0812. MODUL

ARITMETIKA ÉS ALGEBRA ISMÉTLÉS

Azonosságok

KÉSZÍTETTE: OROSHÁZI KATALIN

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Az azonosság fogalmának értelmezése. A hatványozás áttekintése. Azonos alapú hatványok szorzásának és osztásának ismétlése és általánosítása egész kitevő esetén. Tapasztalatgyűjtés hatvány hatványozásában, azonos kitevőjű hatványok szorzása és osztása területén, valamint szorzat és hányados hatványozásában. Hipotézis felállítása. Az újabb hatványazonosságok általánosítása, a megértett összefüggések pontos megfogalmazása, a tanultak eszközként való alkalmazása.
Időkeret	5 óra
Ajánlott korosztály	8. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Tágabb környezetben*: nagy és kis számok, adatok (csillagászat, kémia, mikrobiológia, műszaki tudományok), képletek. *Szűkebb környezetben:* műveletek, a számolás gyorsítása. Számok prímtényezős alakja. Síkidomok kerülete, területe. Testek felszíne, térfogata. A képletek értelmezése. Kombinatorikai problémák.
A képességfejlesztés fókuszai	Becslés, számolás. Mennyiségi következtetések. A matematikai fogalmak használata a mindennapi életben. Segédeszközök – számológép, hatványtáblázatok, lexikonok – használata. Matematikai szövegek értelmezése, elemzése. Megfigyelések nyomán hipotézisek felállítása. Bizonyítási igény. Pontos fogalmazás, a szaknyelv helyes használata. Vitakészség.

AJÁNLÁS

Tartsuk fenn az oldott, együttműködő légkört. Vállaljuk föl, a tanár nem feltétlenül okosabb, de nagy valószínűséggel tapasztaltabb a diákjainál. Ajánljuk föl, hogy ezt az adottságot használják fel ismeretszerzésükben a diákjaink!
A feladatok milyensége szerint váltogassuk az egyéni, a csoport (páros és négyes) és a frontális munkát.
Továbbra is minden órán foglalja össze egy tanuló az előző órán történteket néhány mondatban és/vagy azt, hogy az adott témakörben mit tudnak eddig. A többiek egészíthessék ki.
Lehetőség: a modul első három óráján a csoportok munkáját jutalmazhatjuk, pl. szignált korongokkal, amelyekkel licitálhatnak a modul 4. órájának témáira. Ha ez ösztönzően hat a csoportokra, használhatjuk a módszert a későbbiekben is.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Feladatgyűjtemény, betűrejtvények, könyv, kártyák, matematikai szövegek, tangram lapok

ÉRTÉKELÉS

Irányított önértékelés

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. Hatványozás; a hatványozás azonosságai I.			
1.	Az előző óra összefoglalása (A házi feladat ellenőrzése. Számkitaláló)	Ismétlés	dobókockák,
2.	Az azonosság fogalma (Azonosan egyenlő algebrai kifejezések helyettesítési értékeinek összehasonlítása.)	Segédeszköz használat (számológép, táblázatok). Számolási készség.	1. feladatlap 1. 1. tanári melléklet: algebrai kifejezések kártya
3.	A hatványozásról tanultak ismétlése (A jelölések pontosítása, helyes zárójelezés.)	A tanultak tudatos felidézése. Az együttható és a kitevő megkülönböztetése.	1. feladatlap 2. 3.
4.	Azonos alapú hatványok szorzása és osztása (a tanultak felelevenítése, általánosítása, az azonosságok igazolása.)	Felidézés. Következtetés. Általánosítás. Tanító és tanuló szerepek gyakorlása.	1. feladatlap 4.
5.	Hatvány hatványozása (Tapasztalatgyűjtés, általánosítás, „bizonyítás” hatvány hatványozásáról)	Indukció.	1. feladatlap 5.
6.	Gyakorlás		1. feladatlap 6.

II. A hatványozás azonosságai /2.			
1.	Az előző óra összefoglalása (A házi feladat ellenőrzése. Egyéni verseny)	Rendszerszemlélet	2. feladatlap 1.
2.	Tapasztalatgyűjtés azonos kitevőjű hatványok szorzásáról és osztásáról (Általánosítás. Gyakorlás.)	Indukció. Számolási készség. Vitakészség. Általánosítás.	2. feladatlap 2. 7. tanári melléklet: borítékos segítség
3.	Tapasztalatgyűjtés szorzat és hányados hatványozásáról (Általánosítás. Gyakorló feladatok.)	Indukció. Számolási készség. Vitakészség. Általánosítás.	2. feladatlap 3. 7. tanári melléklet
4.	Gyakorlás: a hatványozás azonosságainak alkalmazása	A hatványozás azonosságainak célszerű alkalmazása a számítások gyorsításában. Helyes műveleti sorrend alkalmazása.	2. feladatlap 4.

III. A hatványozás azonosságai /3. Számok normálalakja			
1.	Az előző óra összefoglalása (A házi feladat ellenőrzése. Ráhangoló feladat.)	Rendszerszemlélet.	
2.	Egy-egy egyszerű példa a hatványozás azonosságainak alkalmazására (Az azonosságok pontos megfogalmazása és rögzítése írásban is.)	Pontos nyelvhasználat. Emlékezet: az ismétlés szerepe az ismeretek megőrzésében. Az azonosságok kifejezése a matematika tömör nyelvén – képet.	3. feladatlap 1.
3.	A számok normálalakja (Példák, ahol a normálalakkal könnyebb számolni.)	A matematikai ismeretek alkalmazása más tudományokban. (földrajz)	Világatlasz
4.	Gyakorló feladatok (Gyakorlás tangramon megadott feladatokkal)	Az ismeretek alkalmazása. A hatvány értelmezése és a hatványozás azonosságainak alkalmazása.	2. tanári melléklet: Tangram lapok feladatokkal
5.	Irányított önértékelés– a táblázat kitöltése	Önismeret.	3. tanulói melléklet: Önértékelő lap
6.	A következő órák előrevetítése; a feladatok kitűzése	Becslés. Az érdeklődés, a kíváncsiság, mint a tanulás motorja.	4. tanári melléklet: Feladatok; faliújság

IV. Gyakorlás az önértékelések alapján			
1.	Ráhangolás (Bemelegítő feladat: számkitaláló. Az előző óra összefoglalása)	Rendszerezés. Tudatos felidézés.	
2.	Gyakorlás a hozott feladatok és a tangram alapján	Szóbeli kifejezőkészség. Magyarázat. Figyelő meghallgatás. Segítőkészség	Hozott feladatok; 2. tanári melléklet: tangram
3.	Verseny algebrai kifejezések helyettesítési értékének kiszámításában	Műveleti sorrend. A zárójel szerepe. Műveletvégzés a racionális számok halmazában	4. feladatlap 1.
4.	Mértékváltás normálalakkal adott mennyiségek között	Mértékegységek. Mértékváltás. Fordított arányosság	4. feladatlap. 2.
5.	Becslések a kitűzött problémák megoldására	Szövegértelmezés. Becslés.	5. tanulói és tanári melléklet: Becslési táblázat

V. Matematikai szövegek feldolgozása csoportban; beszámolók.			
1.	Az előző óra összefoglalása (A házi feladat ellenőrzése.)	Rendszerszemlélet. Mértékegységek. Mértékváltás	
2.	Licitálás a kitűzött problémák feldolgozására	Stratégia és taktika	Licitkorongok
3.	A szövegek feldolgozása (a 4. tanári melléklet feladatainak megoldására)	Együttműködés.(munkamegosztás) Kérdezés. Tervezés.	6. tanári melléklet: Feldolgozható szöveg
4.	Beszámolók	Kifejezőkészség. Szemléltetés	Színes papírok, irónok, olló, ragasztó, fólia
5.	A házi feladat előkészítése	Műveleti összefüggések.	5. feladatlap

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Hatványozás; a hatványozás azonosságai /1.

1. Az előző óra összefoglalása.

A házi feladat ellenőrzése
Ha hozott valaki számkitalálós feladatot, akkor ő vezényli le a bemelegítő gyakorlatot, ha nem, akkor a következő feladattal állhatunk elő:
Az asztalon elhelyezett dobókockákkal mindenki dobjon hármat! A három dobást jegyezze fel! Lukács Ernőné – Tarjáni Rezsőné „Játékos matematika” című könyvének ötlete alapján.
Utasítások: Az első dobást szorozd meg 2,5-del, majd a szorzathoz adjál hozzá 5-öt. Az így kapott összegnek vedd a 4-szeresét és add hozzá a második dobásodat! Amit kaptál, azt duplázd meg, a szorzatot növeld meg 11-gyel. Az így kapott számot szorozd meg 5-tel, végül az eredményhez add hozzá a harmadik dobásodat! Ha megmondod milyen számhoz jutottál, akkor – feltéve, hogy te is és én is tudunk számolni – megmondom mi volt a három dobásod.
Kérdezzük meg, tudja-e valaki, hogy hogyan találtuk ki a dobásait? Ha igen, őt kérjük a magyarázatra, ha nem, akkor *a*-val, *b*-vel és *c*-vel jelölve a dobásokat írjuk le a matematika nyelvén az utasításoknak megfelelő lépéseket! A kapott algebrai kifejezés átalakításakor tisztázhatjuk újra a műveletek sorrendjét, a zárójelbontás szabályait.

$$\left\{2\cdot\left[4\cdot\left(2,5a+5\right)+b\right]+11\right\}\cdot 5+c=100a+10b+c+255$$

Tehát 255-öt kivonva, a kapott háromjegyű szám számjegyei megmutatják az egyes dobásokat.
Ha szükségesnek ítéljük, írassuk le lépésenként: $2,5\,a$; $2,5\,a + 5$; $4\cdot(2,5\,a + 5) = 10\,a + 20$; $10\,a + 20 + b$; $2\cdot(10\,a + 20 + b) = 20\,a + 40 + 2b$; $20\,a + 2\,b + 40 + 11 = 20\,a + 2\,b + 51$; $5\cdot(20\,a + 2\,b + 51) = 100\,a + 10\,b + 255$; $100\,a + 10\,b + 255 + c = \underline{100\,a + 10\,b + c + 255}$

2. Az azonosság fogalma

Beszéljük meg: az előbbi egyenlőségben, ha a betűk helyére ugyanazt a számhármast helyettesítjük mindkét oldalon, az egyenlőség igaz marad, bármilyen számhármast választunk. Ez az egyenlőség tehát azonosság.

1. FELADATLAP

TUDNIVALÓ:

Azonosságnak nevezzük az olyan egyenleteket, amelyekben a betűk helyére az alaphalmaz bármely elemét is helyettesítjük, az egyenlőség igaz marad.

Az asztalokon elhelyezzük az algebrai kifejezéseket tartalmazó kártyákat (**1. tanári melléklet**). Ezután azonosságokat kell kirakniuk belőlük. Csoportban dolgozzanak.
1. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

$\mathbf{2\,(x-3)}$	$\mathbf{-6+2\,x}$	$\mathbf{2\,x-3}$	$\mathbf{x+(x-3)}$
$\mathbf{-(x+7)}$	$\mathbf{-x-7}$	$\mathbf{\dfrac{4x+9}{5}}$	$\mathbf{0{,}8\,x+1{,}8}$
$\mathbf{x^3}$	$\mathbf{x\cdot x\cdot x}$	$\mathbf{(x-1)+}$ $\mathbf{+\,x+(x+1)}$	$\mathbf{3\,x}$

1. Rakjatok ki minél több azonosságot a lapokon található algebrai kifejezésekből!
Írjátok le a kirakott azonosságokat a füzetetekbe!

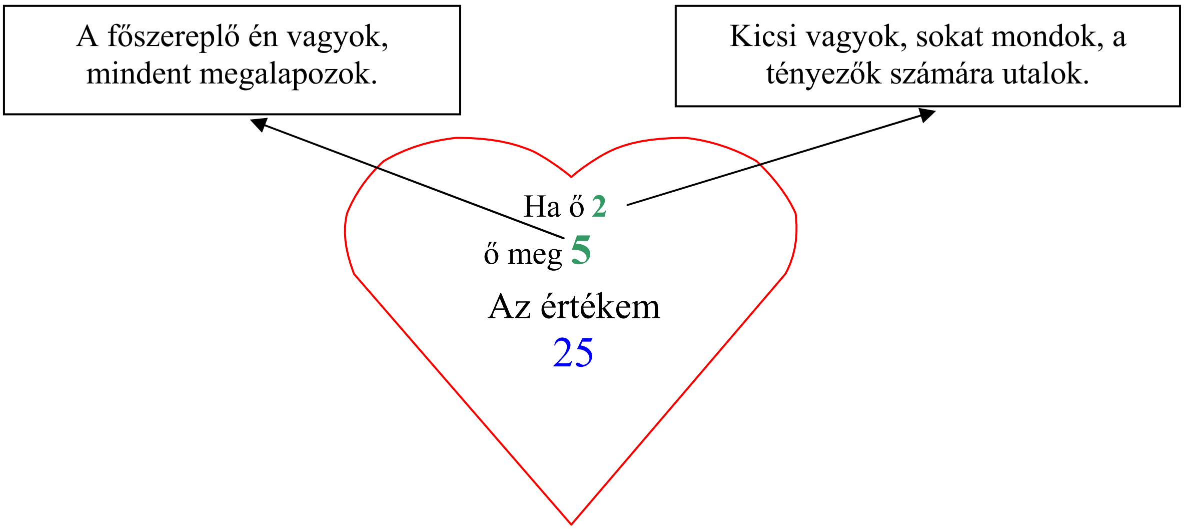
$2\cdot(x-3)=-6+2x$	$2x-3=x+(x-3)$
$-(x+7)=-x-7$	$\dfrac{4x+9}{5}=0{,}8x+1{,}8$
$x^3=x\cdot x\cdot x$	$(x-1)+x+(x+1)=3x$

Beszéljük meg, hogy az egyik oldal hogyan hozható olyan alakra, mint a másik? Alkalom kínálkozik annak újbóli megfogalmazására, hogy összeg szorzásakor illetve osztásakor minden tagot szorzunk illetve osztunk. A zárójel előtti „–” jel (–1)-gyel való szorzásnak illetve „vedd minden tag ellentettjét!” utasításnak is értelmezhető. Az egynemű kifejezések összevonhatók.

3. A hatványozásról tanultak ismétlése

A következőkben a hatványozásról tanultakat ismételjük át. Egyszerű közlés helyett választhatjuk a következő kis rejtvény megfejtését is. A gyerekektől azt várjuk, fejtsék meg a szereposztást:

2. Fejtsd meg a szereposztást!



Megbeszélhetjük a hatványjelölést, az alap, a kitevő és a hatványérték mibenlétét. Írjuk fel a hatványt szorzat alakban is, számítsuk ki az értékét! $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$. Beszéljük meg, hogy mit értünk egy szám nulladik hatványán. A negatív kitevőjű hatvány nem tananyag, de erősebb osztályokban vagy a gyerekek érdeklődése esetén elevenítsük fel a 10 negatív hatványainak jelentését, és kérdezzünk rá, hogy ennek alapján mit jelentene például az 5^{-2} negatív kitevőjű hatvány a gyerekek szerint?
A felelevenített ismeretek gyakorlására oldják meg a következő feladatot. A feladatot egyedül oldják meg, majd a csoportban megbeszélik, és ha kell, együtt javítanak.

3. a) Írd fel a szorzatokat hatvány alakban, a hatványokat szorzat alakban, és számítsd ki a hatványértékeket is, majd olvasd össze a betűket a hozzájuk rendelt számok növekvő sorrendjében!

$Y = 2^3 = 8$

$O = (-3)^2 = 9$

$V = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

$H = (-10)^3 = -1000$

$K = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

$Á = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$

$T = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

$A = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

$N = 5 \cdot 2006^0 = 5$

A szó: hatványok

b) Írd fel a következő számokat csökkenő sorban. Írd alájuk a hatvány alakjukat! (Segítségül használhatod a hatványtáblázatot)!

$\frac{1}{343}$; 49; 1; $\frac{1}{7}$; 343; $\frac{1}{49}$; 7

$343 > 49 > 7 > 1 > \frac{1}{7} > \frac{1}{49} > \frac{1}{343}$

$7^3 > 7^2 > 7^1 > 7^0 > \frac{1}{7}\ (=7^{-1}) > \frac{1}{7^2}\ (=7^{-2}) > \frac{1}{7^3}\ (=7^{-3})$

4. Azonos alapú hatványok szorzása és osztása

Célszerű időt hagyni a csoportoknak, hogy összeszedjék a témával kapcsolatos már meglévő ismereteiket. Ha szükségesnek tartjuk, segíthetünk kérdésekkel. Egy lapra előkészíthetjük ezeket, és amelyik csoportnál indokolt átadhatjuk.
Mit írhatunk fel hatvány alakban?
Miből áll egy hatvány?
Mit mutat meg a hatvány alap?
Mit mutat a hatványkitevő?
Mit értünk egy szám nulladik hatványán?
(Mit jelent a negatív kitevőjű hatvány?)
Ezután kijelöljük a megoldandó feladatot, és arra kérjük a gyerekeket, hogy párokban dolgozzanak, a pár névsorban előbb szereplő tagja, pl. a szorzást, a másik tag az osztást magyarázza el társának.
Ragaszkodjunk hozzá, hogy a „tanuló” minél többször tegye fel a „miért?” kérdést! Cél: az egyszerű szabály megállapítása mögött tartalom legyen. Vezessék le egymásnak, hogy pl. $2^3 \cdot 2^4$ azért 2^7, mert $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ három db kettes szorzótényezőt tartalmaz $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ négy db kettes szorzótényezőt tartalmaz. Kettejük szorzatában már 7 db kettes szorzótényező van. Ugyanilyen részletesen magyarázzák meg a hányados esetén, hogy mivel a számláló és a nevező 7 db közös tényezőt tartalmaz, $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$-tel lehet egyszerűsíteni, így lesz a hányados 7^3. Bár ezt hetedikben már tanulták, fontos, hogy ne csak egy üres szabályt elevenítsünk fel.

4.

a) Számítsd ki a hatványok értékét! Írd fel az eredményt hatvány alakban is!

$2^3 \cdot 2^4 = 128$ $\quad 5^2 \cdot 5^4 = 15625$ $\quad 3^5 \cdot 3^2 = 2187$ $\quad 4^0 \cdot 4^2 \cdot 4^8 = 1048576$

$\frac{7^{10}}{7^7} = 343$ $\quad \frac{3^7}{3^3} = 81$ $\quad \frac{5^8}{5^7} = 5$ $\quad \frac{7^3}{7^4} = \frac{1}{7}\ (=\frac{1}{7^1})$.

A legügyesebb csoportoknak adhatjuk a következő nyitott mondatokat:

b) Oldd meg a nyitott mondatokat!

