0783. MODUL

HASÁB, HENGER

Hasáb és henger térfogata

KÉSZÍTETTE: VÉPY-BENYHE JUDIT

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Hasáb, henger térfogata
Időkeret	3 tanóra + 2 tanóra összefoglalás és értékelés
Ajánlott korosztály	7. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Szűkebb környezetben*: Kerület, terület, felszín, térfogat *Ajánlott megelőző tevékenységek*: Hasáb, henger, felszínszámításuk, területszámítás (Háromszög, paralelogramma, deltoid, kör, szabályos sokszögek…)
A képességfejlesztés fókuszai	*Számlálás, számolás*: Terület-, kerület-, felszín- és térfogatszámítási feladatok, fejben és kalkulátor használatával egybekötve. *Becslés, mérés*: Méréssel egybekötött problémamegoldások, mértékváltási feladatok. *Szövegesfeladat-megoldás, problémamegoldás, metakognició*: Gyakorlati helyzetekben a hasábok, hengerek felismerése, kapcsolódó számítási feladatok megoldása. *Deduktív következtetés, induktív következtetés*: Általános képletek alkotása a hasábok és hengerek térfogatszámítására.

AJÁNLÁS

Frontális-, egyéni-, páros- és csoportmunka. A csoportokat 4, esetleg 5 fő alkothatja. A párokat a padtársak képezik.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Hengerek, hasábok és egyéb műanyag testek

ÉRTÉKELÉS

Az egyéni és csoportos munka megfigyelése alapján, szóbeli értékelés. A modul végén szerepel két témazáró dolgozat (egy könnyebb és egy nehezebb) és annak megoldása.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök Feladatok
I. A térfogat fogalmáról tanultak átismétlése, egyenes hasábok térfogata			
1.	A térfogat szemléletes jelentése	Fogalomalkotás, rendszerezés	1 cm^3-es, 1 dm^3-es műanyag kockák (esetleg 1 m^3-es kockaváz)
2.	Állandó térfogat – különböző testek	Számolás, tapasztalatgyűjtés	Fehér egységkockák (csoportonként 10-15 db)
3.	Téglatest (kocka) térfogata	Rendszerezés, felelevenítés	Műanyag téglatestek, kockák; színes rúdkészlet, 0781. modul 2. tanári mellékletének téglateste
4.	Hasábok kirakása egységkockával		1. feladatlap, színes rúdkészlet (csoportonként egy)
5.	Derékszögű háromszögalapú hasáb térfogata kirakással		1. tanári melléklet, színes rúdkészlet, műanyag derékszögű háromszögalapú hasáb
II. Forgáshenger térfogata			
1.	Egy hasáb térfogata képlettel kiszámolva (egy kézbeadott műanyag test esetén)		Műanyag hasábok, otthonról hozott tárgyak, otthon készített hálók, 0781. modul 2. tanári melléklete, színes rúd készlet
2.	Egy hasáb térfogata képlettel kiszámolva (leírt példa esetén)		2. feladatlap
3.	Térfogat – Űrtartalom (mértékegységek átváltása)		Egységkockák, literes palack, 1 l, 1 dl, 1 cl, 1 ml-es űrtartalommérő edények, 2. tanári melléklet
4.	Egy forgáshenger térfogatának számolása (kézbe adott műanyag henger esetén)		Műanyag forgáshengerek, otthonról hozott tárgyak, 0781. modul 2. tanári melléklete
5.	Forgáshengerek térfogata – általános képlet		3. feladatlap

6.	Egy egyenes körhenger térfogatának számolása (leírt példa esetén)		3. feladatlap
7.	Tetszőleges alapú „oszlopok” térfogata		Pusztai-féle készlet egyenes, nem szabályos alapú hengerei

III. Hasábok, hengerek térfogata – gyakorlás

1.	Egyenes hasáb, forgáshenger térfogata, felszíne – szöveges példák, gyakorlás		Feladatgyűjtemény

IV. Összefoglalás, gyakorlás

V. Felmérő feladatlap megírása

A FELDOLGOZÁS MENETE

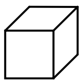
I. A térfogat fogalmáról tanultak átismétlése, egyenes hasábok térfogata

1. A térfogat szemléletes jelentése

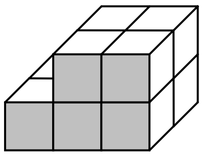
Frontálisan beszéljük meg az alábbi összegzésben foglaltakat!
Fontos, hogy elhangozzon: a térfogat mérése ugyanolyan mérés, mint pl. a hosszmérés, azaz az egységgel (hosszmérés esetén a méterrel) való összehasonlítás. Térfogat mérésénél az egység az 1 cm^3-es kocka, illetve az 1 dm^3-es, 1 m^3-es, stb. kocka. Ezeket az egységeket a tanár bemutatja, ha szükséges, szemlélteti az átváltást, bemutatja az 1 cm^3-es egységkocka hányszor „fér bele” az 1 dm^3-es egységkockába. Végül a gyerekek leírják a füzetbe a mértékegységek átváltását: 1000 mm^3 = 1 cm^3, stb.

A térfogat

A testek térfogata egy olyan szám, ami azt mutatja meg hogy a test a térnek mekkora részét foglalja el.
Ennek a számnak 4 fontos tulajdonsága van:



= 1 egység



– pozitív szám,
– egybevágó testekhez egyenlő szám tartozik, azaz térfogatuk egyenlő,
– ha egy testet két testre vágunk szét, a két test térfogatának összege egyenlő az eredeti test térfogatával
– szükség van egységre, melynek térfogata 1. Általában az egységoldalú kocka térfogatát választjuk egységnek.

A jobb oldali test térfogata 10 egység, mivel 10 egységkockából áll.

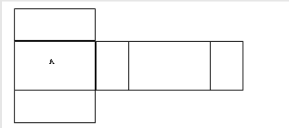
A térfogat leggyakrabban használt mértékegységei: mm^3, cm^3, dm^3, m^3.
$10 \cdot 10 \cdot 10\ mm^3 = 1000\ mm^3 = 1\ cm^3$.
$10 \cdot 10 \cdot 10\ cm^3 = 1000\ cm^3 = 1\ dm^3$.
$10 \cdot 10 \cdot 10\ dm^3 = 1000\ dm^3 = 1\ m^3$.

2. Állandó térfogat – különböző testek

Ezután csoportokban, párban vagy önállóan dolgozva az lehet a gyerekek feladata, hogy 8 db fehér egységkockából (színes rúdkészlet) rakjanak ki testeket, majd mondják meg a térfogatukat. Megbeszélik, hogy természetesen minden test esetében 8 cm^3 a térfogat. Fontos hangsúlyozni, hogy a testek térfogata csak az egységkockák darabszámától függ. Ha van idő, megkérheti a tanár a gyerekeket, hogy próbáljanak a nyolc egységkockából hasábokat kirakni. Ha lehet, ne csak téglatesteket! Akár az egységkockák felezésének lehetőségét is megemlítheti a tanár. (Természetesen ekkor csak rajzban lehet megvalósítani a terveket.)

3. Téglatest (kocka) térfogata

Minden csoport, esetleg minden gyerek kap egy-két téglatestet, kockát. Számolják ki a térfogatukat! (Ne képlettel, hanem egységkockákkal, illetve a színes rúd készlettel való kitöltéssel. Természetesen nem kell kitölteni az egészet, csak a méréshez szükséges mennyiségben.) (Ez a művelet csak akkor szükséges, ha részletesen át akarjuk ismételni a téglatest térfogatát.) Használható a 0781. modul 2. tanári mellékletének téglateste:
0781. modul 2. tanári melléklet – Lásd a 0781. modul végén és az eszközei közt!
A jelű háló.



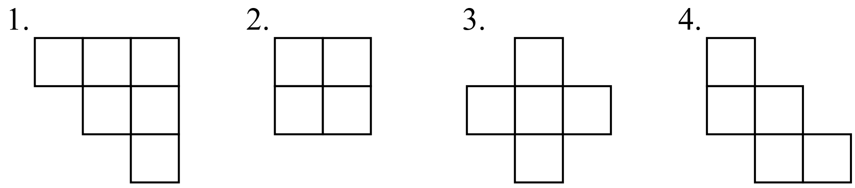
A kitöltés után – illetve ha nem tartjuk ezt szükségesnek, helyette –, felelevenítjük a téglatest térfogatszámításának módszerét, azaz ki kell rakni az alaplapot egységkockákkal(ami a téglalap esetében bármelyik lap lehet), majd kiszámoljuk, mennyi réteg „fér rá”, hogy kitöltse a téglatestet. Az alaplap kirakása egységkockákkal tulajdonképpen az alaplap területe, a rétegek száma pedig a magasság. (Ez már előrevetíti a „térfogat = alapterület · magasság” képletet.)

