. Ennek „megvilágítására” javasolt először fejszámolással kezdeni az órát. Legfeljebb 5 percet foglakozzunk ezzel!
A „pincéres” példával ráhangolódunk, illetve érdekesebbé tesszük a problémát, majd számok helyére betűket írva általánosítjuk megállapításainkat. Az óra második részében a téglalapok területeinek többféle felírásával haladunk a többtagú többtagúval történő beszorzás megértése és elmélyítése felé. Végül felírjuk majd az általános formulákat.

1. Fejszámolás

Javasolt idő: 5–10 perc.
Eszközök: nincs.
Munkaforma: frontális, irányított kérdésekkel.

Néhány fejszámolásra serkentő kérdést tegyünk fel, és minden esetben kérjük meg a válaszadó gyereket, mondja el a számolásának menetét. Kétjegyűt egyjegyűvel (ill. egyjegyűt kétjegyűvel) érdemes feladni. A válaszok közül 2–3 darabot írjunk fel a táblára.

Fejszámolás példák:
Mennyi?

$64 \cdot 3 = ?$ $64 \cdot 3 = 60 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 180 + 12 = 192$

$4 \cdot 57 = ?$ $4 \cdot 57 = 4 \cdot 50 + 4 \cdot 7 = 200 + 28 = 228$

$78 \cdot 6 = ?$ $78 \cdot 6 = 70 \cdot 6 + 8 \cdot 6 = 420 + 48 = 468$

$87 \cdot 7 = ?$ $87 \cdot 7 = 80 \cdot 7 + 7 \cdot 7 = 560 + 49 = 609$

Valószínűleg ehhez hasonlóakat mondanak a gyerekek. Ezektől eltérő jellegű megoldásokat ne írjunk fel a táblára, de szóban jutalmazhatjuk: „Ügyes megoldás! Okos gondolat! Gondolkodott valaki másképpen?” kérdéssel elegánsan továbblépünk célunk felé.
Nézzük át, hogyan gondolkodtunk! Mit csináltunk a 64-el? Felbontottuk 60-ra és 4-re. Tehát a 64 helyett fejben (60 + 4)-et képzeltünk oda. Csak ezt olyan gyorsan csináltuk, hogy még kimondani sem volt időnk.

Írjuk át a táblát a következőképpen:

$64 \cdot 3 = (60 + 4) \cdot 3 = 60 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 192$

$4 \cdot 57 = 4 \cdot (50 + 7) = 4 \cdot 50 + 4 \cdot 7 = 228$

(Esetleg kicsit „trükközhetünk” azzal, ha direkt lehagyjuk először a zárójeleket. Ha valaki észreveszi a hibánkat, jutalmazzuk, ha nem veszik észre, rásegíthetünk egy „Valami itt nem stimmel, azt hiszem, elrontottam valamit…” mondattal.)

Végül töröljük le az egyenlőségek „elejét” és „végét”, és csak ennyi maradjon fenn:

$(60 + 4) \cdot 3 = 60 \cdot 3 + 4 \cdot 3$

$4 \cdot (50 + 7) = 4 \cdot 50 + 4 \cdot 7$

Ha időnk engedi, érdemes pár percet foglalkoznunk a „19 egyenlő egy híján hússzal” jellegű beszorzásokkal is a következők alapján:

Most számoljuk ki a következő szorzatokat!

$37 \cdot 19 = ?$

$14 \cdot 99 = ?$

$49 \cdot 9 = ?$

A megbeszélést követően a következő táblakép javasolt:

$37 \cdot 19 = 37 \cdot 19 = 37 \cdot (20 - 1) = 37 \cdot 20 - 37 = 703$

$14 \cdot 99 = 14 \cdot (100 - 1) = 14 \cdot 100 - 14 = 1386$

$49 \cdot 9 = 49 \cdot (10 - 1) = 49 \cdot 10 - 49 = 441$ vagy $49 \cdot 9 = (50 - 1) \cdot 9 = 50 \cdot 9 - 9 = 441$

Érdemes megemlíteni, hogy a $49 \cdot 9$ kiszámolásának két gyors fajtája is létezik.

Figyeljük meg, hogyan számoljuk ki a következő szorzatokat!

$67 \cdot 13 = 67 \cdot (10 + 3) = 67 \cdot 10 + 67 \cdot 3 = 670 + 201 = 871$

$12 \cdot 87 = (10 + 2) \cdot 87 = 10 \cdot 87 + 2 \cdot 87 = 870 + 174 = 1044$

$28 \cdot 19 = 28 \cdot (20 - 1) = 28 \cdot 20 - 28 \cdot 1 = 560 - 28 = 532$

$81 \cdot 99 = 81 \cdot (100 - 1) = 81 \cdot 100 - 81 \cdot 1 = 8100 - 81 = 8019$

Találjatok ki ti is hasonlókat, kérdezgessétek egymástól!

Ne húzzuk a tanórát azzal, hogy egymástól kérdezgetnek fejszámolást. Inkább javasoljuk, hogy szünetben, a büfénél sorban állás közben tegyék. Például három gyerek közül kettő versenyzik a harmadik által feladott példán.

Házi feladatnak feladható ehhez kapcsolódóan a Feladatgyűjtemény II./1. feladata.

2. A pincér és a három jó barát

Javasolt idő: 10 perc.
Eszközök: nincs.
Munkaforma: frontális.

Nézzünk még egy egyszerű feladatot, mielőtt a beszorzás fogalmát és formuláját tárgyalnánk. Olvassuk fel az alábbi feladatot, és írjuk fel a táblára az adatokat, ha szükséges. A diákok ne kövessék a feladat szövegét a Tanulói példányban! A hallás utáni szövegértés fejlesztése is célunk.

2. FELADATLAP

1. A pincér és a három jó barát
Három jóbarát beült egy kis étterembe. Rendeltek a pincértől egy-egy sajtos szendvicset 220Ft-ért és egy-egy narancsos üdítőt 250Ft-ért. A pincér felvette a rendelést, majd kihozta az italokat és ételeket. A jóbarátok ezeket elfogyasztották, majd fizetni kívántak. Mindannyian kiszámolták, hogy fejenként hány forintot kell fizetniük, és összedobták a pénzt. Hívták a pincért, aki hozta a számlát, majd a jóbarátok fizettek és távoztak. Hogyan számolták össze, hogy mennyi pénzt kell adniuk a pincérnek? Hogyan számolta össze a pincér, hogy mennyit kell fizetniük a jóbarátoknak? (A borravalót ne vegyük számításba!)

A kérdéseket ne ömlesztve tegyük fel, mindegyik után várjunk kb. 1 percet. A számolás menetét is kérjük, hogy írják le a diákok a füzetükbe, ne csak a végeredményt.
Ellenőrzéskor a következő 3 sort írjuk fel a táblára:

A jó barátok: $(220\text{Ft}+250\text{Ft})\cdot 3=470\text{Ft}\cdot 3=1410\text{Ft}$
A pincér: $220\text{Ft}\cdot 3+250\text{Ft}\cdot 3=660\text{Ft}+750\text{Ft}=1410\text{Ft}$
Tehát: $(220\text{Ft}+250\text{Ft})\cdot 3=220\text{Ft}\cdot 3+250\text{Ft}\cdot 3$

Az alábbi szöveg elmondása után a diákok segítségével írjuk fel az azonosságokat. Az azonosságok helyes megfogalmazásáért „pluszpontot” is adhatunk.

Mivel bármilyen más árak mellett is igaz az okoskodás, képzeljünk a 220Ft helyett a betűt, mint változót. A 250Ft helyett b betűt, a 3 helyett c betűt.
Így azt a már tanult azonosságot olvashatjuk le, hogy összeget (különbséget) úgy szorozhatunk egy kifejezéssel, hogy az összeg (különbség) minden tagját megszorozzuk az adott kifejezéssel.

TUDNIVALÓ:

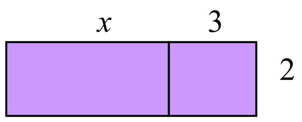
$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ illetve $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$
$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$ illetve $(a-b)\cdot c=a\cdot c-b\cdot c$

3. Összetett téglalapok területeinek felírása többféleképpen

Javasolt idő: 15 perc.
Eszközök: munkafüzet.
Munkaforma: frontális, majd páros vagy csoportos.
Most a kéttagút kéttagúval történő beszorzás szabályának felismerésére törekszünk. Egy-két példát együtt is fel lehet írni, de a többit próbálják önállóan. Körbejárva figyeljük a haladást, korrigáljunk, segítsünk a gyengébb gyerekeknek. Minden gyerek jusson el legalább az *f)* feladatig, de az optimális a *h)* feladat lenne. Az ellenőrzést padszomszédok füzetcseréjével tehetjük izgalmasabbá. Az *i)* és *j)* feladatokat csak nagyon jó képességűeknek ajánljuk (pl. szorgalmi házi feladatként).
Dolgozhatnak csoportokban is, egymás között beosztva, hogy ki melyik példát oldja meg. Mindenkinek legalább egy feladat jusson. Miután megoldották, árulják el egymásnak a kapott eredményeket. Például: az *a)* és *b)* együtt történő megoldása után 4 fős csoportokban *c)–f)* feladatokat osszák be egymás között, majd az eredményeket közöljék a csoporttársakkal. Végül a csoport közösen oldja meg a *g)* és *h)* feladatokat. Minderre kapnak 5 percet.
Az ellenőrzéssel együtt a feladat ne legyen több 15 percnél!

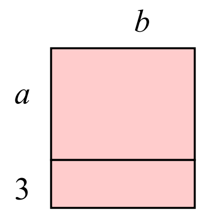
2. Téglalapok felbontása
Írjátok fel a nagy téglalapok területét az oldalak szorzataként, majd a résztéglalapok területeinek összegeként!

a)



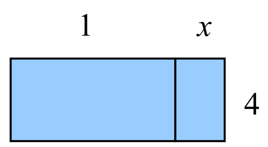
$(x+3)\cdot 2 = x\cdot 2 + 3\cdot 2 = 2x+6$

b)



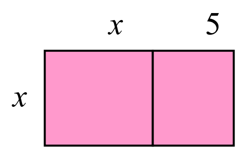
$(a+3)\cdot b = ab+3b$

c)



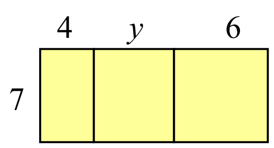
$(10+x)\cdot 4 = 40+4x$

d)



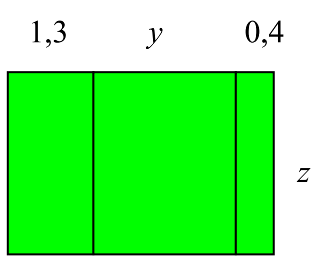
$x\cdot(x+5) = x^2+5x$

e)



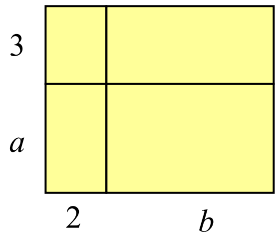
$(4+y+6)\cdot 7 = 70+7y$

f)



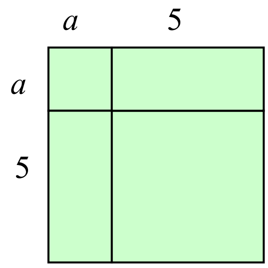
$(1,3+y+0,4)\cdot z = 1,3z+yz+0,4z =$
$= 1,7z+yz$

g)



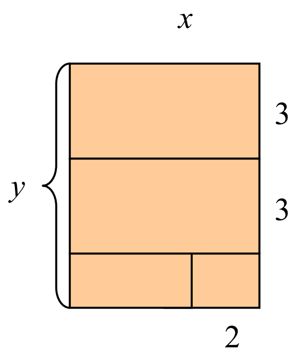
$$(3+a)\cdot(2+b)=3\cdot 2+a\cdot 2+3\cdot b+a\cdot b=$$
$$=ab+2a+3b+6$$

h)



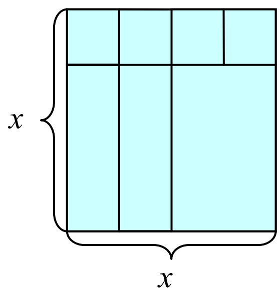
$$(a+5)^2=a^2+2\cdot 5a+5^2=a^2+10a+25$$

i)



$$y\cdot x=3x+3x+(y-6)\cdot(x-2)+(y-6)\cdot 2$$

j)



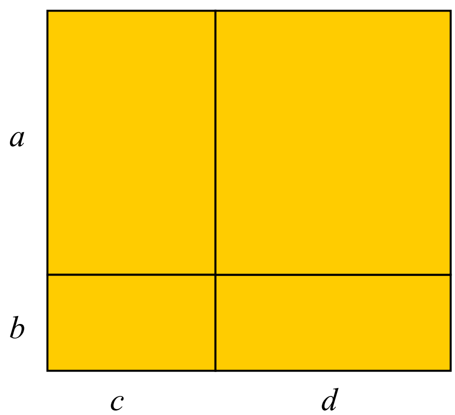
$$x^2=4\cdot\left(\frac{1}{4}x\right)^2+2\cdot\left(\frac{3}{4}x\cdot\frac{1}{4}x\right)+\frac{3}{4}x\cdot\frac{1}{2}x$$

4. Általános formulák

A következő téglalap területét írjuk fel többféleképpen!

Javasolt idő: 10 perc.
Eszközök: nincs.
Munkaforma: frontális.

Rajzoljuk fel gyorsan a táblára a feldarabolt téglalapot az oldalakkal, majd a gyerekek válaszai alapján írjuk fel kétféleképpen az azonosságot.



TUDNIVALÓ:

$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot(c+d)+b\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$ vagy

$(a+b)\cdot(c+d)=(a+b)\cdot c+(a+b)\cdot d=a\cdot c+b\cdot c+a\cdot d+b\cdot d$

Összeget összeggel úgy is szorozhatunk, hogy az egyik tényező minden tagját megszorozzuk a másik tényező minden tagjával, és a kapott szorzatokat összeadjuk.

Az előbbi két műveletsorban a kezdeti szorzatokat végül összegekké alakítottuk. Ezt szokás **beszorzás**nak nevezni.

Hangsúlyozzuk, hogy „minden tagot minden taggal” be kell szorozni, de ennek sorrendje (a beszorzás iránya) tetszőleges.
A továbbiakban a Feladatgyűjtemény példáival gyakorolhatunk, illetve adhatunk fel otthoni gyakorlásra.
A beszorzás motorikus gyakoroltatására leginkább alkalmas a Feladatgyűjtemény II./3. feladata, házi feladatnak javasolt legalább a II./5. példa.

III. Egytagú kifejezés szorzattá bontása

A kiemelés talán az egyik legnehezebb algebrai tananyag közé tartozik, ezért nagy segítséget jelenthet, ha a gyerekek képesek egy egytagú kifejezést minél többféleképpen szorzattá alakítani. Ez az óra ezt a képességet kívánja fejleszteni.
A következő játékok nagyban elősegítik, hogy a diákok otthonossá válhatnak az algebrai kifejezések átalakításában. Lényegében itt dőlhet el egy átlagos képességű diákban, hogy az algebra egy „jóbarát” lesz-e vagy csak egy „kötelező ismerős”.
A kiemelés fokozatos felfedeztetését annak az analógiájára végezzük, amikor számokhoz közös osztókat keresünk. A következőkben osztókat, közös osztókat fogunk keresni egyszerű algebrai egészek között, anélkül, hogy a fogalmakat egészen pontosan meghatároznánk. .A tanulók későbbi tanulmányaik során fognak majd pontosan megismerkedni az algebrai egész kifejezés fogalmával, és azzal, hogy mikor mondhatjuk, hogy az egyik algebrai egész osztója egy másiknak.

Bár a diákoktól nem kérjük számon, de azért nekünk, tanároknak, nem árt egy kis ismétlés:
Algebrai egész kifejezés (röviden: algebrai egész)**:** olyan algebrai kifejezés, amelyben osztóként (a nevezőben) nem szerepel változó. (Együtthatója lehet egész és törtszám is!)
Például: $2a$; $\frac{5b}{8}$; $\frac{3}{2}c$.
Egyik algebrai egész kifejezés **osztója** a másiknak, ha található egy olyan algebrai egész kifejezés, amivel az egyiket megszorozva a másikat kapjuk.
Például: A $6a^2$-nek osztója a $2a$, mert $2a\cdot 3a=6a^2$. A $2a$ osztópárja a $3a$.
De a $6a^2$-nek osztója az $5a$ is, mert $5a\cdot\frac{6}{5}a=6a^2$. Az $5a$ osztópárja a $\frac{6}{5}a$. Az ilyen jellegű példákat a diákok előtt szándékosan kerüljük, mert többségüknek ez túl nehéz „falat” lenne. Megmaradunk az egész együtthatós osztóknál, azaz a továbbiakban csak olyan osztópárokat veszünk, ahol a pár **mindkét tagja** egész együtthatós! Hiszen a kiemelésnél mi magunk is csak ilyet szoktunk alkalmazni. Például az alábbi esetben így szoktunk kiemelni:
$2a^3+3a^2=a^2\cdot(2a+3)$, nem pedig így: $2a^3+3a^2=3a^2\cdot\left(\frac{2}{3}a+1\right)$.

Természetesen, ez utóbbi is helyes megoldás, ezért ha hasonló felmerül a diákok részéről, akár feladatmegoldásnál, akár a későbbi játékok folyamán, azt ne vegyük hibának!

Gyorsan ellenőrizhetjük az otthonra feladott Feladatgyűjtemény II./5. példát. A kapott szó: SÁZROZSEB, azaz visszafelé olvasva az, hogy BESZORZÁS. Magát a BESZORZÁS szót másodpercek alatt kitalálhatják a diákok, de csak a helyesen megoldók fogják csak tudni, hogy visszafelé kell olvasni. A helyesen megoldókat jutalmazhatjuk.

1. Az összetett számok és az egytagú algebrai kifejezések

Javasolt idő: 5 perc.
Eszközök: nincs.
Munkaforma: frontális.

A következő 5 percben az egész számok körében értelmezett oszthatóság fogalmát szükséges átismételnünk és kiterjesztenünk az algebrai egészekre.
Valószínűleg a gyerekek többsége nem tudja megfogalmazni azt, hogy mikor mondjuk, hogy egyik egész szám osztója egy másiknak, ezért javasoljuk, hogy egyszerű, konkrét számpéldák felírásával kezdjük:

Osztója-e az 504-nek a 12? (Igen, mert található egy olyan egész szám, a 42, amellyel $42 \cdot 12 = 504$) További példákat is nézzünk, ha szükségesnek érezzük.

Ez alapján döntsük el, hogy az ab^2 osztója-e az a^2b^3c -nek! (Igen, mert megtalálható az abc, amivel a $(ab^2) \cdot (abc) = a^2b^3c$ teljesül.

Az egytagú algebrai kifejezések sok mindenben hasonlítanak az összetett számokhoz. Például abban, hogy az összetett számokhoz hasonlóan, szét lehet tényezők szorzatára bontani őket. A természetes számoknál tapasztaltakhoz hasonlóan ezeket a tényezőket az eredeti kifejezés osztóinak nevezhetjük.
Például:
A 12 osztója a 504-nek, mert megtalálható a 42, amivel a $12 \cdot 42 = 504$ teljesül. Persze így kiderült, hogy a 42 is osztója az 504-nek.
Az a^2b^3c -nek osztója az ab^2, mert megtalálható a abc, amivel a $(ab^2) \cdot (abc) = a^2b^3c$ teljesül. Persze így kiderült, hogy az abc is osztója a a^2b^3c -nek.
A 680-nak osztója a 17, mert $17 \cdot 40 = 680$. A 17 osztópárja a 40.
A $6a^2$ -nek osztója a $2a$, mert $2a \cdot 3a = 6a^2$. A $2a$ osztópárja a $3a$.

3. FELADATLAP

Javasolt idő: 15 perc (Az 1. 2. és 3.-ra összesen!)
Eszközök: munkafüzet.
Munkaforma: páros vagy csoportmunka.