$3^5 \cdot 3^a = 3^7$ $\quad a = 2$

$\frac{5^8}{5^b} = 5$ $\quad b = 7$

$4^c \cdot 4^2 \cdot 4^8 = 4^{10}$ $\quad c = 0$

A feladat ellenőrzésekor megbeszélhetjük az általánosítható észrevételeket is.

EMLÉKEZZ:

Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy a közös alapot a kitevők összegére emeljük.
Azonos alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy a közös alapot az osztandó (számláló)és az osztó (nevező) kitevőjének különbségére emeljük.
Például:

$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$; $5^n \cdot 5^m = 5^{n+m}$; $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ és $\frac{5^4}{5^3} = 5^{4-3} = 5^1$; $\frac{4^m}{4^n} = 4^{m-n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

5. Hatvány hatványozása

Kijelöljük a feladatot a csoportok számára. Kérjük, hogy a megoldást hatvány alakban adják meg. Állítsanak fel hipotézist a hatvány hatványozásáról, és kíséreljék meg igazolni azt. Határozzák meg a hatványértékeket is! A hatványtáblázatot használhatják. Páros munka utáni csoportos megbeszélést kérjünk. Előfordulhat, hogy egy-egy csoport nem tud egyedül elindulni. A számukra ajánljuk fel a „borítékos segítséget” (**7. tanári melléklet**). A borítékban számozott kettéhajtott cédulákon a következő javaslatok:
7. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt! (összesen 5 témakörhöz kapcsolódó segítséget tartalmaz.)

Borítékos segítség hatvány hatványozásához:

1. Az egyik hatványt írd fel szorzat alakban!

2. Az így megmaradó hatványt vagy hatványokat is írd fel szorzat alakban!

3. A kapott azonos tényezőjű szorzatot írd fel hatvány alakban!

4. Keress összefüggést az eredeti hatványkitevők, és az eredményül kapott hatvány hatványkitevője között!

5. Hatvány hatványozása
Számítsd ki a hatványok értékét! Van-e számítást könnyítő megfigyelésed?

$\left(10^3\right)^3 = 10^9 = 1000000000$

$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$

$\left(2^4\right)^2 = 2^8 = 256$

$\left((-1)^5\right)^3 = (-1)^{15} = -1$

$\left(5^3\right)^2 = 5^6 = 15625$

$\left(\left(-\frac{1}{4}\right)^2\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$

Ezután a csoportok beszámolnak az eredményeikről. Ha szükséges, kiegészítik egymás véleményét. Az általánosítható megfigyelést elraktározzák. Feltétlenül kérjük egy-egy csoporttól, hogy megállapításaikat az osztály számára is indokolják, vezessék le!

Pl.: $\left(2^4\right)^2 = 2^4 \cdot 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$

TUDNIVALÓ:

Hatványt úgy is hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.
Például: $(2^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6$; $(4^m)^n = 4^{m\cdot n}$; $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

Megkérdezhetjük, hogy melyik csoportnak nem volt szüksége a borítékos segítségre. Azt ne kérdezzük, hogy melyik csoport használta fel az összeset! Erről munka közben megfigyeléssel tájékozódjunk! Soha ne legyen szégyen legális segítséget igénybe venni, de legyen elismert az önállóság!

6. Gyakorlás

A következő feladat az eddigiek gyakorlásán túl lehetőséget ad finomabb észrevételekre is. Pl. negatív számok páros és páratlan hatványainak összehasonlítására, vagy egynél nagyobb és egynél kisebb számok hatványainak megfigyelésére stb.

6. Jelöld a táblázat soraiban, hogy melyik állítás igaz!

a	***b***	***a > b***	***a < b***	***a = b***
$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	i		
$(-2)^3$	$(-2)^2$		i	
$\left(\frac{4}{5}\right)^3$	$\frac{4^3}{5}$		i	
$\left(-\frac{2}{5}\right)^2$	$\left(\frac{2}{5}\right)^2$			i
$\left(\frac{3}{2}\right)^5$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$	i		
$(-3)^7\cdot(-3)^2$	$(-3)^9$			i
$\left(2^4\right)^3$	$\left(2^6\right)^2$			i
3^2	$\frac{3^7}{3^4}$		i	
$\frac{(-4)^5}{(-4)^3}$	$\frac{(-4)^7}{(-4)^6}$	i		

Figyeld meg alaposan az egyes példákat, és ha valami számodra meglepőt tapasztalsz, fogalmazd meg, és oszd meg a többiekkel is a megfigyelésedet!

Észrevételek lehetnek:
Ugyanazon alapot nagyobb hatványkitevőre emelve is kaphatunk kisebb hatványértéket.
Kutatási feladatnak adhatjuk annak tisztázását, hogy milyen alapok esetén igaz ez?
A páros kitevőjű hatvány értéke lehet nagyobb, mint a páratlan kitevőjű hatvány értéke annak ellenére, hogy az adott páratlan kitevő nagyobb, mint a páros.
Kutatási feladatnak adhatjuk annak tisztázását, hogy milyen alapok esetén igaz ez?
Egy számnak és az ellentettjének ugyanazon kitevőjű hatványa lehet egyenlő.
Kutatási feladatnak adhatjuk annak tisztázását, hogy milyen kitevők esetén igaz ez, és miért?
A házi feladat a Feladatgyűjtemény 1. feladata. Lehetséges differenciálni. A több egyszerű feladat és/vagy a nyitott mondatok megoldása.

II. A hatványozás azonosságai /2.

1. Az előző óra összefoglalása

A házi feladat ellenőrzése

2. FELADATLAP

Bemelegítő feladat: egy olyan hatvány értékének kiszámítsa, amelynek az alapja 1. A leggyorsabbakat jutalmazhatjuk aláírt koronggal, amit a későbbiekben licitáláshoz használhatnak. Amelyik csoport tanácstalannak látszik, annak javasoljuk, hogy a tényezőket próbálják ugyanazon szám hatványaiként felírni, és alkalmazzák azokat az azonosságokat, amelyeket a hatványozásnál eddig tanultak.

1. Számítsd ki minél gyorsabban, ügyesebben a következő hatvány értékét

$$\left(\frac{2^3\cdot 4^2\cdot 16}{8^3\cdot 4}\right)^{2006}=1 \qquad \frac{2^3\cdot\left(2^2\right)^2\cdot 2^4}{\left(2^3\right)^3\cdot 2^2}=\left(\frac{2^{11}}{2^{11}}\right)^{2006}=1^{2006}=1$$

2. Tapasztalatgyűjtés azonos kitevőjű hatványok szorzásáról és osztásáról

A feladatot a csoportoknak kell megoldaniuk, de javasoljuk, hogy először párokban dolgozzanak, majd a tapasztalataikat beszéljék meg a négyes csoportban, és ezután fogalmazzák meg következtetéseiket! A hatványtáblázatok használatát tegyük lehetővé, de a számológépet mellőzzük. Magyarázzuk meg, hogy így könnyebb észrevenni az összefüggéseket. Ismét legyen lehetőségük a csoportoknak kikérni a borítékos segítséget (**7. tanári melléklet**).

7. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt! (összesen 5 témakörhöz kapcsolódó segítséget tartalmaz.)

Borítékos segítség azonos kitevőjű hatványok szorzásához:

1. Írjátok fel a hatványokat szorzat alakban!

2. Csoportosítsátok másképp a tényezőket! (Legyen egyforma kéttényezős szorzatok szorzata!)

3. Az új egyenlő tényezőjű szorzatot írjátok fel hatvány alakban!

4. Keressétek ki a hatványértéket a hatványtáblázatból!

2. Tanulmányozzátok azonos kitevőjű hatványok szorzását és osztását! Figyeljétek meg, van-e itt is valamilyen érdekesség, amit a számolás gyorsítására használhatnánk?
Írd fel hatványalakban, majd számítsd is ki a következő szorzatok értékét. Használd a hatványtáblázatot!

$2^5 \cdot 3^5 = 6^5 = 7776$

$2^{10} \cdot 4^{10} = 8^{10} = 2^{30} = 1\ 073\ 741\ 824$

$2^7 \cdot 5^7 = 10^7 = 10\ 000\ 000$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{23} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{23} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^{23} = 1^{23} = 1$

7. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt! (összesen 5 témakörhöz kapcsolódó segítséget tartalmaz.)

Borítékos segítség azonos kitevőjű hatványok osztásához:

1. Írjátok fel a számlálót is és a nevezőt is szorzat alakban!

2. Alakítsátok a kifejezést úgy, hogy egyenlő törtek szorzata legyen! (Gondoljatok arra, hogy törtet törttel hogyan szoroztunk?

3. Ha lehet, egyszerűsítsétek a törteket!

4. Az egyenlő tényezők szorzatát írjátok fel hatvány alakban!

5. Keressétek ki a táblázatból a hatványértéket!

$\frac{20^5}{5^5} = 4^5 = 2^{10} = 1024$

$\frac{1000^9}{125^9} = 8^9 = 2^{27} = 134\ 217\ 728$

$\frac{60^8}{12^8} = 5^8 = 390\ 625$

$\frac{625^3}{125^3} = \left(\frac{625}{125}\right)^3 = 5^3 = 125$

Általánosíthatók-e a megfigyeléseid?

$x^7 \cdot y^7 = (x \cdot y)^7$

$\frac{x^7}{y^7} = \left(\frac{x}{y}\right)^7$

Hallgassuk meg az egyik csoport beszámolóját a megoldásról és az észrevételekről, majd tegyük lehetővé a többi csoport számára a kiegészítést vagy opponálást. Feltétlenül hangozzék el a megbeszéléskor is a magyarázat. Részletezzük, hogy milyen azonos átalakításokat hajtottunk végre. Pl.: $2^5 \cdot 3^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 =$
$= (2 \cdot 3)^5 = 6^5$

$$\frac{20^5}{5^5} = \frac{20\cdot 20\cdot 20\cdot 20\cdot 20}{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5} = \left(\frac{20}{5}\right)\cdot\left(\frac{20}{5}\right)\cdot\left(\frac{20}{5}\right)\cdot\left(\frac{20}{5}\right)\cdot\left(\frac{20}{5}\right) = 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 4^5$$

ÖSSZEGZÉS:

Azonos kitevőjű hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre emeljük.
Azonos kitevőjű hatványokat úgy is oszthatunk, hogy az alapok hányadosát a közös kitevőre emeljük.

Például: $5^3 \cdot 4^3 = (5 \cdot 4)^3 = 20^3$; $2^m \cdot 3^m = (2 \cdot 3)^m$; $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

$\frac{10^7}{5^7} = \left(\frac{10}{5}\right)^7 = 2^7$; $\frac{100^n}{25^n} = \left(\frac{100}{25}\right)^n = 4^n$; $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

3. Tapasztalatgyűjtés szorzat és hányados hatványozásáról.

A feldolgozás módja azonos az előbbivel.
7. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt! (összesen 5 témakörhöz kapcsolódó segítséget tartalmaz.)

Borítékos segítség szorzat hatványozásához:

1. Írd fel a hatványt szorzat alakban!

2. Csoportosítsd másképpen a tényezőket!

3. Az új egyenlő tényezőjű szorzatokat írd fel hatvány alakban!

4. Keresd ki a hatványok értékét a hatványtáblázatból!

5. Végezd el a hatványértékek szorzását!

Borítékos segítség hányados hatványozásához:

1. Írd fel a hatványt szorzat alakban!

2. A számlálók szorzatát is és a nevezők szorzatát is írd fel hatvány alakban!

3. Keresd ki a hatványok értékét!

4. Esetleg végezd el az osztást!

3. Számítsd ki a hatványértékeket! Használd a hatványtáblázatokat! Megfigyelhető-e számolást gyorsító összefüggés?

$(2 \cdot 9)^4 = 2^4 \cdot 9^4 = 104\,976$
$(5 \cdot 8)^5 = 5^5 \cdot 8^5 = 102\,400\,000$
$(2 \cdot 7)^6 = 2^6 \cdot 7^6 = 7\,529\,536$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{3^3}{7^3} = \frac{9}{343}$$
$$\left(\frac{6}{5}\right)^7 = \frac{6^7}{5^7} = \frac{279936}{78125}$$
$$\left(\frac{5}{9}\right)^4 = \frac{5^4}{9^4} = \frac{625}{78125}$$

Általánosíthatók-e megfigyeléseid?

$(x \cdot y)^5 = x^5 \cdot y^5$ $\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5}$

Itt is vezessék le, hogy pl.: $(2 \cdot 9)^4 = 2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 2^4 \cdot 9^4$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^3 = \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7} = \frac{3\cdot3\cdot3}{7\cdot7\cdot7} = \frac{3^3}{7^3}$$

TUDNIVALÓ:

Szorzatot úgy is hatványozhatunk, hogy a tényezőket külön-külön hatványozzuk.
Hányadost úgy is hatványozhatunk, hogy az osztandót és az osztót külön-külön hatványozzuk.
Például: $(3 \cdot 5)^4 = 3^4 \cdot 5^4$; $(5 \cdot 7)^p = 5^p\, 7^p$; $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2}$; $\left(\frac{4}{7}\right)^x = \frac{4^x}{7^x}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^y = \frac{a^y}{b^y}$

4. Gyakorlás: a hatványozás azonosságainak alkalmazása.

A feladatokat először egyénileg gondolják át, majd a problémás feladatokat a csoport megbeszéli, és egységes álláspontot alakítanak ki.
A feladatsor első részében az eredmények növekvő sorának megfelelően leírt betűk egy átismétlendő fogalmat adnak (normálalak).

4.

a) Számítsd ki a műveletek eredményét a legcélszerűbb módon, majd állítsd növekvő sorrendbe, és ebben a sorrendben írd le a nekik megfelelő betűket is. Egy ismert fogalomhoz jutsz, ha jól dolgoztál.

$$\text{A} = 0{,}25^2 \cdot 5^3 \cdot 4^2 \cdot 7 \cdot 2^3 = 7000$$

$$\text{Á} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}064$$

$$\text{A} = \frac{3 \cdot 5^2 \cdot 9 \cdot 10^3}{5^5 \cdot 3^2 \cdot 8} = 3$$

$$\text{M} = \frac{100^7 \cdot 9}{\left(5^2\right)^8 \cdot 4^7 3^2} = 0{,}04$$

$$\text{R} = \frac{2^7 \cdot 0^5 \cdot 7}{14 \cdot 8} = 0$$

$$\text{L} = \left(\frac{2^4 \cdot 5^3 \cdot 15^2}{2^4 \cdot 5^5 \cdot 3^2}\right)^{2006} = 1$$

$$\text{K} = \left(3^2\right)^5 = 59\,049$$

$$\text{L} = \left(\frac{350}{70}\right)^4 = 625$$

$$\text{N} = \left[(-1) \cdot 3\right]^3 = -27$$

$$\text{O} = \left[(-1)^7\right]^{23} = -1$$

A növekvő sor: $-27 < 1 < 0 < 0{,}04 < 0{,}064 < 1 < 3 < 625 < 7000 < 59\,049$

A szó: normálalak

Az ügyesebb csoportoknak ill. tanulóknak adhatjuk feladatként.

b) Fejezd ki a lehető legegyszerűbb alakban a következő kifejezéseket! Van-e köztük egyenlő?

$$x^5 \cdot y \cdot x^4 \cdot y^7 = x^9 y^8$$

$$\frac{\left(x^6\right)^3 \cdot y^{15}}{x^3 \cdot x^6 \cdot y \cdot \left(y^2\right)^3} = x^9 y^8$$

$$\frac{x^{10} \cdot y^9}{x \cdot y} = x^9 y^8$$

$$\frac{5 \cdot x^{14} \cdot 7 \cdot \left(y^2\right)^4 \cdot x^4}{35 \cdot \left(x^3\right)^3 \cdot y^0} = x^9 y^8$$

Házi feladatként adhatjuk: mindenki járjon utána, hogy mit tanult hetedikben a normálalakról valamint a feladatgyűjtemény 2. és /vagy 3. feladatát. Tanulópároknak megbízást adunk, hogy a következő órára tudják meg, hogy

a) Mekkora Kína ill. Magyarország területe, és mennyi a lakóinak a száma?

Magyarország:	$1{,}031 \cdot 10^7$ fő,	$9{,}3036 \cdot 10^4$ km^2–en
Kína:	$1{,}19834 \cdot 10^9$ fő,	$9{,}61 \cdot 10^6$ km^2–en

b) 1 mól anyagmennyiség hány db atomot tartalmaz? $6 \cdot 10^{23}$

c) Mennyi egy elektron tömege? $9{,}1096 \cdot 10^{-30}$ kg

d) Mennyi egy elektron töltése? $-1{,}60210 \cdot 10^{-19}$ C

e) A magfizika hosszúságegysége a femtométer. 1 fm hány méter? 10^{-15} m

III. A hatványozás azonosságai /3. A számok normálalakja

1. Az előző óra összefoglalása.

A házi feladat ellenőrzése

Ráhangolás: versenyt indítunk a csoportok között

Melyik csoport tudja a lehető legnagyobb számot felírni mindössze 3 db kettes számjegy segítségével?

$2^{2^2} = 16 < 222 < 22^2 = 484 < 2^{22} = 4\,194\,304$

Frontális megbeszélés

2. Egy-egy egyszerű példa a hatványozás azonosságainak alkalmazására.

A tapasztalatok pontos megfogalmazása.

A gyerekek egyénileg, önállóan dolgoznak. Az egyszerű példák csak arra valók, hogy feleleveníték, milyen azonosságokról volt szó. Az azonosságok párosítását és az összegzés áttekintését már csoportos kupaktanács alapján végezhetik.

3. FELADATLAP

1.

a) Add meg az eredményeket hatványalakban is! Használd a táblázatokat!

$3^5 \cdot 3^{12} = 3^{17} = 129140163$

$\left(\frac{4}{5}\right)^7 = \frac{4^7}{5^7} = \frac{16384}{78125}$

$\frac{5^{10}}{5^7} = 5^3 = 125$

$4^5 \cdot 2{,}5^5 = 10^5 = 100000$

$\left(2^4\right)^5 = 2^{20} = 1048576$

$\frac{225^4}{15^4} = 15^4 = 5^4 \cdot 3^4 = 50625$

$(5 \cdot 9)^6 = 5^6 \cdot 9^6 = 8303765625$

b) Párosítsd az alábbi azonosságokat a feliratokkal!
Azonos alapú hatványok szorzása: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;

Azonos alapú hatványok osztása: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ a nem 0;

Hatvány hatványozása: $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$;
Azonos kitevőjű hatványok szorzata: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$;

Azonos kitevőjű hatványok hányadosa: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ b nem 0;

Szorzat hatványozása: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;

Hányados hatványozása: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, a nem 0; $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$; $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$;

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, b nem 0; $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$; $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

ÖSSZEGZÉS:

Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy a közös alapot a kitevők összegére emeljük.
Azonos alapú hatványokat úgy is oszthatunk, hogy a közös alapot a kitevők különbségére emeljük.
Hatványt úgy is hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.
Azonos kitevőjű hatványokat úgy is összeszorozhatunk, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre emeljük.
Azonos kitevőjű hatványokat úgy is eloszthatunk, hogy az alapok hányadosát a közös kitevőre emeljük.
Szorzat hatványozását úgy is elvégezhetjük, hogy a tényezőket külön-külön hatványozzuk.
Hányados hatványozását úgy is elvégezhetjük, hogy az osztandót és az osztót külön-külön hatványozzuk.