4. Hasábok kirakása egységkockával

1. feladatlap 1. feladata alapján kirakják a hasábokat, megállapítják a térfogatukat. A 4. hasáb csak gyorsabban haladó gyerekeknek ajánlott! Hangsúlyozzuk az egyenes hasábok rétegekből kirakhatóságát! (Lásd: előző pont.)

1. FELADATLAP

1. Rakd ki 1 cm^3-es kockákból (színes rúdkészletben a fehér kocka) az alábbi egyenes hasábokat, és állapítsd meg a térfogatukat! Az ábra a hasábok alaplapját ábrázolja. Magasságukat *m*-mel jelöltük.

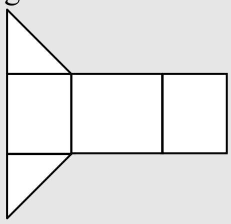


$m = 2$ cm $m = 3$ cm $m = 2$ cm $m = 4{,}5$ cm

1. $T_{alaplap} = 6\ \text{cm}^2$; $V = 6 \cdot 2 = \mathbf{12\ cm^3}$;
2. $T_{alaplap} = 4\ \text{cm}^2$; $V = 4 \cdot 3 = \mathbf{12\ cm^3}$;
3. $T_{alaplap} = 5\ \text{cm}^2$; $V = 5 \cdot 2 = \mathbf{10\ cm^3}$;
4. $T_{alaplap} = 5\ \text{cm}^2$; $V = 5 \cdot 4{,}5 = \mathbf{22{,}5\ cm^3}$.

5. Derékszögű háromszög alapú hasáb térfogata kirakással

A tanár kioszt minden csoportnak egy derékszögű egyenlőszárú háromszögalapú hasábot (az **1. tanári melléklet**ből készíthető ilyen, de érdemesebb műanyag testet használni, ha van).
1. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

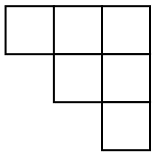


Feladat: a hasáb térfogatának meghatározása. Hagyjuk a csoportokat gondolkozni, ha lehet ne irányítsuk frontálisan a térfogat meghatározás menetét!
Két módszer:
1. Színes rúdkészlet segítségével. (Az alaplap kirakásához felezni kellene az egységkockákat.)
2. Felismerhető, hogy két ilyen hasábból éppen kirakható egy négyzet alapú egyenes hasáb. (Két csoport összerakhat két hasábot, vagy a tanár adhat a pót hasábokból egyet a csoportnak, akik ezt felfedezték, és így akarnak számolni.)
Megoldások:
1. Az alapterület kirakható 6 db egész és 4 db fél egységkockából, azaz 8 db kocka felhasználásával. Ebből 10 db réteg van egymásra rakva. Tehát a térfogat az alapterület ($6 \cdot 4 / 2 = 8$ cm^2) és a magasság (5 cm) szorzata = 40 cm^3.
2. Másképpen a térfogat egyenlő a négyzet alapú egyenes hasáb térfogatának fele, mivel két háromszögalapú hasáb együtt egy négyzet alapú hasábot alkot. A négyzet alapú hasáb térfogata: $4 \cdot 4 \cdot 5 = 80$ cm^3; a háromszögalapú hasáb térfogata: $80 / 2 = 40$ cm^3.
Feltétlenül beszéljük meg az összes megoldást!
Ezek után frontálisan hangozzon el a következő: A hasáb térfogata tehát:
$\boldsymbol{V_{egyenes\ hasáb} = T_{alaplap} \cdot M}$.

ÖSSZEGZÉS:

Egyenes hasábok térfogata

Tapasztaltuk, hogy az egyenes hasábok térfogata úgy számolható, hogy az alaplapjuk területét megállapítjuk, majd szorozzuk a magasságukkal. Pl. Az alábbi hasáb alapterülete 6 cm^2, mivel 6 db 1 cm^2-es négyzetből lehet kirakni. Épp ugyanennyi 1 cm^3-es kocka fér rá. Ebből 2 réteget rakok egymásra, hogy megkapjam a hasábot. Tehát $6 \cdot 2$ db 1 cm^3-es kockát használtam a hasáb kirakásához. A hasáb térfogata tehát $6 \cdot 2 = 12$ cm^3.



$m = 2$ cm

Általában: $V_{egyenes\ hasáb} = T_{alaplap} \cdot M$.

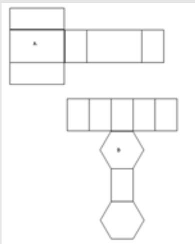
Házi feladatnak adhatunk a Feladatgyűjteményből feladatokat. (2., 3. feladat, gyorsabban haladó gyerekeknek 4., 5. feladat is feladható.)

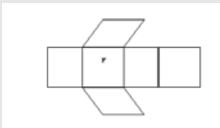
II. Forgáshenger térfogata

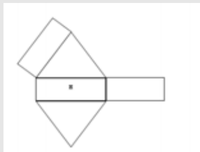
Ellenőrizzük a házi feladatot, majd gyakoroljuk az óra elején a hasábok térfogatának számítását. Csak ezután térünk rá a forgáshengerek felszínének számítására.

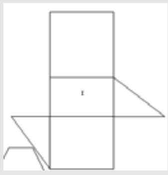
1. Egy hasáb térfogata képlettel kiszámolva (egy kézbeadott műanyag test esetén)

Kiosztja a gyerekeknek a képességének megfelelően a hasábokat. Kiszámítják a hasábok térfogatát az általános képlettel, a lemért adatok alapján. A lassabban haladó tanulók kirakhatják egységkockákkal a hasábot.
Ismét használhatjuk a **0781. modul 2. tanári melléklet**ének egyenes hasábjait is.
0781. modul 2. tanári melléklet – Lásd a 0781. modul végén és az eszközei közt!

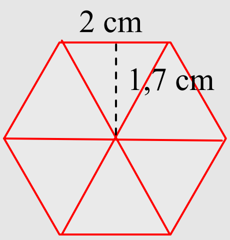

A, B

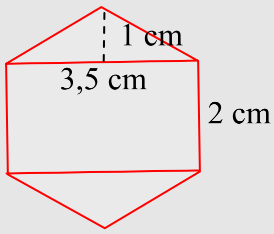

F


H


I

Ekkor a megoldások:
A szokásos jelöléseket alkalmazva: M: testmagasság, a, b, c: alapélek (téglatestnél egy csúcsba futó élek), m: alaplap magassága.
***A* jelű téglatest:**
$a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 2$ cm.
$V_{téglatest} = 5 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{30\ (cm^3)}$
***B* jelű hatszög alapú egyenes hasáb:**
$a = 2$ cm, $M = 3$ cm.
Alaplap területének kiszámítását lásd a Hasáb és henger felszíne c. 0782. modulban.





$T_{hatszög}\ \frac{3,5\cdot 1}{2}\cdot 2+3,5\cdot 2=10,5\,(\text{cm}^2)$.
$V_{hatszög\ alapú\ hasáb} = 10,5\cdot 3=\mathbf{31,5\ (cm^3)}$.
***F* jelű paralelogramma alapú egyenes hasáb:**
$a = 3$ cm, $b = 2,5$ cm, $m_a = 2$ cm, $M = 3$ cm.
$V_{paralelogramma\ alapú\ hasáb} = 3\cdot 2\cdot 3=\mathbf{18\ (cm^3)}$.
***H* jelű egyenlőszárú háromszög alapú egyenes hasáb:**
$a = 6$ cm, $b = 5$ cm, $m_a = 4$ cm, $M = 2$ cm.
$V_{háromszög\ alapú\ hasáb} = \frac{6\cdot 4}{2}\cdot 2=\mathbf{24\ (cm^3)}$.
***I* jelű derékszögű háromszög alapú egyenes hasáb:**

$a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm, $M = 5$ cm.