Hasznos feleleveníteni, hogy egy osztó megtalálásával rögtön még egyet, az osztópárját is megtaláltuk. Az alábbi 3 feladat a számelméleti hasonlóságok és eltérések felfedezését szolgálja. Amennyiben időhiányban szenvedünk, elég, ha mindegyik feladatból csak 4 példát oldunk meg, a többi lehet házi feladat is.
Az 1. feladatot kidolgozási idő nélkül, frontálisan szóban vagy frontálisan csoportban (csak az egyik csoport tagjai válaszolhatnak) javasoljuk megoldani. Szándékosan nem adtunk meg minden megoldást, hiszen a kifejezéseknél ez lehetetlen is (ld. az óra eleji szürke részt)! Ahol nincs több megoldás, azokat a cellákat kihúztuk.

Vigyázzunk az idővel, a feladatra max. 4–5 perc ajánlott! Ha a diákok belekezdenek az „És az jó, hogy…?” jellegű kérdésekbe, egy laza: „Szorozd össze az osztópárt, és ha kijön, akkor jó!” válasszal kikerülhetjük, hogy belemenjünk az egyéni, időhúzásos részletekbe! Természetesen az, hogy melyik az osztó, és melyik a párja, mindegy.

1. Bontsd szorzattá minél többféleképpen! Keresd meg az alábbi számoknak, kifejezéseknek minél több osztóját (osztópárját), írd be ezeket a megfelelő négyzetekbe!

a)	72	**Osztó:**	1	2	3	4
		Osztópár:	72	36	24	18
b)	39	**Osztó:**	1	3	–	–
		Osztópár:	39	13	–	–
c)	64	**Osztó:**	1	2	4	8
		Osztópár:	64	32	16	8
d)	101	**Osztó:**	1	–	–	–
		Osztópár:	101	–	–	–
e)	b^3	**Osztó:**	1	b		
		Osztópár:	b^3	b^2		
f)	$2x^2y$	**Osztó:**	1	2	x	$2x$
		Osztópár:	$2x^2y$	x^2y	$2xy$	xy
g)	$4x$	**Osztó:**	1	2	4	
		Osztópár:	$4x$	$2x$	x	
h)	$6a^2b^2$	**Osztó:**	1	$3a^2$	$6ab$	$2a^2b$
		Osztópár:	$6a^2b^2$	$2b^2$	ab	$3b$

2. Osztója-e? Ha igen, add meg az osztópárját!

a) A 620-nak a 24? Nem.
b) A 32 a 224-nek? Igen, $32 \cdot 7 = 224$.
c) Az 56 a 728-nak? Igen, $56 \cdot 13 = 728$.
d) Az 1001-nek a 11? Igen, $11 \cdot 91 = 1001$.
e) A $6a^2$-nek az a^3? Nem.
f) A b a b^3-nek? Igen, $b \cdot b^2 = b^3$.
g) A $6x^2$-nek a $3x^2$? Igen, $3x^2 \cdot 2 = 6x^2$.
h) A $4a^2b^2$-nek a $2ab^3$? Nem.

A következő feladat azt a célt is szolgálja, hogy a diákokat (újra) ráébresszük arra, hogy egy szorzat szorzótényezői egyben a szorzat osztói is. Az ellenőrzéskor kérdezzünk rá arra, hogy a „C” kifejezésnek a példa mely osztópárját adta meg. Sőt, a válaszoló diáktól vagy csapattól rögtön kérjünk egy újabb osztópárt is az adott kifejezéshez! Időhiány esetén házi feladatnak is adható.

3. Add meg a hiányzó kifejezést úgy, hogy $A \cdot B = C$ igaz legyen!

A	a	$2xy^2$	$5rd$	ab	$7bd$	cr	$-ho$	$2h^2$	$-bt$
B	$2ab$	$3x$	$4rd$	ba	$2b^2$	dw	$-3h$	$8ch^2$	$-3i$
C	$2a^2b$	$6x^2y^2$	$20r^2d^2$	a^2b^2	$14b^3d$	$cdrw$	$3h^2o$	$16ch^4$	$3bit$

2. Egy kifejezés osztóinak keresése az Algebrai Osztókártyás játék segítségével

Javasolt idő: 20 perc.
Eszközök: Algebrai Osztókátyák (**2. tanári melléklet**).
Kiegészítő táblázat (**3. tanári melléklet**).
Munkaforma: frontális egyéni.
2. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

a	a^2	a^3	b	b^2	b^3
ab	a^2b	a^3b	ab^2	ab^3	a^2b^2
a^3b^2	a^2b^3	a^3b^3	$2a$	$2a^2$	$2a^3$
$2b$	$2b^2$	$2b^3$	$2ab$	$2a^2b$	$2a^3b$
$2ab^2$	$2ab^3$	$2a^2b^2$	$2a^3b^2$	$2a^2b^3$	$2a^3b^3$
$4a^4b^5$	$6a^2b^2$	$6a^2$	b^3	$8ab^2$	$2a^3b$

3. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

Algebrai Osztókártyák (kiemelésnek megfelelő) osztói	Kiegészítő táblázat

1. $6a^2$

a	a^2
$2a$	$2a^2$

2. $8ab^2$

a	b	b^2	ab	ab^2
$2a$	$2b$	$2b^2$	$2ab$	$2ab^2$

3. b^3

b	b^2	b^3

4. $6a^2b^2$

a	a^2	b	b^2	ab	a^2b	ab^2	a^2b^2
$2a$	$2a^2$	$2b$	$2b^2$	$2ab$	$2a^2b$	$2ab^2$	$2a^2b^2$

5. $4a^4b^5$

a	a^2	a^3	b	b^2	b^3	ab	a^2b	a^3b	ab^2	a^2b^2	a^3b^2	ab^3	a^2b^3	a^3b^3
$2a$	$2a^2$	$2a^3$	$2b$	$2b^2$	$2b^3$	$2ab$	$2a^2b$	$2a^3b$	$2ab^2$	$2a^2b^2$	$2a^3b^2$	$2ab^3$	$2a^2b^3$	$2a^3b^3$

6. $2a^3b$

a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
$2a$	$2a^2$	$2a^3$	$2b$	$2ab$	$2a^2b$	$2a^3b$

A következő Algebrai Osztókártyás játék segítségével könnyen ellenőrizhetjük a teljes osztály felkészültségét a kiemelés műveletére, illetve korrigálhatjuk az esetleges hiányosságokat.
A játék nagyon gyorsan játszható. Nem érdemes csoportokban játszani, mert a játék célja nem gyakorlás, hanem előzetes felmérése annak, hogy mindenki felismerte-e „tudat alatt” az algebrai egészek és az összetett számok közötti oszthatósági párhuzamot ill. eltérést.

A **2. tanári melléklet** tartalmazza a szükséges 30 db tanulói (sárga) kártyát és a 6 db tanári (piros) kártyát. Készítettünk a tanárok számára egy segítő, Kiegészítő táblázatot (**3. tanári melléklet**) a piros kártyák azon osztóiról, amelyek benne vannak a sárga kártyák között. Ez a táblázat megkönnyíti a játék közben az ellenőrzést.

(Megemlítjük, hogy bár a b^3-nek osztója $2b$; a $2b^2$; és a $2b^3$ is, ezek a korábban leírtak (III. óra eleji szürke rész) miatt nem szerepelnek a táblázatban.)

Előkészületek: Fénymásoljuk le magunknak a Kiegészítő táblázatot (3. tanári melléklet)! Készítsünk elő minden sárga kártyát! Lehetőleg mind a 30 db sárga kártya szerepeljen a játékban! Ennek elérésére a következőket ajánljuk:

- A jobb képességű gyerekeknek adjunk több kártyát, és/vagy
- tegyük fel a táblára a kimaradt kártyákat (de ne feledkezzünk meg róluk!).

Előre szólhatunk a gyerekeknek, hogy legfeljebb 6 forduló lesz, érdemes minél jobban figyelni.

A játék menete: A tanári asztalról mindenki húzzon magának ugyanannyi (amennyit a tanár mond) sárga kártyát. Helyremegy és figyeli a táblát. Ezután a tanár felrakja az esetleges megmaradt sárga kártyákat a tábla egyik szélére. Majd a játék indításaképpen felrak **egy piros** kártyát a hatból a tábla közepére. Az a gyerek, akinél van ehhez tartozó osztó, az menjen ki a táblához, és az osztály felé fordulva mutassa fel a sárga kártyáját. Ha több kártya is van egy gyereknél, mindegyiket vigye magával, de csak a jót mutassa fel!
Pluszpontot kaphat az, aki jó kártyát mutat fel, és ezt meg tudja indokolni a következő mondat alapján:
–„Én osztó vagyok, mert engem …-val (szükséges egész kifejezéssel) megszorozva megkapjuk a…-t (a piros kártyán levő egész kifejezést).”
Például, ha éppen a $\mathbf{6a^2}$-t ábrázoló piros kártya van a táblán, és valaki a $\mathbf{2a}$-t tartalmazó kártyát tartja fel a kézében a táblánál állva, akkor a következő mondattal szerezhet újabb pontokat magának: *„Én osztó vagyok, mert engem* **3a***-val megszorozva megkapjuk a* $\mathbf{6a^2}$*-t.”*
Jó játékot, figyeljetek, mert legfeljebb csak 6 forduló lehetséges!

A **Kiegészítő táblázat**on az általunk javasolt játéksorrendben vannak lejegyezve a kártyák, de ez csak ajánlás. Amennyiben a játék nem akar „beindulni”, legfeljebb az első 2 db piros kártyához szükséges osztókat keressük, beszéljük meg együtt.
Miután a gyerekek kimentek a táblához, beszéljük át, hogy mindenki, aki kiment, valóban osztót tart-e a kezében. Ha valaki rossz mondatot mond, a helyükön maradók kapjanak lehetőséget rá 10 pontért.
Fontos átbeszélni azt is, hogy mindenki kiment-e, akinek kellett volna. Ennek megkönnyítésére használjuk a Kiegészítő táblázatot (**3. tanári melléklet**), és ott pipáljuk ki azokat, akik kimentek a szükségesek közül. Aki „elfelejtett” kimenni a táblához, kapjon (–10) pontot, azaz 10 hibapontot.
Ne felejtsük el átbeszélni a táblán levő, az elején megmaradt sárga kártyák közül azt, hogy melyek lennének jók. Például a helyükön maradt diákok közül jelentkezéses alapon dönthetjük el, hogy ki kapja a helyes indoklásért járó 10 pluszpontot.
Az első néhány alkalommal valószínűleg döcögősen fog meni a játék, mert egyszerre sok mindenre kell figyelnünk. Vigyázzunk az idővel, 15–20 percnél ne játszunk többet, inkább legyen kevesebb forduló, minthogy unalmassá, vontatottá váljon a játék.
Javasolt pontozás:

- Jó kimenetel: 10 pont kártyánként
- Jó indoklás: +10 pont kártyánként

- Rossz kimenetel: (–10) pont kártyánként
- „Elfelejtett” kimenetel: (–10) pont kártyánként

Javasoljuk, hogy csináljuk végig mind a 6 darab piros kártyával az osztókeresést! Utána összesítsük az elért egyéni pontokat. A sok pontot elérőket, és/vagy a hibapont nélkülieket jutalmazzuk.
Ezután az összes piros kártyát tegyük fel a táblára, és beszéljük meg a következőket:

- Van-e Jolly Joker kártya, azaz olyan, amelyiket mindig kivihetünk. Ha van, melyek ezek, ha nincs, miért nincs, és minek kellene szerepelnie egy ilyen Jolly Joker-en (csak szám szerepelhet rajta (nulladfokú polinom), és ilyen nem szerepel a készletben)?
- Melyik kifejezésnek volt a legtöbb osztója ($4a^4b^5$), melyiknek a legkevesebb ($6a^2$)?
- Melyikhez lehetett kivinni az összes kártyát ($4a^4b^5$), van-e ennél több olyan osztója (igen, pl. önmaga)?

Házi feladatnak még a Feladatgyűjteményből válogathatunk.

IV. A kiemelés: összegből csináljunk szorzatot!

1. Két kifejezés közös osztóinak keresése az Algebrai Osztókártyák segítségével

Javasolt idő: 20 perc.
Eszközök: Algebrai Osztókátyák (**2. tanári melléklet**).
Kiegészítő táblázat (**3. tanári melléklet**).
Munkaforma: frontális egyéni vagy frontális csoportos.
2. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

a	a^2	a^3	b	b^2	b^3
ab	a^2b	a^3b	ab^2	ab^3	a^2b^2
a^3b^2	a^2b^3	a^3b^3	$2a$	$2a^2$	$2a^3$
$2b$	$2b^2$	$2b^3$	$2ab$	$2a^2b$	$2a^3b$
$2ab^2$	$2ab^3$	$2a^2b^2$	$2a^3b^2$	$2a^2b^3$	$2a^3b^3$
$4a^4b^5$	$6a^2b^2$	$6a^2$	b^3	$8ab^2$	$2a^3b$

3. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

Algebrai Osztókártyák (kiemelésnek megfelelő) osztói	Kiegészítő táblázat

1. $6a^2$

a	a^2
$2a$	$2a^2$

2. $8ab^2$

a	b	b^2	ab	ab^2
$2a$	$2b$	$2b^2$	$2ab$	$2ab^2$

3. b^3

b	b^2	b^3

4. $6a^2b^2$

a	a^2	b	b^2	ab	a^2b	ab^2	a^2b^2
$2a$	$2a^2$	$2b$	$2b^2$	$2ab$	$2a^2b$	$2ab^2$	$2a^2b^2$

5. $4a^4b^5$

a	a^2	a^3	b	b^2	b^3	ab	a^2b	a^3b	ab^2	a^2b^2	a^3b^2	ab^3	a^2b^3	a^3b^3
$2a$	$2a^2$	$2a^3$	$2b$	$2b^2$	$2b^3$	$2ab$	$2a^2b$	$2a^3b$	$2ab^2$	$2a^2b^2$	$2a^3b^2$	$2ab^3$	$2a^2b^3$	$2a^3b^3$

6. $2a^3b$

a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
$2a$	$2a^2$	$2a^3$	$2b$	$2ab$	$2a^2b$	$2a^3b$

A házi feladatok leellenőrzése után ismét vegyük elő az előző órán már használt Algebrai Osztókártyákat. Most két kifejezés közös osztóit kell majd megkeresni. 20 percet ajánlunk erre, de az időnél fontosabb az, hogy minden felmerülő kérdést, esetleges félreértést megbeszéljünk a tanulókkal. Egy lépésre vagyunk a „rettegett” kiemeléstől, ha ez a játék sikeres, minden bizonnyal könnyen fogják a tanulók alkalmazni az itt megszerzett ismereteket. Addig ne haladjunk tovább, míg ezt nem tapasztaljuk, még akkor sem, ha majdnem az egész óra a játékkel megy el. Inkább több párost közösen csináljunk meg, mielőtt „élesben”, pontozással elkezdenénk játszani.

Előkészületek: Fénymásoljuk le magunknak a Kiegészítő táblázatot (**3. tanári melléklet**), hogy könnyebben követni tudjuk a játékot. Készítsünk elő minden sárga kártyát. Lehetőleg mind a 30 db sárga kártya játékban legyen! Ennek elérésére a következőket ajánljuk:

- 5 (nem feltétlenül egyenlő létszámú) csoport legyen, és minden csoport 6 kártyát húzzon.
- Egyéni játék esetén a jobb képességű gyerekeknek adjunk több kártyát, és/vagy
- tegyük fel a táblára a kimaradt kártyákat (de NE feledkezzünk meg róluk!).
- Esetleg a legnagyobb fokszámú kifejezéseket kivehetjük a készletből. Ekkor a Kiegészítő táblázatunkon is húzzuk ki ezeket.

A játék menete: A tanári asztalról minden gyerek húz magának ugyanannyi (amennyit a tanár mond) sárga kártyát. Ezután a tanár felrak egyszerre **két piros** kártyát a táblára, és akinél van ezekhez tartozó közös osztó, az menjen ki a táblához, és az osztály felé fordulva mutassa fel a sárga kártyáját (illetve kártyáit). A pontozást a tanár közli.

Javasolt pontozás:
10 pontot kap, aki (amelyik csoportképviselő) jó kártyát mutat fel, és (–10) pontot az, aki rosszat, vagy nem vette észre, hogy fel kellett volna mutatnia.

Beszéljük át együtt, hogy mindenki, aki kiment a táblához, valóban közös osztót tart-e a kezében.
Fontos megbeszélni azt is, hogy mindenki kiment-e, akinek kellett volna. Ennek megkönnyítésére használjuk a Kiegészítő táblázatot. Most egyszerre két kifejezés osztóit kell figyelnünk! Összesen 15 páros lehetséges, de nem fontos végigvenni mindegyiket. Viszont legalább 5–6 fordulót csináljunk, amelyben legyenek benne szélsőséges esetek is! Például nincs közös sárga kártya a ($6a^2$ és b^3) páros esetén, illetve nagyon sok van a ($6a^2b^2$ és $4a^4b^5$); a ($4a^4b^5$ és $2a^3b$) párosoknál, hiszen a $4a^4b^5$-nek osztója mindegyik piros kártya is!
Egy lehetséges sorrend:

- $6a^2$ és $8ab^2$ (2 közös kártya)
- $6a^2$ és $6a^2b^2$ (4 közös kártya)
- $8ab^2$ és $6a^2b^2$ (10 közös kártya)
- $6a^2$ és b^3 (nincs közös kártya)
- $6a^2b^2$ és $4a^4b^5$ (16 közös kártya)
- b^3 és $4a^4b^5$ (3 közös kártya)

NE felejtsük el átbeszélni a táblán levő, az elején megmaradt sárga kártyák közül azt, hogy melyek lennének jók? Aki észreveszi, kapjon 10 pontot.
Érdemes megbeszélni, hogy a kivitt közös osztók közül melyik a legnagyobb fokszámú? Van-e a kivitt sárga kártyákon kívül olyan közös osztó, amelynek nagyobb a fokszáma?

Kitüntetett közös algebrai egész osztó: két, egész együtthatós algebrai egész kifejezés kitüntetett közös algebrai egész osztójának nevezzük az olyan közös algebrai egész osztót, amelynek változói a lehető legnagyobb hatványon szerepelnek, és amelynek együtthatója a két, egész együtthatós algebrai egész kifejezés együtthatóinak legnagyobb közös osztója. Jelöljük **(**…**)**-lel, azaz félkövér, kerek zárójellel, ugyanúgy, mint két szám legnagyobb közös osztóját.
Például:
A $4a^4b^5$-nek és a $6a^2b^2$-nek kitüntetett közös algebrai egész osztója a $2a^2b^2$, azaz $\mathbf{(}4a^4b^5; 6a^2b^2\mathbf{)}=2a^2b^2$, ami szerepel a sárga kártyák között.
A $4a^4b^5$-nek és a $8ab^2$-nek kitüntetett közös algebrai egész osztója az $4ab^2$, azaz $\mathbf{(}4a^4b^5; 8ab^2\mathbf{)}= 4ab^2$, ami nem szerepel a sárga kártyák között is.
Figyeljünk arra, hogy a kitüntetett közös algebrai egész osztónak csak **egész együtthatós** algebrai egész kifejezések esetén van értelme!
Például: a $\frac{3}{2}ab^2$-nek és az $\frac{5}{4}a^3b$ törtegyütthatós kifejezések közös osztói: ab; $\frac{1}{4}ab$; $\frac{1}{2}ab$; $\frac{3}{4}ab$; $\frac{3}{2}ab$; stb… de nincs kitüntetett közös osztójuk, mert a $\frac{3}{2}$-nek és az $\frac{5}{4}$-nek nincs legnagyobb közös osztója.
Felmerülhet a kérdés, hogy miért nem egyszerűbb Legnagyobb közös algebrai egész osztónak nevezni. Mert a változók értékeitől függ, hogy melyik kifejezés a nagyobb: pl. $a^3>a^2$, ha $a>1$, de $a^3<a^2$, ha $a<0$, így nincs egyértelműen legnagyobb kifejezés sem. És hogy miért pont a Kitüntetett jelzőt adtuk neki? Mert kitüntetjük azzal az „érdemmel”, hogy majd őt emeljük ki a kifejezésekből.
FONTOS! Egész együtthatós algebrai egészek esetén a kitüntetett közös algebrai egész osztó az, amit legjobban „szeretünk” kiemelni, és hajlamosak vagyunk rá, hogy ezt erőltessük a diákokra is. Ne tegyük! Elégedjünk meg annyival, ha sikeresen valamilyen változót ki tudnak emelni az adott két algebrai egész kifejezésből!

