0763. MODUL

KERÜLET, TERÜLET

A kör területe

Készítette: Vépy-Benyhe Judit

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Kör területének képlete
Időkeret	2 tanóra
Ajánlott korosztály	7. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Szűkebb környezetben:* Kerület, terület, felszín, térfogat *Ajánlott megelőző tevékenységek:* Sokszögek kerületszámítása; kör fogalma, kör kerületképlete, π fogalma *Ajánlott követő tevékenységek:* Körhenger felszín- és térfogatszámítása
A képességfejlesztés fókuszai	*Számlálás, számolás:* Kör területének számítása kalkulátor használatával egybekötve. *Becslés, mérés:* Méréssel, becsléssel egybekötött problémamegoldások (kör területének közelítő meghatározása négyzethálón és milliméterpapíron), mértékváltási feladatok. *Szövegesfeladat-megoldás, problémamegoldás, metakognició:* Gyakorlati életből vett feladatok átfogalmazása matematikai problémává, kapcsolódó számítási feladatok megoldása. *Rendszerezés, kombinativitás:* Kör területének képletéből félkör, negyedkör területére következtetés *Deduktív következtetés, induktív következtetés:* Általános képletek alkotása a kör területének meghatározására. Egyszerű bizonyítások.

AJÁNLÁS

Frontális-, egyéni-, páros- és csoportmunka. A csoportot 4-6 fő alkotja. A párokat a padtársak képezik.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Számológép, milliméterpapír, mágneses tábla, tortamodell törtekhez, (írásvetítő, fóliák)

ÉRTÉKELÉS

Az egyéni és csoportos munka megfigyelése alapján, szóbeli értékelés

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. A kör területe és sugara közötti összefüggés			
1	Szöveges példa (A terület közelítő meghatározása négyzetrácson)	Mérés, becslés, szövegértés	Négyzethálós lap
2	A terület közelítő meghatározása milliméterpapíron	Mérés, becslés	Milliméterpapír, 1. feladatlap
3	A kör területképletének megalkotása	Következtetés, szabályalkotás	1. feladatlap
4	Kör területképletének alátámasztása	Felismerés, következtetés	Rajzlap vagy kartonlap, négyzethálós lap (füzet)
II. A kör területképletének alkalmazása, gyakorlása			
1.	Szöveges feladatok a kör területének gyakorlására	Szövegértés, számolás	2., 3. feladatlap, vonalzó, számológép
2.	Az új fogalmak, tanult képletek elmélyítése	Emlékezőképesség	1. tanári melléklet – ismeretanyag-kártyák

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. A kör területe és sugara közötti összefüggés

1. Szöveges példa (a terület közelítő meghatározása négyzethálón)

A tanár felolvassa a példát: „Egy locsoló a parkban körbe forog a tengelye körül, és 2 méternél nem nagyobb távolságra spricceli szét a vizet. Mekkora területű füvet képes meglocsolni?” Megállapítják közösen, hogy kör alakban locsolja a füvet a locsoló, tehát tulajdonképpen a 2 m sugarú kör területét kell kiszámolni. Feladat: Készítsünk a füzetbe méretarányos ábrát a kiszámolandó területről. Először megbeszélik frontálisan, hogy milyen módon lehet elkészíteni az ábrát: 1 m → 1 négyzetrács oldal a négyzethálós füzetben, vagy 1 m → 1 cm (ekkor két négyzetrács oldal felel meg 1 m-nek az ábrán). Minden gyerek önállóan elkészíti a füzetébe a méretarányos kört, majd kiszámolja a területet a négyzetrács alapján. Pár eredmény felkerül a táblára. Közben átismétlik a terület mértékegységeit. (A négyzetrácson lévő kör területének a lelegelt fű területére átváltása.) Elhangozhat, hogy igen fáradságos munka így közelíteni a területet, ráadásul pontatlan a négyzetrács segítségével kapott eredmény.

2. A terület közelítő meghatározása milliméterpapíron

Csoportokban milliméterpapírra készítenek köröket. Minden csoport más nagyságú sugárral dolgozik (pl.: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 5cm, 7 cm…) Minden gyerek beírja a saját 1. feladatlapjának táblázatába az eredményeket a megfelelő oszlopba. Így minden gyereknek egy oszlop lesz csak kitöltve, egy csoporton belül mindenkinek ugyanaz az oszlop. Kiszámolja minden csoport a terület és a sugár négyzetének arányát a saját esetükre Ha valamelyik csoport nagyon hamar kész van, készíthet egy másik sugárral kört a milliméterpapírra, aminek szintén leszámolják a területét. Beírja minden gyerek a 1. feladatlapjába a táblára felkerülő értékeket a megfelelő oszlopokba. Az eredmények a táblára is felkerülnek.