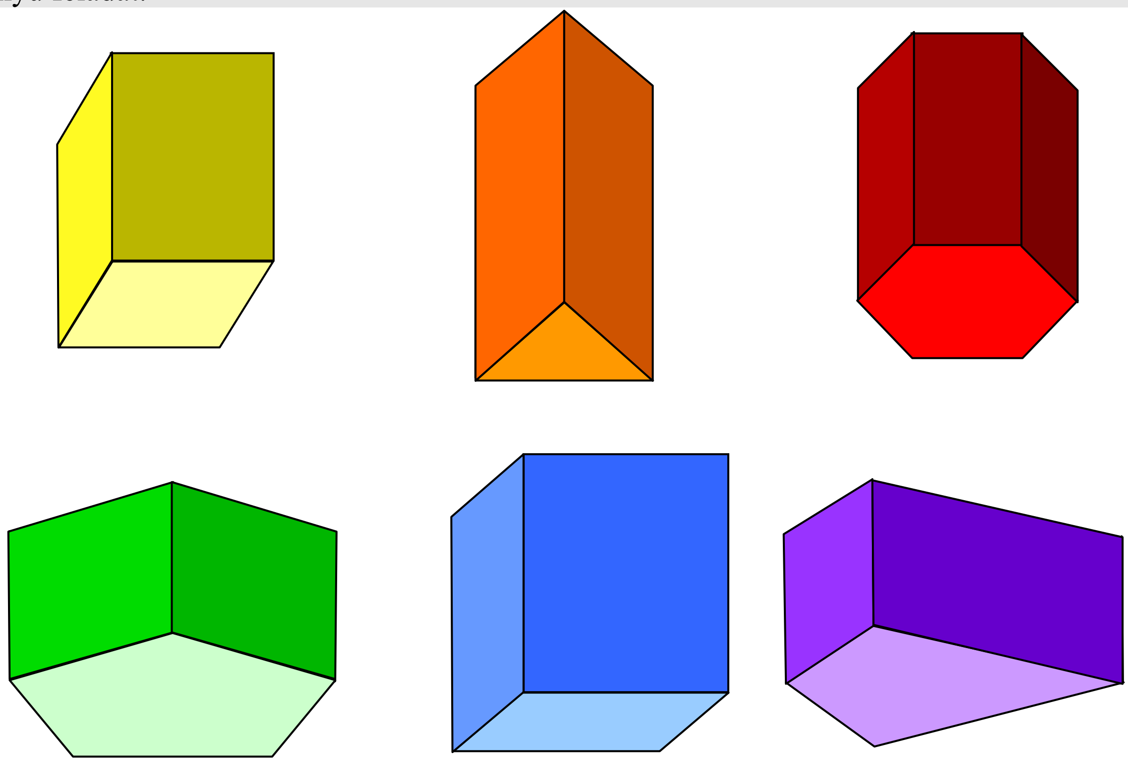
$V_{\text{háromszög alapú hasáb}} = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 5 = \mathbf{30\ (cm^3)}$.

2. Egy hasáb térfogata képlettel kiszámolva (szöveges feladat esetén)

Csoportokban vagy önállóan megcsinálják a 2. feladatlap példáját, majd frontálisan ellenőrizzük.

2. FELADATLAP

1. A megadott adatok alapján döntsd el, mely egyenes hasábok térfogata egyenlő!
Könnyű feladat.



Sárga hasáb: Szabályos négyzet alapú egyenes hasáb, melynek alapélei 3 cm, testmagassága 6 cm.
Narancs hasáb: Szabályos háromszögalapú egyenes hasáb, alaplapjának területe 4 cm^2, testmagassága 9 cm.
Piros hasáb: Szabályos hatszög alapú hasáb, alaplapjának területe 10 cm^2, magassága 6 cm.
Zöld hasáb: 18 cm^2 alapterületű szabályos ötszög alapú hasáb, melynek testmagassága 3 cm.
Kék hasáb: 3 cm és 4 cm oldalú téglalapalapú hasáb, melynek magassága 5 cm.
Lila hasáb: 3 cm magasságú hasáb, 4 cm és 6 cm átlójú deltoid alappal.

Sárga = zöld (54 cm^3); Narancs = lila (36 cm^3); Kék = piros (60 cm^3)

3. Térfogat – Űrtartalom (mértékegységek átváltása)

A tanár kiosztja a gyerekeknek a **2. tanári melléklet** kártyáit, minden tanulónak egyet. Így az osztály létszámának megfelelő darabszámú kártyát ad a gyerekek kezébe (a maradék kártyákkal nincs további teendő). (A táblázatban az egy sorban lévő kártyákon egyenlő mennyiségek vannak.) Érdemes úgy csinálni, hogy egy csoportban 4-5 fő legyen (azaz az egyforma mennyiségekből 4 db kártyát oszt ki a gyerekeknek, esetleg mind az ötöt). Megpróbálnak az egyenlő mennyiségeket jelölő kártyák tulajdonosai csoportot alkotni. Amelyik csoport először kész, megtalálták egymást, leellenőrizték, hogy valóban egyenlő mennyiségek szerepelnek kártyáikon, az a csapat nyert (a tanár ellenőrzi a mennyiségeket a kártyáikon). Ha elrontották, és valamelyik mennyiség nem illik a többi közé, érdemes csak annyiban segíteni, hogy a tanár elárulja, nem jó a csoportalkotás. A továbbiakban lehet az így alakult csoportokban folytatni a munkát, vagy az eredeti csoportokba visszarendezni őket. A továbbiakat csak akkor javasoljuk, ha a tanár szükségét érzi az ismétlésnek.
2. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

305 liter	0,305 m^3	3,05 hl	3050 ml	305000 cm^3
3,05 liter	305 cl	30,5 dl	3,05 dm^3	3050000 mm^3
0,0024 liter	0,0000024 m^3	0,24 cl	2,4 ml	2,4 cm^3
30,5 liter	30,5 dm^3	0,305 hl	305 dl	30500 cm^3
2,4 liter	0,0024 m^3	0,024 hl	2400 ml	$2,4 \cdot 10^6$ mm^3
0,024 liter	0,24 dl	0,00024 hl	0,024 dm^3	24000 mm^3
fél liter	0,005 hl	500 cm^3	500 ml	5 dl
5 liter	5 dm^3	500 cl	$5 \cdot 10^6$ mm^3	$5 \cdot \frac{1}{10^3}$

Frontálisan megbeszéljük a „Űrtartalom, térfogat” c. részben foglaltakat. (Az űrmérték és a térfogat kapcsolatának átismétlése.) Ha szükséges, a tanár mutassa be, az 1 l-es palackban lévő víz hogyan tölti ki éppen az 1 dm^3-es műanyag egységkockát. Mértékegység váltások: 1 l = 10 dl = 100 cl = 1000 ml. Ha szükséges, szemlélteti az átváltást az egységnyi űrtartalommérő hengerekkel. Írassuk le a füzetbe a mértékegység átváltásokat!

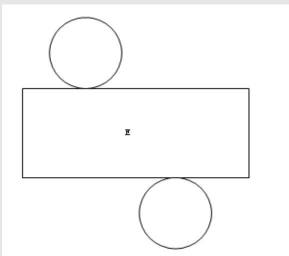
EMLÉKEZTETŐ:

Űrtartalom, térfogat
Az űrtartalom megmutatja, hogy egy testben hány liter folyadék fér el. Mértékegysége a liter.
1 l = 10 dl = 100 cl = 1000 ml.
100 l = 1 hl.
A térfogat azt mutatja meg, hogy mennyi helyet foglal el a test a térből. Az űrtartalom és a térfogat mértékegységei között kapcsolat van: 1 liter folyadék fér el az 1 dm élhosszúságú kockába. Ezért ha ismerjük a test űrtartalmát, ebből meghatározhatjuk a test térfogatát.

Az űrtartalomról tehát „üreges”, „üres” test esetében beszélhetünk, hiszen ebbe tudunk folyadékot tölteni. Térfogatról pedig „kitöltött”, „tömör” test esetében. Természetesen ez a két fogalom ugyanaz, hiszen épp annyi helyet fog elfoglalni a test a térből, amennyi folyadék fér bele.
(1. megjegyzés: Itt természetesen eltekintünk a test határoló lapjainak, felületének anyagvastagságától. Pl. egy vastag üvegpalack térfogata és űrtartalma nem egészen ugyanaz, hiszen kevesebb bor fér bele, mint amennyi helyet elfoglal a térből. Ezért beszélhetünk belső űrtartalomról és külső térfogatról. Például a mikrohullámú sütők és a mosógépek, mosogatógépek esetén beleírják a használati utasításba a méreteit és a belső űrtartalmát.)
(2. megjegyzés: Egy liter, azaz egy dm^3 0 C° hőmérsékletű tiszta víz tömege 1 kg.)

4. Egy forgáshenger térfogatának számolása (kézbe adott műanyag henger esetén)

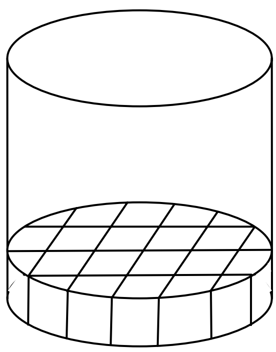
A gyerekek csoportonként kapjanak egy-két műanyag egyenes körhengert, vagy a **0781. modul 2. tanári mellékletének** forgáshengerét!
0781. modul 2. tanári melléklet – Lásd a 0781. modul végén és az eszközei közt!
E jelű háló.