4. FELADATLAP

Javasolt idő: 5 perc.
Eszközök: munkafüzet.
Munkaforma: egyéni, páros, vagy csoportos.

A következő feladat a természetes számpárok és az algebrai egészek közös osztója közötti párhuzamot próbálja megvilágítani. Az is elég, ha csak mondjuk 6-ot csináltatunk meg, önállóan dolgozva 3 percig, majd gyorsan megbeszéljük, a többit házi feladatnak adhatjuk. A megoldásban csak a számpárok legnagyobb közös osztóját, a kiejezéspároknak pedig a kitüntetett közös algebrai egész osztóját tüntettük fel. De a kifejezéspároknál elégedjünk meg annyival, ha a gyerekek bármilyen közös osztót megtalálnak.

1. Keress az alábbi számpárokhoz, kifejezéspárokhoz közös osztót!

a)	24 és 36	12
b)	56 és 108	4
c)	102 és 36	6
d)	42 és 105	21
e)	81 és 101	1
f)	41 és 205	41
g)	$4a^4b^5$ és $6a^2b^2$	$2a^2b^2$
h)	$4a^4b^5$ és $6a^2$	$2a^2$
i)	$4a^4b^5$ és b^3	b^3
j)	$4a^4b^5$ és $8ab^2$	$4ab^2$
k)	$4a^4b^5$ és $2a^3b$	$2a^3b$
l)	$6a^2b^2$ és $6a^2$	$6a^2$
m)	$6a^2b^2$ és b^3	b^2
n)	$6a^2b^2$ és $8ab^2$	$2ab^2$
o)	$6a^2b^2$ és $2a^3b$	$2a^2b$
p)	$6a^2$ és b^3	1
q)	$6a^2$ és $8ab^2$	$2a$
r)	$6a^2$ és $2a^3b$	$2a^2$
s)	b^3 és $8ab^2$	b^2
t)	b^3 és $2a^3b$	b
u)	$8ab^2$ és $2a^3b$	$2ab$

Emeljük ki, hogy a *p)* feladat megoldása 1 (egy).
A következő feladatban már többféle, és nem csak két algebrai egész kifejezésnek kell a közös osztóját megkeresni! Csak akkor foglalkozzunk vele, ha elég időnk van (még legalább 20 perc)! Fontosabb, hogy maradjon időnk a kiemelés fogalmára! Bőven elég az is, ha csak 4 példát oldunk meg az órán, a többit feladhatjuk házi feladatnak.

2. Keress az alábbi kifejezésekhez közös szorzótényezőt!

a) $3x^2$ és $2xy$ = x
b) $6x$ és $3x$ = $3x$
c) $2x$ és 6 = 2
d) $4x^3$ és $16x^2$ és $8x$ = $4x$
e) $24a^2b^5$ és $32a^4b^3$ = $8a^2b^3$
f) 18 és $3x^2y$ és $21x$ = 3
g) $318a^4b^5$ és $317x^3y$ = 1
h) $62c^2d^2$ és $28c^3d$ = $2c^2d$

2. A kiemelés

Javasolt idő: 5 perc.
Eszközök: nincs.
Munkaforma: frontális.

A kiemelés fogalmát fogjuk most bevezetni a közös algebrai egész osztó fogalmán keresztül. Most a célunk a kiemelés „receptjének”, algoritmusának felfedezése, alkalmazása. A kiemelés geometriai szemléltetésére, valamint a kiemelés és a beszorzás hasonlóságára csak a következő órákon térünk ki.
Mondjuk és írjuk a táblára a következőket:

Szorzatot már tudunk összeggé alakítani beszorzással:

Például: $3a\cdot(a+2b)=3a^2+6ab$

vagy: $4\cdot(2x-3)=8x-12$

Töröljük le a szorzat alakokat (a gyerekek füzetébe úgyis benne van), és kérdezzük meg, hogyan lehetne az összegeket visszaalakítani szorzattá.

Most alakítsunk összeget szorzattá a következő „recept” alapján:

- Keressünk az összegek tagjaihoz közös osztót!
- Írjuk fel ennek segítségével a tagokat szorzatokként.
- Ezután a közös osztót **emeljük ki**, azaz tegyük közös szorzótényezővé, és a megmaradt tényezőket a köztük lévő eredeti műveletekkel együtt tegyük zárójelbe.

Például:

$3a^2+6ab=\boxed{3a}\cdot a+\boxed{3a}\cdot 2b=\boxed{3a}\cdot(a+2b)$

röviden: $3a^2+6ab=3a\cdot(a+2b)$

vagy:

$8x-12=\boxed{4}\cdot 2x+\boxed{4}\cdot 3=\boxed{4}\cdot(2x-3)$

röviden: $8x-12=4\cdot(2x-3)$

Az előbbi műveletsort **kiemelés**nek nevezzük. Kiemeléskor összeget alakítunk szorzattá.
A példák alapján is megfigyelhető, hogy a kiemelés a beszorzás „fordítottjának” is nevezhető.
Kiemeléskor figyelj az előjelek és műveleti jelek helyes használatára! Ha bizonytalan vagy a kiemelés helyességében, akkor ellenőrizd le a kapott szorzat beszorzásával, hogy visszakapod-e az eredeti összeget.

Javasolt idő: 4 perc.
Eszközök: munkafüzet.
Munkaforma: páros.

A következő feladatot ideális esetben még belefér a tanórába. Javasolt páros munkában végeztetni. Minden páros két példát kapjon. A párok osszák be, hogy a két feladat közül melyik kié, majd oldják meg (2 perc). A kapott eredményüket árulják el a párjuknak, aki beszorzással ellenőrzi le a kiemelésüket. Hiba esetén a páros közösen keresse meg, melyikük hibázott és hol. Összesen legfeljebb 4 perc javasolt.

3. Az alábbi összegeket alakítsd szorzattá! Beszorzással ellenőrizz!

a) $2a+6=$ .... $=2\cdot(a+3)$

b) $3x-6=$ .... $=3\cdot(x-2)$

c) $12a+3b=$ .... $=3\cdot(4a+b)$

d) $5y-20=$ .... $=5\cdot(y-4)$

e) $5y-5=$ .... $=5\cdot(y-1)$

f) $5y-5x=$ .... $=5\cdot(y-x)$

g) $5y-5xy=$ .... $=5y\cdot(1-x)$

h) $5y-5y^2=$ .... $=5y\cdot(1-y)$

i) $3x^2+6x=$ .... $=3x\cdot(x+2)$

j) $a^2-5a=$ .... $=a\cdot(a-5)$

k) $-4x+12=$ .... $=-4\cdot(x-3)$

l) $-4x-12=$ .... $=-4\cdot(x+3)$

m) $-x-2xy=$ .... $=-x\cdot(1+2y)$

n) $8-6a=$ .... $=2\cdot(4-3a)$

o) $6x-8x=$ .... $=2x\cdot(3-4)=-2x$

p) $9a^2b-3ba^2=$ .... $=3a^2b\cdot(3-1)=6a^2b$

q) $-xy-3y^3=$ .... $=-y\cdot(x+3y^2)$

r) $ab-a^2b=$ .... $=ab\cdot(1-a)$

s) $x^3+4x=$ .... $=x\cdot(x^2+4)$

t) $4x^3+16x^2-8x=$ .... $=4x\cdot(x^2+4x-2)$

(Az *o)* és *p)* feladatokban is elvégezhetünk kiemelést, amely után a zárójelben levő kifejezést összevonhatjuk. Tehát az összevonásba is beleerőltethető egy kiemelés!)

Ha a következő feladatra már nem marad időnk, nem baj, adjunk fel belőle néhányat házi feladatnak. Ha van időnk, akkor javasolt ismét páros munkában végeztetni. Minden páros két példát kapjon. A párok először együtt végezzék el az összevonásokat, beszéljék meg, majd osszák be, hogy a két feladat közül melyik kié, és oldják meg (2 perc). A kapott eredményüket árulják el a párjuknak, aki beszorzással ellenőrzi le a kiemelésüket. Hiba esetén a páros közösen keresse meg, melyikük hibázott és hol. Összesen legfeljebb 6 perc javasolt.

4. Végezd el a lehetséges összevonásokat, majd a kapott összeget kiemeléssel alakítsd szorzattá!

a) $a-2a^2+a=$ $=2a-2a^2=2a\cdot(1-a)$

b) $b-3b^2+5b=$ $=6b-3b^2=3b\cdot(2-b)$

c) $2a-4ab+3a-ba=$ $=5a-5ab=5a\cdot(1-b)$

d) $3abc+cba-2ab-7bac-ba=$ $=-3abc-3ab=-3ab\cdot(c+1)$

e) $y^2-yx+2y^2-2xy=$ $=3y^2-3xy=3y\cdot(y-x)$

f) $x+xy+3x+4xy=$ $=4x+5xy=x\cdot(4+5xy)$

g) $3+5y-2xy+6yx-7-5y=$ $=4xy-4=4\cdot(xy-1)$

h) $4,5x-1,5xy-10x-4xy=$ $=-5,5x-5,5xy=-5,5x\cdot(1+y)$

Ha esetleg minden példa megoldására jutott időnk, a Feladatgyűjteményben találunk még gyakorló példákat az óra hátralevő részére.

Házi feladatnak minimum javasolt a Feladatgyűjtemény IV./1. feladata.

V. A kiemelés gyakorlati alkalmazásai

Gyorsan leellenőrizhetjük az otthonra feladott Feladatgyűjtemény IV./1. példát. A kapott szó: SÉLEMEIK, azaz visszafelé olvasva az, hogy KIEMELÉS. A helyesen megoldókat jutalmazhatjuk.
Ez az óra a gyakorlásé. Ahhoz, hogy egy ismeret hosszú időre megmaradó tudássá érjen, legfontosabb, hogy gyakran alkalmazzuk. A kiemelés sokoldalú alkalmazásának bemutatását szolgálja ez az óra. A legegyszerűbbtől, a mindennapi életünket megkönnyítő fejszámolással kezdjük, majd haladunk a bonyolultabb, tantárgy-specifikusabb problémák felé.
Az óra utolsó harmadában két fejszámolós trükkel „kápráztatjuk” el a tanulókat, keretet adva ezzel az órának. Fontos, hogy a szabályt ne áruljuk el, ne beszéljük meg még ezen az órán, hanem házi feladatként motiváljuk vele a tanulókat. A szabály bebizonyítását szorgalmiként (pl. jeles osztályzatért) feladva pedig kreatív gondolkodásra serkelhetjük őket.

1. Kiemelés a fejszámolásban

Javasolt idő: 6–8 perc.
Eszközök: nincs.
Munkaforma: frontális.

Mielőtt belekezdenénk a fejszámolásban előforduló kiemelésekbe, amit valószínűleg eddig is már alkalmaztak a gyerekek „tudat alatt”, érdemes több példával is (bár csak egyet írtunk ide) átismételni a beszorzásos fejszámolást. (1 perc)
Mennyi?
$64\cdot3=?$ $=60\cdot3+4\cdot3=180+12=192$
Most egy kicsit talán nehezebb jön, próbáljátok ügyesen kiszámolni:
Mennyi? (Írjuk fel a táblára a következőket:)
$23\cdot6+7\cdot6=?$ $=180$
Jelentkezzen, akinek van eredménye!
Álljunk meg 10–20 másodpercre, figyeljük a próbálkozásokat. A válaszadó gyerektől kérdezzük ki számolása menetét. Ha nem jönnek rá az általunk javasoltra, mondjuk el, majd írjuk fel a táblára.
$23\cdot6+7\cdot6=(23+7)\cdot6=30\cdot6=180$

Hasonlóképpen vegyünk végig még 4–5 hasonlót az alábbi példák alapján, a leggyorsabb jól számolókat jutalmazzuk. Az összeget írjuk fel az elején a táblára, majd a megoldás után a gondolatmenetet is:

$4\cdot 18+16\cdot 18=?$ $\quad =(4+16)\cdot 18=20\cdot 18=360$

$47\cdot 9-17\cdot 9=?$ $\quad =(47-17)\cdot 9=30\cdot 9=270$

$13\cdot 12+12\cdot 12+12\cdot 5=?$ $\quad =(13+12+5)\cdot 12=30\cdot 12=360$

Ezzel kapcsolatosan házi feladatnak ajánljuk a Feladatgyűjtemény V./1. feladatát.
A következő sorok az eddigiek megfogalmazása a Tanuló példány számára, ne vegyük még egyszer végig!

A kiemelés segítségével a mindennap szükséges fejszámolásokat tehetjük gyorsabbá, könnyebbé. Figyeljétek meg az alábbi példákat!

$37\cdot 4+37\cdot 6=37\cdot(4+6)=37\cdot 10=370$

$43\cdot 4-23\cdot 4=(43-23)\cdot 4=20\cdot 4=80$

$23\cdot 24+23\cdot 22-6\cdot 23=23\cdot(24+22-6)=23\cdot 40=920$

Találjatok ki ti is hasonlókat, kérdezgessétek egymástól!

2. Egyszerűsítés

Javasolt idő: 5 perc.
Eszközök: nincs.
Munkaforma: frontális.

Törtek egyszerűsítésekor a számlálót és a nevezőt is szorzatként írjuk fel, és ha találunk közös osztót, akkor azzal elosztjuk a számlálót és nevezőt is. Ebben segítségünkre lehetnek az oszthatósági szabályok, a prímtényezős felbontás és a legnagyobb közös osztó megkeresése.

Például: $\dfrac{1296}{1080}=\dfrac{2^4\cdot 3^4}{2^3\cdot 3^3\cdot 5}=\dfrac{2\cdot 3\cdot(2^3\cdot 3^3)}{5\cdot(2^3\cdot 3^3)}=\dfrac{6}{5}$

A zárójelnek ebben a példában csak értelmező szerepe van, matematikailag elhagyható. (Természetesen sok gyakorlás után ezek a lépések egy része, vagy akár mindegyike, fejben is elvégezhető! ☺)
Algebrai kifejezéseknél is hasonlóan járunk el: ha szükséges, akkor kiemeléssel közös szorzótényezőt keresünk, és ha találunk, akkor azzal egyszerűsítünk.
De: Vigyáznunk kell arra, hogy a nevező nem lehet nulla!

Például: $\dfrac{2x^2y^3}{12x^3y}=\dfrac{2x^2y\cdot(y^2)}{2x^2y\cdot(6x)}=\dfrac{y^2}{6x}$, de $x\neq 0$, $y\neq 0$.

$\dfrac{32x^2-8x}{8x-12x^3}=\dfrac{4x\cdot(8x-2)}{4x\cdot(2-3x^2)}=\dfrac{8x-2}{2-3x^2}$, de $x\neq 0$ és $x\neq\dfrac{2}{3}$.

$\dfrac{6a+3b}{2a^2+ab}=\dfrac{3\cdot(2a+b)}{a\cdot(2a+b)}=\dfrac{3}{a}$, de $a\neq 0$ és $2a+b\neq 0$.

Az első példában még igazából nincs szükség kiemelésre, ezt már eddig is meg kell tudniuk oldani a diákoknak. A másik két példa alapján hívjuk fel a diákok figyelmét arra, hogy mindig a számláló és a nevező közös szorzótényezőivel egyszerűsítünk, és ez független attól, hogy az éppen zárójelben van vagy sem.
A 3. példában a $2a+b\neq 0$ kikötést szándékosan nem bontottuk tovább, mert jelenleg didaktikailag elég a kikötés felismerése, ne követeljünk még meg részletesebb diszkussziót.

5. FELADATLAP

Javasolt idő: 7 perc.
Eszközök: munkafüzet.
Munkaforma: egyéni, páros vagy csoportos.

A következő példában a kikötések megkeresést szorgalmi házi feladatnak javasoljuk.

1. Egyszerűsítsd a kifejezéseket! Ha tudod, keresd meg, hogy mely értékeket nem vehetnek fel a változók!

a) $\frac{x^2}{2x}=$ $x \neq 0;$ $=\frac{x}{2}$

b) $\frac{3a+6}{15}=$ nincs kikötés $=\frac{a+2}{5}$

c) $\frac{6y^2+2y}{4y^3}=$ $y \neq 0;$ $=\frac{3y+1}{2y^2}$

d) $\frac{x^2+2}{x}=$ $x \neq 0;$ nem egyszerűsíthető

e) $\frac{3\cdot(x+3)^2}{x+3}=$ $x \neq -3;$ $=3\cdot(x+3)$

f) $\frac{5a}{10ab}=$ $a \neq 0; b \neq 0;$ $=\frac{1}{2b}$

g) $\frac{36\cdot(k-2)}{42k-84}=$ $k \neq 2;$ $=\frac{6}{7}$

Javasolt idő: 8 perc.
Eszközök: munkafüzet.
Munkaforma: páros vagy csoportos.

A következő példa segítségül szolgál a kiemelés hasznosságában kétkedők meggyőzésére! Érdemes közösen egy példát (pl. a *c)*-t) kiragadni, és végigszámolni kiemelés és egyszerűsítés nélkül, illetve annak segítségével is!
A példát javasolt páros munkában végeztetni. Minden páros két példát kapjon. A párok osszák be, hogy a két feladat közül melyik kié. A sajátjukat kiemeléssel és egyszerűsítéssel oldják meg, majd számolják ki a helyettesítési értékeket! (3 perc). A kapott eredményüket árulják el a párjuknak, majd közösen ellenőrizzék le az eredményt egyszerű behelyettesítéssel, akár számológép segítségével. Hiba esetén a páros közösen keresse meg, melyikük hibázott és hol. Összesen legfeljebb 8 perc javasolt.

2. Többet ésszel, mint erővel!
Számold ki a következő kifejezések helyettesítési értékét, ha $a = 1,2$ és $b = -10$.

a) $\frac{4a^2}{6ab} =$ $= -0,08$

b) $\frac{3a-5a}{6ab} =$ $= 30$

c) $\frac{16b-8a}{8b-4a} =$ $= 2$

d) $\frac{5b^2+b}{10b} =$ $= -4,9$

e) $\frac{2a-2,4}{2b+20} =$ nem értelmezhető az eredmény

f) $\frac{3a+2b}{6a+4b} =$ $= \frac{1}{2}$

g) $\frac{3a+2b}{2a+3b} =$ $= \frac{-16,4}{-27,6} = \frac{164}{276} = \frac{41}{69} \approx 0,59$

h) $\frac{a^3+a}{5a\cdot(1+a^2)} =$ $= \frac{1}{5}$

3. Hiányos, magasabb fokú egyenletek megoldása

Ezt a pontot későbbi tanulmányaik során a diákok részletesen tanulni fogják. Ha időnk engedi, azért érdemes kipróbálni, hogy bármiféle előzetes információ, segítség nélkül hogyan boldogulnak a gyerekek a következő feladattal. Csak egy feladatot (pl. a **3.**feladat *a)* részét) adjuk fel, és figyeljük a megoldások mentét. A teljesen jól megoldókat jutalmazhatjuk, még akkor is, ha nem kiemeléssel, hanem esetszétválasztással oldják meg.

A következőkben olyan egyenleteket fogunk tudni megoldani a kiemelés segítségével, amelyeket eddig nem tudtunk.

Például:
$$2x^2 + 6x = 0$$
$$2x\cdot(x+3) = 0$$

Mivel egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így az egyenletnek két megoldása lesz: $x_1 = 0$ és $x_2 = -3$

Még egy példa:
$$4,6x = 2,3x^2$$
$$4,6x - 2,3x^2 = 0$$
$$2,3x\cdot(2-x) = 0$$
$$x_1 = 0 \text{ és } x_2 = 2$$

A következő példához páros vagy csoportos munka javasolt.