Vigyázat! Hatványok összegére és különbségére nincsenek olyan azonosságok, mint a szorzásukra és az osztásukra!

3. A számok normálalakja

Megbeszéljük, hogy mit jelent a számok normálalakja, és hogy mikor és hol célszerű használni. A megbízott párok beszámolnak a keresett adatokról. Megmutatják, hogy hogyan kellene leírni ezeket a számokat, ha nem használhatnánk a normálalakot.
A Kínára és Magyarországra vonatkozó adatok alapján összehasonlítjuk a területüket és a lakosságuk számát, kiszámítjuk és összehasonlítjuk a népsűrűségüket. Előtte azonban a csoportoktól becsléseket kérünk egy papírra. A legkisebb hibával becslő csoport korongot kap.

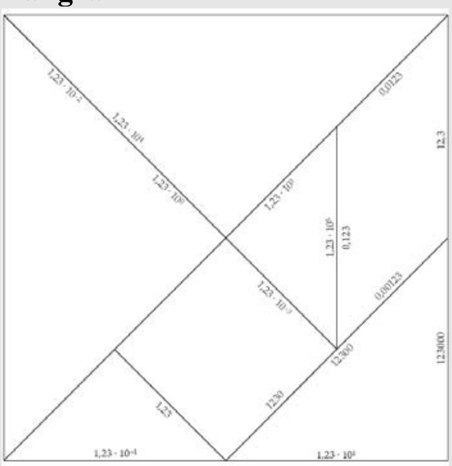
a) Mekkora Kína ill. Magyarország területe, és mennyi a lakóinak a száma?		
Magyarország:	$1{,}031 \cdot 10^{7}$ fő,	$9{,}3036 \cdot 10^{4}$ km^2–en
Kína:	$1{,}19834 \cdot 10^{9}$ fő,	$9{,}61 \cdot 10^{6}$ km^2–en
b) 1 mól anyagmennyiség hány db atomot tartalmaz?		$6 \cdot 10^{23}$
c) Mennyi egy elektron tömege?		$9{,}1096 \cdot 10^{-30}$ kg
d) Mennyi egy elektron töltése?		$-1{,}60210 \cdot 10^{-19}$ C
e) A magfizika hosszúságegysége a femtométer. 1 fm hány méter?		10^{-15} m

Kína területe kb. 103-szorosa Magyarországénak.
Kína lakossága kb. 116-szorosa Magyarországénak.
Kína népsűrűsége kb. 1,1-szerese Magyarországénak.

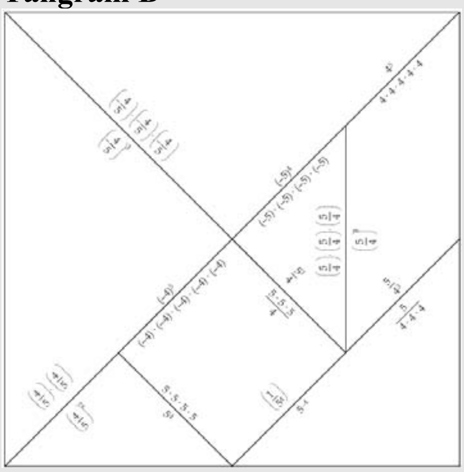
4. Gyakorló feladatok

Minden csoport 7 db borítékot kap (**2. tanári melléklet**), a borítékokat egymás után bontják ki, és összerakják a tangram lapokat úgy, hogy az egyenlő értékű feliratok kerüljenek egymás mellé. Ha jól dolgoznak, minden borítékból egy ismert síkidom alakul ki. Megfejtésként a síkidom pontos nevét és vázlatrajzát kell megadni. Az alakzatok a negatív kitevőjű hatványok megfejtése nélkül is kialakulnak. Az utóbbiak megbeszélése csak a gyerekek érdeklődése esetén szükséges.
2. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

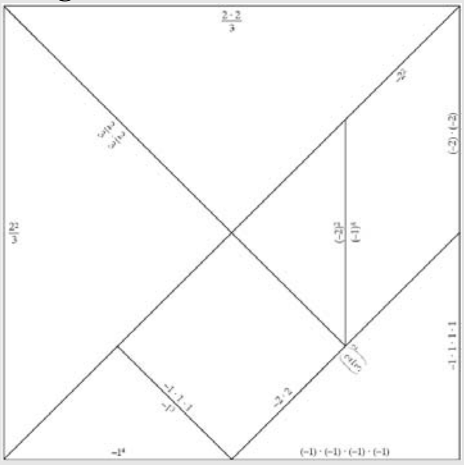
Tangram A



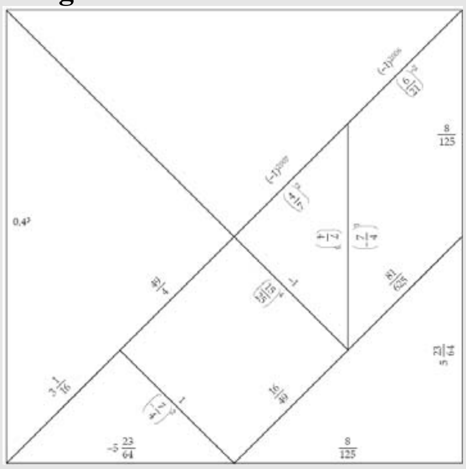
Tangram B



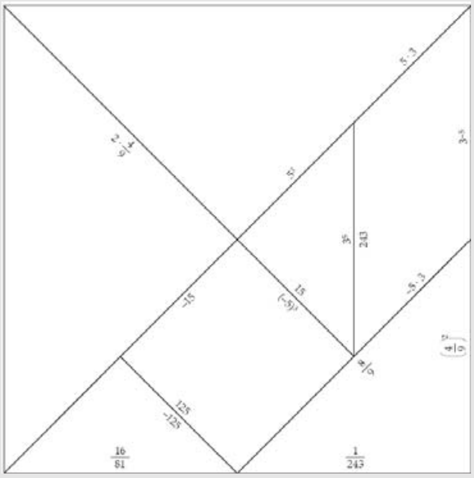
Tangram C



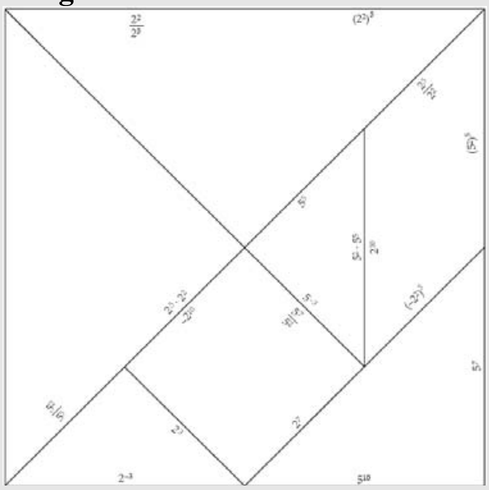
Tangram D



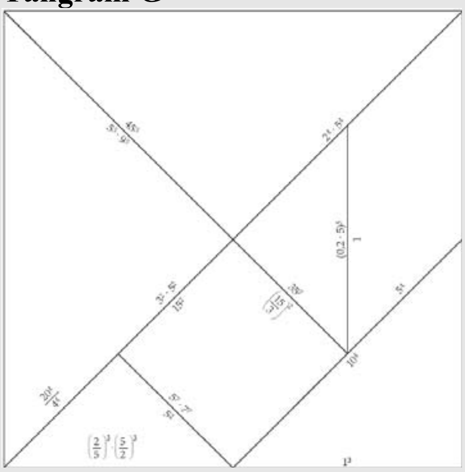
Tangram E



Tangram F



Tangram G



A 2. tanári melléklet (Tangram) megoldásai:

A. Normálalak egyenlő szárú derékszögű háromszög

$1{,}23\cdot10^4$	=	12 300	$1{,}23\cdot10^1$	=	12,3
$1{,}23\cdot10^5$	=	123 000	$1{,}23\cdot10^{-1}$	=	0,123
$1{,}23\cdot10^3$	=	1 230	$1{,}23\cdot10^0$	=	1,23
$1{,}23\cdot10^{-3}$	=	0,00123	$1{,}23\cdot10^{-2}$	=	0,0123

B. Hatvány és szorzat négyzet

$\left(-\frac{4}{5}\right)^3$	=	$\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$	4^5	=	$4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4$
$\left(\frac{4}{5}\right)^2$	=	$\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}$	$\left(\frac{5}{4}\right)^3$	=	$\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}$
5^4	=	$5\cdot5\cdot5\cdot5$	$\frac{5^3}{4}$	=	$\frac{5\cdot5\cdot5}{4}$
$(-4)^5$	=	$(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)$	$\frac{5}{4^3}$	=	$\frac{5}{4\cdot4\cdot4}$
$(-5)^4$	=	$(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)$	5^{-4}	=	$\left(\frac{1}{5^4}\right)$

C. Jelölések hatványoknál téglalap

$\frac{2^2}{3}$	=	$\frac{2\cdot2}{3}$	$(-2)^2$	=	$(-2)\cdot(-2)$
$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	=	$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$	-2^2	=	$-2\cdot2$
-1^4	=	$-1\cdot1\cdot1\cdot1$	-1^3	=	$-1\cdot1\cdot1$
$(-1)^4$	=	$(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)$			

D. Hatvány és hatványérték húrtrapéz

$(-1)^{2006}$	=	1	$0{,}4^3$	=	$\frac{8}{125}$
$(-1)^{2007}$	=	-1	$\left(-\frac{7}{4}\right)^3$	=	$-5\frac{23}{64}$
$\left(\frac{4}{7}\right)^2$	=	$\frac{16}{49}$	$\left(-\frac{7}{4}\right)^2$	=	$3\frac{1}{16}$
$\left(\frac{7}{4}\right)^3$	=	$5\frac{23}{64}$	$\left(\frac{6}{21}\right)^{-2}$	=	$\frac{49}{4}$
$\left(\frac{15}{25}\right)^4$	=	$\frac{81}{625}$			

E. Együttható és kitevő paralelogramma

$5\cdot 3$	=	15	$(-5)^3$	=	-125
5^3	=	125	3^{-5}	=	$\frac{1}{243}$
3^5	=	243	$\left(\frac{4}{9}\right)^2$	=	$\frac{16}{81}$
$-5\cdot 3$	=	-15	$2\cdot\frac{4}{9}$	=	$\frac{8}{9}$

F. Azonos alapú hatványok szorzása és osztása kisebb magasságú derékszögű trapéz

$\frac{2^2}{2^5}$	=	2^{-3}	$5^2\cdot 5^5$	=	5^7
$\frac{2^5}{2^2}$	=	2^3	$\frac{5^7}{5^2}$	=	5^5
$\left(2^2\right)^5$	=	2^{10}	$\frac{5^2}{5^5}$	=	5^{-3}
$\left(5^2\right)^5$	=	5^{10}	$2^5\cdot 2^2$	=	2^7
$\left(-2^2\right)^5$	=	-2^{10}			

G. Szorzat és hányados hatványozása nagyobb magasságú derékszögű trapéz

$2^4\cdot 5^4$	=	10^4	15^2	=	$3^2\cdot 5^2$
$\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3$	=	1^3	35^7	=	$5^7\cdot 7^7$
$\left(\frac{15}{3}\right)^2$	=	5^2	$\frac{20^4}{4^4}$	=	5^4
45^5	=	$5^5\cdot 9^5$	$(-0,2\cdot 5)^5$	=	-1

A csoportmunka alatt célszerű feljegyzéseket készítenünk, ha pl. azt látjuk, hogy valakinek túl nagy nehézséget okoz a feladatok megoldása, vagy éppen túlságosan kicsi a kihívás számára. Ezek a megfigyelések kiegészítik a gyerekek önértékelését és segítenek a „tanársegédek” kiválasztásában.

5. Irányított önértékelés – a táblázat kitöltése

Nagyon fontos megértetnünk a gyerekekkel az önértékelés célját. Jobb, ha a dolgozat előtt tudjuk hányadán állunk, és így van lehetőségünk korrekcióra. Arról nem is beszélve, hogy aki nem ismeri be saját magának, ha valamit nem ért, vagy még gyakorolnia kell, az nem tud hatékonyan dolgozni.
Az önértékelő lapokat már az óra elején kioszthatjuk a gyerekeknek. (**3. tanári melléklet**)

3. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

Igyekezz őszinte válaszokat adni a kérdésekre, hogy ha szükséges, segíthessünk, és segíthess.
A betűjelek a tangram gyakorló feladatainak felelnek meg.
Tegyél „i” jelzést minden sorban abba az oszlopba, aminek megállapítása igaz rád.

	Ismeretanyag	Tudom	Értem, de még gyakorolnom kell	Nem értem, segítséget kérek
A	1-nél nagyobb számok normálalakja			
B	Hatványalak, szorzatalak			
C	Zárójelezés hatványoknál			
D	A hatványérték kiszámítása			
E	Együttható és kitevő megkülönböztetése			
F	Azonos alapú hatványok szorzása és osztása			
G	Szorzat és hányados hatványozása, azonos kitevőjű hatványok szorzása és osztása			

6. A következő órák előrevetítése; a feladatok kitűzése

Feladatokat helyezünk ki a falra. (**4. tanári melléklet**) Célja a gyerekek kíváncsiságának felkeltése. Egyelőre csak annyit várunk tőlük, hogy olvassák el, értsék meg azokat. A következő órán a csoportok becsléseket végeznek a kiírt témákban, az azutáni órán pedig a feladatok megoldásáról szóló szövegeket dolgoznak fel. A témák között nagyon különböző nehézségi szintűek vannak. Erre hívjuk fel a gyerekek figyelmét is. Alaposan gondolják át a feladatok szövegét! Közöljük velük, hogy licitálni lehet majd a feladatokra az eddig összegyűjtött licitkorongok segítségével. Egy feladatra legfeljebb két csoport vállalkozhat majd. Beszéljük meg, hogy nem a családtagok ügyességére vagyunk kíváncsiak.
Csak erős osztályokban és akkor is a gyerekeink ismeretében válogatva a témák között valósítsuk meg a matematikai szövegek csoportban történő feldolgozását. Az A. E. G. feladatok megítélésem szerint a legnehezebbek Gyengébb osztályokban inkább az I-III. órán haladjunk lassabban, és a IV-V. órát fordítsuk az önértékelés alapján történő gyakorlásra a hozott feladatokkal, ill. a tangrammal. Ha pedig van közöttük egy-egy nagyon ügyes gyerek, nekik egyéni megbízást adhatunk a szövegfeldolgozásra.
A kitűzött problémák:

4. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

A. A vegyészek szerint a fa és a szén minden hőfokon egyesül, de alacsony hőfokon olyan lassan, hogy nem tudjuk figyelemmel kísérni. A kémiai reakció sebességének törvénye szerint, ha a hőmérséklet 10 ºC-kal csökken, a reakció sebessége a felére esik vissza. Ha 1 g fa 600 ºC-os lángban 1 másodperc alatt ég el, akkor mennyi idő alatt ég el 1 g fa 20 ºC-on?

B. Ha minden napot csak úgy különböztetünk meg, hogy derűs vagy borús, hány különböző hét lehetséges? Biztos, előfordulhat vagy lehetetlen, hogy egy éven belül két hét egyforma?
1 év = 52 hét
A kérdés tehát az, hogy 52-nél több, vagy kevesebb a különböző hetek száma?

C. Egy orosz hivatalban régi páncélszekrényre bukkantak. A kulcsot is megtalálták, de nem ismerték a zár titkát. Az ajtón 5 db koncentrikus kör mentén a régi orosz abc 36 betűje szerepelt. A zár akkor nyitható, ha az öt körön egy bizonyos sugár mentén a középponttól kifelé haladva egy konkrét betűsor helyezkedik el. Ha egy beállítás 3 másodpercig tart, biztos-e, hogy 10 munkanapon belül kinyitják a zárat?

D. Régen a kerékpárok hatjegyű rendszámot kaptak. Egy babonás ember félt a nyolcas számtól, ezért olyan rendszámot szeretett volna, amelyben nincs nyolcas. Úgy gondolkodott, hogy mivel 10 számjegy van, és abból számára csak egy szerencsétlen, és ez a nyolcas, 90%-os eséllyel szerencsés rendszámot kap. Igaza volt-e?

E. Vajon hányféle sakkjátszma lehetséges? Képes lenne–e egy ember az élete során az összes lehetséges játszmát lejátszani, ha 90 évig élne, napi 8 órát játszana, és másodpercenként lépne egyet?

F. Melyik a lehető legnagyobb szám, amit 3 db hármasból, ill. amit 3 db négyesből állíthatunk elő, azzal a feltétellel, hogy csak a három számjegyet használhatjuk.

G. Weöres Sándor „Elmehetsz a világba” című verse 2 versszakból áll.
Az első versszak így szól:

„Elmehetsz a világba híredér’,
Rólad cincog a zsákban az egér!
De szomorú valóban ugyebár:
rólad ordít az ólban a szamár!”

Hányféleképpen lehetne megírni a második versszakot, ha abban is az első és második, valamint a harmadik és negyedik sor rímel, és a második versszakban is ugyanazok a szavak szerepelhetnek, mint az elsőben? Feltétel, hogy a névelők és a de kötőszó nem választható el attól a szótól, amely előtt az első versszakban áll.

H. Ha a nyolcadikosok bizonyítványában 11 tantárgy szerepelne, és a diákok mindegyikből öt különféle osztályzatot kaphatnának, a következő állítások közül melyik lenne igaz?
a) Egy 30 fős osztályban biztosan van legalább két gyerek, akinek egyforma a bizonyítványa
b) Magyarországon biztosan van legalább két olyan ember, akinek a nyolcadikos bizonyítványában mind a 11 tantárgyból ugyanolyan osztályzata van.

I. Hány osztója van az 1200-nak?

A házi feladatuk a következő órára az, hogy olyan feladatokat gyűjtsenek a feladatgyűjteményből, amelyeknek a megoldását nem értik, vagy értik, de még gyakorolniuk kell. Mindezt az önértékelésükkel összhangban.