Próbálják meg megállapítani a térfogatát az egységkockák segítségével. (Természetesen nem tudják az alaplapot kirakni pontosan az egységkockákkal, csak körülbelül tudják meghatározni.) Segítség pl.: Rajzolják körbe a gyerekek az alaplapot (alapkört) a füzetükbe, majd próbálják meghatározni a területet: akár egységnégyzetekkel való kirakással, vagy a kör területképletével. Majd találják ki, hány egységkockákból álló réteget kell egymásra helyezni a teljes henger kirakásához. Nem baj, ha nem minden csoport jut el a megoldáshoz. Lényeg, hogy saját kezükkel próbálgassák a kirakást, megfigyelhessék az összefüggést az alapterület, a magasság és a térfogat között.
A 0781. sz. modul 2. tanári mellékletének forgáshengerének térfogata:
$r = 2$ cm, $M = 5$ cm. $V = 2^2 \cdot \pi \cdot 5 = 63$ cm^3.
Megállapítjuk az előző feladat kapcsán frontálisan, hogy az egyenes körhenger térfogata is az „alapterület · magasság” képlettel számolható. $V_{egyxenes\ körhenger} = T_{alaplap} \cdot M$.

ÖSSZEGZÉS:

Forgáshenger térfogata
Az egyenes körhenger térfogatát ugyanúgy kell számolnunk, mint az egyenes hasábét. Az alaplapra ismét egységkockákat helyezhetünk, ez lefedi az alaplap területét (ez egy egységnyi vastagságú réteg). A henger magasságának megfelelő mennyiségű egységkocka réteget tudunk egymásra rakni. Tehát a térfogat itt is: $V_{egyenes\ henger} = T_{alapkör} \cdot m$



Ha tudjuk egy henger alapkörének sugarát, akkor az alaplap területe a tanult képlettel számolható ($r^2 \cdot \pi$). Ha a magasságát is ismerjük a hengernek, akkor ki tudjuk számolni a térfogatát.

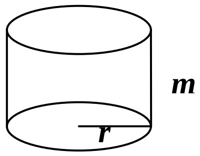
5. Forgáshengerek térfogata – általános képlet

Megoldják önállóan a 3. feladatlap 1. feladatát, majd frontálisan ellenőrzzük.

3. FELADATLAP

Körhenger térfogata

1. Mekkora az *r* sugarú alapkörű, *M* magasságú egyenes körhenger térfogata, ha a képletet úgy szeretnénk megkapni, hogy csak *r* és *M* szerepeljen ismeretlenként.



$V_{henger} = T_{alapkör} \cdot m = r^2 \cdot \pi \cdot m$

6. Egy egyenes körhenger térfogatának számolása (leírt példa esetén)

Szakértői mozaik módszerével, vagy csoportmunkával megoldják a gyerekek a 3. feladatlap 2. feladatának a), b), c) és d) részét.

2. Mekkora az alábbi egyenes körhengerek térfogata: (*M* a magasság, *r* az alapkör sugara, *d* az alapkörének átmérője.)

a) $r = 4$ cm; $M = 10$ cm

V = **502,4 cm³**

b) $r = 3$ cm; $M = 72$ mm

V = **203472 mm³**

c) $d = 1$ m; $M = 2$ m

V = **1,57 m³**

d) a henger magassága az alapkör átmérőjének 80%-a, az alapkör sugara 2 dm.

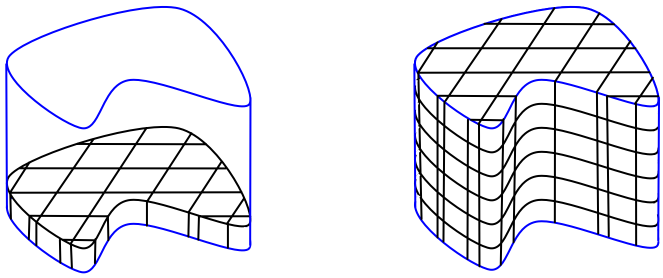
$r = 2$ dm; $m = 4$ dm $\cdot$ 0,8 = 3,2 dm.

V = **40,192 dm³**

7. Tetszőleges alapú „oszlopok” térfogata

Elmeséli, szemlélteti a következő részben szereplő megállapításokat. Lassabban haladó csoportnál ez a rész elhagyható.

Hengerek térfogata:
Egyenes hengerek térfogatát szeretnénk meghatározni (Tehát nem kör vagy sokszög alakú az alapja a hengernek, hanem valami egyéb síkidom. Lehet akár szabálytalan, „amőba” alakú.) Képzeljük el, hogy az alaplapot kirakjuk egységkockákkal (természetesen előfordulhat, hogy az egységkockákból párat darabolni kell).



Ezután ezekre a kockákra egy ugyanilyen alakú réteget rakhatunk ugyanennyi egységkockából, majd efölé egy új ugyanilyen réteget, egész addig, míg az egész hengert kirakjuk. (Előfordulhat természetesen, hogy az utolsó rétegnél darabolni kell a kockákat.) Elegendő azt észrevenni, hogy az alaplap kirakásához éppen az alapterület mérőszámának megfelelő számú kocka kellett, míg a rétegek száma épp a henger magasságának mérőszámával egyezik meg. Ezért a térfogat: $\boldsymbol{V_{egyenes\ henger} = T_{alaplap} \cdot m}$

III. Hasábok, hengerek térfogata – gyakorlás

1. Egyenes hasáb, forgáshenger térfogata, felszíne – szöveges példák, gyakorlás

Órán gyakoroltathatjuk a felszín-, térfogatszámítást a műanyag testek kézbeadásával és azok felszínének, térfogatának számolásával is. Akár csoportokban, vagy egyénileg is. (Jó lehetőség van így differenciálni.) Házi feladatként, illetve önálló munkaként válogassunk a feladatgyűjteményből.

FELADATGYŰJTEMÉNY

Űrmérték, térfogat mértékegységei

1. Írd be a hiányzó mértékegységeket, mérőszámokat!

Könnyű gyakorló feladat.

8 l = 80 dl = 800 cl = 8 000 ml = 8 dm^3 = 8 000 cm^3 = 8 000 000 mm^3

500 000 ml = 5 000 dl = 500 l = 50 000 cl

1,6 dm^3 = 1 600 cm^3 = 1 600 000 mm^3 = 1 600 cm^3

0,00002 m^2 = 0,002 dm^2 = 0,2 cm^2 = 20 mm^2

7 070 dm^2 = 707 000 cm^2 = 70,7 m^2 = 70 700 000 mm^2

Hasábok térfogata

2. Mekkora annak a négyzet alapú egyenes hasábnak a térfogata, melynek alapélei 6 cm hosszúak, magassága pedig 15 cm?

$V = 6 \cdot 6 \cdot 15 =$ **540 (cm^3)**

3. Egy akvárium téglatest alakú. Magassága 35 cm, szélessége 1 dm, hossza 5 dm. Hány liter víz fér bele? Hány négyzetcentiméter üveglapot használtak fel készítésekor? (Az akváriumnak nincs teteje.)

$V = 3{,}5 \cdot 1 \cdot 5 = 17{,}5$ (dm^3) = **17,5 l**

$A = 5 + 3{,}5 \cdot 12 = 47$ dm^2 = **4700 cm^2**

4. Egy deltoid alapú egyenes hasáb magassága 8 cm. A deltoid szimmetriaátlója 5 cm, másik átlója 4 cm. Mekkora a hasáb térfogata?

$V_{\text{deltoid alapú hasáb}} = T_{deltoid} \cdot M = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 8 = \mathbf{80\ (cm^3)}$

5. Egy rombusz alapú egyenes hasáb alaplapjának egyik szöge 60°, minden éle 6 cm. Az alaplap megszerkesztése után mérd le a szükséges adatokat, és határozd meg a hasáb térfogatát!

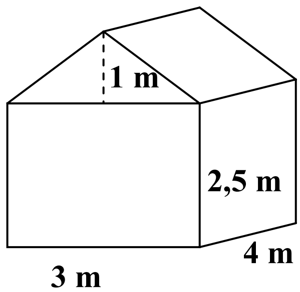
Az rombusz magassága: m_a = 5,2 cm; $V = a \cdot m_a \cdot a$ = **187,2 cm³.**

6. Egy szabályos hatszögalapú egyenes hasáb alapéle 5 cm, oldaléle az alapél 80 %-a. Szerkeszd meg az alaplapot, mérd le a szükséges adatokat, majd számold ki a hasáb térfogatát.