3. Hiányos, magasabb fokú egyenletek megoldása kiemeléssel
Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $a^2 - 3a = 0$ $a_1 = 0$ *és* $a_2 = 3$

b) $14,4b - 7,2b^2 = 0$ $b_1 = 0$ *és* $b_2 = 2$

c) $c^2 = -2c$ $c_1 = 0$ *és* $c_2 = -2$

d) $d^3 - d = 0$ $d_1 = 0$ *és* $d_2 = -1$ *és* $d_3 = 1$

e) $e^4 - e^3 = 0$ $e_1 = 0$ *és* $e_2 = 1$

f) $f + f^2 = 0$ $f_1 = 0$ *és* $f_2 = -1$

g) $g + g^3 = 0$ $g = 0$

h) $8h^2 - 4h = 0$ $h_1 = 0$ *és* $h_2 = \frac{1}{2}$

4. Fejszámolásos trükkök

Javasolt idő: 2×4 perc.
Eszközök: nincs.
Munkaforma: frontális.

A következő két fejszámolási trükköt az óra vége felé ajánljuk felvetni. Egy-két példa felírásával rásegítünk a szabály észrevételére. A szabály megfogalmazását és bebizonyítását szorgalmi házi feladatként javasoljuk feladni. A megfogalmazásért „pluszpont”, az írásban beadott helyes bizonyításokért jeles osztályzat is adható. Segítségnek feladhatjuk szorgalmi házi feladatként a Feladatgyűjtemény V./5. és V./6. feladatait is.

Első trükk: Az 5-re végződő számok négyzete

„Gyerekek, mondjatok egy 5-re végződő kétjegyű számot, és én azonnal megmondom a négyzetét!”
Írjuk fel a táblára a gyerekek által mondott számokat, és írjuk mellé a lentebb ismertetett szabály alapján gyorsan, fejben kiszámolt eredményt.

Először nézzünk csak kétjegyű, 5-re végződő számokat:
Például: $25^2 = 625$
$35^2 = 1225$
$75^2 = 5625$
Próbáljátok kitalálni a szabályt! Próbáljátok a szabályt bebizonyítani, és alkalmazni háromjegyű, 5-re végződő számokra is!

A szabály: Takarjuk le a szám végéről az 5-t. Az így kapott számot szorozzuk meg a nála 1-gyel nagyobb számmal, majd ennek végére írjunk 25-t.
Például: 35 négyzete: $3 \cdot 4 = 12$ szorzat után 25-t írva: 1225.
A szabály három- (és több)jegyű, 5-re végződő számok esetén is működik, csak ott nehezebb fejben kiszámolni a szükséges szorzatot.
Például: 925 négyzete: $92 \cdot 93 = 8556$ szorzat után 25-t írva: 855625.
A szabály bizonyítása: Az 5-re végződő számokat általánosan $(10a + 5)$ alakban írhatjuk fel, ahol az „a” akár többjegyű természetes szám is lehet. Ezek alapján:

$(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100 \cdot [a \cdot (a+1)] + 25$
átalakításokkal állításunkat bizonyítottuk.

Második trükk: Egy adott szám szomszédainak szorzata

„Gyerekek, ki tudná a következő szorzatokat gyorsan fejben kiszámolni?"
Írjuk fel a táblára a következőket:
$41 \cdot 39 =$
$59 \cdot 61 =$
$18 \cdot 22 =$
$43 \cdot 37 =$
Várjunk egy kicsit, figyeljük a próbálkozásokat. Ha valakinek van jó eredménye, kérdezzük meg a számolása menetét. Végül írjuk fel a következőket:

Figyeljétek meg a következő számpárok szorzatának kiszámolását!
$41 \cdot 39 = 40^2 - 1^2 = 1600 - 1 = 1599$
$59 \cdot 61 = 60^2 - 1^2 = 3600 - 1 = 3599$
$18 \cdot 22 = 20^2 - 2^2 = 400 - 4 = 396$
$43 \cdot 37 = 40^2 - 3^2 = 1600 - 9 = 1591$
Próbáljátok kitalálni a szabályt! Fogalmazzátok meg írásban! Próbáljátok a szabályt bebizonyítani, és alkalmazni más számpárokra is!

A szabály: A két szám átlagának négyzetéből vonjuk ki az átlagtól való eltérés négyzetét.
Például: A két szám 43 és 37, átlaguk 40, ettől való eltérésük 3, tehát $43 \cdot 37 = 40^2 - 3^2$.
A szabály bizonyítása: Nevezetes azonosság alapján:
$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$ átalakítással állításunkat bizonyítottuk.
Házi feladatnak az eddig feladott Feladatgyűjtemény V./4. és V./5. feladaton kívül a többiből tetszés szerint válogatható.

VI. Rendszerező gyakorlás

Az óra elején a fejszámolásos trükkök szabályaival foglakozhatunk egy keveset, ha a diákokat érdekli, de a bizonyításokba ne menjünk bele.
Erre az órára két játékot terveztünk, amelyet a diákok legfeljebb 6 csoportban tudnak játszani. Érdemes állandó csapatokat alakítani, amelyek az egész órán versenyeznek egymással. Az óra végén ne felejtsük el értékelni, jutalmazni a csapatokat. Érdemes a gyűjtött pontszámokat vezetni a tábla egy kisebb részében
Az óra első részében egy téglalapos Puzzle-játék segítségével vonunk párhuzamot a beszorzás és a kiemelés művelete között, valamint az azonosság fogalmát ismételhetjük át.
A második részben pedig a Algebrai Dominó játék ismételt alkalmazásával lehet egy játékos összefoglalást, gyakorlást tartani, de most már a játék közben alkalmazzuk az újonnan tanult ismereteket is.

1. A Puzzle-játék

Javasolt idő: 20 perc.

Eszközök: Puzzle (**5. tanári melléklet** – 8db)
Megoldólap (**6. tanári melléklet** – 8db)
A kirakandó téglalapok (**7. tanári melléklet** – 8×1 db)
Összefoglaló Megoldás-Táblázatok (**4. tanári melléklet**/1. és 2.)

Munkaforma: csoportos.

4. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

	A csoport, G csoport	B csoport, H csoport	C csoport	D csoport	E csoport	F csoport
Fehér	$(a+3)\cdot 4=4a+12$	$(a+3)\cdot 4=4a+12$	$(a+3)\cdot 4=4a+12$	$(a+3)\cdot 4=4a+12$	$(a+3)\cdot 4=4a+12$	$(a+3)\cdot 4=4a+12$
Kék	$(b+4)\cdot b=b^2+4b$	$(b+4)\cdot b=b^2+4b$	$(b+4)\cdot b=b^2+4b$	$(b+4)\cdot b=b^2+4b$	$(b+4)\cdot b=b^2+4b$	$(b+4)\cdot b=b^2+4b$
Világos-narancs	$(a+b)\cdot a=a^2+ab$	$(a+b)\cdot a=a^2+ab$	$(a+b)\cdot a=a^2+ab$	$(a+b)\cdot a=a^2+ab$	$(a+b)\cdot a=a^2+ab$	$(a+b)\cdot a=a^2+ab$
Szürke	$(a+4)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+4b+12$	$(a+4)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+4b+12$	$(a+4)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+4b+12$	$(a+4)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+4b+12$	$(a+4)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+4b+12$	$(a+4)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+4b+12$
Világos-zöld	$(a+4)\cdot b=ab+4b$	$(b+3)\cdot 3=3b+9$	$(b+3)\cdot 4=4b+12$	$(b+3)\cdot a=ab+3a$	$(b+3)\cdot b=b^2+3b$	$(b+4)\cdot a=ab+4a$
Világos-türkiz	$(a+3)\cdot(b+4)=$ $=ab+4a+3b+12$	$(a+4)\cdot(b+4)=$ $=ab+4a+4b+16$	$(a+3)\cdot(a+3)=$ $=a^2+3a+3a+9$	$(a+3)\cdot(a+4)=$ $=a^2+4a+3a+12$	$(a+4)\cdot(a+4)=$ $=a^2+4a+4a+16$	$(b+3)\cdot(b+3)=$ $=b^2+3b+3b+9$
Rózsaszín	$(a+b)\cdot(b+4)=$ $=ab+4a+b^2+4b$	$(a+b)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+b^2+3b$	$(a+b)\cdot(a+4)=$ $=a^2+4a+ab+4b$	$(a+b)\cdot(a+3)=$ $=a^2+3a+ab+3b$	$(b+3)\cdot(b+4)=$ $=b^2+4b+3b+12$	$(b+4)\cdot(b+4)=$ $=b^2+4b+4b+16$
Barack-színű	$(b+4)\cdot 3=3b+12$	$(b+4)\cdot 4=4b+16$	$(a+b)\cdot 3=3a+3b$	$(a+b)\cdot 4=4a+4b$	$(a+b)\cdot b=ab+b^2$	$(a+3)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+3b+9$
Levendula	$(a+3)\cdot 3=3a+9$	$(a+3)\cdot b=ab+3b$	$(a+3)\cdot a=a^2+3a$	$(a+4)\cdot a=a^2+4a$	$(a+4)\cdot 3=3a+12$	$(a+4)\cdot 4=4a+16$
Vörös	$(a+b)\cdot(a+b)=$ $=a^2+ab+ab+b^2$	$(a+b)\cdot(a+b)=$ $=a^2+ab+ab+b^2$	$(a+b)\cdot(a+b)=$ $=a^2+ab+ab+b^2$	$(a+b)\cdot(a+b)=$ $=a^2+ab+ab+b^2$	$(a+b)\cdot(a+b)=$ $=a^2+ab+ab+b^2$	$(a+b)\cdot(a+b)=$ $=a^2+ab+ab+b^2$

Több megoldás lehetséges amiatt, hogy $b=2$ és $a=5$, így $b+3=a$:

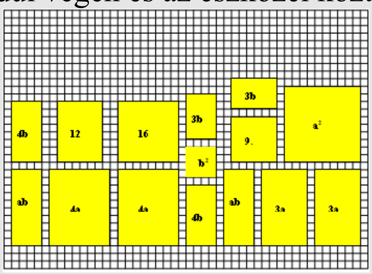
$a^2+ab=3a+4a$ $\quad$ $3a=3b+9$ $\quad$ $16=4b+4b$

$a^2=ab+3a$ $\quad$ $4a=4b+12$ $\quad$ $12=3b+3b$

$ab=b^2+3b$

	A csoport G csoport	B csoport H csoport	C csoport	D csoport	E csoport	F csoport
Fehér	32	32	32	32	32	32
Kék	12	12	12	12	12	12
Világos-narancs	35	35	35	35	35	35
Szürke	45	45	45	45	45	45
Világos-zöld	18	15	20	25	10	30
Világos-türkiz	48	54	64	72	81	25
Rózsaszín	42	35	63	56	30	36
Barack-színű	18	24	21	28	14	40
Levendula	24	16	40	45	27	36
Vörös	49	49	49	49	49	49

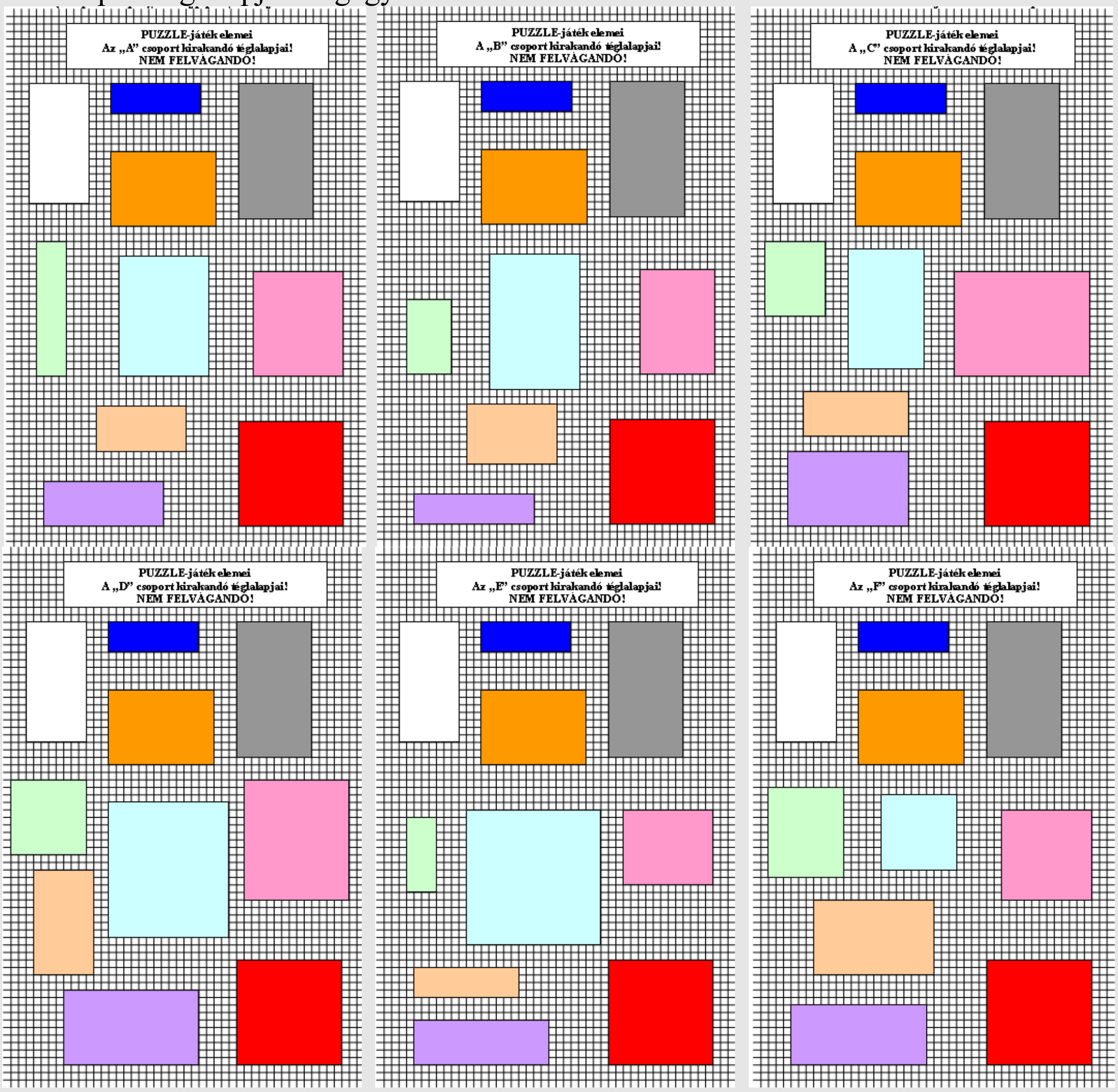
5. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!



6. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

… csoport	Oldalak szorzata	Darabok összege
Fehér		
Kék		
Világosnarancs		
Szürke		
Világoszöld		
Világostürkiz		
Rózsaszín		
Barackszínű		
Levendula		
Vörös		

7. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt! Az A és G csoport, valamint a B és H csoport téglalapjai megegyeznek.



A játék célja téglalapok összerakása, amivel a kiemelés a beszorzás kapcsolatát, egymás inverz műveletének megvilágítását szolgálja egyszerűen és élvezetesen. A csoportoknak egy 15 darabos mozaikkészlet segítségével (5. tanári melléklet, sárga mozaiklapocskák) kell a saját téglalapjaikat (10 darab színes, kirakandó téglalap) kirakni, majd felírni a területüket az oldalak szorzataként és a mozaikdarabok összegeként is az előre megadott megoldó táblázat alapján (6. tanári melléklet). Így mind a szorzatalakot, mind az összegalakot nekik kell felírni, és az eddig tanult új ismereteik alapján ezeket az azonosságokat könnyen be is tudják bizonyítani, le tudják ellenőrizni.

Előkészületek:
Minden csoportnak kell egy Megoldólap (**6. tanári melléklet**), egy 15 darabos, sárga téglalapocskákat tartalmazó mozaikkészlet (**5. tanári melléklet**), és egy, a kirakandó téglalapokat tartalmazó színes lap. (Első alkalommal a sárga téglalapocskákat gyorsan a tanulókkal fel kell vágatni. Érdemes utána ezeket külön-külön borítékban eltenni a későbbi felhasználhatóság érdekében.) A készlet 6 különböző Puzzle-t tartalmaz, részben azonos elemekkel. Az azonos elemekkel tehetünk egy frontális bevezető-játékot, vagy közös gyakorlást, amennyiben szükséges. Több (akár 8, vagy 12) csoporttal is játszható a játék, ha több csoport is ugyanazt a készletet kapja. Pl. 8 csoport esetén a „G” csoport készlete megegyezik az „A” csoport készletével, a „H” csoport készlete pedig a „B” csoportéval. Javasoljuk, hogy a teremben egymástól fizikailag távol levő csoportok kapjanak azonos készletet.
A Megoldólapokra ne írjunk, írassunk semmit! Érdemes átlátszó fóliába tenni, esetleg lamináltatni, és csak letörölhető (nem alkoholos) filctollal írni rá.
A színes lapokra ne írjunk semmit, és a gyerekek se írjanak!
A színes lapokat ne vágjuk, vágassuk fel!

Segítség: $b=2 \text{ } \textit{és} \text{ } a=5$**,** ezeken kívül pedig 3 és 4 egységnyi oldalhosszakat használtunk úgy, hogy két kisnégyzet oldalhosszát vettük 1 egységnek. A téglalapok kirakásáról készítettünk egy Összefoglaló megoldás-táblázatot a 4. tanári mellékletben.
Mivel $a=b+3$, ezért vannak olyan téglalapok, amelyet többféleképpen is felírhatunk a mozaiklapocskák segítségével!
Például: $(a+3)\cdot a=(a+3)\cdot(b+3)$. További egyezőségek:

$a^2+ab=3a+4a$
$3a=3b+9$
$16=4b+4b$
$a^2=ab+3a$
$4a=4b+12$
$12=3b+3b$
$ab=b^2+3b$

Ezért készítettünk egy olyan táblázatot is, ahol a téglalapok területeinek mérőszámát adtuk meg, talán így a legkönnyebb követni és ellenőrizni a diákok munkáját.
Minden csapatnak 5 téglalapja azonos: a fehér; a kék; a szürke; a világosnarancs és a vörös színűek.
Az azonos téglalapokkal rávezető gyakorlást tehetünk, ha a gyerekek nem értenék a szöveg alapján a feladatot.
A többi 5 téglalap: a világoszöld, a világostürkiz, a rózsaszín, a barackszínű és a levendula viszont minden csoportban különböző méretű.

A játék menete: Alakítsatok legfeljebb 8 csoportot! Minden csoport ugyanolyan, 15 darabos (sárga) téglalapocskákból álló Mozaik-készletet kap. Majd minden csapat kap egy színes téglalapokból álló lapot. (Ezt nem szabad felvágni, és nem szabad rá írni semmit!) Végül kaptok egy Megoldólapot, ami alapján kell majd dolgoznotok.
A tanár jelzésére elindul a játék: Rakjátok ki a mozaiklapok segítségével a téglalapokat! Ha egyet kiraktatok, írjátok fel a téglalap területét kétféleképpen is a Megoldólapra! Cél: minél gyorsabban hibátlanul kirakni az összes téglalapot, ami a lapotokon van.

Javasolt pontozás: Az a csapat, aki leghamarabb kész van, 10 pontot kap, és így időrendben tovább: 8; 6; 4; és 2 pont. (Azaz 6 csapat esetén az utolsónak elkészülő csapat nem kap

pontot.) De minden csapat kap minden jól kirakott téglalap után újabb 2 pontot. Vannak többféleképpen is kirakható téglalapok, de elég csak egyet megtalálni.
Ha egy csapat kész van, javasolt gyorsan az Összefoglaló Megoldás-táblázatokkal (4. tanári mellékletek) segítségével leellenőrizni a Megoldólapjukat, míg még a többi csapat dolgozik. Javítási lehetőséget ne adjunk a csapatoknak! De játékon kívül elárulhatjuk, hogy hány darab olyan téglalapjuk van, amit kétféleképpen is ki lehet rakni. Próbálják ezeket megtalálni, és kirakni, míg a többiek még dolgoznak.
Valószínűleg a gyerekek élvezni fogják a játékot, és újabb forduló(ka)t kérnek. Ilyenkor gyorsan szisztematikusan permutálva cseréljük ki a kirakandó téglalapos lapokat, így legfeljebb 6 különböző kört tudunk játszani.
Folyamatosan írjuk a csapatok pontszámait a táblára.
Ehhez kapcsolódóan házi feladatnak javasolt a Feladatgyűjtemény VI./1. feladata.