1. FELADATLAP

1. Készíts adott sugarú köröket milliméterpapírra, majd számold ki a területüket, végül számold ki a terület és a sugár négyzetének hányadosát, és írd a táblázat megfelelő helyére!

r	1 cm	2 cm	3 cm	5 cm	7 cm
T (mm^2)	3142	1257	2827	7854	15394
$\frac{T}{r^2} = \pi$					

T = $r^2 \cdot \pi$

3. A kör területképletének megalkotása

A táblázat alapján megbeszélik, hogy egyenes arányosság van a terület és a sugár négyzete között, azaz a kettő hányadosa állandó. Természetesen a mérési és kerekítési hibák miatt nem

pontosak az alsó sorba írt hányadosok, de remélhetőleg valaki felfedezi az osztályból, hogy ez a szám éppen π.
A táblázat alá leírják a képletet a gyerekek a feladatlapra: $T = r^2 \cdot \pi$

4. Kör területképletének alátámasztása

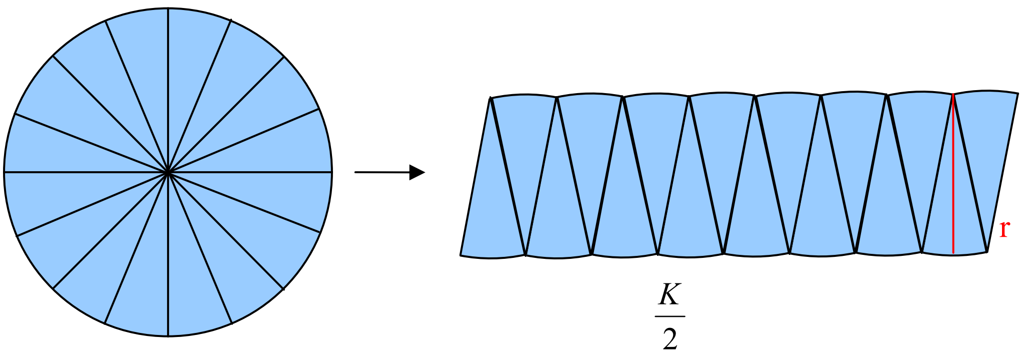
Ezt az állítást most megpróbáljuk egy módszerrel alátámasztani. Ez nem bizonyítás, inkább csak szemléletes közelítés.
Csoportokban szerkesszenek a gyerekek kartonlapra különböző méretű köröket, majd a tanár útmutatása alapján vágják egybevágó körcikkekre (minél többre!), rakjanak ki belőle paralelogramma-szerű síkidomot. (Akkor is érdemes a feladatot megcsináltatni a gyerekekkel, ha az előző órán ezt nem csinálták végig páros oldalszámú szabályos sokszögekkel. Ha azonban azt már megtapasztalták, itt könnyebb dolgunk lesz, gyorsabban lehet haladni.) Az ábrán csak 16 körcikk szerepel, de lehet 32 vagy még több egybevágó körcikkre vágni a kört. Érdemes a gyorsabban dolgozó csoportokat kérni, hogy sok körcikkre vágják. Most határozzuk meg a területét! Megállapítják, hogy a „paralelogramma” alapja kb. a kör kerületének fele, a magassága pedig megközelítőleg a kör sugara.
$T = \frac{K}{2} \cdot r = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{2} \cdot r = r^2 \cdot \pi$ A képlet levezetése nehézséget okozhat, ezért úgy is eljárhat a tanár, hogy a rajzolt kör körcikkeit a gyerekek négyzethálós vagy milliméterpapírra ragasztják fel paralelogramma-szerű alakzatban, és a területet így próbálják leolvasni a négyzethálóról. Így közvetlenül (leszámlálással) tapasztalják, hogy a „paralelogramma” alapja a kör kerületének fele, magassága pedig a kör sugara. Feltétlenül hangsúlyozni kell, hogy a kapott síkidom nem pontosan paralelogramma, és ez csak egy közelítő számítás. Az eredmény ettől függetlenül igaz, de a bizonyításhoz még nem áll rendelkezésünkre minden eszköz ennél a korosztálynál.