IV. Gyakorlás az önértékelések alapján

1. Ráhangolás

Bemelegítő feladat
Szeretném megtudni a testvéreitek számát és a cipőméreteteket, anélkül, hogy konkrétan elárulnátok nekem.
A testvéreitek számának négyzetét szorozzátok meg 4-gyel, a szorzathoz adjatok hozzá 7-et. A kapott összegnek vegyétek az ötszörösét, és azt növeljétek meg 5-tel! Amit kaptatok, azt ismét szorozzátok meg 5-tel, majd a szorzathoz adjátok hozzá a cipőméreteteknél 1-gyel nagyobb számot.
Ha megmondjátok a végeredményt, megmondom, hány testvéretek van, és mekkora lábon éltek.
Legyen a testvérek száma *t*, a cipőméret pedig *c*. Az utasításoknak megfelelő algebrai kifejezés:

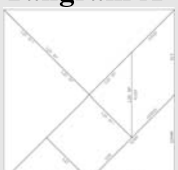
$$\left[\left(4t^2+7\right)\cdot 5+5\right]\cdot 5+\left(c+1\right)=100t^2+c+201$$

Ha a végeredményből elveszünk 201-et, akkor egy olyan számhoz jutunk, amelyben az utolsó két helyen álló kétjegyű szám a cipőméret, előtte pedig a testvérek számának négyzete van. Néhány gyerek esetében mondjuk meg a két adatot, de a részletezés ez esetben nem fontos, hacsak nem akkora az érdeklődés, hogy szükségesnek látjuk a kielégítését.
Az előző óra eseményeinek felidézése.
A házi feladat meglétének ellenőrzése.

2. Gyakorlás a hozott feladatok és a tangram alapján

Az önértékelések és a saját megfigyeléseink alapján állítsuk össze a tanulópárokat, ha lehetséges, a négyes csoportokon belül.
Az órának ebben a részében a gyerekek által házi feladatként előkészített feladatokat oldják meg a párok. Javasoljuk, hogy felváltva vállalják a tanító és a tanuló szerepét. Ha elfogytak a hozott feladatok, és az idő engedi, akkor a tangramokat (**2. tanári melléklet**) visszakapva újra elmagyarázhatják egymásnak a korábban nehéznek bizonyult részeket. Ajánljuk fel a segítségünket, ha elakadnak.
2. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

Tangram A



Tangram B

Tangram C

Tangram D

Tangram E

Tangram F

Tangram G

3. Verseny algebrai kifejezések helyettesítési értékének kiszámításában

A versenyt a párok számára hirdetjük. A jó megoldásokat licitáló korongokkal jutalmazhatjuk. Ügyeljünk arra, hogy a gyorsaságot elismerhetjük, de csak hibátlan megoldás esetén. Miután a gyerekek megnézték a feladatokat, emlékeztessük őket kérdésekkel néhány fontos tudnivalóra!

a) Milyen kifejezéseket vonhatunk össze? Csak egynemű algebrai kifejezések vonhatók össze.

b) Milyen kifejezéseket tekintünk egyneműeknek? Két algebrai kifejezés akkor egynemű, ha legfeljebb együtthatóikban különböznek.

c) Mi a műveletvégzés helyes sorrendje? A műveletek helyes sorrendje: hatványozás, szorzás-osztás, összeadás-kivonás. Ezt csak a zárójel módosíthatja, amely elsőbbségadás kötelező táblaként működik.

4. FELADATLAP

EMLÉKEZZ:

– Csak egynemű algebrai kifejezések vonhatók össze.
– Két algebrai kifejezés egynemű, ha legfeljebb együtthatóikban különböznek.
– A műveletek helyes sorrendje: hatványozás, szorzás-osztás, összeadás-kivonás. Ezt csak a zárójel módosíthatja, amely elsőbbségadás kötelező táblaként működik.

1. Számítsátok ki az algebrai kifejezések helyettesítési értékét a megadott számok esetén! Gondolkozzatok! Hogyan könnyíthetnétek meg a munkát?

a) $a - a^2 + a \cdot a + 5a - 2 - 5 \cdot (a - 2) = a + 8$

$a_1 = -1$	7
$a_2 = \frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$
$a_3 = -8$	0

b) $b^2 + b : b - 5b + 3 \cdot (b + 2) = b^2 - 2b + 7$

$b_1 = 0$	nincs értelmezve
$b_2 = -1$	10
$b_3 = -\frac{2}{3}$	$8\frac{7}{9}$

4. Mértékváltás normálalakkal adott mennyiségek között.

A páros munka folytatható, esetleg a verseny is.

2. Állapítsd meg:

a) Melyik a legnagyobb?

$3 \cdot 10^7$ mm; $3 \cdot 10^5$ dm; $3 \cdot 10^9$ cm; $3 \cdot 10^2$ m; $3 \cdot 10^{-3}$ km; $3 \cdot 10^8$ dm

Megoldás: $3 \cdot 10^9\,\text{cm} = 3 \cdot 10^8\,\text{dm}$

b) Melyik a legkisebb?

$4{,}5 \cdot 10^5$ g; $4{,}5 \cdot 10^{-2}$ t; $4{,}5 \cdot 10^2$ kg; $4{,}5 \cdot 10^1$ q $4{,}5 \cdot 10^9$ mg; $4{,}5 \cdot 10^6$ dkg

Megoldás: $4{,}5 \cdot 10^{-2}$ t

Ha szükséges, beszéljük meg ismét, hogy $10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$; $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

5. Becslések a kitűzött problémák megoldására.

A gyerekek becslése valószínűsíthetően nagyon távol lesz a valóságtól. A becslés elvégeztetését azért javaslom mégis, mert ez erősebb motivációt jelent a feladatok alapos megismerésére, mint ha csupán azt kérjük, hogy olvassák el azokat.

Az előző órán megismert, és a falra is kitett problémákra (**4. tanári melléklet**) vonatkozóan minden csoport töltsön ki egy táblázatot (**3. tanári melléklet** 1. táblázata). A táblázatba kell beírni, hogy mennyire becslik az egyes feladatok megoldását. Minden csoport becslése külön-külön táblázatban szerepel.

3. tanári melléklet 1. táblázata – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

<table>
<tr><td>Jel</td><td colspan="2">A probléma megfogalmazása</td><td>Becslés</td></tr>
<tr><td>A</td><td colspan="2">Mennyi idő alatt ég el 1 g fa 20 ºC-on?</td><td></td></tr>
<tr><td>B</td><td colspan="2">Hány különböző hét lehetséges?</td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td colspan="2">Hányféle beállítása lehetséges a zárnak?</td><td></td></tr>
<tr><td>D</td><td colspan="2">Hányféle nyolcas mentes hatjegyű rendszám lehet?</td><td></td></tr>
<tr><td>E</td><td colspan="2">Kb. hányféle sakkjátszma lehetséges?</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">Melyik a lehető legnagyobb szám, ami három db egyforma számjegyből építhető fel?</td><td>Hármasból:</td><td></td></tr>
<tr><td>Négyesből:</td><td></td></tr>
<tr><td>G</td><td colspan="2">Hányféleképpen írható meg a második versszak?</td><td></td></tr>
<tr><td>H</td><td colspan="2">Hányféle nyolcadikos bizonyítvány lehetséges?</td><td></td></tr>
<tr><td>I</td><td colspan="2">Hány osztója van az 1200-nak?</td><td></td></tr>
</table>

Összesítsük a csoportok becslését a **3. tanári melléklet** következő 9 táblázatában, melyen minden feladat külön-külön táblázatban szerepel.

A…	
2. csoport becslése	
3. csoport becslése	
4. csoport becslése	
5. csoport becslése	
6. csoport becslése	
7. csoport becslése	
8. csoport becslése	
9. csoport becslése	

Házi feladat: A csoportok gondolkodjanak tovább a kitűzött problémákon! Hogyan lehetne megoldani azokat? Próbálkozzanak valamelyiknek a tényleges megoldásával!

V. Matematikai szövegek feldolgozása csoportban; beszámolók.

1. Az előző óra összefoglalása

2. Licitálás a kitűzött problémák feldolgozására

A csoportok választhatnak a kilenc matematikai problémából, hogy melyiknek a megoldását szeretnék megismerni, és összevetni saját elképzelésükkel. Előfordulhat, hogy ugyanazt a feladatot több csoport is választaná, ezért az eddig megszerzett korongokkal licitálni lehet a témákra. Így eldől, hogy melyik csoport melyik problémát dolgozza fel. Egy probléma megoldását legfeljebb két csoport vállalhatja.

3. A szövegek feldolgozása.

A csoportok kézbe kapják az elnyert problémát, és a megoldás módjának egy részletes kifejtését a csoport létszámának megfelelő példányban.(**6. tanári melléklet**)
6. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

A: Feldolgozható szövegek

A vegyészek szerint a fa és a szén minden hőfokon egyesül, de alacsony hőfokon olyan lassan, hogy nem tudjuk figyelemmel kísérni. A kémiai reakció sebességének törvénye szerint, ha a hőmérséklet 10 ºC-kal csökken, a reakció sebessége a felére esik vissza. Ha 1 g fa 600 ºC-os lángban 1 másodperc alatt ég el, akkor mennyi idő alatt ég el 1 g fa 20 ºC-on?
Perelman „Szórakoztató algebra” című könyve alapján

Ha 10 ºC-onként felére esik a reakció sebessége, akkor ez azt jelenti, hogy 10 ºC-onként megduplázódik a reakcióidő.
600 ºC helyett 20 ºC, az 58 · 10 ºC-os hőmérsékletcsökkenés, azaz 58-szor duplázódik meg a reakcióidő.

Ha 600 ºC-on 1 g fa 1 s alatt ég el, akkor 20 ºC-on 1 g fa 1 s · 2^{58} s alatt ég el.
Mekkora szám ez?

$$2^{58} = 2^{60-2} = \frac{2^{60}}{2^2} = \frac{1}{2^2}\cdot 2^{60} = \frac{1}{4}\cdot\left(2^{10}\right)^6$$

Mivel $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$, nem követünk el nagy hibát, ha 2^{10} helyett 10^3-nal számolunk. A reakcióidő tehát kb.

$\frac{1}{4}\cdot\left(10^3\right)^6 \text{s} = \frac{1}{4}\cdot 10^{18}\text{s} = 0{,}25\cdot 10^{18}\text{s} = 2{,}5\cdot 10^{17}\text{s}$ lenne.

Mivel $1 \text{év} \approx 365\cdot 24\cdot 3600\text{s} \approx 3\cdot 10^7\,\text{s}$, a $2{,}5\cdot 10^{17}\text{s} \approx 8\cdot 10^9 \text{év}$.

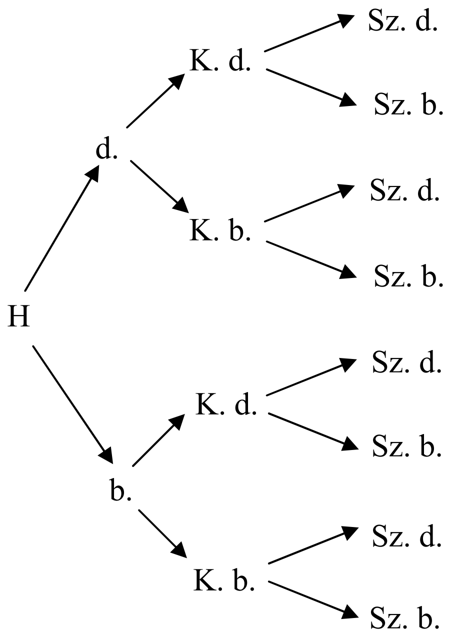
Azaz 1 g szén 20ºC-on kb. 8 milliárd év alatt égne el.

B: Feldolgozható szövegek

Ha minden napot csak úgy különböztetünk meg, hogy derűs vagy borús, hány különböző hét lehetséges?
Biztos, előfordulhat vagy lehetetlen, hogy egy éven belül két hét egyforma?

Perelman „Szórakoztató algebra” című könyve alapján

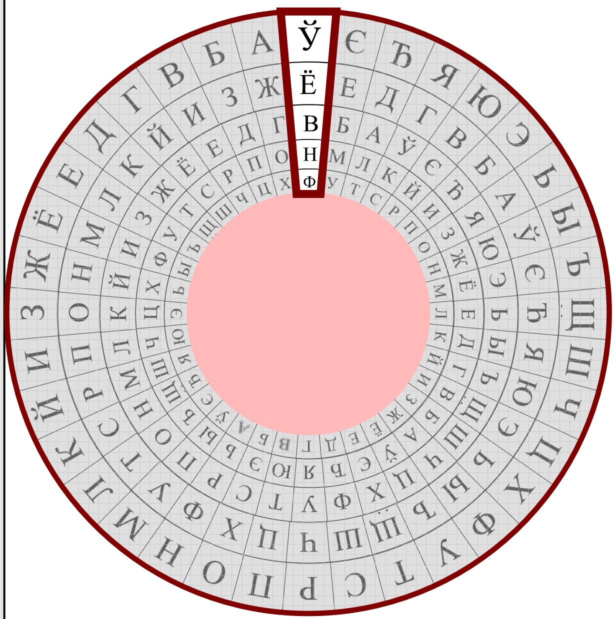
1 év = 52 hét
A kérdés tehát az, hogy 52-nél több, vagy kevesebb a különböző hetek száma?



Egy hét napjait tekintve a hétfő lehet derűs vagy borús (2-féle). Mindkettőhöz kétféle kedd csatlakozhat (ez már2·2-féle lehetőség). Minden kedd után kétféle szerda ($2 \cdot 2 \cdot 2$-féle lehetőség), minden szerdához kétféle csütörtök ($2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2$-féle lehetőség) stb. egészen a 7. napig, vasárnapig, amikor is már $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128$-féle lehetőség alakul ki. Ez pedig 2 év 24 hét kb.

Tehát előfordulhat, de nem biztos – nem is lehetetlen –, hogy egy éven belül két hét a derűs és borús napok szempontjából egyforma legyen.

C: Feldolgozható szövegek



Egy orosz hivatalban régi páncélszekrényre bukkantak. A kulcsot is megtalálták, de nem ismerték a zár titkát. Az ajtón 5 db koncentrikus kör mentén a régi orosz abc 36 betűje szerepelt. A zár akkor nyitható, ha az öt körön egy bizonyos sugár mentén a középponttól kifelé haladva egy konkrét betűsor helyezkedik el. Ha egy beállítás 3 másodpercig tart, biztos-e, hogy 10 munkanapon belül kinyitják a zárat?

Perelman „Szórakoztató algebra” című könyve alapján

Az első körön 36-féle betű állítható be, ezek mindegyike a második körön 36- féleképpen folytatható (ez már 36^2-féle lehetőség). A harmadik körön minden előző lehetőséghez 36-féle új betű csatlakozhat (36^3-féle lehetőség), amelynek mindegyikét a negyedik körön 36-féle betű követheti (36^4-félénél tartunk), végül minden eddigi betűnégyes végén 36-féle utolsó betű állhat az ötödik sorban (36^5-féle ötbetűs betűsor).

Tehát $36^5 = (6^2)^5 = 6^{10} = 60\,466\,176$-féle betűsor lehetséges.
Ha minden betűsor beállítása 3 s-ig tart, akkor az összes betűsor beállításához
$3 \cdot 60\,466\,176\text{s} = 181\,398\,528$ s-ra van szükség.

10 munkanap az $10 \cdot 8 \cdot 3600 \text{ s} = 288\,000 \text{ s}$

Az összes számsor kiforgatásához 10 munkanap helyett 6298,56 munkanapra lenne szükség.
Persze nem lehetetlen az a szerencse, hogy valaki akár elsőre éppen a jót találja meg, csak kicsi a valószínűsége.

D: Feldolgozható szövegek

Régen a kerékpárok hatjegyű rendszámot kaptak. Egy babonás ember félt a nyolcas számtól, ezért olyan rendszámot szeretett volna, amelyben nincs nyolcas. Úgy gondolkodott, hogy mivel 10 számjegy van, és abból számára csak egy szerencsétlen, és ez a nyolcas, 90%-os eséllyel szerencsés rendszámot kap. Igaza volt-e?
Perelman „Szórakoztató algebra” című könyve alapján

Mivel a nyolcast nem akarjuk, a hatjegyű szám első számjegye 9-féle lehet. Mindegyik eset 9-féle második számjeggyel folytatható ($9 \cdot 9$-féle lehetőség), ezek mindegyike 9-féle harmadik számjeggyel ($9 \cdot 9 \cdot 9$-féle lehetőség) és így tovább, mire a hatodik számjegyhez érünk, jól látszik, hogy 9^6 -féle hatjegyű szám jöhet létre.

Ha feltételezzük, hogy a rendszám csupa nulla nem lehet, ez akkor is
$9^6 - 1 = 531\,440$-féle lehetséges rendszám. Ha a nyolcast is megengednénk, akkor a lehetséges rendszámok száma $10^6 - 1 = 999\,999$ lenne.
A „szerencsés” rendszámok száma ennek csupán kb. 53%-a, tehát a szerencsés rendszámok aránya sokkal kisebb, mint azt a büszke, de babonás biciklitulajdonos gondolta.
Alap: 999 999
Százalékérték: 531 440
Százalékláb: 531 440 : 9999,99

E: Feldolgozható szövegek

Vajon hányféle sakkjátszma lehetséges? Képes lenne–e egy ember az élete során az összes lehetséges játszmát lejátszani, ha 90 évig élne, napi 8 órát játszana, és másodpercenként lépne egyet?
Perelman „Szórakoztató algebra” című könyve alapján

Hogy mennyi a lehetséges sakkjátszmák száma, azt pontosan kiszámítani nem tudjuk, de egy belga matematikus megkísérelte legalább körülbelül meghatározni:
„Az első lépésnél a világossal játszó játékosnak 20 lépési lehetősége van (a 8 gyalog 16 lépése – mivel első lépésnél egyet vagy kettőt léphet -, és plusz a két ló 2-2 lépése. Világos bármelyik lépésére sötét ugyanezen 20 ellentétes lépések egyikével válaszolhat. Ha világos minden lépését összevetjük a sötét minden lépésével, akkor a világos és a sötét első lépése után 20·20=400 különböző sakkjátszma lehetséges, pedig még mindkét játékos csak egyet lépett. Az első lépés után a lehetséges lépések száma is növekszik.”
A számítások egyszerűsítése érdekében a következő átlagos helyzetet vesszük alapul:
1. Az első öt lépésnél minden játékosnak 20-20 lépési lehetősége van.
2. A következő lépéseknél mindkét játékosnak 30-30 lépése lehet.
Tegyük fel azon kívül, hogy a sakkjátszmák átlagosan 40 lépésből állnak.