2. Ismétlő kérdések

A játék végeztével, a következő kérdésekkel ismételjük át az újonnan szerzett ismereteket:

- ✓ Hogyan írtátok fel a Megoldólap táblázatának bal oszlopainak elmeit?
  A nagy téglalap oldalait kifejeztük és összeszoroztuk.
- ✓ Hogyan írtátok fel a Megoldólap táblázatának jobb oszlopainak elmeit?
  A résztéglalapok területeit összeadtuk.
- ✓ A bal és a jobb oszlop azonos sorának elemei között egyenlőség van?
  Igen, hiszen ugyanannak a téglalapnak a területét fejeztük ki mindkét alkalommal.
- ✓ A táblázat sorai mind-mind azonosságok?
  Igen, bár az oldalak mérőszámai csak pozitívak lehetnek.
- ✓ Mit is nevezünk azonosságnak?
  Olyan egyenlet, amelyekben a változók helyére bármilyen megengedett számot írva az egyenlőség igaz marad.
- ✓ Hogyan nevezzük ezen azonosságoknak azt az alakját, ami a baloldali oszlopban van?
  Szorzatalak.
- ✓ Hogyan nevezzük ezen azonosságoknak azt az alakját, ami a baloldali oszlopban van?
  Összegalak.
- ✓ Milyen művelettel kapható meg egy baloldali elemből a mellette levő jobboldali?
  Beszorzás.
- ✓ Milyen művelettel kapható meg egy jobboldali elemből a mellette levő baloldali?
  Kiemelés.
- ✓ Beszorzással milyen alakú kifejezésből milyen alakút kapunk?
  Szorzat alakúból összeg alakút.
- ✓ Kiemeléssel milyen alakú kifejezésből milyen alakút kapunk?
  Összeg alakúból szorzat alakút.

TUDNIVALÓ:

Beszorzással egy szorzat alakú kifejezést alakíthatunk összeg alakúvá.
Kiemeléssel pedig ezt az összeg alakú kifejezést visszaalakíthatjuk szorzat alakúvá. Ezt úgy mondjuk, hogy a **Beszorzás** és a **Kiemelés** egymás **fordított műveletei**.

Amennyiben időnk engedi, és a tanulók is fogékonyak rá, foglalkozhatunk a vörös négyzet kirakásával kapható **nevezetes azonossággal.**

Figyeljétek meg!
A vörös négyzet kirakásával bebizonyítható a következő azonosság:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Keressetek hasonlóan felírható négyzeteket!

Játékon kívül megkerestethetjük azokat a téglalapokat a diákokkal, ahol ezt az azonosságot vélik felfedezni úgy, hogy valamelyik változó helyett egy konkrét szám szerepel:
Ezek a következők:
„C" csoport világostürkiz: $(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9$
„D" csoport világoszöld: $(b+3)^2 = b^2 + 6b + 9$ -ként is felírható.
„E" csoport világostürkiz: $(a+4)^2 = a^2 + 8a + 16$
„F" csoport világostürkiz: $(b+3)^2 = b^2 + 6b + 9$ -ként is felírható.
„F" csoport rózsaszín: $(b+4)^2 = b^2 + 8b + 16$
A Feladatgyűjtemény II. /11. feladata az $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **nevezetes azonosságra** rávezető feladat. Foglalkozhatunk vele, vagy feladhatjuk szorgalminak az azonosság felírását.
A Feladatgyűjtemény II. /8. és II./9. feladatában az $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$ **nevezetes azonosság** van elrejtve. Feladhatjuk szorgalmiként, hogy igazolják az azonosságot algebrai és geometriai úton is. Utóbbit úgy is kérdezhetjük, hogy hogyan kellene átdarabolni a feladat ábráját az igazoláshoz?

3. Rendszerező ismétlés a Algebrai Dominó játék segítségével

Javasolt idő: 20 perc.
Eszközök: Algebrai Dominó készlet (1. tanári melléklet).
Munkaforma: csoportos.

Készítsük elő a tanári asztalra a megfelelő mennyiségű, egymáshoz illeszkedő Algebrai Dominó kártyát és egyet vegyünk magunkhoz, amivel elindítjuk a játékot. A már meglévő csoportok versenyezhetnek tovább. Csoportos játék csoportos pontozással javasolt.

Ezzel a játékkal már foglalkoztunk. A játék lényege ugyanaz, de most minden diáknak, aki a táblához kimegy meg kell mondania, hogy a táblán levő kártyából a kezében tartott kártya milyen művelettel (beszorzás; kiemelés; négyzetre emelés; összeadás; szorzás átzárójelezhetősége; szorzás felcserélhetősége; stb.) kapható meg? Valamint azt is meg kell tudni mondania, hogy milyen matematikai kapcsolat van a két kártya között: egyenlőség vagy azonosság? Ugyanabból a csapatból csak akkor mehet valaki ki újra, ha már mindenki volt a táblánál!
Nézzünk egy példát a jó indoklásra:
„A táblán levő Algebrai Dominó kártyán levő $6k + 18$ kifejezéshez illik a kezemben tartott $6 \cdot (k + 3)$ kifejezést tartalmazó kártya, mert a $6k + 18$ kifejezésből kiemeléssel megkapjuk a $6 \cdot (k + 3)$-t. Ezek a kifejezések között azonosság van, mert k helyére bármilyen számot beírva az egyenlőség igaz marad."
Ugye milyen egyszerű… ☺?
Élvezetes játékot! A pontozást a tanár közli.

Pontozási javaslat:

- Jó kártya kirakása indoklás nélkül: 2 pont
- Jó kártya kirakása jó indoklással: 2 pont + 3 pont
- Jó kártya kirakása rossz indoklással: csak 1 pont
- Rossz kártya kirakása: (–5) pont

Valószínűleg kezdetben sok hibás mondatot mondanak a gyerekek. Folyamatosan javítsuk a rossz mondatokat, figyeljünk az egyenlőség és azonosság helyes használatára is. Adhatunk részpontokat is a nem teljesen tökéletes mondatokra.
FIGYELEM: az nem hiba, ha egy azonosságra egyenlőséget mondanak, de ilyenkor kérdezzünk rá, hogy az adott két kifejezés között azonosság is fennáll-e?
Ne felejtsünk el időt szakítani az óra végén a csapatok pontjainak összesítésére, eredményhirdetésre és a megfelelő jutalmazásra.
További gyakorlásra, házi feladatra használjuk a Feladatgyűjteményt.

FELADATGYŰJTEMÉNY

I. Azonosság és egyenlőség; szorzatalak és összegalak

1. Párosítsd össze az azonosakat! A lenti négyzetekbe sorrendbe írd be a betűket!
Javasolt minimális házi feladat.

I.	$3a-3b$	**A**	$2x\cdot(2x-1)$
II.	$6k+18$	**A**	$(a-b)\cdot 3$
III.	$(-5a)^2$	**B**	$25a^2$
IV.	$-3y-3$	**E**	$(-3)\cdot(y+1)$
V.	$100\cdot(y\cdot z)$	**G**	$10y\cdot 10z$
VI.	$5y-25xy$	**L**	$5y\cdot(1-5x)$
VII.	$4x^2-2x$	**R**	$6\cdot(k+3)$

I.	**II.**	**III.**	**IV.**	**V.**	**VI.**	**VII.**
□	□	□	□	□	□	□
A	**R**	**B**	**E**	**G**	**L**	**A**

(visszafelé olvasva ALGEBRA)

2. Oldd meg az egyenleteket! Válaszd ki közülük az azonosságokat!

a) $(a+2)\cdot 3+1=3a+7$ azonosság

b) $b-(8+b)=8$ nincs megoldás

c) $c-(4-c)=-3$ $c=1/2$

d) $2\cdot(d+2)=10-d$ $d=2$

e) $\frac{e}{2}+\frac{e}{3}=\frac{5e}{6}$ azonosság

f) $\frac{1}{2}\cdot(14f-3)=7f-3$ nincs megoldás

g) $5\cdot(g-1)+23=23$ $g=1$

h) $h+1{,}2-(h-2{,}4)=3{,}6$ azonosság

3. Add meg az egyenlőtlenségek igazsághalmazát a racionális számok halmazán. Ábrázold számegyenesen a megoldást, illetve válaszd ki közülük az azonos egyenlőtlenségeket!

a) $2\cdot(2-x)+(x-5)\le 3x+3$ $x\ge 1$

b) $2\cdot(y-5)>3\cdot(y-5)$ $y<5$

c) $z-6-(z+7)<-8$ azonos egyenlőtlenség

d) $\frac{3}{2}\cdot(2x+5)<(x-7)\cdot 3$ nincs megoldás

e) $y^2+12>5$ azonos egyenlőtlenség

f) $\left(\frac{3}{4}-z\right)-\left(\frac{3}{4}+z\right)\ge 6$ $z\le -3$

II. Beszorzás: szorzatból csináljunk összeget!

1. Fejben számold ki a következő szorzatokat! A gondolatmenetedet írd a pontozott vonalra!

Könnyű feladat.

$38\cdot 7=$ .... =266
$52\cdot 6=$ .... =312
$27\cdot 13=$ .... =351
$39\cdot 11=$ .... =429
$29\cdot 29=$ .... =841
$152\cdot 7=$ .... =1064
$199\cdot 6=$ .... =1194
$628\cdot 5=$ .... =3140
$741\cdot 3=$ .... =2223

2. Töltsd ki a szorzótáblák üres mezőit!

Gyakorló feladat.

a)

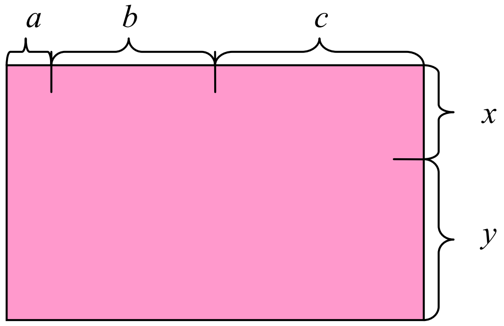
$\bullet$	$a+2b$	$3a^2b$	$\frac{1}{2}a$
3	$3a+6b$	$9a^2b$	$\frac{3}{2}a$
$2a$	$2a^2+4ab$	$6a^3b$	a^2

b)

$\bullet$	$2a+b$	$2a^2b$	$a-2$
$-\frac{3}{2}b$	$-3ab-\frac{3}{2}b^2$	$-3a^2b^2$	$-\frac{3}{2}ab+3b$
a	$2a^2+ab$	$2a^3b$	a^2-2a

3. Írd fel a téglalap területét többféleképpen!

Közepes nehézségű feladat. A számolás időigényes, csak házi feladatnak javasolt.



Számítsd ki a téglalap területét, ha:

$a=\frac{1}{3}$ cm $\quad b=\frac{7}{6}$ cm

$c=1,5$ cm $\quad x=\frac{2}{3}$ cm

$y=\frac{4}{3}$ cm

$T=(a+b+c)\cdot(x+y)=ax+ay+bx+by+cx+cy=6\ \text{cm}^2$

4. Írd fel a szorzatokat összegalakban, majd az egynemű kifejezéseket vond össze!

Gyakorló feladat. 6–8 feladat feladása javasolt, valamint szorgalminak is lehet belőle válogatni.

a) $(3x-2)\cdot(1-x)=$ $\quad =-3x^2+5x-2$

b) $(5a+b)\cdot(2b-3)=$ $\quad =10ab+2b^2-15a-3b$

c) $(a+b)\cdot(a+b)=$ $\quad =a^2+2ab+b^2$

d) $(a+b)\cdot(a-b)=$ $\quad =a^2-b^2$

e) $(a-b)\cdot(a-b)=$ $\quad =a^2-2ab+b^2$

f) $(3x+2y)^2=$ $\quad =9x^2+12xy+4y^2$

g) $(a-3b)^2=$ $\quad =a^2-6ab+9b^2$

h) $(2a+3)^2=$ $\quad =4a^2+12a+9$

i) $(2a-3)^2=$ $\quad =4a^2-12a+9$

j) $(-2a-3)^2=$ $\quad =4a^2+12a+9$

k) $(-2a+3)^2=$ $\quad =4a^2-12a+9$

l) $(-4x+5y)^2=$ $\quad =16x^2-40xy+25y^2$

m) $(-0,5a^2+3b)^2=$ $\quad =0,25a^4-3a^2b+9b^2$

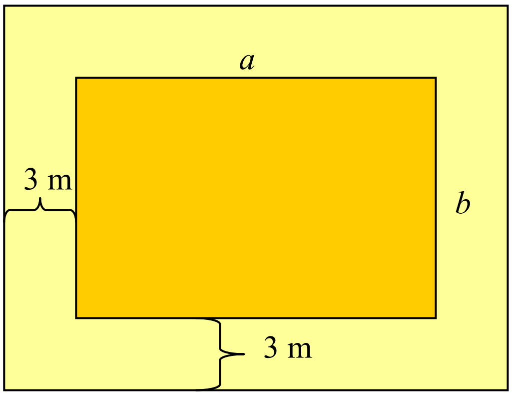
n) $\left(-\frac{2}{3}a-\frac{5}{7}b\right)^2=$ $\quad =\frac{4}{9}a^2+\frac{20}{21}ab+\frac{25}{49}b^2$

o) $(y-2)\cdot(y+2)=$ $\quad =y^2-4$

p) $(2x-3y)\cdot(2x+3x)=$ $\quad =4x^2-9y^2$

q) $(0,5a^2-3b)\cdot(0,5a^2+3b)=$ $\quad =0,25a^4-9b^2$

r) $\left(-\frac{2}{3}a-\frac{5}{7}b\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}a+\frac{5}{7}b\right)=$ $\quad =\frac{4}{9}a^2-\frac{25}{49}b^2$



5. Egy téglalap alakú vár oldalainak hossza *a*, illetve *b* méter. A vár köré 3 méter széles vizesárkot ástak.

a) Fejezd ki a vízfelszín területét *a*-val és *b*-vel! Mekkora a vízfelszín területe, ha *a* = 75 m és *b* = 50 m?

b) Hány liter vízre van szükség a vizesárok feltöltéséhez, ha az átlagos mélysége 2 méter?

$T=(a+6)\cdot(b+6)-ab=$

$=a\cdot 6+b\cdot 6+36=786$

$T=786\ \mathrm{m}^2$

$V=786\cdot 2=1572$

$\mathrm{V}=1572\mathrm{m}^3=1572000\mathrm{dm}^3=1572000\ \text{liter}$

6. Párosítsd össze az azonosakat! A lenti négyzetekbe sorrendbe írd be a betűket!
Javasolt minimális házi feladat.

I.	$3\cdot(x-y)$	**Á**	$3y-3x$
II.	$(-3)\cdot(x-y)$	**B**	$3x-xy$
III.	$y(x-3)$	**E**	$3-3x$
IV.	$3y(x-1)$	**O**	$3x^2-3xy$
V.	$3x(x-y)$	**R**	$3xy-3y$
VI.	$3\cdot(x-1)$	**S**	$3x^2-3y^2$
VII.	$(-3)\cdot(y^2-x^2)$	**S**	$3x-3y$
VIII.	$3\cdot(1-x)$	**Z**	$xy-3y$
IX.	$x(3-y)$	**Z**	$3x-3$

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
□	□	□	□	□	□	□	□	□
S	Á	Z	R	O	Z	S	E	B

(visszafelé olvasva BESZORZÁS)

7. Oldd meg az egyenleteket!
Szorgalmiként javasolt feladat.

a) $x(4-x)+x^2+3=7$ $x=1$

b) $(x+5)(x-3)=x^2-29$ $x=-7$

c) $(x+3)(x-3)=x^2-9$ azonosság

d) $(x+4)(2x-1)=x(7+x)-7$ nincs megoldás

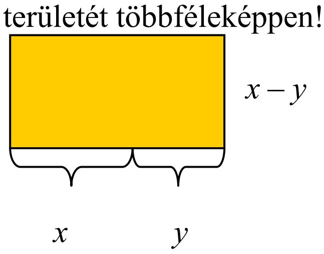
e) $(5+x)(5-x)+33=58$ $x=0$

f) $(x-3)(4+x)=0$ $x_1=3$ *és* $x_2=-4$

g) $x(2x-5)(7+x)=0$ $x_1=0$ *és* $x_2=5/2$ *és* $x_3=-7$

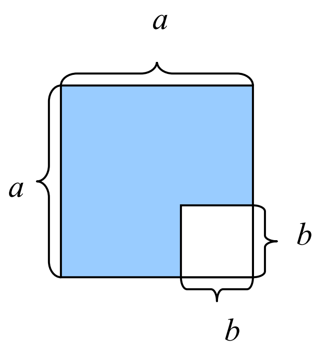
h) $(2x-3)(x+1)=29-x$ $x_1=4$ *és* $x_2=-4$

8. Add meg az arany téglalap területét többféleképpen!



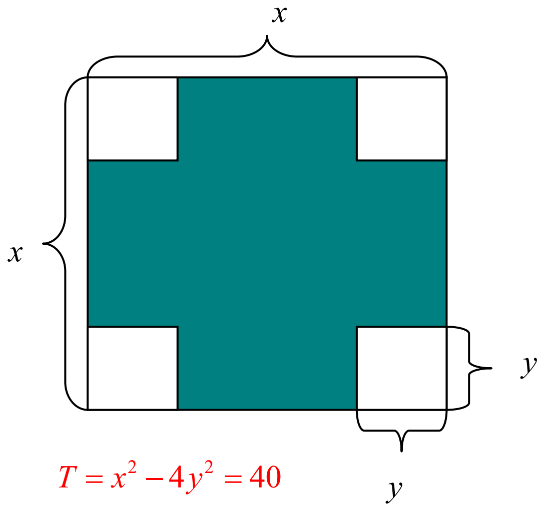
$$T=(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

9. Fejezd ki a hatszög (halványkék, megcsonkított négyzet) területét? Mekkora a terület mérőszáma, ha $a=6,2$ és $b=2,3$ hosszúságegység?



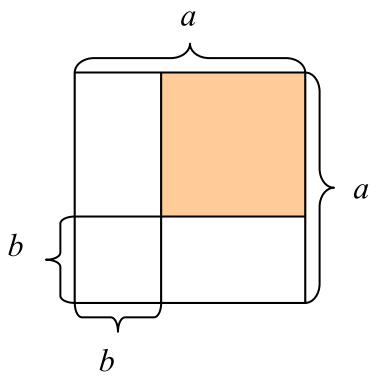
$$T=a^2-b^2=38,44-5,29=33,15$$

10. Fejezd ki a pávakék kereszt területét? Mekkora a terület mérőszáma, ha $x = 7$ és $y = 1,5$ hosszúságegység?



$T = x^2 - 4y^2 = 40$

11. Fejezd ki a kis barackszínű négyzet területét? Mekkora a terület mérőszáma, ha $a = 6,8$ és $b = 2,7$ hosszúságegység?