ÖSSZEGZÉS:

A kör területe

A táblázat kitöltése során tapasztaltuk, hogy a kör területe és a kör sugarának négyzete egyenesen arányos, hányadosuk állandó. Az arány éppen a kör kerületénél már tanult π.
Tehát: $\mathbf{T_{kör} = r^2 \cdot \pi}$.

Ezt a képletet most másképpen is belátjuk. Osszuk a kört egybevágó cikkekre, majd rakjuk ezeket a cikkeket egymás mellé az ábrán látható módon!



A keletkezett „paralelogramma” alapja kb. a kör kerületének fele, a magassága pedig megközelítőleg a kör sugara. (Még jobban hasonlít egy paralelogrammához a kapott síkidom, ha a kört több egybevágó cikkre osztjuk.)

$$T = \frac{K}{2} \cdot r = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{2} \cdot r = r^2 \cdot \pi$$

II. A kör területképletének alkalmazása, gyakorlása

1. Szöveges feladatok a kör kerületének gyakorlására

A 2. feladatlap egyszerűbb feladatokat tartalmaz. Házi feladatnak, önálló munkának vagy csoportmunkának egyaránt adható a feladatsor. A 3. feladatlap csoportmunkára ajánlott, összetettebb feladatokat tartalmaz.

2. FELADATLAP

1. Pótold a hiányzó adatokat a táblázatban!

r	8 mm	3 cm	1 m	13 cm	2,35 dm
d	16 mm	6 cm	2 m	26 cm	4,7 dm
T	200,96 mm^2	28,26 cm^2	3,14 m^2	530,66 cm^2	17,34 dm^2

2. Pista bácsi kikötötte legelni a kecskét egy karóhoz 2 m hosszú kötélen. Mekkora területű füvet tud lelegelni a kecske?
T = **12,56 m^2**

3. Mekkora egy CD lemez írható felülete? A lemez átmérője: 11,8 cm. A belső kör átmérője (melyre nem lehet írni!) 3,9 cm.
$T_{nagykör}$ = 437,21 cm^2; $T_{kiskör}$ = 47,76 cm^2;
Írható felület: $T_{nagykör} - T_{kiskör}$ = **389,45 cm^2**

4. Mekkora felületen párolog a forró tea egy 8 cm átmérőjű henger alakú bögréből?
T = **50,24 cm^2**.

5. Egy 1,8 m átmérőjű kör alakú gyerekmedencére szeretnénk télire védőponyvát rakni. Mekkora területű anyagot kell vásárolnunk a boltban? A ponyvát leragasztjuk a medence szélén körbe. Hány méter ragasztószalagra lesz éppen szükségünk?
T = **2,54 m^2**.
2,54 m^2 ponyva kell.
K = **5,65 m**.
5,65 m ragasztószalag szükséges.
Ennél a feladatnál fel lehet hívni a figyelmet, hogy a kör kerület- és területképletének összekeverése súlyos hiba, vigyázzanak erre.

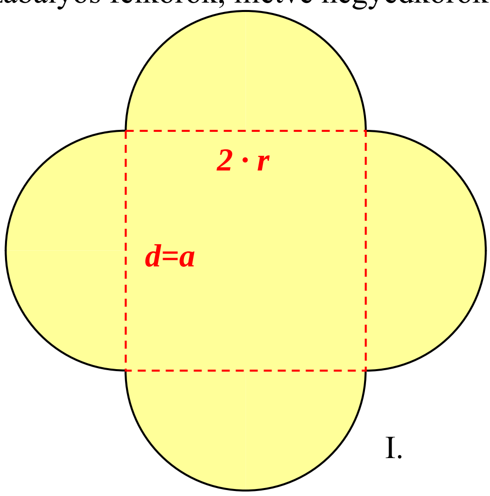
6. Zoli anyukája kijelentette, hogy Zoli csak akkor mehet moziba a barátjával, ha lenyírja előtte a füvet. A fiúnak nem fülött a foga a munkához, ezért a fűnyírót kikötötte egy a telek közepén leszúrt karóhoz. Elindította, így a gép „önműködően” levágta a füvet, miközben a kötél, amelyre ki van kötözve, felcsavarodott a karóra. Mekkora területet nyírt le így a fűnyíró, ha a kötél 4,2 méter? Mekkora területet kell még Zolinak lenyírnia, ha a fűvel borított terület 102 m^2? Végez-e a fűnyíró legalább a felével a területnek? (Ezt a módszert ne próbáljátok ki otthon!)