Ha az alaplapot hat darab, középpontjából kiinduló egyenlő oldalú háromszögre bontjuk, akkor a háromszögek alapja 5 cm, magassága: 4,3 cm. A hasáb magassága 4 cm.

$V = \frac{4,3 \cdot 5}{2} \cdot 6 \cdot 4 = \mathbf{258\ cm^3}$

7. Egy ház alakját és méreteit látod az alábbi ábrán. Hasáb alakú-e? Ha igen, melyik lap az alaplap, mely lapok alkotják a palástot? Szeretnék a ház fűtőberendezését megtervezni. Hány köbméter levegő van a házban, ha a padlást is beleszámoljuk, és eltekintünk a belső falaktól és a falak vastagságától?



$V_{ház} = T_{alaplap} \cdot M = \left(3 \cdot 2,5 + \frac{3 \cdot 1}{2}\right) \cdot 4 = (7,5 + 1,5) \cdot 4 = 36$

36 m³ levegő tölti ki a házat.

8. Egy parfümöt szabályos háromszögalapú egyenes hasáb alakú keskeny üvegben hoznak forgalomba. Az alapéle 3 cm. Milyen magas a hasáb, ha épp 50 ml parfüm van benne? (A szükséges adatokat mérd le a megszerkesztett alaplapon!)

m_a = 2,6 cm.
T_a = 3,9 cm².
50 ml = 0,05 l = 0,05 dm³ = 50 cm³.
m = 50 : 3,9 = **12,8 cm.**

9. Egy rombuszalapú egyenes hasáb alaplapjának területe 27 dm², alapéle 10 dm, oldaléle 1,1 m. Mekkora a térfogata?

$V = T_{alaplap} \cdot m$ = 27 dm² · 11 dm = **297 dm³**.

Megjegyzés: Fel kell ismerni, hogy az alapél hossza felesleges adat. Tulajdonképpen az alaplap alakjának ismerete sem szükséges a feladat megoldásához.

10. Egy cég a testápolóját négyzet alapú egyenes hasáb alakú flakonba csomagolja. Mekkora az alaplap oldala, ha a flakon magassága 10 cm, és 250 ml testápoló van benne?
Nehezebb feladat, gyökvonás szerepel benne, melyet próbálgatással tudnak megoldani.
250 ml = 0,25 l = 0,25 dm^3 = 250 cm^3.
$T_a = V : m = 250 : 10 = 25$ cm^2.
***a* = 5 cm**, mert $5 \cdot 5 = 25$.

Forgáshengerek térfogata

11. Anna bögréjének átmérője 6 cm. Milyen magas a bögre, ha éppen 3 dl kakaó fér bele? (A bögre forgáshenger alakú.)
3 dl = 0,3 l = 0,3 dm^3 = 300 cm^3,
$V = r^2 \cdot \pi \cdot M$
$M = 300 : (\pi \cdot r^2) =$ **10,59 cm**

12. Egy felfújható gyerekmedence átmérője 1,4 m. Magassága 0,5 m. Ha a $\frac{3}{4}$ részéig töltjük fel hidegvízzel, hány liter vizet kell felhasználnunk?
$V = 0,7693$ m^3 = 769,3 dm^3 = 769,3 l.
769,3 l · 0,75 ≈ **577 liter**

13. Egy vödör átmérője 20 cm. Milyen magas, ha 10 l víz fér bele?
V = 10 l = 10 dm^3 = 10000 cm^3
$10000 : (10^2 \cdot 3,14) \approx$ **32 cm**

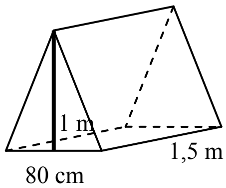
Hasábok, hengerek térfogata és felszíne – egyszerű feladatok

14. Gyűjtsetek körhenger vagy hasáb alakú használati tárgyakat! (konzervek, torta, befőttesüvegek, palackok, stb.; amit nem tudtok az iskolába hozni, annak a méreteit mérjétek le!) Számoljátok ki a térfogatát, felszínét! Kerekítsetek tizedekre! Nézzétek meg, hogy belefér-e a ráírt űrtartalom! Ha grammban vagy kilógrammban van megadva a töltőanyag mennyisége, számoljátok ki a sűrűségét! (A sűrűség megmutatja, hogy egységnyi térfogaton mekkora tömegű anyag helyezkedik el. A sűrűséget úgy számoljuk, hogy a tömeg és a térfogat arányát vesszük. Mértékegysége a kg/m^3, g/dm^3...)

Néhány henger alakú konzerv adata és térfogata, felszíne:

KONZERV TÍPUSA	ÁTMÉRŐJE (cm)	MAGASSÁGA (cm)	TÉRFOGATA (cm^3)	FELSZÍNE (cm^2)	TÖMEGE (g)	SŰRŰSÉGE (g/dm^3, kg/m^3)
májkrém	5,3	3,8	83,8	107,3	65	775,7
paradicsom	5,3	3,8	83,8	107,3	70	835,3
macska eledel konzerv	7,4	10,8	464,3	337	400	861,5
kutya eledel konzerv	10	17	1334,5	1695,6	1200	899,2

15. Egy hagyományos sátor hossza 1,5 m, szélessége 80 cm, a tartórúdja 1 m. Mennyi vászonból varrták, ha a szegésre, hajtásra ráhagyunk 5 %-ot? Hány köbméter levegő van benne?



Az egyenlőszárú háromszög szára 1,1 m. Méretarányos ábra szerkesztésével lemérhető.

$$A = \frac{0,8 \cdot 1}{2} \cdot 2 + (1,1 \cdot 2 + 0,8) \cdot 1,5 = 5,3\,;$$

$5,3\ m^2 \cdot 1,05 = 5,565\ m^2 \approx$ **$5,6\ m^2$**.

$$V = \frac{0,8 \cdot 1}{2} \cdot 1,5 = 0,6\,(m^3)$$

16. Egy háromszögalapú egyenes hasáb alapélei: 5 cm, 7 cm, 78 mm. Magassága 1 dm. Mekkora a térfogata, felszíne?

A 7,8 cm-es oldalhoz tartozó magasság: 4,4 cm; a 7 cm-es oldalhoz tartozó magasság: 4,9 cm; az 5 cm-es oldalhoz tartozó magasság: 6,9 cm.

$T_a = 17,2\ cm^2$. $A = 232,4\ cm^2$; $V = 172\ cm^3$.

Hasábok, hengerek térfogata és felszíne – összetett feladatok

17. 1350g tömegű torta átmérője 22 cm, magassága 6 cm. Beborítjuk 2 mm-es marcipánmázzal a tetejét és az oldalát. Hány ml marcipánra van szükségünk? Mekkora a torta sűrűsége (A mázat nem vesszük figyelembe.)

A torta oldala: $2 \cdot 11 \cdot \pi \cdot 6 = 414,48\ cm^2$. A torta teteje: $11^2 \cdot \pi = 379,94\ cm^2$. $\rightarrow$ $794,42\ cm^2$ felületre kell máz.

$794,42\ cm^2 \cdot 0,2\ cm = 158,884\ cm^3 \approx 0,159\ dm^3 =$ **159 ml**

$V_{torta} = 2279,64\ cm^3 = 2,28\ dm^3 = 0,00228\ m^3$

$M = 1,35$ kg; $\rho =$ **$592,1\ kg/m^3 = 592,1\ g/dm^3$**.

18. Egy átlagos fogkefe fejének hossza kb. 2,5 cm. A tubusból kinyomott fogkrém átmérője 0,8 cm. Ha annyi fogkrémet nyomunk ki, hogy végigérje a fogkefét, hány milliliter fogkrémet használunk el? Körülbelül hány fogmosásra elég egy tubus (75 ml) fogkrém?

$d = 0,8$ cm; $r = 0,4$ cm; $M = 2,5$ cm. $V = 1,256\ cm^3 =$ **1,256 ml**

75 ml : 1,256 ml = 60
60 fogmosásra elég egy tubus fogkrém.