$T = (a - b)^2 = 16,81$

III. Egytagú kifejezés szorzattá bontása

1. Bontsd szorzattá minél többféleképpen! Keresd meg az alábbi számoknak, kifejezéseknek minél több osztóját (osztópárját), írd be ezeket a megfelelő négyzetekbe!

a) 167	**Osztó:**	1	–	–	–
	Osztópár:	167	–	–	–
b) 168	**Osztó:**	1	2	3	4
	Osztópár:	168	84	56	42
c) 169	**Osztó:**	1	13	–	–
	Osztópár:	122	13	–	–
d) 170	**Osztó:**	1	2	5	10
	Osztópár:	170	85	34	17
e) $3xy$	**Osztó:**	1	3	$3x$	x
	Osztópár:	$3xy$	xy	y	$3y$
f) $6a^3$	**Osztó:**	1	2	$6a$	$3a^2$
	Osztópár:	$6a^3$	$3a^3$	a^2	$2a$
g) $5x$	**Osztó:**	1	5		
	Osztópár:	$5x$	x		
h) $5x^2$	**Osztó:**	1	5	$5x$	
	Osztópár:	$5x^2$	x^2	x	
i) $7xy^2$	**Osztó:**	1	7	$7x$	$7xy$
	Osztópár:	$7xy^2$	xy^2	y^2	y
j) $3abc$	**Osztó:**	1	3	$2ab$	$2bc$
	Osztópár:	$3abc$	abc	$3c$	$3a$

2. Osztója-e? Ha igen, add meg az osztópárját!

Gyakorló feladat. Az utolsó négy példa (a **k)**-tól az **n)**-ig) csak szorgalminak javasolt!

a) A 324-nek a 27? Igen, $27 \cdot 12 = 324$.

b) A 15 a 645-nek? Igen, $15 \cdot 43 = 645$.

c) A 939-nek a 72? Nem.

d) A 28 a 728-nak? Igen, $28 \cdot 26 = 728$.

e) A $3y$ a $24x^2y^3$-nek? Igen, $3y \cdot 8x^2y^2 = 24x^2y^3$.

f) A $6a^2$-nek a $3b^2$? Nem.

g) A 37 a $37y^3$-nek? Igen, $37 \cdot y^3 = 37y^3$.

h) A $3xy^3$ a $3x^4y^5$-nek? Igen, $3xy^3 \cdot x^3y^2 = 3x^4y^5$.

i) A $3xy^3$ a $6x^4y$-nek? Nem.

j) A $3xy^3$-nek a $3xy^3$? Igen, $3xy^3 \cdot 1 = 3xy^3$.

k) A $3y$ a $7y^3$-nek? Igen, $3y \cdot \frac{7}{3}y^2 = 7y^3$.

l) A $6a^2$-nek a $4a$? Igen, $4a \cdot \frac{6}{4}a = 6a^2$.

m) A $2x^2$-nek az $3x$? Igen, $3x \cdot \frac{2}{3}x = 2x^2$.

n) A $16a^3b^2$-nek a $32a^3b^2$? Igen, $32a^3b^2 \cdot \frac{1}{2} = 16a^3b^2$.

3. Írd fel az algebra nyelvén!

Bár nem túl nehéz feladat, de nem kötődik szorosan ehhez a témakörhöz.

Az A szám 3-mal osztva 1-et ad maradékul;	$A = 3k + 1$; ahol k egész szám.
A B szám 12-vel osztva 7-et ad maradékul;	$B = 12l + 7$; ahol l egész szám.
A C szám páros;	$C = 2m$; ahol m egész szám.
A D szám páratlan.	$D = 2n + 1$; ahol n egész szám.

4. Gondoltam két számra, az egyik 13-mal osztva 12-t, a másik 13-mal osztva 5 maradékot ad. Írd fel az algebra nyelvén a két számot, összegüket, különbségüket, és szorzatukat is, majd olvasd le, hogy ezek mennyi maradékot adnak 13-mal osztva.

Bár nem túl nehéz feladat, de nem kötődik szorosan ehhez a témakörhöz.

$A = 13k + 12$ *és* $B = 13n + 5$, ahol k és n egész számok.

$A + B = 13k + 13n + 17$, ez 13-mal osztva 4 maradékot ad.

$A - B = 13k - 13n + 7$, ez 13-mal osztva 7 maradékot ad.

$A \cdot B = (13k + 12)\cdot(13n + 5) = 13^2 kn + 5\cdot 13k + 12\cdot 13n + 60$, ez 13-mal osztva 8 maradékot ad.

5. Az a szám 12-vel osztva 5-öt ad maradékul. Milyen maradékot ad a b szám 12-vel osztva, ha tudjuk, hogy

$a + b$ 12-es maradéka nulla? 7-et.
$a + b$ 12-es maradéka 4? 11-et.
$a \cdot b$ 12-es maradéka 5? 1-et.
$a \cdot b$ 12-es maradéka 10? 2-t.

Bár nem túl nehéz feladat, de nem kötődik szorosan ehhez a témakörhöz.

IV. A kiemelés: összegből csináljunk szorzatot!

1. Párosítsd össze az azonosakat! A lenti négyzetekbe sorrendbe írd be a betűket!

Javasolt minimális házi feladat.

I.	$3x - 3y$	**E**	$3x\cdot(1 - 2y + x)$
II.	$8a^3 + 2ab$	**E**	$2ab\cdot(4 + a^2)$
III.	$8a^2 + 2a^2b$	**É**	$2a\cdot(4a^2 + b)$
IV.	$8ab + 2a^3b$	**I**	$x^2y\cdot(5y - 3x)$
V.	$8a^2 + 2b^2$	**K**	$3\cdot(1 - x)$
VI.	$3x - 6xy + 3x^2$	**L**	$2a^2\cdot(4 + b)$
VII.	$5x^2y^2 - 3x^3y$	**M**	$2\cdot(4a^2 + b^2)$
VIII.	$3 - 3x$	**S**	$3\cdot(x - y)$

I.	**II.**	**III.**	**IV.**	**V.**	**VI.**	**VII.**	**VIII.**
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
S	**É**	**L**	**E**	**M**	**E**	**I**	**K**

(visszafelé olvasva KIEMELÉS)

2. Az összeg alakú kifejezéseket alakítsd át szorzat alakúvá! Beszorzással ellenőrizz!

a) $15x^2 - 5x =$ $\quad = 5x \cdot (3x - 1)$

b) $3xay + 3yxb =$ $\quad = 3xy \cdot (a + b)$

c) $a^4 - a^5 =$ $\quad = a^4 \cdot (1 - a)$

d) $7x^2 + 3x^2 =$ $\quad = 10x^2$

e) $5a^2b^2 - 10ab =$ $\quad = 5ab \cdot (ab - 2)$

f) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x =$ $\quad = \frac{1}{2}x \cdot (3x - 1)$

3. Az összeg alakú kifejezéseket alakítsd át szorzat alakúvá!

a) $3 \cdot (x + 2) + x \cdot (x + 2) =$ $\quad = (3 + x) \cdot (x + 2)$

b) $4 \cdot (3 - x) - x \cdot (3 - x) =$ $\quad = (4 - x) \cdot (3 - x)$

c) $2x \cdot (x - 2) - 3 \cdot (x - 2) =$ $\quad = (2x - 3) \cdot (x - 2)$

d) $3x \cdot (1 + x) - 5 \cdot (1 + x) =$ $\quad = (3x - 5) \cdot (1 + x)$

e) $3x + 6 - x \cdot (x + 2) =$ $\quad = (3 - x) \cdot (x + 2)$

f) $5 \cdot (2 - x) + 2x - x^2 =$ $\quad = (5 + x) \cdot (2 - x)$

g) $5x - 15 + x^2 - 3x =$ $\quad = (5 + x) \cdot (2 - x)$

h) $6y + 9xy + 4 + 6x =$ $\quad = (3y + 2) \cdot (2 + 3x)$

i) $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + x^2 + \frac{xy}{2} =$ $\quad = \left(\frac{1}{3} + x\right) \cdot \left(x + \frac{y}{2}\right)$

j) $\frac{x}{5} + x^2 + \frac{y}{15} + \frac{xy}{3} =$ $\quad = \left(\frac{1}{5} + x\right) \cdot \left(x + \frac{y}{3}\right)$

4. Alakítsd az összegeket szorzatokká, a szorzatokat összegekké!

a) $a \cdot \left(2a - \frac{b}{2}\right) =$ $\quad = 2a^2 - \frac{ab}{2}$

b) $a \cdot b^2 \cdot c - a^2 \cdot b^2 + b^3 \cdot c^2 =$ $\quad = b^2 \cdot (ac - a^2 + bc^2)$

c) $3 - 3x + 2 \cdot (1 - x) =$ $\quad = 5 \cdot (1 - x)$

d) $(x + 1) \cdot (x^2 - 1) =$ $\quad = x^3 + x^2 - x - 1$

e) $(x + 1)^3 =$ $\quad = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

f) $(x - 1)^3 =$ $\quad = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

g) $5x - 10y + x^2 - 2xy =$ $\quad = (5 + x) \cdot (x - 2y)$

h) $5x - 10y + 4x - 8y =$ $\quad = 9 \cdot (x - 2y)$

V. A kiemelés gyakorlati alkalmazásai

1. Fejben számold ki a következő szorzatokat! A gondolatmenetedet írd a pontozott vonalra!

a) $73 \cdot 52 + 27 \cdot 52 =$ .... =5200

b) $34 \cdot 23 + 34 \cdot 31 + 34 \cdot 46 =$ .... =3400

c) $48 \cdot 67 - 67 \cdot 68 + 40 \cdot 67 =$ .... =1340

d) $324 \cdot 72 - 72 \cdot 160 + 36 \cdot 72 =$ .... =14400

e) $112 \cdot 73 - 73 \cdot 98 - 14 \cdot 73 =$ .... =0

f) $78 \cdot 35 + 47 \cdot 35 + 75 \cdot 35 =$ .... =7000

2. Először keresd meg, hogy mely értékeket nem vehetnek fel a változók, majd egyszerűsítsd a kifejezéseket!

a) $\frac{2x+4}{6x}=$ $x\neq 0$ $=\frac{x+2}{3x}$

b) $\frac{x+3xy}{5\cdot(1+3y)}=$ $y\neq -\frac{1}{3}$ $=\frac{x}{5}$

c) $\frac{5x+10xy}{2x^2}=$ $x\neq 0$ $=\frac{5+10y}{2x}$

d) $\frac{2x^2+18xy}{5\cdot(x+9y)}=$ $x+9y\neq 0$ $=\frac{2x}{5}$

e) $\frac{7\cdot(x+x^2)}{3x+3}=$ $x\neq -1$ $=\frac{7x}{3}$

3. Többet ésszel, mint erővel!
Számold ki a következő kifejezések helyettesítési értékét, ha $a=1,2$ és $b=-10$.

a) $\frac{a^2+ab}{a}=$ $=-8,8$

b) $\frac{6b-15}{3}=$ $=-25$

c) $\frac{3\cdot(a^2+2b)}{4a^2+8b}=$ $=\frac{3}{4}$

d) $\frac{9a+6+12ab}{3ab}=$ $=\frac{-34,4}{-12}=\frac{344}{120}=\frac{43}{15}\approx 2,8\dot{6}$

e) $\frac{3a-2b}{3a-2b}=$ $=1$

f) $\frac{3a-2b}{2a-3b}=$ $=\frac{23,6}{32,4}=\frac{236}{324}=\frac{59}{81}\approx 0,73$

g) $\frac{3a-2b}{2b-3a}=$ $=-1$

h) $\frac{3a-2b}{3b-2a}=$ $=\frac{23,6}{-32,4}=-\frac{236}{324}=-\frac{59}{81}\approx -0,73$

4. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $3\cdot(x-5)=0$ $x=5$

b) $x\cdot(x+7)=0$ $x_1=0; x_2=-7$

c) $\left(x-\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{3}{4}x=0$ $x_1=\frac{7}{8}; x_2=0$

d) $x^2-5x=0$ $x_1=0; x_2=5$

e) $3x-x^2=0$ $x_1=0; x_2=3$

f) $(x-2)\cdot(x+7)=0$ $x_1=2; x_2=-7$

g) $3x\cdot(x+2)(x-5,2)\left(\frac{2}{3}-x\right)=0$ $x_1=0; x_2=-2; x_3=5,2; x_4=\frac{2}{3}$

h) $x^2+3x+12+4x=0$ $x_1=-3; x_2=-4$

i) $5x-15+x^2-3x=0$ $x_1=3; x_2=-5$

5. Fejben számold ki a következő szorzatokat! A gondolatmenetedet írd a pontozott vonalra!

a) $15 \cdot 15 =$ .... $=225$
b) $25 \cdot 25 =$ .... $=625$
c) $35 \cdot 35 =$ .... $=1225$
d) $45 \cdot 45 =$ .... $=2025$
e) $55 \cdot 55 =$ .... $=3025$
f) $65 \cdot 65 =$ .... $=4225$
g) $75 \cdot 75 =$ .... $=5625$
h) $85 \cdot 85 =$ .... $=7225$
i) $95 \cdot 95 =$ .... $=9025$
j) $105 \cdot 105 =$ .... $=11025$
k) $125 \cdot 125 =$ .... $=15625$
l) $195 \cdot 195 =$ .... $=38025$
m) $495 \cdot 495 =$ .... $=245025$
n) $5 \cdot 5 =$ .... $=25$

6. Fejben számold ki a következő szorzatokat! A gondolatmenetedet írd a pontozott vonalra!

a) $39 \cdot 41 =$ .... $=1599$
b) $52 \cdot 48 =$ .... $=2496$
c) $73 \cdot 67 =$ .... $=4891$
d) $102 \cdot 98 =$ .... $=9996$
e) $201 \cdot 199 =$ .... $=39999$
f) $63 \cdot 57 =$ .... $=3591$
g) $81 \cdot 79 =$ .... $=6399$
h) $72 \cdot 68 =$ .... $=4896$

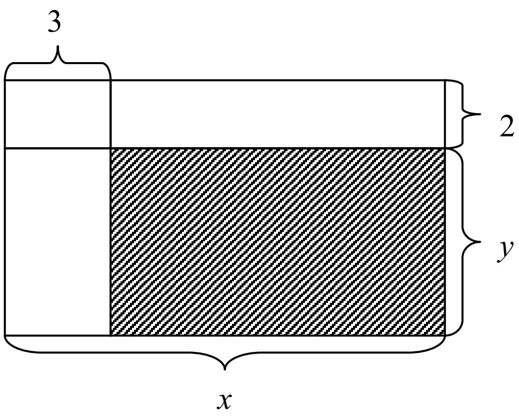
VI. Rendszerező gyakorlás

1. Készíts téglalapos rajzot az órán tanultak alapján a szorzatokhoz. Bontsd fel a szorzatokat, és a rajz segítségével igazold az azonosságot!

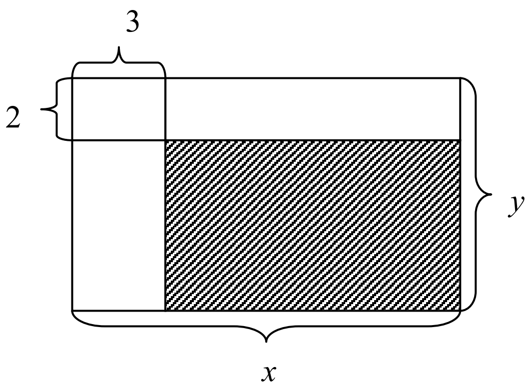
a) $a \cdot (b+2) =$ $= ab + 2b$
b) $(a+4) \cdot b =$ $= ab + 4a$
c) $4 \cdot (b+3) =$ $= 4b + 12$
d) $2 \cdot (a+b) =$ $= 2a + 2b$
e) $(a+b) \cdot b =$ $= ab + b^2$
f) $(a+1) \cdot (b+3) =$ $= ab + 3a + b + 3$
g) $(a+3) \cdot (b+3) =$ $= ab + 3a + 3b + 9$
h) $(a+4) \cdot (a+3) =$ $= a^2 + 3a + 4a + 12$
i) $(a+2) \cdot (a+2) =$ $= a^2 + 2a + 2a + 4$
j) $(b+3) \cdot (b+3) =$ $= b^2 + 3b + 3b + 9$
k) $(a+2+b) \cdot 3 =$ $= 3a + 6 + 3b$
l) $(a+b+4) \cdot (a+2) =$ $= a^2 + 2a + ab + 2b + 4a + 8$
m) $(3+b) \cdot (a+2+b) =$ $= 3a + 6 + 3b + ab + 2b + b^2$

2. Fejezd ki a besatírozott téglalap területét szorzatalakkal és összegalakkal is!

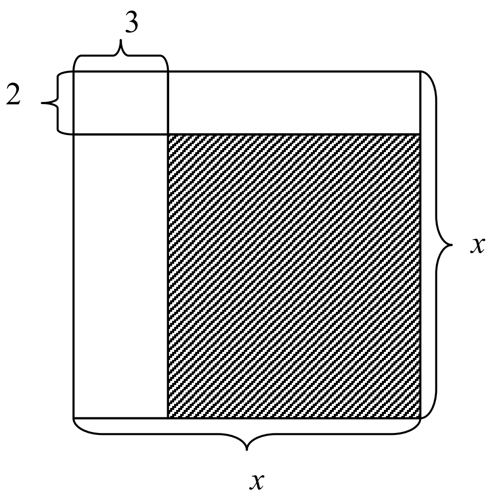
a) $(x-3)\cdot y = xy-3y$



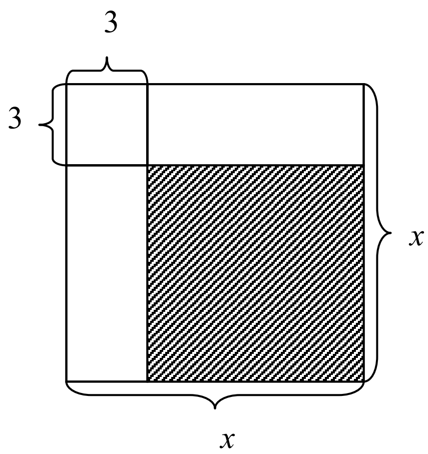
b) $(x-3)\cdot(y-2) = xy-2x-3y+6$



c) $(x-3)\cdot(x-2) = x^2-2x-3x+6$



d) $(x-3)^2 = x^2-6x+9$



3. Legyen $a \geq 5$ és $b \geq 3$ hosszúságegység. Készíts minden feladathoz a és b oldalakkal téglalapot (röviden $a \times b$ téglalapot), és satírozd be magadott részt. Bontsd fel a szorzatot, és a rajz segítségével igazold az azonosságot!

a) $(a-1)\cdot b =$ $= ab-b$

b) $a\cdot(b-2) =$ $= ab-2a$

c) $(a-1)\cdot(b-1) =$ $= ab-a-b+1$

d) $(a-1)\cdot(b-2) =$ $= ab-2a-b+2$

e) $(a-3)\cdot(b-2) =$ $= ab-2a-3b+6$

4. Algebrai úton a zárójelek felbontásával, és geometriai úton téglalapok segítségével is igazold az alábbi azonosságokat!

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$

c) $(3+b)^2 = 9 + 6b + b^2$

d) $(a+2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$

e) $(3a+2)^2 = 9a^2 + 12a + 4$

f) $(2a+3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

g) $(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1$

h) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

i) $(b-3)^2 = b^2 - 6a + 9$

0821 – 1. tanári melléklet: Algebrai Dominó Készlet (40+2 darab)

A vastag vonalak mentén szétvágandó! Táblára rögzíthető, nagyméretű (1 kártya legyen min. 24 cm x 12 cm méretű) kártyák. Osztályonként 1 készlet, vastag kartonra nyomva, laminálva. Ez csak egy kicsinyített, összefoglaló táblázat.