Az első öt lépés tehát = $(20 \cdot 20)^5$-féleképpen lehetséges, és ezek mindegyikét a hátralevő 35 lépés során $(30 \cdot 30)^{35}$-féleképpen lehet folytatni. A lehetséges játszmák száma tehát $(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35}$. De mekkora szám ez?
$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35} = (20^2)^5 \cdot (30^2)^{35} = 20^{10} \cdot 30^{70} = (2 \cdot 10)^{10} \cdot (3 \cdot 10)^{70} =$
$= 2^{10} \cdot 10^{10} \cdot 3^{70} \cdot 10^{70} = 2^{10} \cdot 3^{70} \cdot 10^{80}$
Mivel $2^{10} = 1024$, nem követünk el nagy hibát, ha helyette $1000 = 10^3$-nal számolunk.
Mivel $3^2 = 9$, helyette 10-zel, és mivel $3^4 = 81$, helyette $8 \cdot 10$-zel számolhatunk.

$$2^{10} \cdot 3^{70} \cdot 10^{80} = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 3^{68} \cdot 10^{80} = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot \left(3^4\right)^{17} \cdot 10^{80} \approx 10^3 \cdot 10 \cdot 8^{17} \cdot 10^{17} \cdot 10^{80} = \left(2^3\right)^{17} \cdot 10^{101} =$$

$$= 2^{51} \cdot 10^{101} = 2 \cdot \left(2^{10}\right)^5 \cdot 10^{101} = 2 \cdot \left(10^3\right)^5 \cdot 10^{101} = 2 \cdot 10^{116}$$

Egy olyan számról van szó, amelyben a kettes után 116 db nulla következik. Ennyiféle sakkpartit feltételezhetünk kb. Ha feltesszük, hogy a Föld minden lakója éjjel-nappal sakkozna, mégpedig úgy, hogy minden játékos másodpercenként lépne egyet, még akkor is kb. 10^{100} évszázadra lenne szükség az összes lehetséges parti lejátszásához.

F: Feldolgozható szövegek

Melyik a lehető legnagyobb szám, amit 3 db hármasból, ill. amit 3 db négyesből állíthatunk elő, azzal a feltétellel, hogy csak a három számjegyet használhatjuk.
Perelman „Szórakoztató algebra" című könyve alapján

a) Hármasokkal:

333; 33^3; 3^{33}; 3^{3^3}

$3^5 = 243 < 333 < 3^6 = 729$; $3^9 < 33^3 = 35\,937 < 3^{10} = 59\,049$; $3^{3^3} = 3^{27}$

Ebből következik, hogy a legnagyobb szám: 3^{33}

b) Négyesekkel:

444; 44^4; 4^{44}; 4^{4^4};

$4^4 = 256 < 444 < 4^5 = 1024$; $4^{10} < 44^4 = 3\,748\,096 < 4^{11} = 4\,194\,303$;

$4^{4^4} = 4^{256}$;

Ebből következik, hogy négyesek esetén a legnagyobb 4^{4^4}.

G: Feldolgozható szövegek

Weöres Sándor „Elmehetsz a világba" című verse 2 versszakból áll.
Az első versszak így szól:
„Elmehetsz a világba híredér',
Rólad cincog a zsákban az egér!
De szomorú valóban ugyebár:
rólad ordít az ólban a szamár!"

Hányféleképpen lehetne megírni a második versszakot, ha abban is az első és második, valamint a harmadik és negyedik sor rímel, és a második versszakban is ugyanazok a szavak szerepelhetnek, mint az elsőben? Feltétel, hogy a névelők és a de kötőszó nem választható el attól a szótól, amely előtt az első versszakban áll.
Imrecze Zoltánné – Reiman István – Urbán János „Fejtörő feladatok felsősöknek" című feladatgyűjteménye alapján

Az 1. és 2. sor lehetséges rím párjai: világba – zsákban és híredér` - az egér.
Az első sorban a rímelő szón kívül 2, a második sorban a rímelő szón kívül 3 szó van, ezek azonos rím párok esetén 2 ill. $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$-féleképpen sorakozhatnak fel. Ez $2 \cdot 6 = 12$-féle első két sort jelent egy rím párral és újabb 12-t a másikkal.
Összesen $2 \cdot 12$-féle első két sor.

A 3. 4. sor lehetséges rím párjai: ugyebár – szamár és valóban – az ólban.

H: Feldolgozható szövegek

Ha a nyolcadikosok bizonyítványában 11 tantárgy szerepelne, és a diákok mindegyikből öt különféle osztályzatot kaphatnának, a következő állítások közül melyik lenne igaz?

a) Egy 30 fős osztályban biztosan van legalább két gyerek, akinek egyforma a bizonyítványa

b) Magyarországon biztosan van legalább két olyan ember, akinek a nyolcadikos bizonyítványában mind a 11 tantárgyból ugyanolyan osztályzata van.

Imrecze Zoltánné – Reiman István – Urbán János „Fejtörő feladatok felsősöknek" című feladatgyűjteménye alapján

Pl. magyarból ötféle jegy lehetséges, ezek mindegyikéhez 5-féle történelem osztályzat társulhat ($5 \cdot 5 = 5^2$-féle lehetőség, amelyek mindegyikéhez 5-féle matematika jegy társulhat (5^3), pedig ez még csak három tantárgy. 11 tantárgy esetén a bizonyítványok 5^{11}-féleképpen alakulhatnak. Ez 48 828 125-féle bizonyítvány.

a) A lehetséges bizonyítványok száma több, mint 30, ezért nem biztos hogy lesz két egyforma, de persze véletlenül lehetséges.

b) Magyarország lakóinak száma kb. 10^7, és ez kevesebb, mint 5^{11}, vagyis az sem biztos, hogy van két olyan magyar, akinek egyforma a bizonyítványa, de véletlenül lehetséges.

I: Feldolgozható szövegek

Hány osztója van az 1200-nak?

Egy szám összes osztója előállítható prímtényezőiből szorzással. Mivel az 1200 prímtényezős alakja $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$, osztói ezekből a prímtényezőkből állíthatók elő.

A kettő 5-féle hatványkitevővel szerepelhet, mert a 0. hatványon is lehet, ez az 5-féle lehetőség 2-féleképpen folytatható, mert a 3-nak kétféle hatványa szerepelhet: a 0. és az 1. Ez már 10-féle lehetőség, de ezek mindegyike az 5-nek 3-féle hatványával folytatható. Ez összesen $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$-féle lehetőség. Ennyi osztója van az 1200-nak. Aki nem hiszi, írja fel mind a harminc osztót. Én megtettem. Tényleg annyi.

Javasolt instrukciók: Olvassa el mindenki egyedül a szöveget. Jelölje be, amit nem ért. A csoport beszélje meg a vitás pontokat. Olvassa el mindenki újra egyedül. A párok beszéljék meg a még mindig tisztázatlan pontokat, szükség esetén kérjenek segítséget!
Döntsék el, hogy ha előadást tartanak a témáról, milyen szemléltetést akarnak? Tervezzék meg, készítsék el. Döntsék el, hogy kinek mi lesz a feladata a megoldás bemutatásában? Törekedjenek rá, hogy mindenkinek jusson feladat!

4. Beszámolók

Minden csoport közli a feladatának a megoldását, így megállapítható, hogy kik közelítették meg becslésükkel legjobban a valóságot? A legjobb becslők visszakapnak a korongjukból néhányat. Amelyik csoportnak legtöbb korongja van, eldöntheti, hogy kezdi a bemutatást, vagy átengedi egy másik csoportnak?
Beszámolók. Amelyik csoportra nem jutott idő, a szemléltetésre készített ábrákat, eszközöket a faliújságon állítja ki.

5. A házi feladat előkészítése

A négy alapműveletben szereplő mennyiségek nevét, és a köztük lévő összefüggéseket segít átismételni. Előkészíti a következő témakört.

2. FELADATLAP

1. Ismételd át a négy alapműveletben szereplő mennyiségek nevét, és a köztük lévő összefüggéseket!

$5 + 8 = 13$	$a + b = c$
$25 – 7 = 18$	$d – e = f$
$9 \cdot 6 = 54$	$g \cdot h = i$
$160 : 40 = 4$	$j : k = l$

a) Kösd össze a betűket a nekik megfelelő kifejezésekkel!

a		
b	összeadandó	a, b
c	kisebbítendő	d
d	kivonandó	e
e	szorzó tényező	g, h
f	szorzat	i
g	különbség	f
h	összeg	c
i	osztandó	j
j	hányados	l
k	osztó	k
l		

b) Fejezd ki a többi betűvel:

$a = c – b$	$b = c – a$
$d = e + f$	$e = d – f$
$g = i : h$	$h = i : g$
$j = k \cdot l$	$k = j : l$

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. a) Írd fel az eredményt hatvány alakban!

$11^2 \cdot 11^3 = 11^5$	$b^0 \cdot b \cdot b^2 = b^3$	$\frac{21^{14}}{21^{13}} = 21$
$5^4 \cdot 5^7 = 5^{11}$	$4 \cdot 2^7 = 2^9$	$\frac{17^5}{17^5} = 17^0$
$3^2 \cdot 3^7 \cdot 3^2 = 3^{11}$	$125 \cdot 5 = 5^4$	$\frac{4^7 \cdot 16}{4^5} = 4^4$
$a^4 \cdot a^5 \cdot a = a^{10}$	$\frac{8^5}{8^2} = 8^3$	$\frac{a^8}{a^4} = a^4$

b) Oldd meg a következő nyitott mondatokat!

$11^a \cdot 11^7 = 11^{10}$	$a = 3$
$5^3 \cdot 5 \cdot 5^b = 5^9$	$b = 5$
$\frac{121 \cdot 11^2}{11^c} = 11^2$	$c = 2$
$\frac{d^9 \cdot d}{d^8} = 49$	$d = 7$
$\frac{9^e \cdot 3^3}{3^5} = 3^2$	$e = 2$

2. Melyik több, mennyivel és hányszor?

2^3	$>$	$2 \cdot 3$	2-vel	$\frac{4}{3}$ -szor
7^4	$>$	$7 \cdot 4$	2373-mal	$\frac{343}{4}$ -szer
9^5	$=$	3^{10}		
3^7	$>$	$3 \cdot 7$	2166-tal	$\frac{729}{7}$ -szer
1^{15}	$<$	$1 \cdot 15$	14-gyel	15-ször
$(-2)^3$	$<$	$-2 \cdot 3$	2-vel	$\frac{3}{4}$ -szer
$(-1)^{15}$	$>$	$-1 \cdot 15$	16-tal	$\frac{1}{15}$ -ször
$(-1)^{20}$	$>$	$-1 \cdot 20$	21-gyel	$-\frac{1}{20}$ -szor
$(-2)^4$	$=$	$(-4)^2$		
$(-3)^9$	$<$	27^3	39366-tal	-1 -szer

3. Oldd meg a nyitott mondatokat a természetes számok halmazában!

$3^a = 9^5$	$a = 10$	$2^7 = 4^b$	$b =$ nincs megoldás
$(5^2)^x = (5^x)^6$	$x = 0$	$5^c = 625$	$c = 4$

$3 \cdot 4^{d} = 192$ $\quad d = 3$ $\quad 10 + 2^{e} = 18$ $\quad e = 3$

$7^{f} - 2 = 16805$ $\quad f = 5$

4. Írd fel hatvány alakban! Írd színessel a kitevőt! Állapítsd meg a hatványértéket! Használd a hatványtáblázatokat!

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^{4} = 2401$

b) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^{3} = -125$

c) $\left(\frac{5}{7}\right) \cdot \left(\frac{5}{7}\right) = \left(\frac{5}{7}\right)^{2} = \frac{5^2}{7^2} = \frac{25}{49}$

d) $\left(-\frac{7}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) = \left(-\frac{7}{5}\right)^{5} = -\frac{7^5}{5^5} = -\frac{16807}{3125}$

e) $\left(-\frac{5}{7}\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = \left(-\frac{5}{7}\right)^{2} = \frac{25}{49}$

5. Írd fel szorzat alakban! Állapítsd meg a hatványértéket!

a) $3^{5} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

b) $(-2)^{3} = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

c) $(-2)^{2} = (-2) \cdot (-2) = 4$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{4} = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$

e) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{3} = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$

6. Számítsd ki! Használhatod a hatványtáblázatokat!

a)

$5 \cdot 3 = 15$ $\quad -5 \cdot 3 = -15$ $\quad -5^{4} = -625$ $\quad 5^{-3} = \frac{1}{125}$

$3^{5} = 243$ $\quad (-5)^{3} = -125$ $\quad -3^{2} = -9$ $\quad 3^{-5} = \frac{1}{243}$

$5^{3} = 125$ $\quad (-3)^{5} = -243$ $\quad (-3)^{2} = 9$

b)

$\left(\frac{3}{5}\right)^{2} = \frac{9}{25}$ $\quad \left(-\frac{3}{5}\right)^{2} = \frac{9}{25}$ $\quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{9}$

$\left(\frac{5}{3}\right)^{3} = \frac{125}{27}$ $\quad \left(-\frac{5}{3}\right)^{3} = -\frac{125}{27}$ $\quad \left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \frac{27}{125}$

7. Számítsd ki a következő hatványértékeket! Ha ügyesen alkalmazod a hatványazonosságokat, akkor a hatványtáblázat segítségével nagyon gyorsan megoldhatod a feladatokat.

a)

$7^3 \cdot 7^9 = 7^{12}$ $\quad 9^4 \cdot 9 = 9^5$ $\quad 2^{10} \cdot 2^7 \cdot 2^0 \cdot 2^3 = 2^{20}$ $\quad 3^5 \cdot 3^{20} \cdot 3^1 \cdot 3^4 = 3^{30}$

b)

$7^{20} : 7^{15} = 7^5$ $\quad \dfrac{8^{30}}{8^{17}} = 8^{13}$ $\quad \dfrac{(-4)^{20}}{4^{15}} = 4^5$ $\quad \dfrac{2^7 \cdot 5^4}{2^6 \cdot 5^3} = 10$

c)

$\left(2^7\right)^3 = 2^{21}$ $\quad \left(-2^4\right)^7 = 2^{28}$ $\quad \left[(-2)^7\right]^4 = 2^{28}$ $\quad \left[(-2)^5\right]^3 = -2^{15}$

d)

$2^8 \cdot 5^8 = 10^8$ $\quad 2^7 \cdot 4^7 = 8^7$ $\quad \dfrac{72^5}{9^5} = 8^5$ $\quad \left(\dfrac{1}{4}\right)^5 \cdot 20^5 = 5^5$

e)

$36^4 = 6^8$ $\quad 400^{11} = 4^{11} \cdot 10^{22}$ $\quad \dfrac{72^5}{9^5} = 8^5$ $\quad \dfrac{200^7}{40^7} = 5^7$

8. Írd fel normálalakban!

a) $12\,500 = 1,25 \cdot 10^4$ **c)** $4,75 = 4,75 \cdot 10^0$ **e)** $0,9 = 9 \cdot 10^{-1}$

b) $23 = 2,3 \cdot 10^1$ **d)** $6\,400\,000 = 6,4 \cdot 10^6$ **f)** $0,025 = 2,5 \cdot 10^{-2}$

9. Mely számok normálalakját adtuk meg?

a) $1,2 \cdot 10^2 = 120$ **c)** $4,75 \cdot 10^1 = 47,5$ **e)** $9 \cdot 10^{-1} = 0,9$

b) $2,3 \cdot 10^3 = 2300$ **d)** $6,4 \cdot 10^0 = 6,4$ **f)** $2,5 \cdot 10^{-2} = 0,025$

10. Melyik több? Mennyivel? Hányszor?

a) $3,2 \cdot 10^3$	$>$	$3,2 \cdot 10^2$	2880-nal	10-szer
b) $5 \cdot 10^2$	$<$	$5 \cdot 10^4$	49 500-zal	100-szor

0812 – 1. tanári melléklet Algebrai kifejezések kártya (azonosságok, egyenletek és egyenlőtlenségek létrehozásához), 12 db

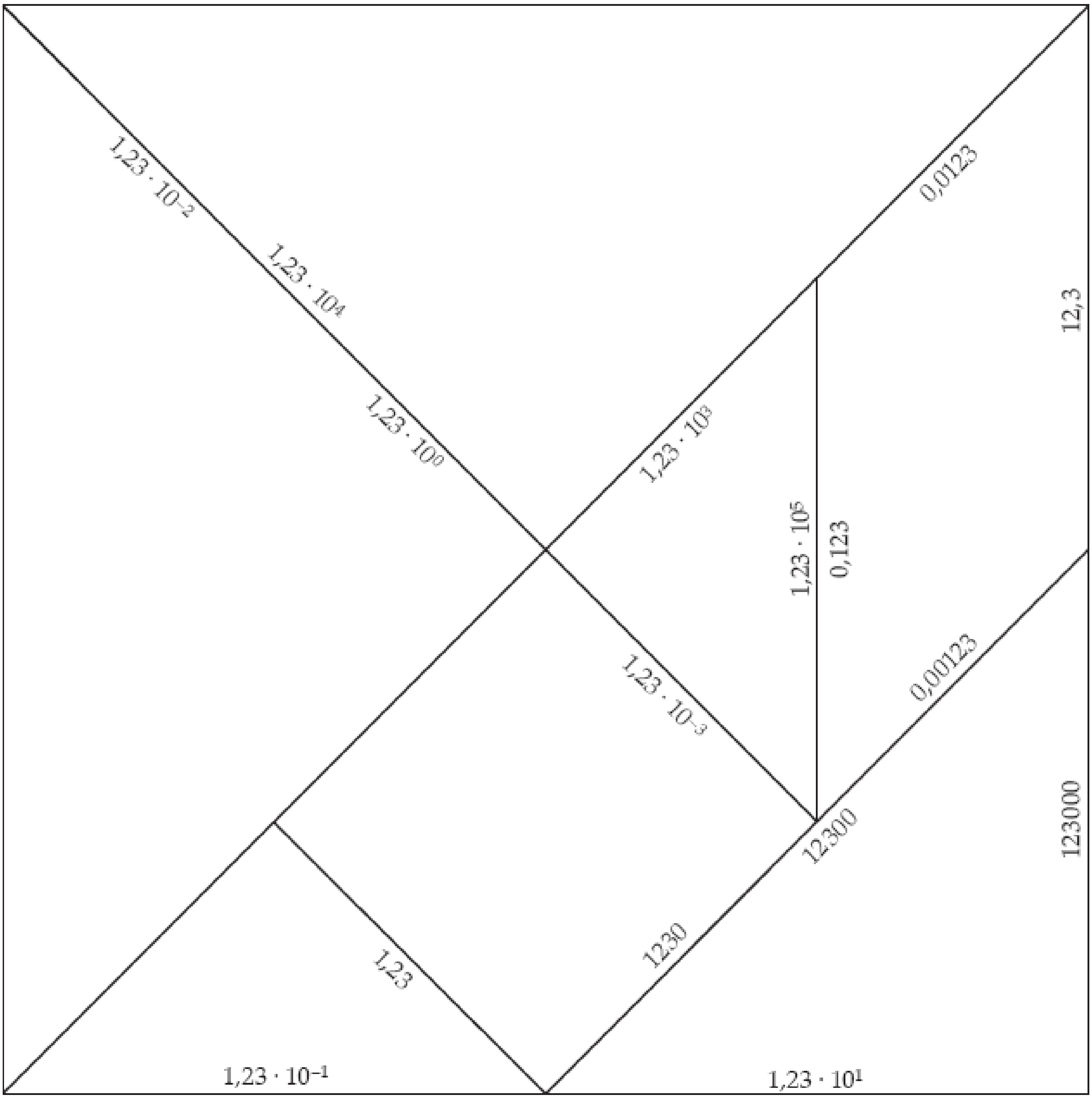
Osztályonként 8 (csoportonként 1) készlet, ebben a méretben, kartonlapra. A vonalak mentén szétvágandó.