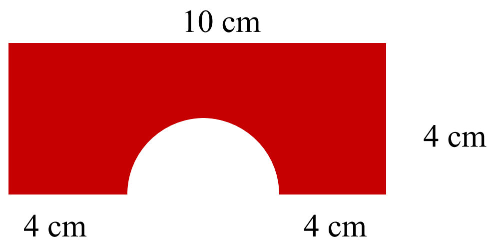
19. Egy szabályos nyolcoldalú egyenes hasáb alakú vázát akarunk befesteni. A nyolcszög akkora, hogy épp egy 8 cm átmérőjű körbe tudjuk belerajzolni. Szerkeszd meg a nyolcszöget! Hány cm^2 nagyságú területet kell befesteni, ha a váza magassága 2,5 dm? (Csak az oldalát festjük be.) Hány liter víz fér a vázába?
$a = 3{,}1$ cm; $m_a = 3{,}7$ cm; $T_{palást} = \mathbf{620\ cm^2}$; $V = 45{,}88 \cdot 25 = 1147\ cm^3 = \mathbf{1{,}147\ l}$.

20. Egy 4 cm sugarú egyenes körhengerben víz van. Egy vasgolyót beledobok a vízbe, és azt látom, hogy a vízszint megemelkedik 1 cm-t. Mekkora volt a golyó térfogata? Mi történt volna, ha alumíniumból van a golyó?
$V = 4^2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 = \mathbf{50{,}24\ (cm^3)}$. Alumínium esetében is ugyanez történik.

Megj.: Érdemes az egyik körhengerrel bemutatni, hogy hogyan emelkedik a vízszint, ha bármit beledobunk. Érdemes filccel bejelölni az emelkedést, és kiszámolni egy tetszőleges tárgy térfogatát.

21. Egy 5 cm élű tömör fémkockát egy vízzel félig töltött egyenes körhengerbe rakunk. Mennyit emelkedik a vízszint, ha a körhenger átmérője 1 dm?
$V_{kocka} = 125\ cm^3$; $125 : (25 \cdot 3{,}14) = \mathbf{1{,}6\ (cm)}$.

22. Határozd meg egy „hidacska” építőkocka felszínét és a térfogatát! Az építőelem oldalnézete, méretei az ábrán láthatóak, szélessége 4 cm.



A „hiányzó” fél forgáshenger sugara 1 cm.

$$A = 2 \cdot \left(10 \cdot 4 - \frac{1^2 \cdot \pi}{2}\right) + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 10 \cdot 4 + \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot 4}{2} \approx 76{,}9 + 64 + 40 + 12{,}6 = 193{,}5\,(cm^2)$$

$$V = \left(10 \cdot 4 - \frac{1^2 \cdot \pi}{2}\right) \cdot 4 \approx 76{,}9 \cdot 4 = 307{,}6\,(cm^3)$$

IV. Összefoglalás, gyakorlás

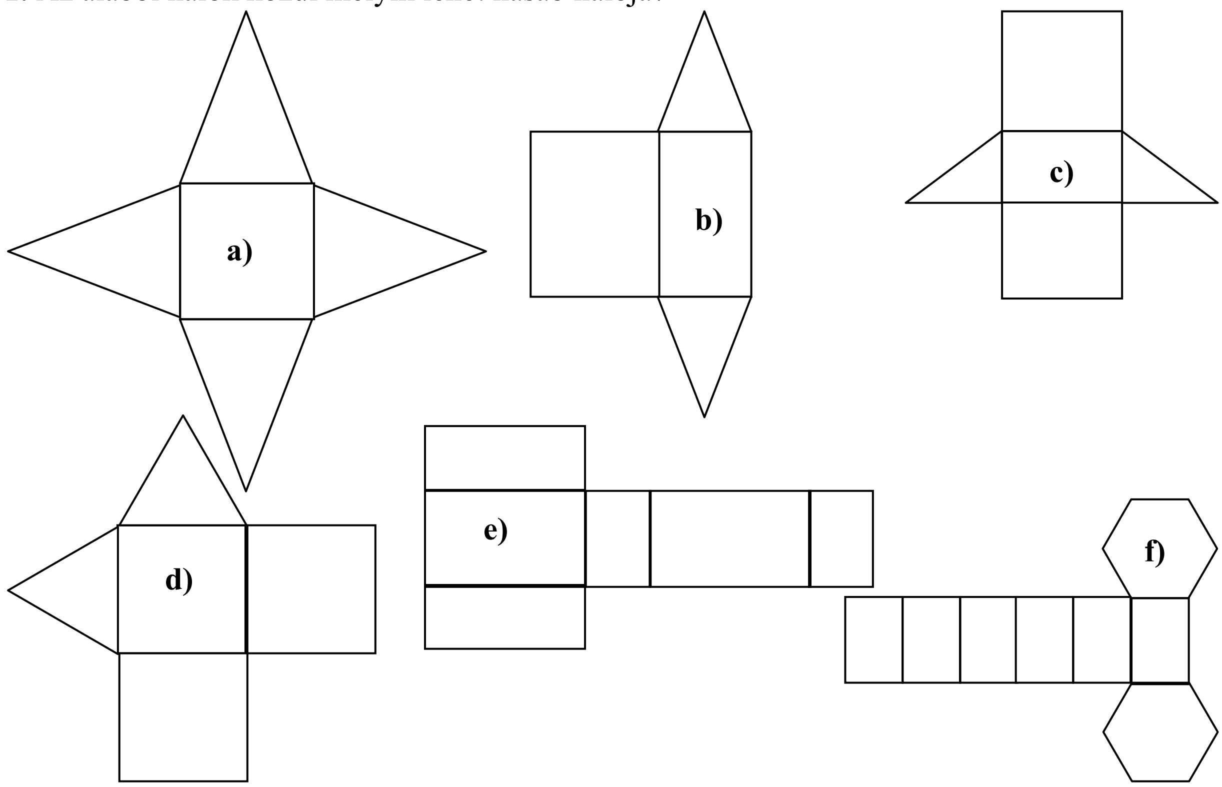
A gyakorlóórára válogathat a tanár a feladatgyűjtemény feladatai közül az osztály képességeinek megfelelően.

V. Felmérő feladatlap megírása

Az A csoport könnyebb, a B csoport nehezebb feladatsort tartalmaz.

A CSOPORT

1. Az alábbi hálók közül melyik lehet hasáb hálója?



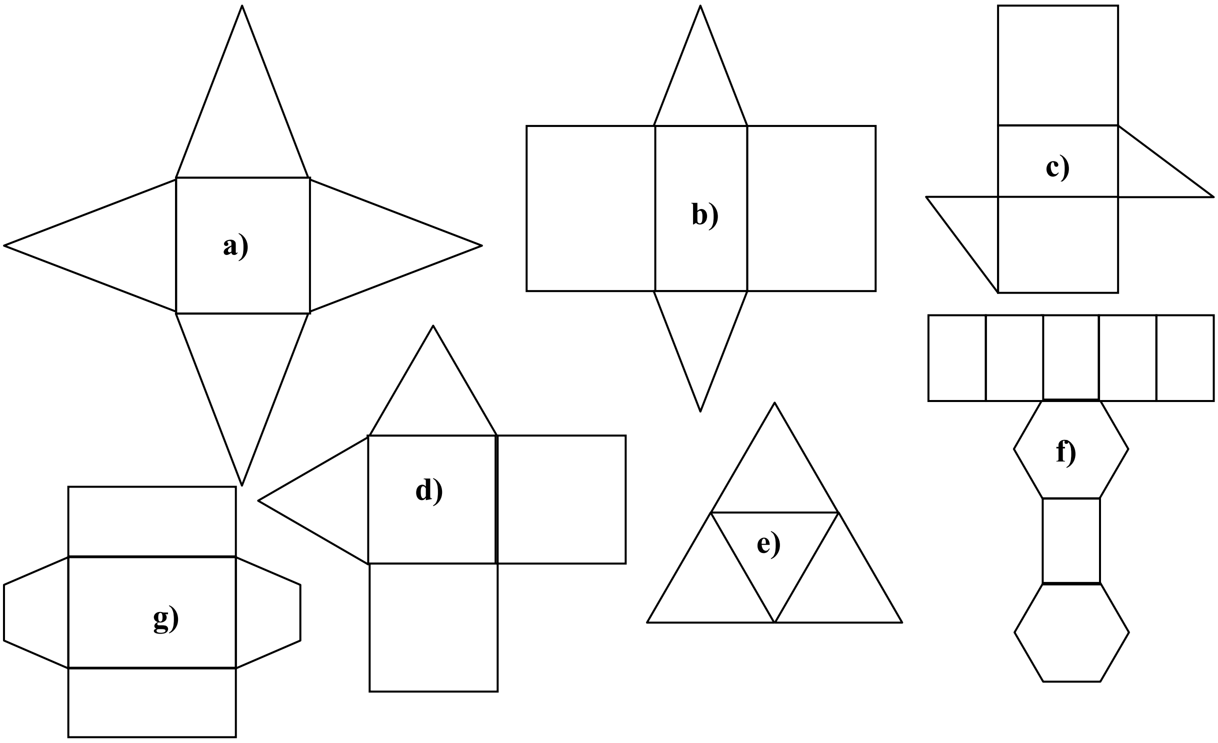
2. Hány lapja, éle, csúcsa van egy ötszög alapú hasábnak? (A hasáb egyenes, alapja szabályos.)