Ez a pót-	kártya	Ez a pót-	kártya		
				$2\ (x + 3)$	$(y + 2x) \cdot b$
$by + 2bx$	$4k + 40$	$2 \cdot (2k + 20)$	$80 \cdot 30 + 80 \cdot 7$	$80 \cdot 37$	$(15 + n) \cdot 4$
$60 + 4n$	$y \cdot (b + m)$	$by + my$	$6 \cdot (2x - 9)$	$12x + (-54)$	$4n \cdot 17y$
$68ny$	$8 \cdot (7x - 6)$	$56x - 48$	$(R + D) \cdot 2$	$R \cdot 2 + D \cdot 2$	$6 \cdot (3 \cdot 7)$
$18 \cdot 7$	$6\ (8 - 2x)$	$48 - 12x$	$(3 - x) \cdot 2$	$6 - 2x$	$(-15) \cdot 46$
$46 \cdot 8 - 46 \cdot 23$	$3a - 3b$	$3\ (a - b)$	$(-5a)^2$	$25a^2$	$10y \cdot 10z$
$100yz$	$6k + 18$	$6 \cdot (k + 3)$	$4x^2 - 2x$	$2x\ (2x - 1)$	$19 \cdot 73$
$20 \cdot 73 - 73$	$ty + ny$	$(t + n) \cdot y$	$43m + 9m$	$52m$	$2u + 4u$
$6u$	$(3k - 2c)\ m$	$3km - 2cm$	$(5 - 2x) \cdot 3$	$15 - 6x$	$3 \cdot (2a - a)$

$3a$	$mc^2 – m$	$(c^2 – 1) \cdot m$	$(3 – x) \cdot (–2)$	$2x – 6$	$(3 – ab) \cdot 2$
$6 – 2ab$	$3m \cdot 4m$	$12m^2$	$29 \cdot 47$	$30 \cdot 47 – 47$	$H \cdot (OH)$
H^2O	$3 \cdot (y – 2)$	$(–6) + 3y$	$–(R – CD)$	$CD – R$	$101 \cdot 27$
$100 \cdot 27 + 27$	w^3	$w \cdot w \cdot w$	$63 \cdot 5$	$(63 \cdot 10) : 2$	$(D – R) \cdot NS$
$DNS – RNS$	$57 \cdot (10 : 3)$	$(57 \cdot 10) : 3$	$A \cdot B \cdot C$	$C \cdot B \cdot A$	$6 + 2x$

0821 – 2. tanári melléklet Algebrai osztókártyák (30 + 6 db)
Tábláról jól látható méretben (kártyánként min. 16 cm x 16 cm), 1 készlet kell osztályonként kartonpapírból. A kártyákat szét kell vágni a fekete vonalak mentén. Táblára rögzíthetőek legyenek! Ez csak egy kicsinyített, összefoglaló táblázat!

a	a^2	a^3	b	b^2	b^3
ab	a^2b	a^3b	ab^2	ab^3	a^2b^2
a^3b^2	a^2b^3	a^3b^3	$2a$	$2a^2$	$2a^3$
$2b$	$2b^2$	$2b^3$	$2ab$	$2a^2b$	$2a^3b$
$2ab^2$	$2ab^3$	$2a^2b^2$	$2a^3b^2$	$2a^2b^3$	$2a^3b^3$
$4a^4b^5$	$6a^2b^2$	$6a^2$	b^3	$8ab^2$	$2a^3b$

0821 – 3. tanári melléklet: Kiegészítő táblázat az Algebrai osztókártyákhoz:

Segítség a tanároknak az adott játék irányításához, ellenőrzéséhez. Osztályonként 1 példány vékony kartonra nyomva a tanárnak.

Algebrai Osztókártyák (kiemelésnek megfelelő) osztói	Kiegészítő táblázat

1. $6a^2$

a	a^2
$2a$	$2a^2$

2. $8ab^2$

a	b	b^2	ab	ab^2
$2a$	$2b$	$2b^2$	$2ab$	$2ab^2$

3. b^3

b	b^2	b^3

4. $6a^2b^2$

a	a^2	b	b^2	ab	a^2b	ab^2	a^2b^2
$2a$	$2a^2$	$2b$	$2b^2$	$2ab$	$2a^2b$	$2ab^2$	$2a^2b^2$

5. $4a^4b^5$

a	a^2	a^3	b	b^2	b^3	ab	a^2b	a^3b	ab^2	a^2b^2	a^3b^2	ab^3	a^2b^3	a^3b^3
$2a$	$2a^2$	$2a^3$	$2b$	$2b^2$	$2b^3$	$2ab$	$2a^2b$	$2a^3b$	$2ab^2$	$2a^2b^2$	$2a^3b^2$	$2ab^3$	$2a^2b^3$	$2a^3b^3$

6. $2a^3b$

a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
$2a$	$2a^2$	$2a^3$	$2b$	$2ab$	$2a^2b$	$2a^3b$

0821 – 4. tanári melléklet /1. : Összefoglaló megoldás-táblázat a PUZZLE-játékhoz:

Segítség a tanároknak a játék ellenőrzéséhez. Osztályonként 1 példány vékony kartonra nyomva a tanárnak.

	A csoport, G csoport	*B csoport, H csoport*	*C csoport*	*D csoport*	*E csoport*	*F csoport*
Fehér	$(a+3)\cdot 4=4a+12$	$(a+3)\cdot 4=4a+12$	$(a+3)\cdot 4=4a+12$	$(a+3)\cdot 4=4a+12$	$(a+3)\cdot 4=4a+12$	$(a+3)\cdot 4=4a+12$
Kék	$(b+4)\cdot b=b^2+4b$	$(b+4)\cdot b=b^2+4b$	$(b+4)\cdot b=b^2+4b$	$(b+4)\cdot b=b^2+4b$	$(b+4)\cdot b=b^2+4b$	$(b+4)\cdot b=b^2+4b$
Világos-narancs	$(a+b)\cdot a=a^2+ab$	$(a+b)\cdot a=a^2+ab$	$(a+b)\cdot a=a^2+ab$	$(a+b)\cdot a=a^2+ab$	$(a+b)\cdot a=a^2+ab$	$(a+b)\cdot a=a^2+ab$
Szürke	$(a+4)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+4b+12$	$(a+4)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+4b+12$	$(a+4)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+4b+12$	$(a+4)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+4b+12$	$(a+4)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+4b+12$	$(a+4)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+4b+12$
Világos-zöld	$(a+4)\cdot b=ab+4b$	$(b+3)\cdot 3=3b+9$	$(b+3)\cdot 4=4b+12$	$(b+3)\cdot a=ab+3a$	$(b+3)\cdot b=b^2+3b$	$(b+4)\cdot a=ab+4a$
Világos-türkiz	$(a+3)\cdot(b+4)=$ $=ab+4a+3b+12$	$(a+4)\cdot(b+4)=$ $=ab+4a+4b+16$	$(a+3)\cdot(a+3)=$ $=a^2+3a+3a+9$	$(a+3)\cdot(a+4)=$ $=a^2+4a+3a+12$	$(a+4)\cdot(a+4)=$ $=a^2+4a+4a+16$	$(b+3)\cdot(b+3)=$ $=b^2+3b+3b+9$
Rózsaszín	$(a+b)\cdot(b+4)=$ $=ab+4a+b^2+4b$	$(a+b)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+b^2+3b$	$(a+b)\cdot(a+4)=$ $=a^2+4a+ab+4b$	$(a+b)\cdot(a+3)=$ $=a^2+3a+ab+3b$	$(b+3)\cdot(b+4)=$ $=b^2+4b+3b+12$	$(b+4)\cdot(b+4)=$ $=b^2+4b+4b+16$
Barack-színű	$(b+4)\cdot 3=3b+12$	$(b+4)\cdot 4=4b+16$	$(a+b)\cdot 3=3a+3b$	$(a+b)\cdot 4=4a+4b$	$(a+b)\cdot b=ab+b^2$	$(a+3)\cdot(b+3)=$ $=ab+3a+3b+9$
Levendula	$(a+3)\cdot 3=3a+9$	$(a+3)\cdot b=ab+3b$	$(a+3)\cdot a=a^2+3a$	$(a+4)\cdot a=a^2+4a$	$(a+4)\cdot 3=3a+12$	$(a+4)\cdot 4=4a+16$
Vörös	$(a+b)\cdot(a+b)=$ $=a^2+ab+ab+b^2$	$(a+b)\cdot(a+b)=$ $=a^2+ab+ab+b^2$	$(a+b)\cdot(a+b)=$ $=a^2+ab+ab+b^2$	$(a+b)\cdot(a+b)=$ $=a^2+ab+ab+b^2$	$(a+b)\cdot(a+b)=$ $=a^2+ab+ab+b^2$	$(a+b)\cdot(a+b)=$ $=a^2+ab+ab+b^2$

Több megoldás lehetséges amiatt, hogy $b=2$ és $a=5$, így $b+3=a$:

$a^2+ab=3a+4a$	$3a=3b+9$	$16=4b+4b$
$a^2=ab+3a$	$4a=4b+12$	$12=3b+3b$
$ab=b^2+3b$		

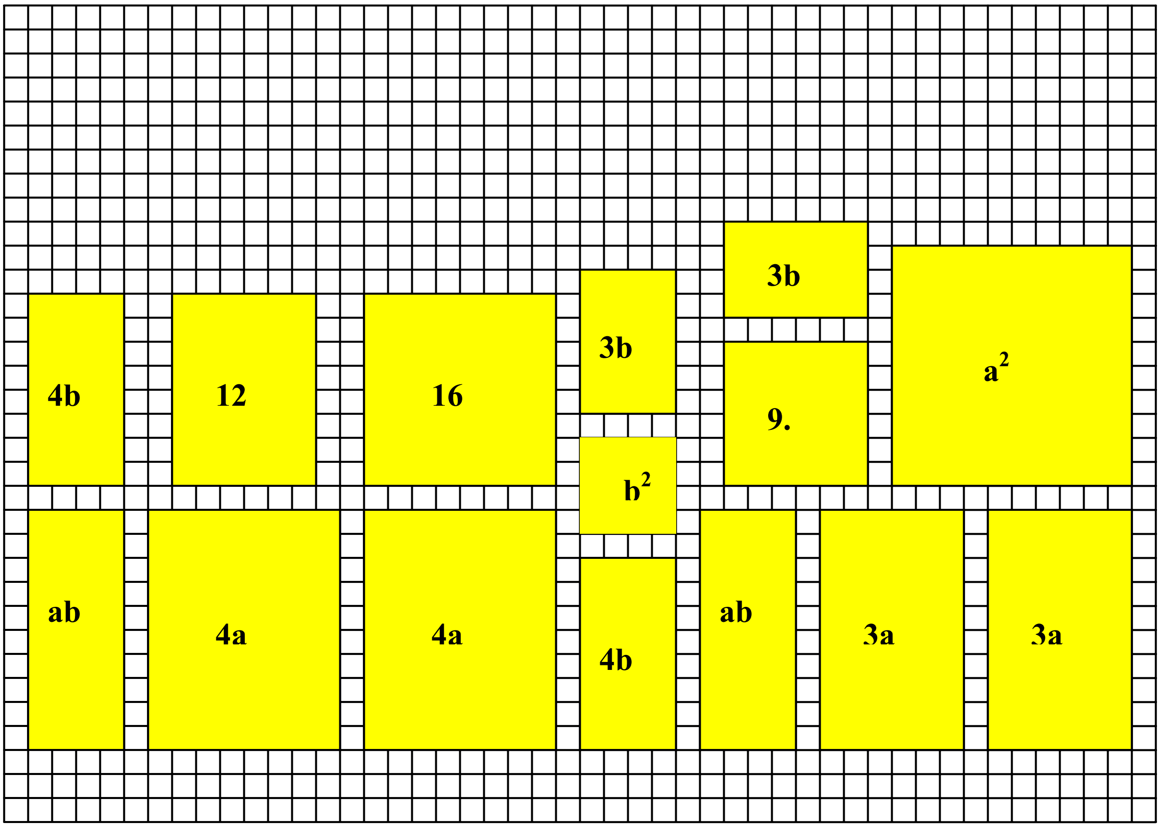
0821 – 4. tanári melléklet /2. : Összefoglaló megoldás-táblázat a PUZZLE-játékhoz:

Segítség a tanároknak a játék ellenőrzéséhez. Osztályonként 1 példány vékony kartonra nyomva a tanárnak.

Az adott számok területegységben értendők.

	A csoport G csoport	*B csoport H csoport*	*C csoport*	*D csoport*	*E csoport*	*F csoport*
Fehér	32	32	32	32	32	32
Kék	12	12	12	12	12	12
Világos-narancs	35	35	35	35	35	35
Szürke	45	45	45	45	45	45
Világos-zöld	18	15	20	25	10	30
Világos-türkiz	48	54	64	72	81	25
Rózsaszín	42	35	63	56	30	36
Barack-színű	18	24	21	28	14	40
Levendula	24	16	40	45	27	36
Vörös	49	49	49	49	49	49

0821 – 5. tanári melléklet: A PUZZLE játék mozaiklapocskái
Osztályonként 8 db (csoportonként 1 db), vékony kartonlapra nyomva, laminálva. A játékhoz szét kell vágni darabokra.



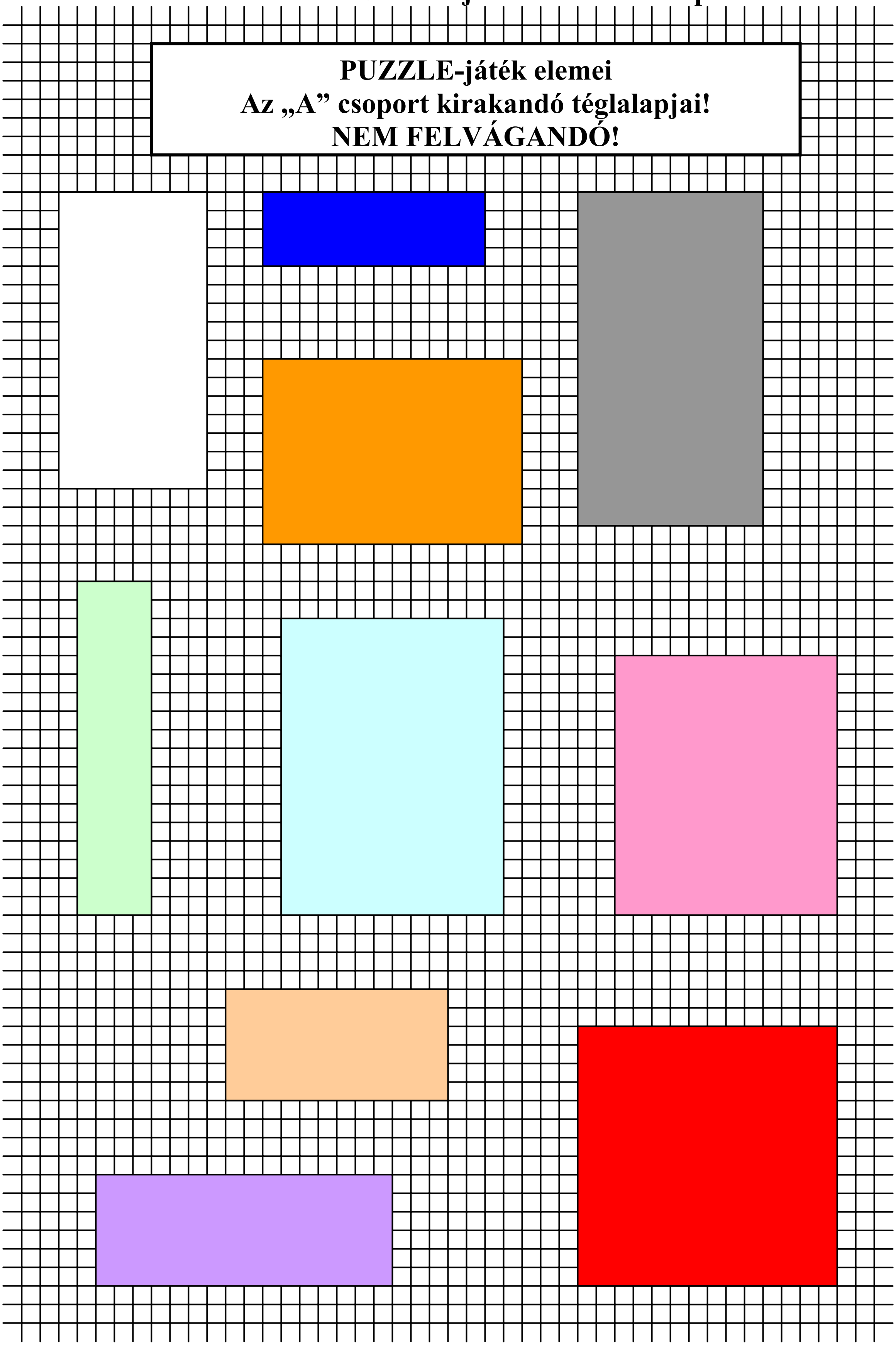
0821 – 6. tanári melléklet: Megoldólap a PUZZLE-játékhoz

8 db kell (csoportonként 1 db), vékony kartonlapra nyomva, laminálva ebben a méretben. Letörölhető filccel írjanak rá a gyerekek!

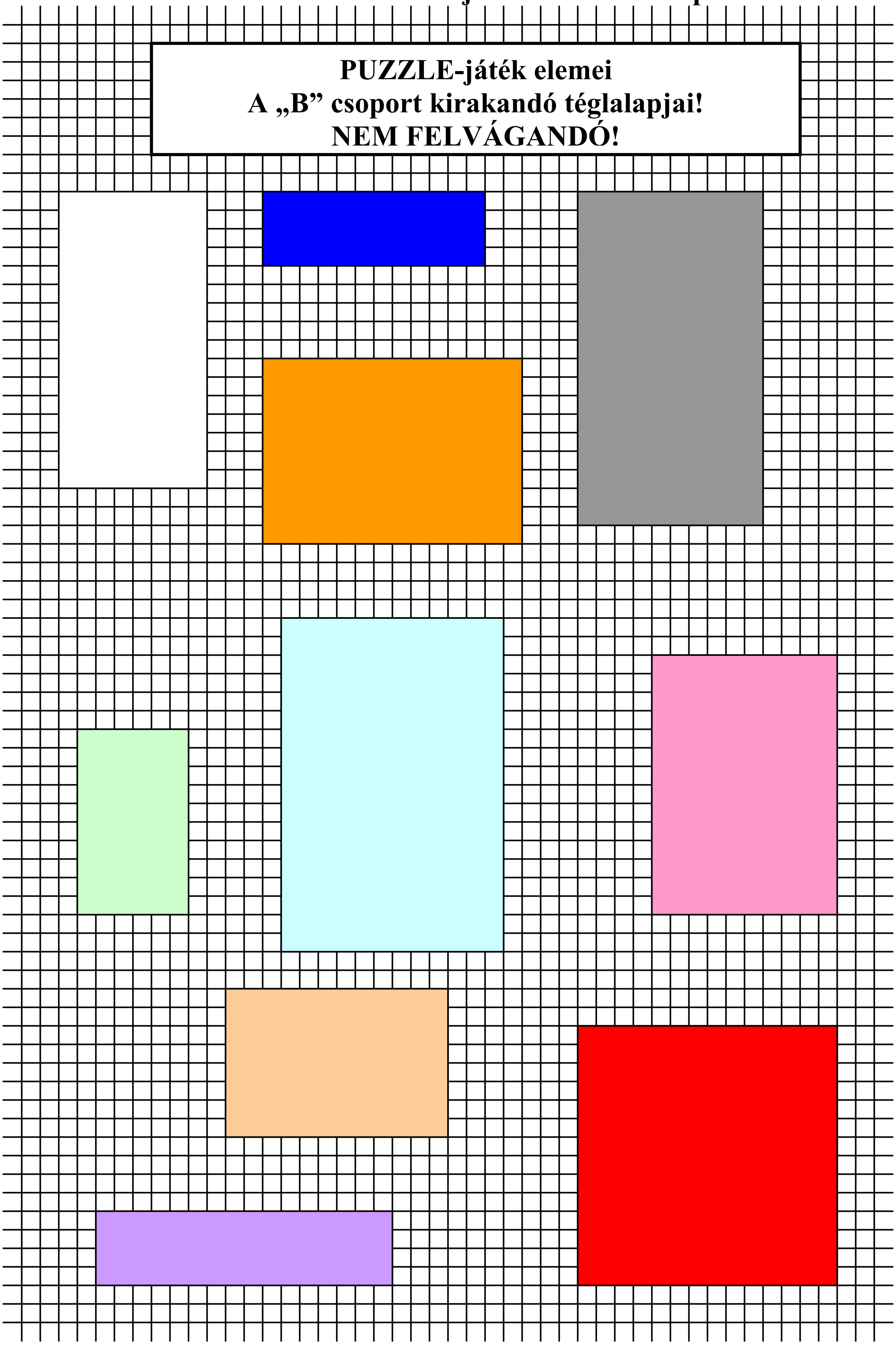
… csoport	*Oldalak szorzata*	*Darabok összege*
Fehér		
Kék		
Világosnarancs		
Szürke		
Világoszöld		
Világostürkiz		
Rózsaszín		
Barackszínű		
Levendula		
Vörös		

A következő 6 oldalból 1 készlet kell (A csoport–H csoport), vékony kartonlapra nyomva, lehetőleg laminálva.