$2\,(x-3)$	$-6+2\,x$	$2\,x-3$	$x+(x-3)$
$-(x+7)$	$-x-7$	$\dfrac{4x+9}{5}$	$0{,}8\,x+1{,}8$
x^3	$x\cdot x\cdot x$	$(x-1)+$ $+x+(x+1)$	$3\,x$

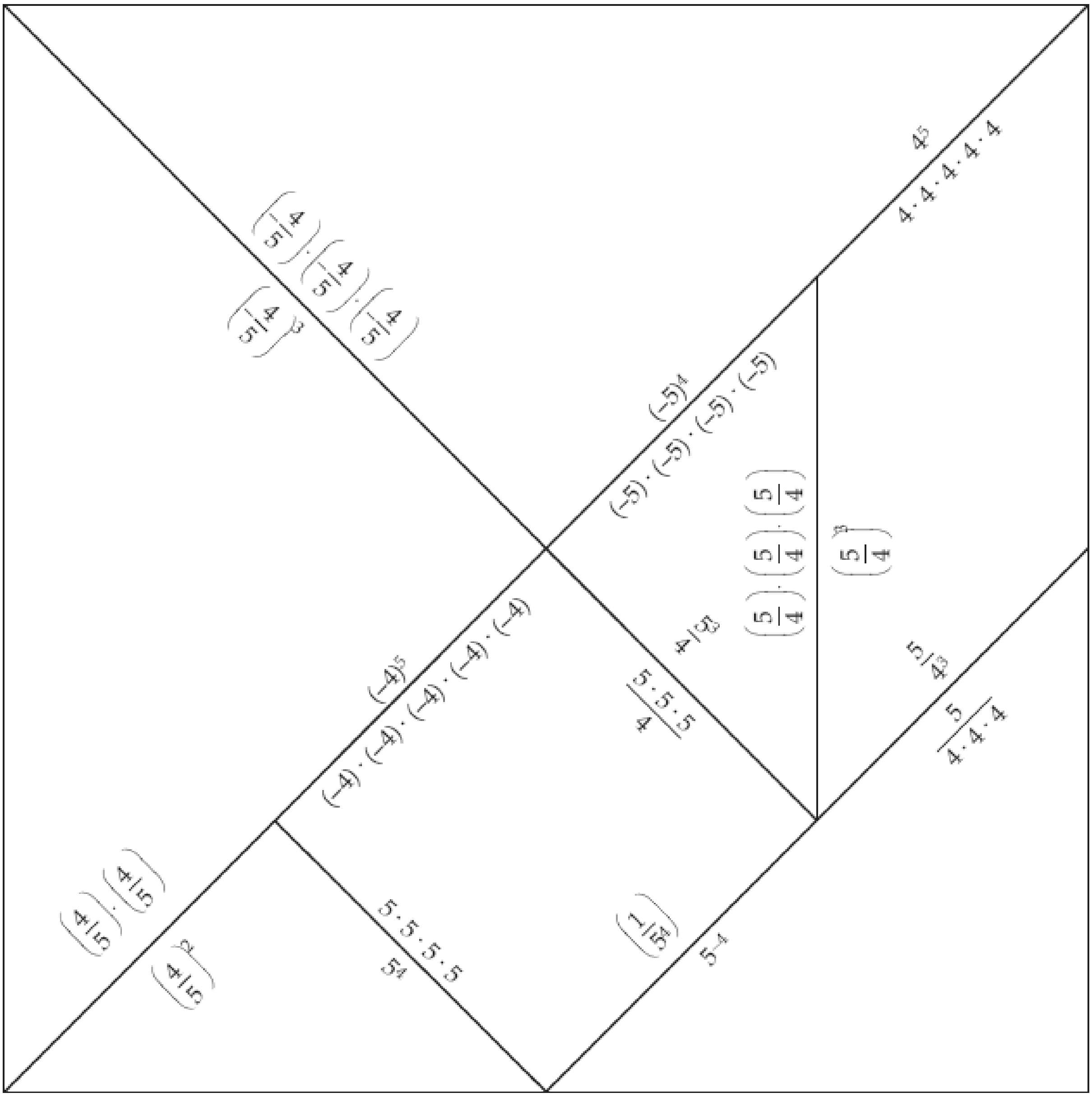
0812 – 2. tanári melléklet Tangram lapok 7 db

Osztályonként 8 (csoportonként 1) készlet, ebben a méretben, kartonlapra. A vonalak mentén szétvágandó.

Tangram A

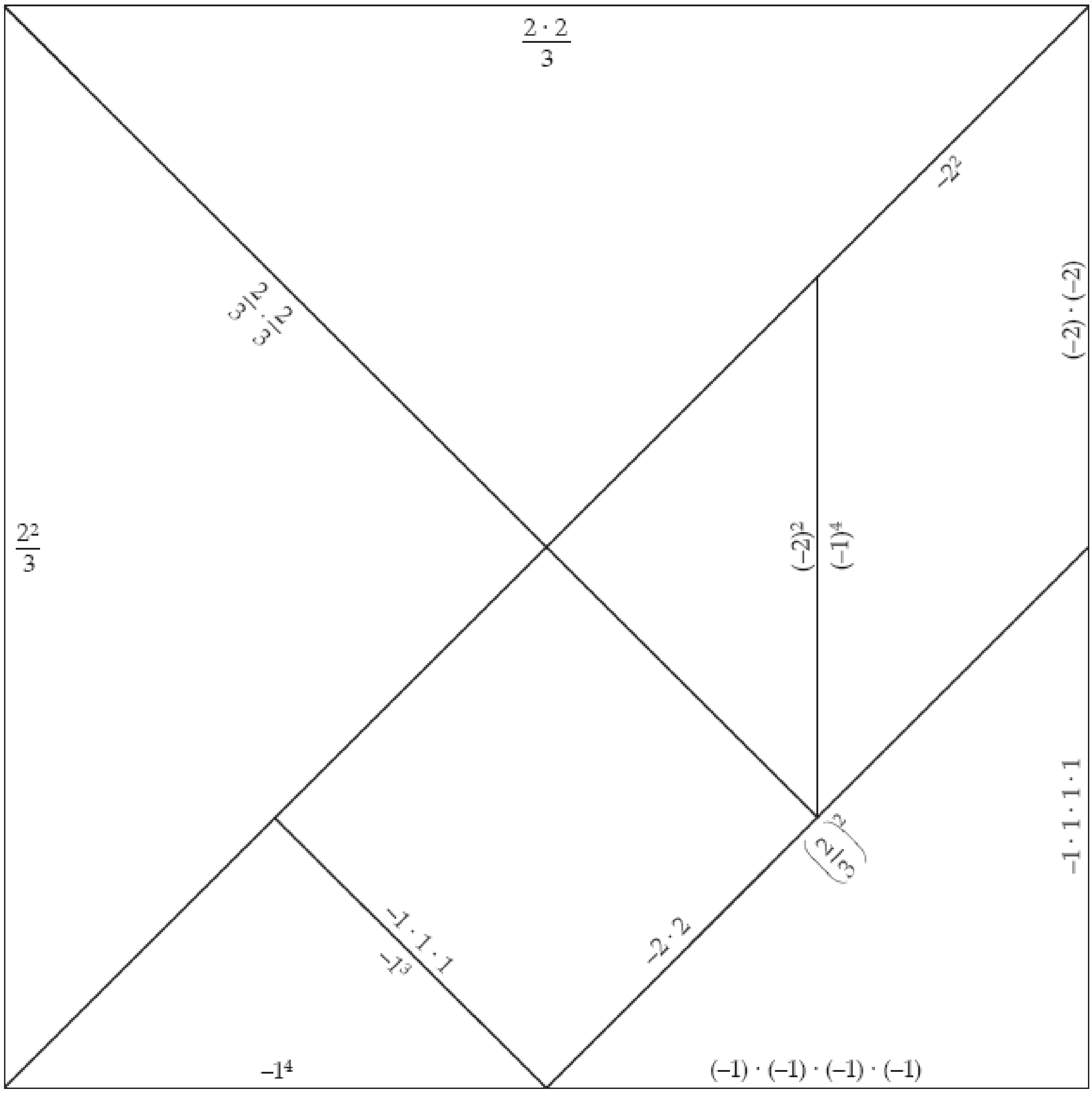


Tangram B



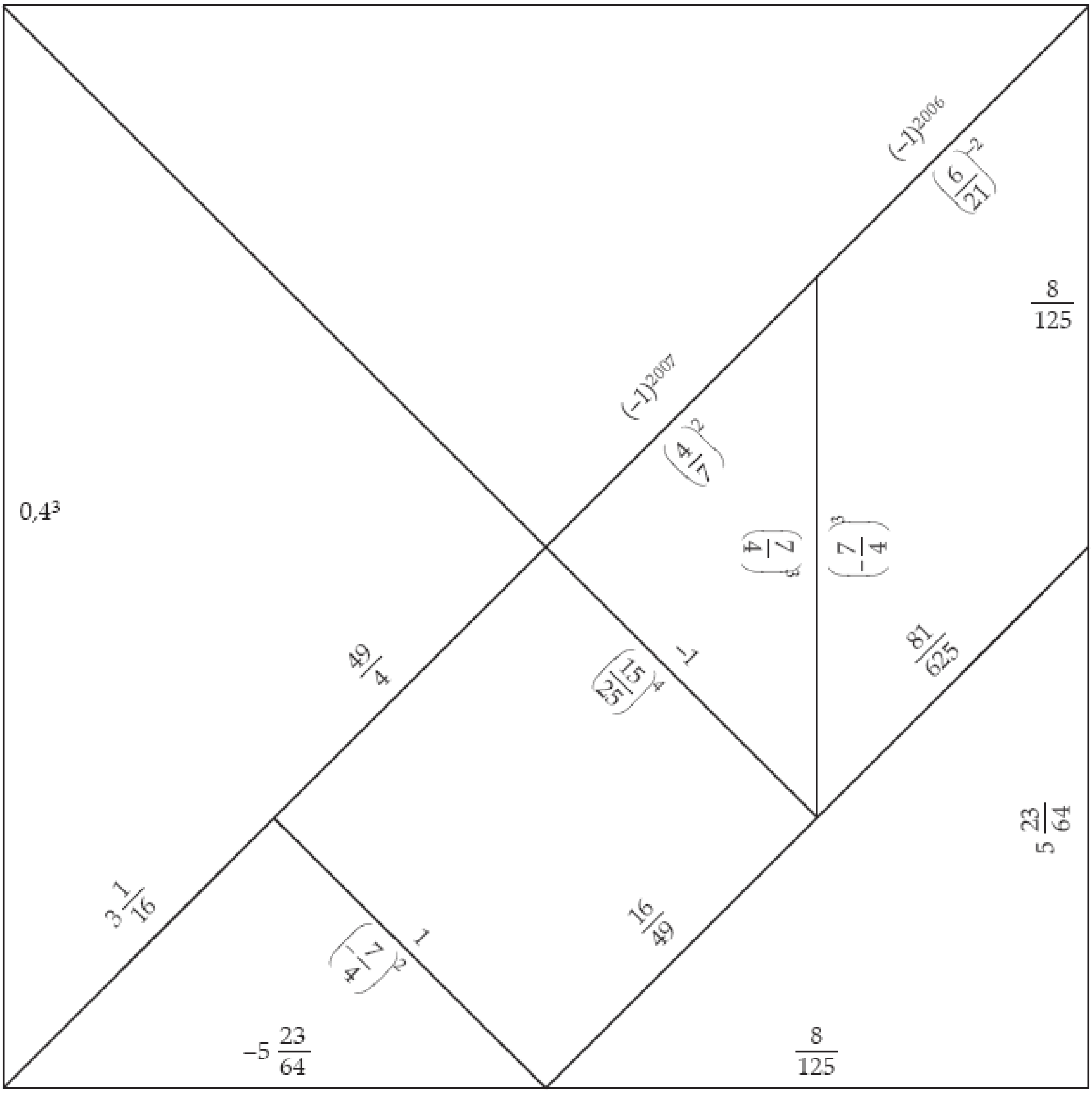
4^5
$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$
$\left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)$
$\left(\frac{4}{5}\right)^3$
$(-5)^4$
$(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$
$\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{4}\right)$
$\left(\frac{5}{4}\right)^3$
$\frac{5^3}{4}$
$\frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{4}$
$\frac{5}{4^3}$
$\frac{5}{4 \cdot 4 \cdot 4}$
$(-4)^5$
$(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$
$\left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)$
$\left(\frac{4}{5}\right)^2$
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
5^4
$\left(\frac{1}{5^4}\right)$
5^{-4}

Tangram C



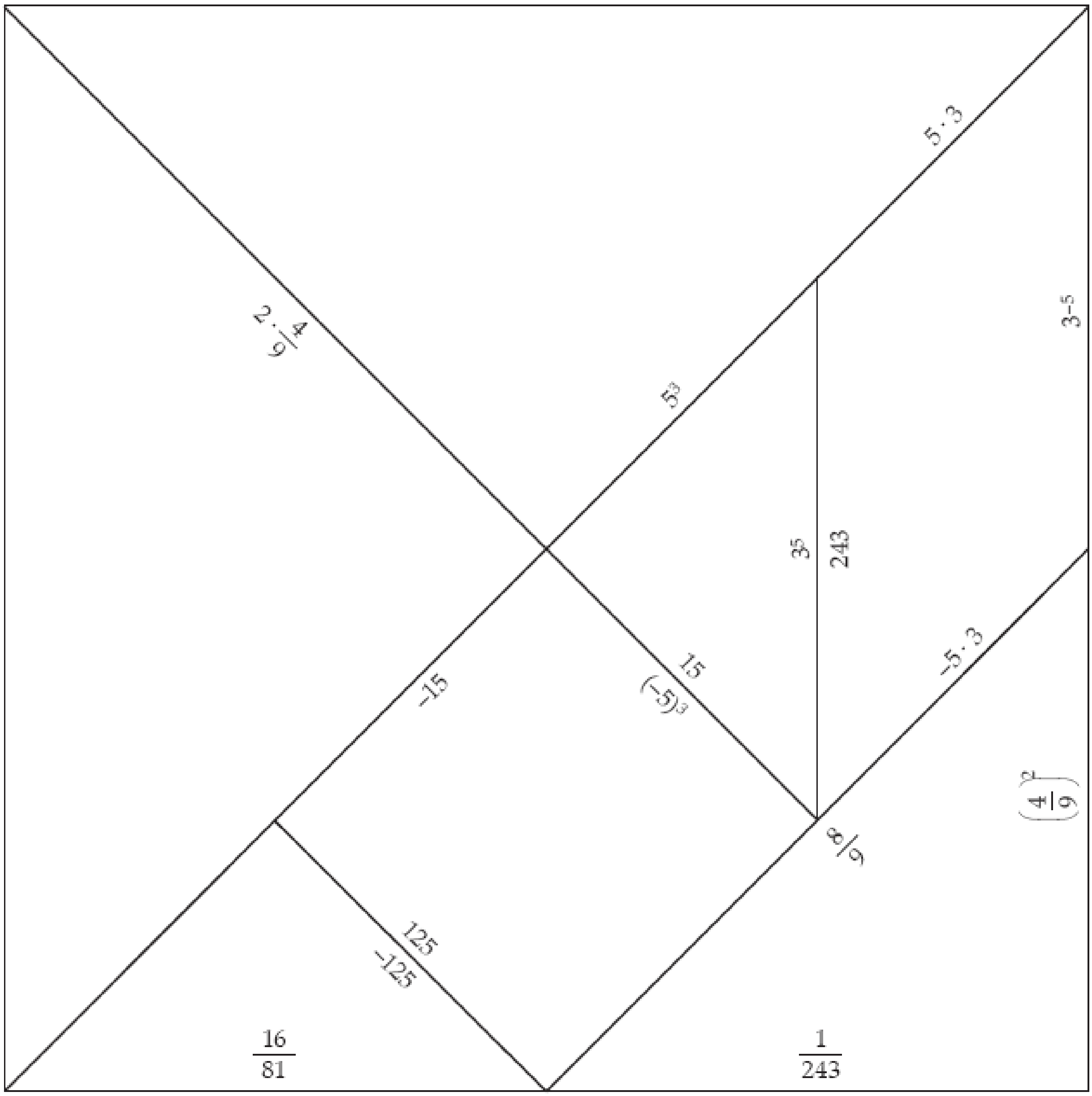
$\frac{2 \cdot 2}{3}$
-2^2
$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$
$(-2) \cdot (-2)$
$\frac{2^2}{3}$
$(-2)^2$
$(-1)^4$
$-1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
$\left(\frac{2}{3}\right)^2$
$-1 \cdot 1 \cdot 1$
-1^3
$-2 \cdot 2$
-1^4
$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