3. Mekkora annak a hasábnak a térfogata, melynek magassága 12 cm, alaplapja derékszögű háromszög, melynek befogói 5 és 8 cm hosszúak?

4. Egy torta átmérője 30 cm, magassága 8 cm. Hány cm^2-re kell csokoládémázat kennünk, ha szeretnénk a tetejét és az oldalát bekenni? Mekkora a torta térfogata?

B CSOPORT

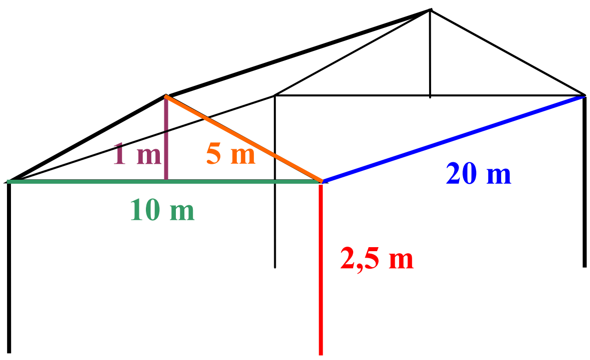
1. Az alábbi hálózatok közül melyik lehet hasáb hálója?



2. Csongor „Happy Birthday” feliratú bögrét kapott a születésnapjára a legjobb barátjától. Ki szeretné számítani, pontosan hány dl tea fér bele, ha színültig tölti. A bögre átmérője pontosan 8 cm, magassága 9 cm. Hány cm^2 máz van rajta, ha a fülét nem számítjuk? (Vigyázz! Máz kívül és belül is van rajta! A bögrének természetesen nincs teteje.)

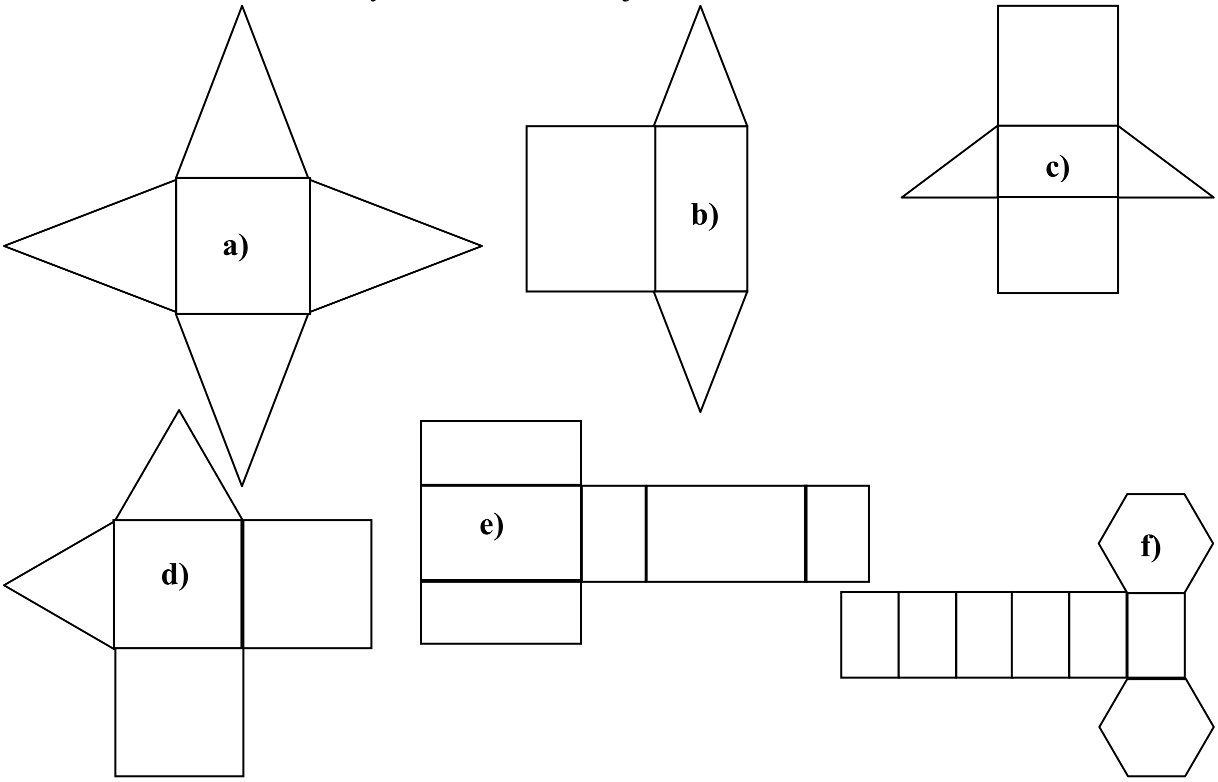
3. Hány lapja, éle, csúcsa van egy tizenhétszög alapú hasábnak?

4. Egy esküvői sátor fémvázát és a tartó rudak méreteit látod az alábbi ábrán. Hány köbméter levegő fér összesen a sátorba? Mekkora ponyvából varrták? (A sátornak nincs alja.)



A CSOPORT (MEGOLDÁS)

1. Az alábbi hálók közül melyik lehet hasáb hálója?



c), e), f)

2. Hány lapja, éle, csúcsa van egy ötszög alapú hasábnak? (A hasáb egyenes, alapja szabályos.)
10 csúcsa, 7 lapja, 15 éle.

3. Mekkora annak a hasábnak a térfogata, melynek magassága 12 cm, alaplapja derékszögű háromszög, melynek befogói 5 és 8 cm hosszúak?

$V = \frac{8 \cdot 5}{2} \cdot 12 = 240\ \text{cm}^3.$

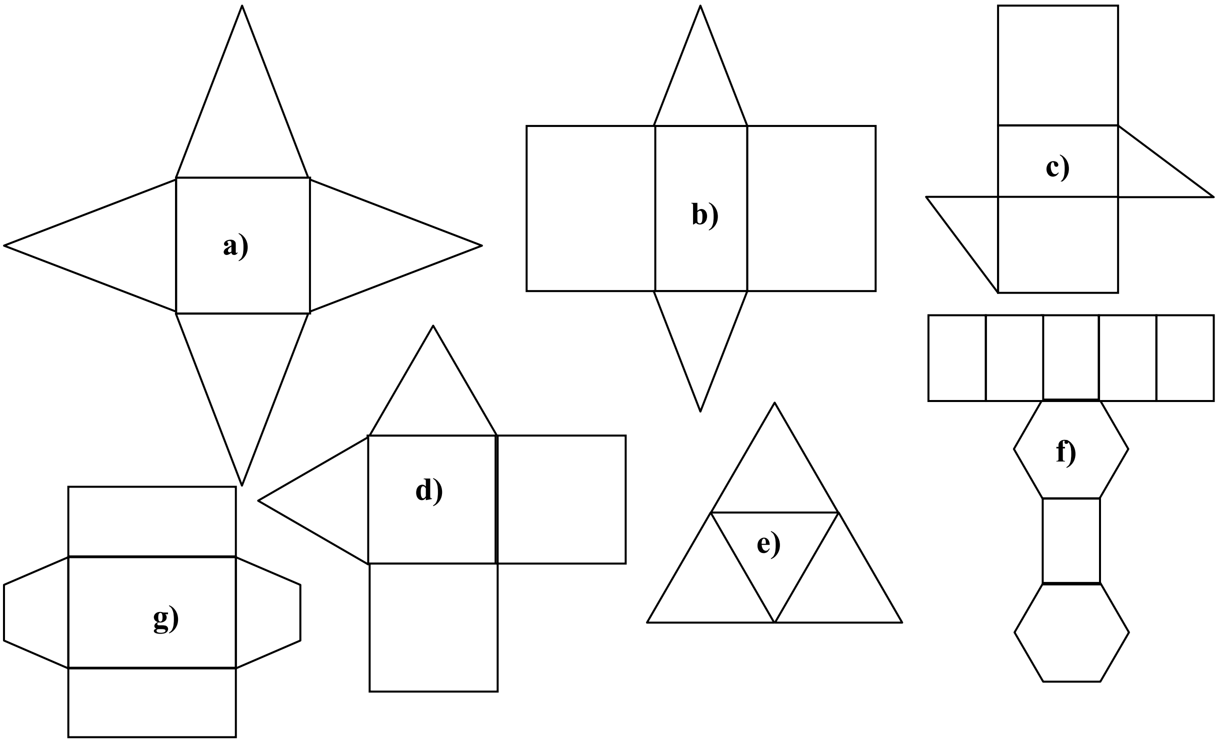
4. Egy torta átmérője 30 cm, magassága 8 cm. Hány cm^2-re kell csokoládémázat kennünk, ha szeretnénk a tetejét és az oldalát bekenni? Mekkora a torta térfogata?