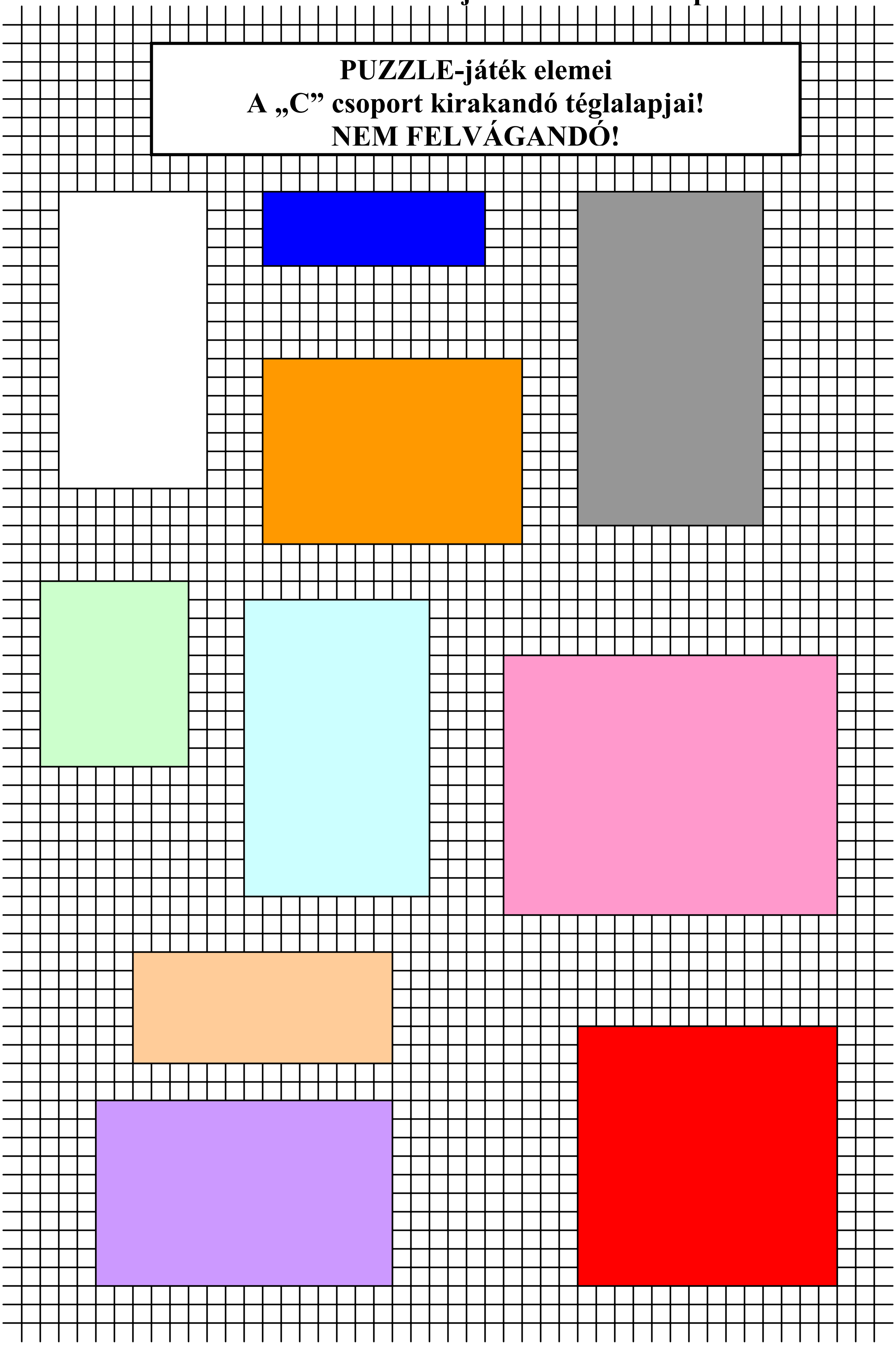
0821 – 7. tanári melléklet: A PUZZLE játék elemei: A csoport



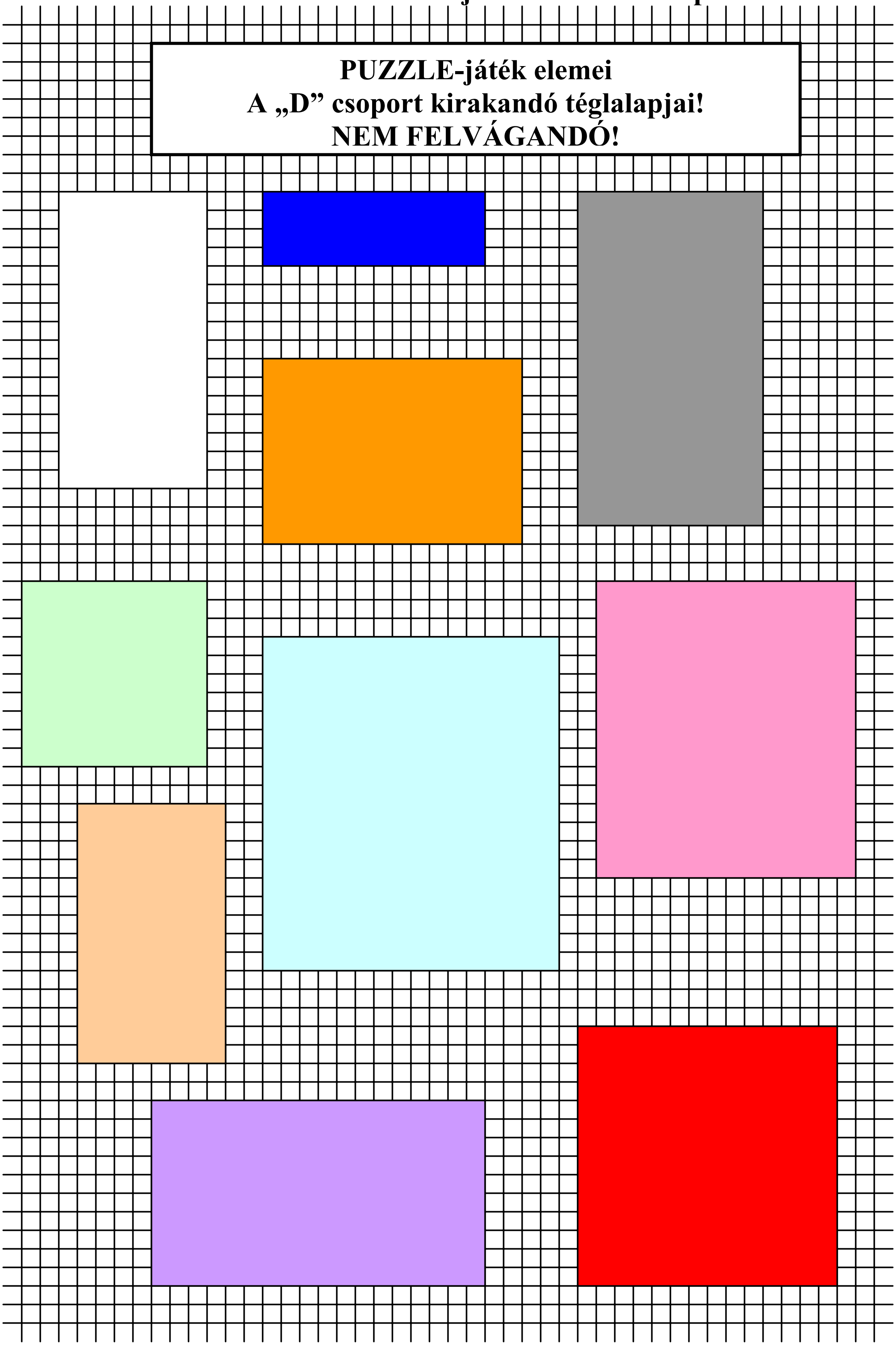
0821 – 7. tanári melléklet: A PUZZLE játék elemei: B csoport



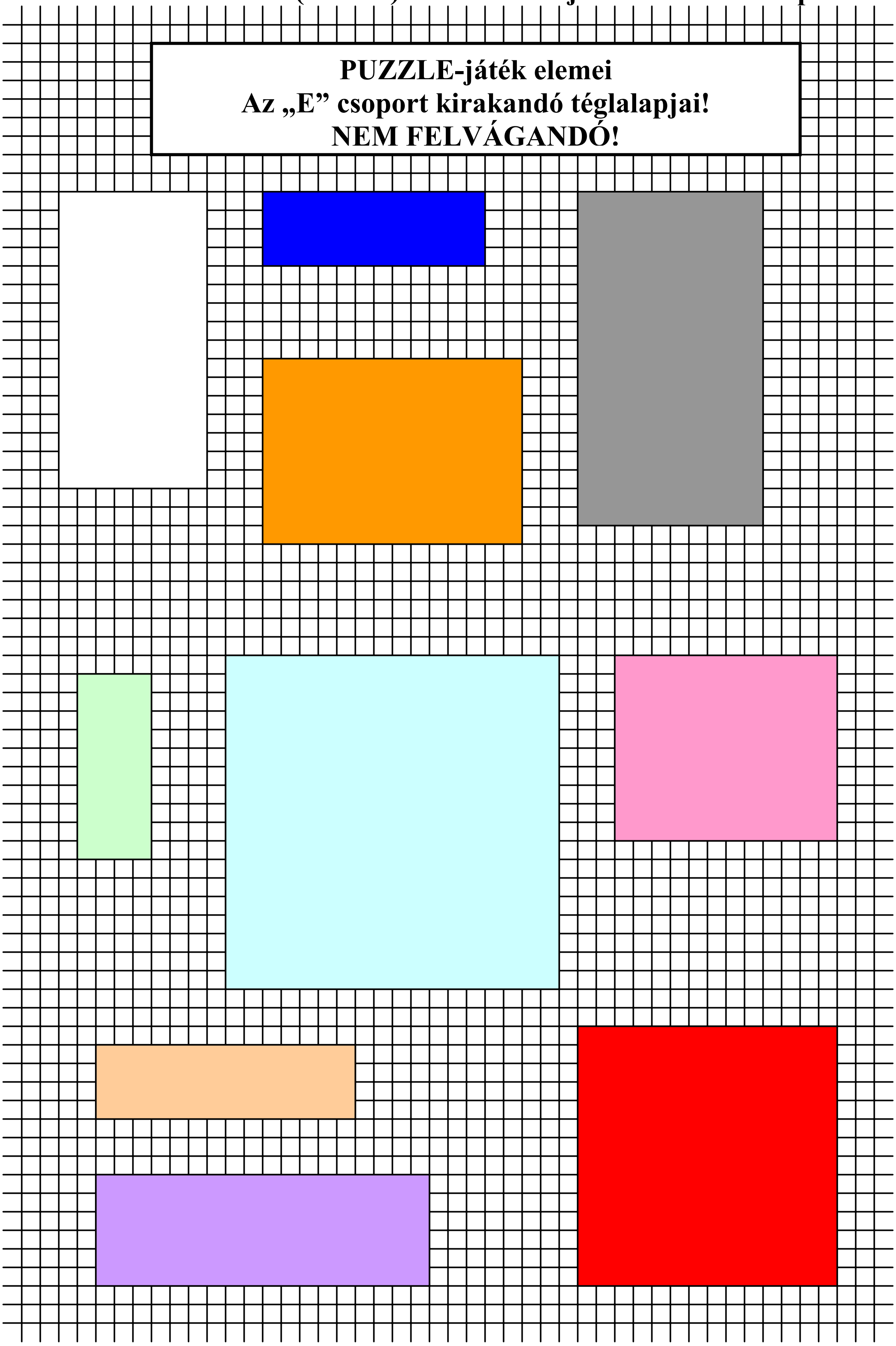
0821 – 7. tanári melléklet: A PUZZLE játék elemei: C csoport



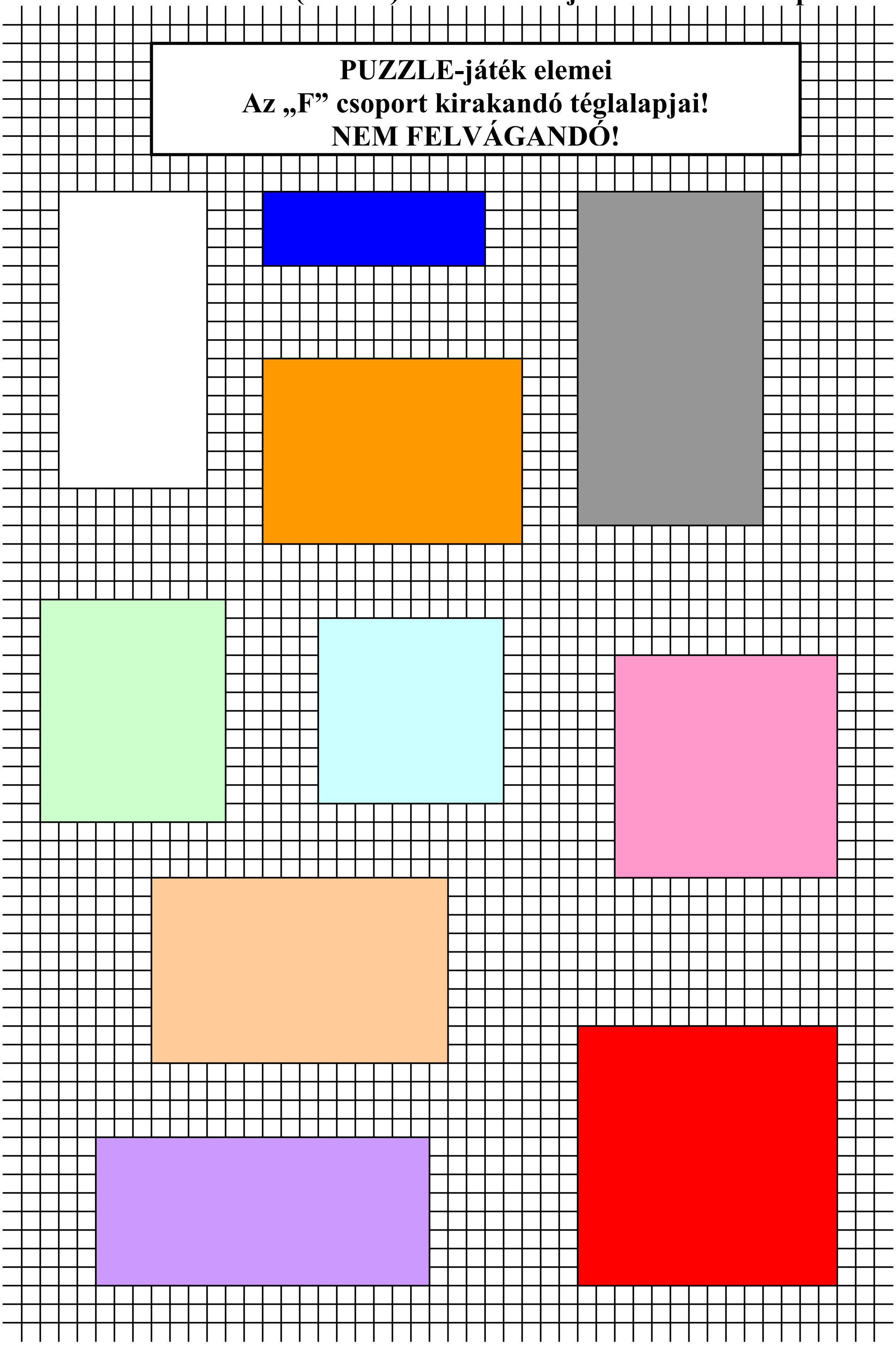
0821 –7. tanári melléklet : A PUZZLE játék elemei: D csoport



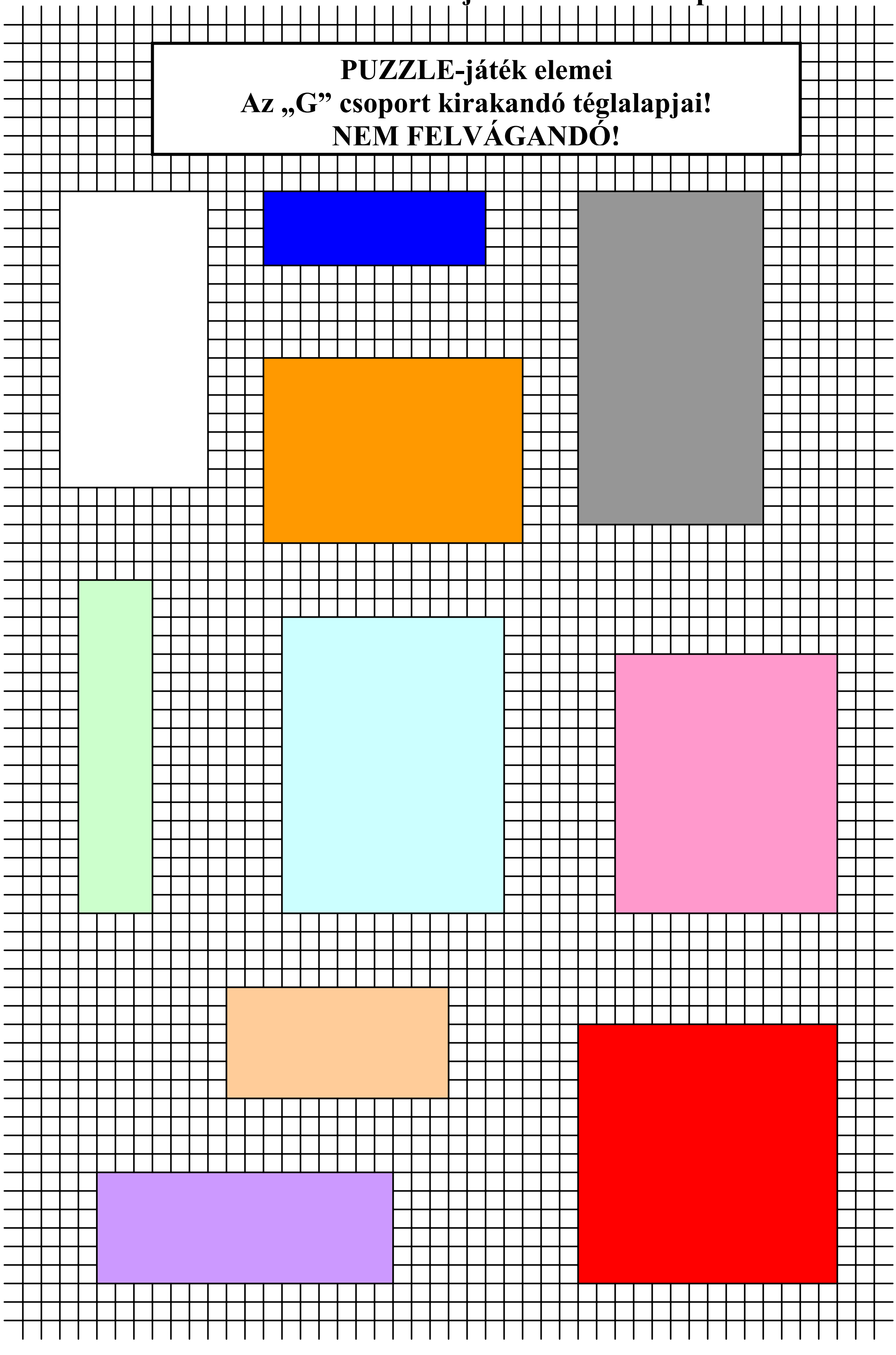
0821 –7. tanári melléklet (tanulói): A PUZZLE játék elemei: E csoport



0821 –7. tanári melléklet (tanulói): A PUZZLE játék elemei: F csoport



0821 – 7. tanári melléklet: A PUZZLE játék elemei: G csoport



0821 – 7. tanári melléklet: A PUZZLE játék elemei: H csoport