Tangram D



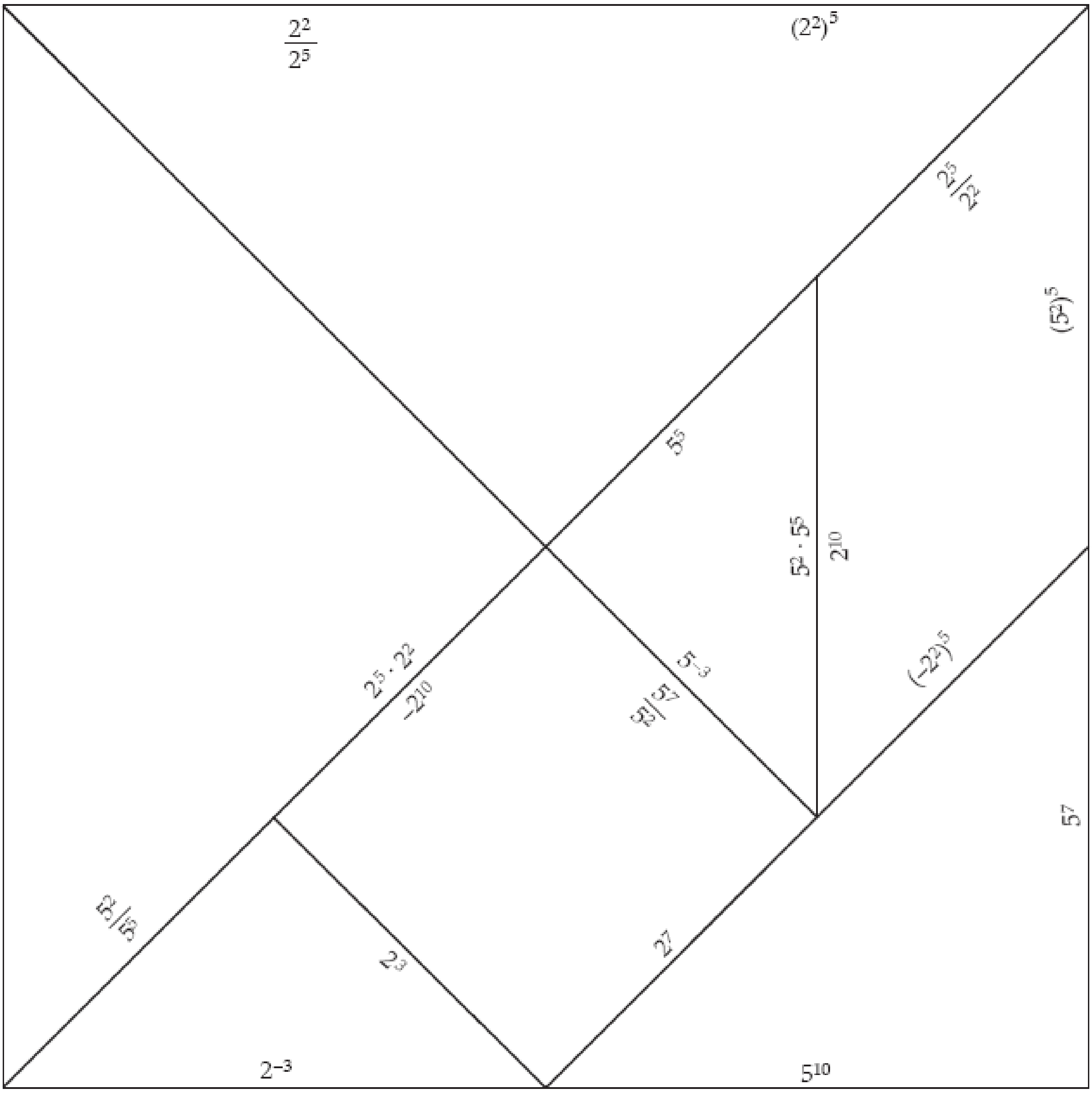
$(-1)^{2006}$
$\left(\frac{6}{21}\right)^{-2}$
$\frac{8}{125}$
$(-1)^{2007}$
$\left(\frac{4}{7}\right)^{2}$
$0{,}4^3$
$\left(\frac{4}{7}\right)^{3}$
$\left(-\frac{7}{4}\right)^{3}$
$\frac{49}{4}$
-1
$\left(\frac{25}{15}\right)^{4}$
$\frac{81}{625}$
$5\frac{23}{64}$
$3\frac{1}{16}$
1
$\left(-\frac{7}{4}\right)^{2}$
$\frac{16}{49}$
$-5\frac{23}{64}$
$\frac{8}{125}$

Tangram E

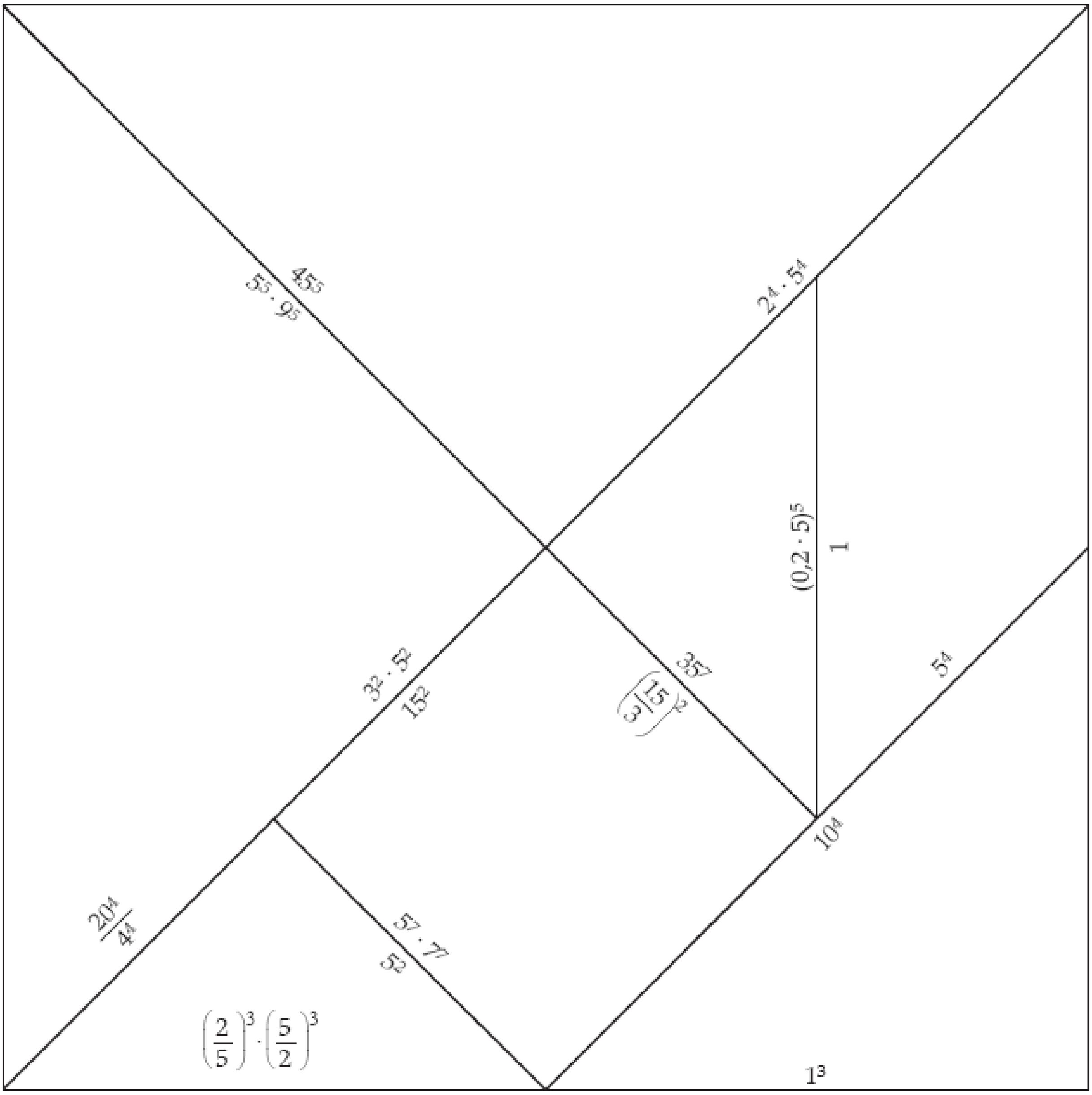


5 · 3
$2 \cdot \frac{4}{9}$
3^{-5}
5^3
3^5
243
–5 · 3
–15
15
$(-5)^3$
$\left(\frac{4}{9}\right)^2$
8/9
125
–125
$\frac{16}{81}$
$\frac{1}{243}$

Tangram F


$\frac{2^2}{2^5}$
$(2^2)^5$
$2^5/2^2$
$(5^2)^5$
5^5
$5^2 \cdot 5^5$
2^{10}
5^{-3}
$2^5 \cdot 2^2$
-2^{10}
$5^2/5^7$
$(-2^2)^5$
5^7
$5^2/5^5$
2^3
2^7
2^{-3}
5^{10}

Tangram G


45^5
$5^5 \cdot 9^5$
$2^4 \cdot 5^4$
$(0{,}2 \cdot 5)^5$
1
$3^2 \cdot 5^2$
15^2
3^5
5^4
10^4
$\frac{20^4}{4^4}$
$5^7 \cdot 7^7$
5^2
$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3$
1^3

0812 – 3. tanári melléklet: Önértékelő lap

Osztályonként 1 db géppapírra nyomva. Minden új órai felhasználáshoz a mellékletről az iskolában annyi fénymásolat készítendő, hogy minden tanulónak jusson egy önértékelő lap. Egy oldalon 3 ilyen lap szerepel, szét kell vágni.

Igyekezz őszinte válaszokat adni a kérdésekre, hogy ha szükséges, segíthessünk, és segíthess.
A betűjelek a tangram gyakorló feladatoknak felelnek meg.
Tegyél „i” jelzést minden sorban abba az oszlopba, aminek megállapítása igaz rád.

	Ismeretanyag	Tudom	Értem, de még gyakorolnom kell	Nem értem, segítséget kérek
A	1-nél nagyobb számok normálalakja			
B	Hatványalak, szorzatalak			
C	Zárójelezés hatványoknál			
D	A hatványérték kiszámítása			
E	Együttható és kitevő megkülönböztetése			
F	Azonos alapú hatványok szorzása és osztása			
G	Szorzat és hányados hatványozása, azonos kitevőjű hatványok szorzása és osztása			

Igyekezz őszinte válaszokat adni a kérdésekre, hogy ha szükséges, segíthessünk, és segíthess.
A betűjelek a tangram gyakorló feladatoknak felelnek meg.
Tegyél „i” jelzést minden sorban abba az oszlopba, aminek megállapítása igaz rád.

	Ismeretanyag	Tudom	Értem, de még gyakorolnom kell	Nem értem, segítséget kérek
A	1-nél nagyobb számok normálalakja			
B	Hatványalak, szorzatalak			
C	Zárójelezés hatványoknál			
D	A hatványérték kiszámítása			
E	Együttható és kitevő megkülönböztetése			
F	Azonos alapú hatványok szorzása és osztása			
G	Szorzat és hányados hatványozása, azonos kitevőjű hatványok szorzása és osztása			

Igyekezz őszinte válaszokat adni a kérdésekre, hogy ha szükséges, segíthessünk, és segíthess.
A betűjelek a tangram gyakorló feladatoknak felelnek meg.
Tegyél „i” jelzést minden sorban abba az oszlopba, aminek megállapítása igaz rád.

	Ismeretanyag	Tudom	Értem, de még gyakorolnom kell	Nem értem, segítséget kérek
A	1-nél nagyobb számok normálalakja			
B	Hatványalak, szorzatalak			
C	Zárójelezés hatványoknál			
D	A hatványérték kiszámítása			
E	Együttható és kitevő megkülönböztetése			
F	Azonos alapú hatványok szorzása és osztása			
G	Szorzat és hányados hatványozása, azonos kitevőjű hatványok szorzása és osztása			

0812 – 4. tanári melléklet: Feladatok

Osztályonként 1 db, kartonlapra nyomva ebben a méretben.

0812 – 4. tanári melléklet: Feladatok

A. A vegyészek szerint a fa és a szén minden hőfokon egyesül, de alacsony hőfokon olyan lassan, hogy nem tudjuk figyelemmel kísérni. A kémiai reakció sebességének törvénye szerint, ha a hőmérséklet 10 ºC-kal csökken, a reakció sebessége a felére esik vissza. Ha 1 g fa 600 ºC-os lángban 1 másodperc alatt ég el, akkor mennyi idő alatt ég el 1 g fa 20 ºC-on?

B. Ha minden napot csak úgy különböztetünk meg, hogy derűs vagy borús, hány különböző hét lehetséges? Biztos, előfordulhat vagy lehetetlen, hogy egy éven belül két hét egyforma? 1 év = 52 hét.
A kérdés tehát az, hogy 52-nél több, vagy kevesebb a különböző hetek száma?

C. Egy orosz hivatalban régi páncélszekrényre bukkantak. A kulcsot is megtalálták, de nem ismerték a zár titkát. Az ajtón 5 db koncentrikus kör mentén a régi orosz abc 36 betűje szerepelt. A zár akkor nyitható, ha az öt körön egy bizonyos sugár mentén a középponttól kifelé haladva egy konkrét betűsor helyezkedik el. Ha egy beállítás 3 másodpercig tart, biztos-e, hogy 10 munkanapon belül kinyitják a zárat?

D. Régen a kerékpárok hatjegyű rendszámot kaptak. Egy babonás ember félt a nyolcas számtól, ezért olyan rendszámot szeretett volna, amelyben nincs nyolcas. Úgy gondolkodott, hogy mivel 10 számjegy van, és abból számára csak egy szerencsétlen, és ez a nyolcas, 90%-os eséllyel szerencsés rendszámot kap. Igaza volt-e?

E. Vajon hányféle sakkjátszma lehetséges? Képes lenne–e egy ember az élete során az összes lehetséges játszmát lejátszani, ha 90 évig élne, napi 8 órát játszana, és másodpercenként lépne egyet?

F. Melyik a lehető legnagyobb szám, amit 3 db hármasból, ill. amit 3 db négyesből állíthatunk elő, azzal a feltétellel, hogy csak a három számjegyet használhatjuk.

G. Weöres Sándor „Elmehetsz a világba” című verse 2 versszakból áll.

Az első versszak így szól:
„Elmehetsz a világba híredér’,
Rólad cincog a zsákban az egér!
De szomorú valóban ugyebár:
rólad ordít az ólban a szamár!”

Hányféleképpen lehetne megírni a második versszakot, ha abban is az első és második, valamint a harmadik és negyedik sor rímel, és a második versszakban is ugyanazok a szavak szerepelhetnek, mint az elsőben? Feltétel, hogy a névelők és a de kötőszó nem választható el attól a szótól, amely előtt az első versszakban áll.

H. Ha a nyolcadikosok bizonyítványában 11 tantárgy szerepelne, és a diákok mindegyikből öt különféle osztályzatot kaphatnának, a következő állítások közül melyik lenne igaz?
a) Egy 30 fős osztályban biztosan van legalább két gyerek, akinek egyforma a bizonyítványa
b) Magyarországon biztosan van legalább két olyan ember, akinek a nyolcadikos bizonyítványában mind a 11 tantárgyból ugyanolyan osztályzata van.

I. Hány osztója van az 1200-nak?

0812 – 5. tanári melléklet: Becslési táblázat

Osztályonként 1 készlet, sima lapra, ebben a méretben.
A következő becslési táblázatból minden új órai felhasználáshoz osztályonként 8 (csoportonként 1) készlet szükséges. A következő 3 oldalon lévő összesített táblázatból minden új órai felhasználáshoz osztályonként 1 készlet kell.

<table>
<tr><th>Jel</th><th colspan="2">A probléma megfogalmazása</th><th>Becslés</th></tr>
<tr><td>A</td><td colspan="2">Mennyi idő alatt ég el 1 g fa 20 °C-on?</td><td></td></tr>
<tr><td>B</td><td colspan="2">Hány különböző hét lehetséges?</td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td colspan="2">Hányféle beállítása lehetséges a zárnak?</td><td></td></tr>
<tr><td>D</td><td colspan="2">Hányféle nyolcas mentes hatjegyű rendszám lehet?</td><td></td></tr>
<tr><td>E</td><td colspan="2">Kb. hányféle sakkjátszma lehetséges?</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">Melyik a lehető legnagyobb szám, ami három db egyforma számjegyből építhető fel?</td><td>Hármasból:</td><td></td></tr>
<tr><td>Négyesből:</td><td></td></tr>
<tr><td>G</td><td colspan="2">Hányféleképpen írható meg a második versszak?</td><td></td></tr>
<tr><td>H</td><td colspan="2">Hányféle nyolcadikos bizonyítvány lehetséges?</td><td></td></tr>
<tr><td>I</td><td colspan="2">Hány osztója van az 1200-nak?</td><td></td></tr>
</table>

Becslési táblázat / A

A	
2. csoport becslése	
3. csoport becslése	
4. csoport becslése	
5. csoport becslése	
6. csoport becslése	
7. csoport becslése	
8. csoport becslése	
9. csoport becslése	

Becslési táblázat / B

B	
2. csoport becslése	
3. csoport becslése	
4. csoport becslése	
5. csoport becslése	
6. csoport becslése	
7. csoport becslése	
8. csoport becslése	
9. csoport becslése	

Becslési táblázat / C

C	
2. csoport becslése	
3. csoport becslése	
4. csoport becslése	
5. csoport becslése	
6. csoport becslése	
7. csoport becslése	
8. csoport becslése	
9. csoport becslése	

Becslési táblázat / D

D	
2. csoport becslése	
3. csoport becslése	
4. csoport becslése	
5. csoport becslése	
6. csoport becslése	
7. csoport becslése	
8. csoport becslése	
9. csoport becslése	

Becslési táblázat / E

E	
2. csoport becslése	
3. csoport becslése	
4. csoport becslése	
5. csoport becslése	
6. csoport becslése	
7. csoport becslése	
8. csoport becslése	
9. csoport becslése	

Becslési táblázat / F

F	
2. csoport becslése	
3. csoport becslése	
4. csoport becslése	
5. csoport becslése	
6. csoport becslése	
7. csoport becslése	
8. csoport becslése	
9. csoport becslése	

Becslési táblázat / G

G	
2. csoport becslése	
3. csoport becslése	
4. csoport becslése	
5. csoport becslése	
6. csoport becslése	
7. csoport becslése	
8. csoport becslése	
9. csoport becslése	

Becslési táblázat / H

H	
2. csoport becslése	
3. csoport becslése	
4. csoport becslése	
5. csoport becslése	
6. csoport becslése	
7. csoport becslése	
8. csoport becslése	
9. csoport becslése	

Becslési táblázat / I

I	
2. csoport becslése	
3. csoport becslése	
4. csoport becslése	
5. csoport becslése	
6. csoport becslése	
7. csoport becslése	
8. csoport becslése	
9. csoport becslése	

0812 – 6. tanári melléklet Feldolgozható szövegek

Vékony kartonlapra nyomva osztályonként 2 készlet, ebben a méretben.

A: Feldolgozható szövegek

A vegyészek szerint a fa és a szén minden hőfokon egyesül, de alacsony hőfokon olyan lassan, hogy nem tudjuk figyelemmel kísérni. A kémiai reakció sebességének törvénye szerint, ha a hőmérséklet 10 ºC-kal csökken, a reakció sebessége a felére esik vissza. Ha 1 g fa 600 ºC-os lángban 1 másodperc alatt ég el, akkor mennyi idő alatt ég el 1 g fa 20 ºC-on?