Teteje: $15^2 \cdot \pi = 707\ \text{cm}^2$, oldala: $2 \cdot 15 \cdot \pi \cdot 8 = 754$. Tehát kb. 1461 cm^2 felületet kell befedni csokimázzal.

$V = 15^2 \cdot \pi \cdot 8 = 5655\ \text{cm}^3.$

B CSOPORT (MEGOLDÁS)

1. Az alábbi hálózatok közül melyik lehet hasáb hálója?



b), c), f

2. Csongor „Happy Birthday" feliratú bögrét kapott a születésnapjára a legjobb barátjától. Ki szeretné számítani, pontosan hány dl tea fér bele, ha színültig tölti. A bögre átmérője pontosan 8 cm, magassága 9 cm. Hány cm^2 máz van rajta, ha a fülét nem számítjuk? (Vigyázz! Máz kívül és belül is van rajta! A bögrének természetesen nincs teteje.)

$V = r^2 \cdot \pi \cdot M = 144\ \pi = \mathbf{452{,}4\ cm^3}$

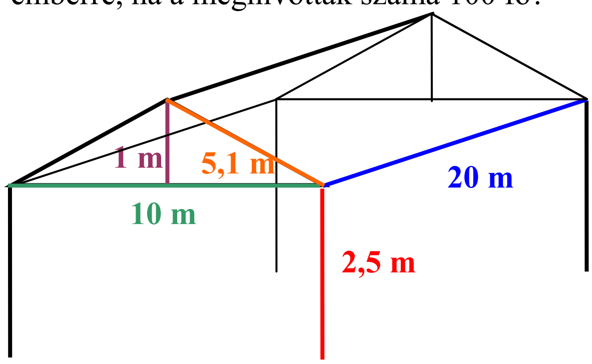
$\mathbf{452{,}4\ cm^3 \approx 0{,}45\ dm^3 = 0{,}45\ l = 4{,}5\ dl}$

A máz nagysága: $r^2 \cdot \pi + 2 \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot M = 16\ \pi + 144\ \pi \approx \mathbf{502{,}7\ cm^2}$.

3. Hány lapja, éle, csúcsa van egy tizenhétszög alapú hasábnak?

51 éle, 19 lapja, 34 csúcsa.

4. Egy esküvői sátor fémvázát és a tartó rudak méreteit látod az alábbi ábrán. Hány köbméter levegő fér összesen a sátorba? Mekkora ponyvából varrták? (A sátornak nincs alja.) Hány köbméter levegő jut egy emberre, ha a meghívottak száma 100 fő?

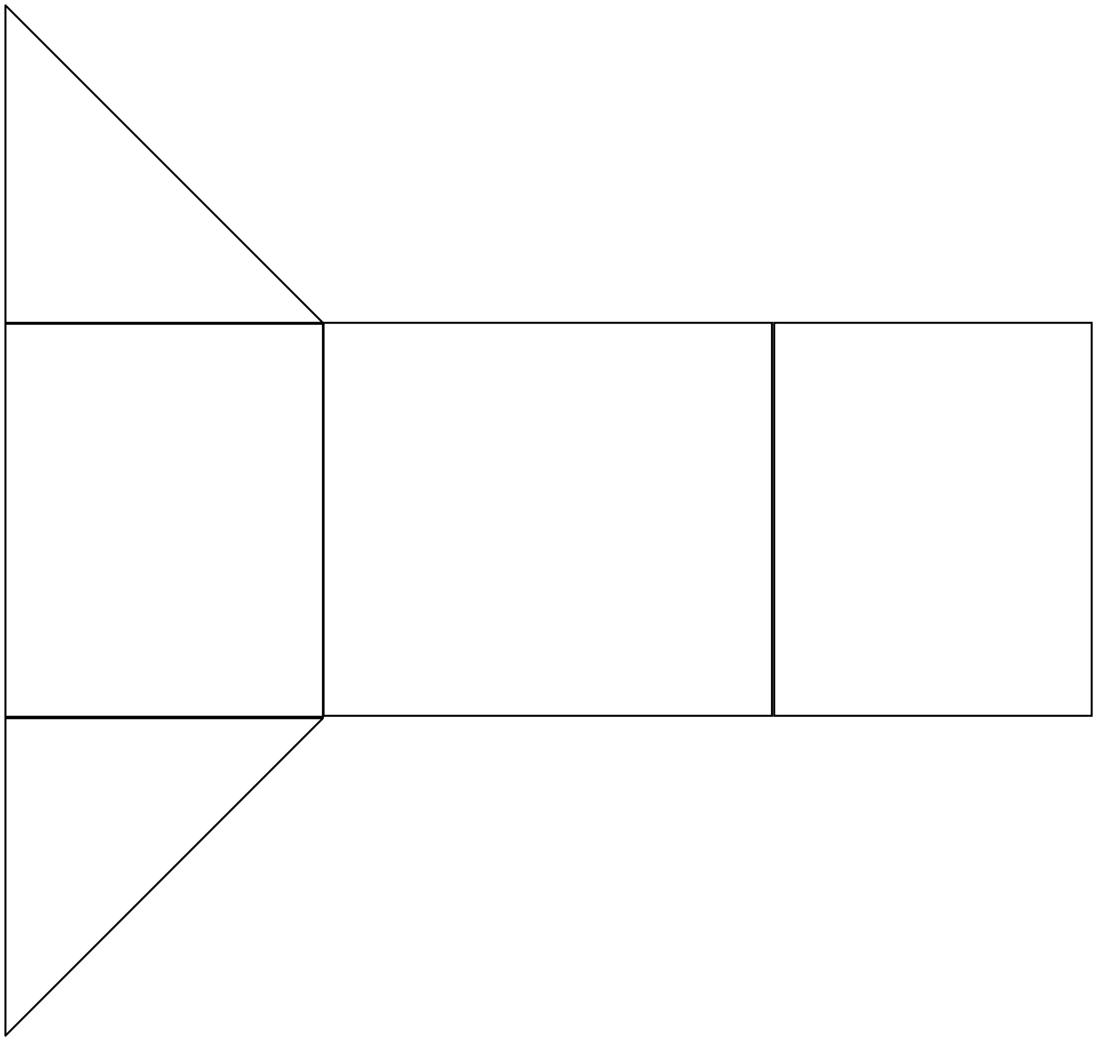


A vászon nagysága: $\left(10\cdot 2,5+\frac{10\cdot 1}{2}\right)\cdot 2+\left(2\cdot 2,5+2\cdot 5,1\right)\cdot 20=60+304=364\ \text{m}^2$.

$V=\left(10\cdot 2,5+\frac{10\cdot 1}{2}\right)\cdot 20=600\,\text{m}^3$. 100 fő esetén ez személyenként 6 m^3 levegőt jelent.

0783 – 1. tanári melléklet

Kartonlapra nyomva osztályonként 10 db (minden csoportnak 1 db + 2 db pót, osztályonként). Ki kell vágni, és összeragasztani az egyenlőszárú derékszögű háromszögalapú hasábot, az egyik derékszögű háromszöget ne ragasszuk a helyére, hogy „kinyitható” legyen.



0783 – 2. tanári melléklet (40 kártya)

Kártya a térfogat / űrtartalom átváltásának gyakorlásához. Kartonlapra osztályonként 1 készlet kb. ebben a méretben.

305 liter	0,305 m^3	3,05 hl	3050 ml	305000 cm^3
3,05 liter	305 cl	30,5 dl	3,05 dm^3	3050000 mm^3
0,0024 liter	0,0000024 m^3	0,24 cl	2,4 ml	2,4 cm^3
30,5 liter	30,5 dm^3	0,305 hl	305 dl	30500 cm^3
2,4 liter	0,0024 m^3	0,024 hl	2400 ml	$2{,}4 \cdot 10^6$ mm^3
0,024 liter	0,24 dl	0,00024 hl	0,024 dm^3	24000 mm^3
fél liter	0,005 hl	500 cm^3	500 ml	5 dl
5 liter	5 dm^3	500 cl	$5 \cdot 10^6$ mm^3	$5 \cdot \frac{1}{10^3}$