Perelman „Szórakoztató algebra" című könyve alapján

Ha 10 ºC-onként felére esik a reakció sebessége, akkor ez azt jelenti, hogy 10 ºC-onként megduplázódik a reakcióidő.
600 ºC helyett 20 ºC, az 58 · 10 ºC-os hőmérsékletcsökkenés, azaz 58-szor duplázódik meg a reakcióidő.

Ha 600 ºC-on 1 g fa 1 s alatt ég el, akkor 20 ºC-on 1 g fa 1 s · 2^{58} s alatt ég el.
Mekkora szám ez?

$$2^{58} = 2^{60-2} = \frac{2^{60}}{2^2} = \frac{1}{2^2}\cdot 2^{60} = \frac{1}{4}\cdot\left(2^{10}\right)^6$$

Mivel $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$, nem követünk el nagy hibát, ha 2^{10} helyett 10^3-nal számolunk. A reakcióidő tehát kb.

$\frac{1}{4}\cdot\left(10^3\right)^6 s = \frac{1}{4}\cdot 10^{18} s = 0{,}25\cdot 10^{18} s = 2{,}5\cdot 10^{17} s$ lenne.

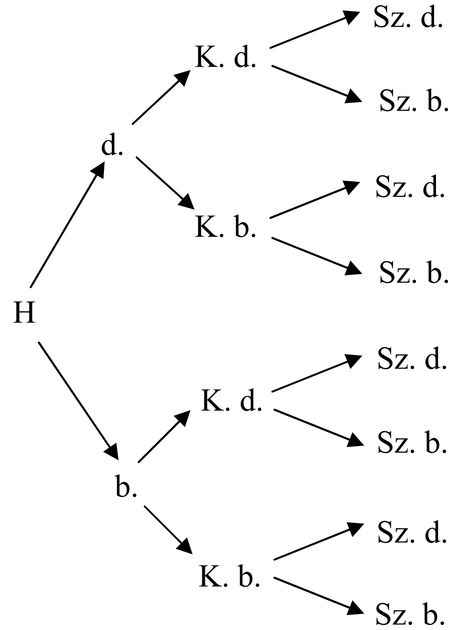
Mivel $1 év \approx 365\cdot 24\cdot 3600 s \approx 3\cdot 10^7 s$, a $2{,}5\cdot 10^{17} s \approx 8\cdot 10^9 év$.

Azaz 1 g szén 20ºC-on kb. 8 milliárd év alatt égne el.

B: Feldolgozható szövegek

Ha minden napot csak úgy különböztetünk meg, hogy derűs vagy borús, hány különböző hét lehetséges?
Biztos, előfordulhat vagy lehetetlen, hogy egy éven belül két hét egyforma?
Perelman „Szórakoztató algebra” című könyve alapján

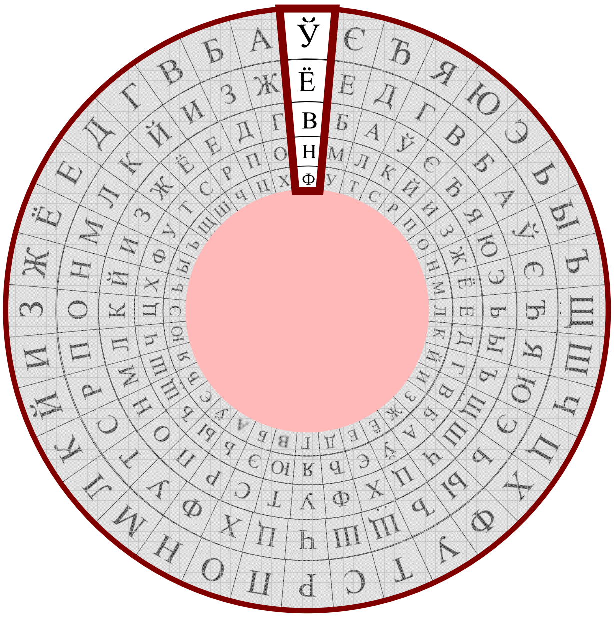
1 év = 52 hét
A kérdés tehát az, hogy 52-nél több, vagy kevesebb a különböző hetek száma?



Egy hét napjait tekintve a hétfő lehet derűs vagy borús (2-féle). Mindkettőhöz kétféle kedd csatlakozhat (ez már$2\cdot 2$-féle lehetőség). Minden kedd után kétféle szerda ($2 \cdot 2 \cdot 2$-féle lehetőség), minden szerdához kétféle csütörtök ($2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$-féle lehetőség) stb. egészen a 7. napig, vasárnapig, amikor is már $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 128$-féle lehetőség alakul ki. Ez pedig 2 év 24 hét kb.

Tehát előfordulhat, de nem biztos – nem is lehetetlen –, hogy egy éven belül két hét a derűs és borús napok szempontjából egyforma legyen.

C: Feldolgozható szövegek



Egy orosz hivatalban régi páncélszekrényre bukkantak. A kulcsot is megtalálták, de nem ismerték a zár titkát. Az ajtón 5 db koncentrikus kör mentén a régi orosz abc 36 betűje szerepelt. A zár akkor nyitható, ha az öt körön egy bizonyos sugár mentén a középponttól kifelé haladva egy konkrét betűsor helyezkedik el. Ha egy beállítás 3 másodpercig tart, biztos-e, hogy 10 munkanapon belül kinyitják a zárat?

Perelman „Szórakoztató algebra” című könyve alapján

Az első körön 36-féle betű állítható be, ezek mindegyike a második körön 36- féleképpen folytatható (ez már 36^2-féle lehetőség). A harmadik körön minden előző lehetőséghez 36-féle új betű csatlakozhat (36^3-féle lehetőség), amelynek mindegyikét a negyedik körön 36-féle betű követheti (36^4-félénél tartunk), végül minden eddigi betűnégyes végén 36-féle utolsó betű állhat az ötödik sorban (36^5-féle ötbetűs betűsor).

Tehát $36^5 = (6^2)^5 = 6^{10} = 60\ 466\ 176$-féle betűsor lehetséges.
Ha minden betűsor beállítása 3 s-ig tart, akkor az összes betűsor beállításához
$3 \cdot 60\ 466\ 176\text{s} = 181\ 398\ 528$ s-ra van szükség.

10 munkanap az $10 \cdot 8 \cdot 3600$ s = 288 000 s

Az összes számsor kiforgatásához 10 munkanap helyett 6298,56 munkanapra lenne szükség. Persze nem lehetetlen az a szerencse, hogy valaki akár elsőre éppen a jót találja meg, csak kicsi a valószínűsége.

D: Feldolgozható szövegek

Régen a kerékpárok hatjegyű rendszámot kaptak. Egy babonás ember félt a nyolcas számtól, ezért olyan rendszámot szeretett volna, amelyben nincs nyolcas. Úgy gondolkodott, hogy mivel 10 számjegy van, és abból számára csak egy szerencsétlen, és ez a nyolcas, 90%-os eséllyel szerencsés rendszámot kap. Igaza volt-e?
Perelman „Szórakoztató algebra” című könyve alapján

Mivel a nyolcast nem akarjuk, a hatjegyű szám első számjegye 9-féle lehet. Mindegyik eset 9-féle második számjeggyel folytatható ($9 \cdot 9$-féle lehetőség), ezek mindegyike 9-féle harmadik számjeggyel ($9 \cdot 9 \cdot 9$-féle lehetőség) és így tovább, mire a hatodik számjegyhez érünk, jól látszik, hogy 9^6 -féle hatjegyű szám jöhet létre.

Ha feltételezzük, hogy a rendszám csupa nulla nem lehet, ez akkor is
$9^6 - 1 = 531\,440$-féle lehetséges rendszám. Ha a nyolcast is megengednénk, akkor a lehetséges rendszámok száma $10^6 - 1 = 999\,999$ lenne.
A „szerencsés” rendszámok száma ennek csupán kb. 53%-a, tehát a szerencsés rendszámok aránya sokkal kisebb, mint azt a büszke, de babonás biciklitulajdonos gondolta.
Alap: 999 999
Százalékérték: 531 440
Százalékláb: 531 440 : 9999,99

E: Feldolgozható szövegek

Vajon hányféle sakkjátszma lehetséges? Képes lenne–e egy ember az élete során az összes lehetséges játszmát lejátszani, ha 90 évig élne, napi 8 órát játszana, és másodpercenként lépne egyet?
Perelman „Szórakoztató algebra” című könyve alapján

Hogy mennyi a lehetséges sakkjátszmák száma, azt pontosan kiszámítani nem tudjuk, de egy belga matematikus megkísérelte legalább körülbelül meghatározni:
„Az első lépésnél a világossal játszó játékosnak 20 lépési lehetősége van (a 8 gyalog 16 lépése – mivel első lépésnél egyet vagy kettőt léphet -, és plusz a két ló 2-2 lépése. Világos bármelyik lépésére sötét ugyanezen 20 ellentétes lépések egyikével válaszolhat. Ha világos minden lépését összevetjük a sötét minden lépésével, akkor a világos és a sötét első lépése után $20\cdot20=400$ különböző sakkjátszma lehetséges, pedig még mindkét játékos csak egyet lépett. Az első lépés után a lehetséges lépések száma is növekszik.”
A számítások egyszerűsítése érdekében a következő átlagos helyzetet vesszük alapul:
1. Az első öt lépésnél minden játékosnak 20-20 lépési lehetősége van.
2. A következő lépéseknél mindkét játékosnak 30-30 lépése lehet.
Tegyük fel azon kívül, hogy a sakkjátszmák átlagosan 40 lépésből állnak.

Az első öt lépés tehát = $(20 \cdot 20)^5$-féleképpen lehetséges, és ezek mindegyikét a hátralevő 35 lépés során $(30\cdot30)^{35}$-féleképpen lehet folytatni. A lehetséges játszmák száma tehát $(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35}$. De mekkora szám ez?
$(20 \cdot 20)^5 \cdot (30 \cdot 30)^{35} = (20^2)^5 \cdot (30^2)^{35} = 20^{10} \cdot 30^{70} = (2 \cdot 10)^{10} \cdot (3 \cdot 10)^{70}=$
$=2^{10} \cdot 10^{10} \cdot 3^{70} \cdot 10^{70} = 2^{10} \cdot 3^{70} \cdot 10^{80}$
Mivel $2^{10} = 1024$, nem követünk el nagy hibát, ha helyette $1000 = 10^3$-nal számolunk. Mivel $3^2 = 9$, helyette 10-zel, és mivel $3^4 = 81$, helyette $8 \cdot 10$-zel számolhatunk.

$$2^{10}\cdot3^{70}\cdot10^{80}=2^{10}\cdot3^{2}\cdot3^{68}\cdot10^{80}=2^{10}\cdot3^{2}\cdot\left(3^4\right)^{17}\cdot10^{80}\approx10^{3}\cdot10\cdot8^{17}\cdot10^{17}\cdot10^{80}=\left(2^3\right)^{17}\cdot10^{101}=$$

$$=2^{51}\cdot10^{101}=2\cdot\left(2^{10}\right)^5\cdot10^{101}=2\cdot\left(10^3\right)^5\cdot10^{101}=2\cdot10^{116}$$

Egy olyan számról van szó, amelyben a kettes után 116 db nulla következik. Ennyiféle sakkpartit feltételezhetünk kb. Ha feltesszük, hogy a Föld minden lakója éjjel-nappal sakkozna, mégpedig úgy, hogy minden játékos másodpercenként lépne egyet, még akkor is kb. 10^{100} évszázadra lenne szükség az összes lehetséges parti lejátszásához.

F: Feldolgozható szövegek

Melyik a lehető legnagyobb szám, amit 3 db hármasból, ill. amit 3 db négyesből állíthatunk elő, azzal a feltétellel, hogy csak a három számjegyet használhatjuk.
Perelman „Szórakoztató algebra” című könyve alapján

a) Hármasokkal:

333; 33^3; 3^{33}; 3^{3^3}

$3^5 = 243 < 333 < 3^6 = 729$; $3^9 < 33^3 = 35\,937 < 3^{10} = 59\,049$; $3^{3^3} = 3^{27}$

Ebből következik, hogy a legnagyobb szám: 3^{33}

b) Négyesekkel:

444; 44^4; 4^{44}; 4^{4^4};

$4^4 = 256 < 444 < 4^5 = 1024$; $4^{10} < 44^4 = 3\,748\,096 < 4^{11} = 4\,194\,303$;

$4^{4^4} = 4^{256}$;

Ebből következik, hogy négyesek esetén a legnagyobb 4^{4^4}.

G: Feldolgozható szövegek

Weöres Sándor „Elmehetsz a világba” című verse 2 versszakból áll.
Az első versszak így szól:
„Elmehetsz a világba híredér’,
Rólad cincog a zsákban az egér!
De szomorú valóban ugyebár:
rólad ordít az ólban a szamár!”

Hányféleképpen lehetne megírni a második versszakot, ha abban is az első és második, valamint a harmadik és negyedik sor rímel, és a második versszakban is ugyanazok a szavak szerepelhetnek, mint az elsőben? Feltétel, hogy a névelők és a de kötőszó nem választható el attól a szótól, amely előtt az első versszakban áll.
Imrecze Zoltánné – Reiman István – Urbán János „Fejtörő feladatok felsősöknek” című feladatgyűjteménye alapján

Az 1. és 2. sor lehetséges rím párjai: világba – zsákban és híredér` - az egér.
Az első sorban a rímelő szón kívül 2, a második sorban a rímelő szón kívül 3 szó van, ezek azonos rím párok esetén 2 ill. $3\cdot2\cdot1=6$-féleképpen sorakozhatnak fel. Ez $2\cdot6=12$-féle első két sort jelent egy rím párral és újabb 12-t a másikkal.
Összesen $2\cdot12$-féle első két sor.

A 3. 4. sor lehetséges rím párjai: ugyebár – szamár és valóban – az ólban.
A 3. sorban is két szó van a rímelőkön kívül, és a 4.-ben is három a rímelőkön kívül. Ez azt jelenti, hogy a 3. 4. sor is $2\cdot12$-féleképpen alakulhat.

A négy sor lehetséges változatainak száma tehát $2 \cdot 12 \cdot 2 \cdot 12$, de ebben az első versszak is benne van. A második versszak tehát $4 \cdot 12^2 – 1 = 576 – 1 = 575$-féleképpen írható meg ugyanezekből a szavakból.

H: Feldolgozható szövegek

Ha a nyolcadikosok bizonyítványában 11 tantárgy szerepelne, és a diákok mindegyikből öt különféle osztályzatot kaphatnának, a következő állítások közül melyik lenne igaz?

a) Egy 30 fős osztályban biztosan van legalább két gyerek, akinek egyforma a bizonyítványa
b) Magyarországon biztosan van legalább két olyan ember, akinek a nyolcadikos bizonyítványában mind a 11 tantárgyból ugyanolyan osztályzata van.

Imrecze Zoltánné – Reiman István – Urbán János „Fejtörő feladatok felsősöknek” című feladatgyűjteménye alapján

Pl. magyarból ötféle jegy lehetséges, ezek mindegyikéhez 5-féle történelem osztályzat társulhat ($5 \cdot 5 = 5^2$-féle lehetőség, amelyek mindegyikéhez 5-féle matematika jegy társulhat (5^3), pedig ez még csak három tantárgy. 11 tantárgy esetén a bizonyítványok 5^{11}-féleképpen alakulhatnak. Ez 48 828 125-féle bizonyítvány.

a) A lehetséges bizonyítványok száma több, mint 30, ezért nem biztos hogy lesz két egyforma, de persze véletlenül lehetséges.

b) Magyarország lakóinak száma kb. 10^7, és ez kevesebb, mint 5^{11}, vagyis az sem biztos, hogy van két olyan magyar, akinek egyforma a bizonyítványa, de véletlenül lehetséges.

I: Feldolgozható szövegek

Hány osztója van az 1200-nak?

Egy szám összes osztója előállítható prímtényezőiből szorzással. Mivel az 1200 prímtényezős alakja $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$, osztói ezekből a prímtényezőkből állíthatók elő.

A kettő 5-féle hatványkitevővel szerepelhet, mert a 0. hatványon is lehet, ez az 5-féle lehetőség 2-féleképpen folytatható, mert a 3-nak kétféle hatványa szerepelhet: a 0. és az 1. Ez már 10-féle lehetőség, de ezek mindegyike az 5-nek 3-féle hatványával folytatható. Ez összesen $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$-féle lehetőség. Ennyi osztója van az 1200-nak. Aki nem hiszi, írja fel mind a harminc osztót. Én megtettem. Tényleg annyi.

0812 – 7. tanári melléklet Borítékos segítség

Osztályonként 8 készlet (Csoportonként 1 készlet) sima lapra nyomva. Szétvágandó a szaggatott vonalak mentén.

Borítékos segítség hatvány hatványozásához:

1. Az egyik hatványt írd fel szorzat alakban!
2. Az így megmaradó hatványt vagy hatványokat is írd fel szorzat alakban!
3. A kapott azonos tényezőjű szorzatot írd fel hatvány alakban!
4. Keress összefüggést az eredeti hatványkitevők, és az eredményül kapott hatvány hatványkitevője között!

Borítékos segítség azonos kitevőjű hatványok szorzásához:

1. Írjátok fel a hatványokat szorzat alakban!
2. Csoportosítsátok másképp a tényezőket! (Legyen egyforma kéttényezős szorzatok szorzata!)
3. Az új egyenlő tényezőjű szorzatot írjátok fel hatvány alakban!
4. Keressétek ki a hatványértéket a hatványtáblázatból!

Borítékos segítség azonos kitevőjű hatványok osztásához:

1. Írjátok fel a számlálót is és a nevezőt is szorzat alakban!
2. Alakítsátok a kifejezést úgy, hogy egyenlő törtek szorzata legyen! (Gondoljatok arra, hogy törtet törttel hogyan szoroztunk?
3. Ha lehet, egyszerűsítsétek a törteket!
4. Az egyenlő tényezők szorzatát írjátok fel hatvány alakban!
5. Keressétek ki a táblázatból a hatványértéket!

Borítékos segítség szorzat hatványozásához:

1. Írd fel a hatványt szorzat alakban!
2. Csoportosítsd másképpen a tényezőket!
3. Az új egyenlő tényezőjű szorzatokat írd fel hatvány alakban!
4. Keresd ki a hatványok értékét a hatványtáblázatból!
5. Végezd el a hatványértékek szorzását!

Borítékos segítség hányados hatványozásához:

1. Írd fel a hatványt szorzat alakban!
2. A számlálók szorzatát is és a nevezők szorzatát is írd fel hatvány alakban!
3. Keresd ki a hatványok értékét!
4. Esetleg végezd el az osztást!