T = **55,39 m^2**. A hátralévő terület: **46,61 m^2**. Igen, több mint a felével végez a területnek.

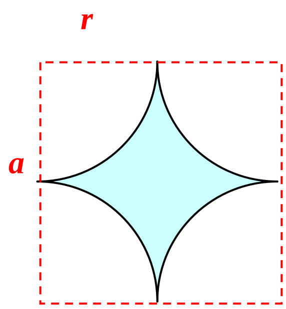
3. FELADATLAP

Feladatok a kör területképletének gyakorlására–összetett példák

1. A szükséges adatok lemérése után döntsd el, mekkora az alábbi alakzatok területe? (Az alakzatokat szabályos félkörök, illetve negyedkörök határolják.)



I.



II.

I. alakzat: 4 db félkör + 1 db négyzet: d = 3,2 cm; r = 1,6 cm; a = d; $T_{félkör} = r^2 \cdot \pi = 8,04\ cm^2$;
$T_{négyzet} = 10,24\ cm^2$;
$T_{I.} = 4 \cdot 8,04\ cm^2 + 10,24\ cm^2 =$ **42,4 cm^2**
II. alakzat: 1 négyzet – 4 db negyedkör: r = 1,6 cm; a = 3,2 cm

$T_{négyzet} = a \cdot a = 10,24\ cm^2$; $T_{negyedkör} = \dfrac{r^2 \cdot \pi}{4} = 2,01\ cm^2$;

$T_{II.} = 10,24\ cm^2 - 4 \cdot 2,01\ cm^2 =$ **2,2 cm^2**

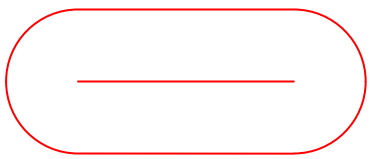
2. Egy kecskét kikötnek legelni egy 3 m hosszú kötélen, melyet egy 4 m hosszú vízszintesen kifeszített drótkötélhez hurkolnak, amin a kötél csúszhat. Milyen alakú területet tud lelegelni a kecske? Mekkora ez a terület? (A drótkötél a kecske fejmagasságában van, tehát a kecske lényegében a drótkötéltől 3 m-re tud eltávolodni minden irányba.) Hány méter drótkötélre lenne szükségünk, ha ugyanezt a területet kívülről akarnánk körbekeríteni a kecskének?

A kecske egy téglalapból és két félkörből álló területet tud lelegelni.

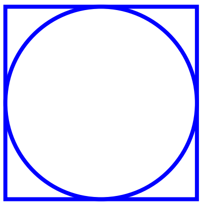
$T = 6 \cdot 4 + 3^2 \cdot \pi = 24\ (m^2) + 28,26\ (m^2) =$ **52,26 (m^2)**

$K = 2 \cdot 3 \cdot \pi + 2 \cdot 4 =$ **26,84 (m)**

Kb. 27 m drótkötélre lenne szükség.



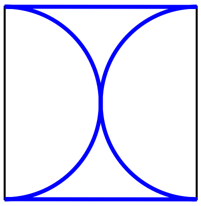
3. Mekkora a kék vonalak által határolt alakzat kerülete és területe? (A méretek az ábrán találhatók.)



10 cm

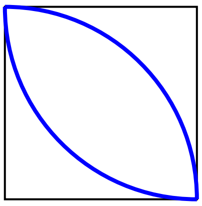
I.

(A körön kívüli rész területére vagyunk kíváncsiak.)



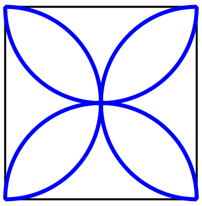
10 cm

II.



10 cm

III.



10 cm

IV.

$K_{I.} = K_{kör} + K_{négyzet} = 2 \cdot 5 \cdot \pi + 4 \cdot 10 = \mathbf{71{,}4\ cm}$

$K_{II.} = 2 \cdot K_{félkör} + 2 \cdot 10\ cm = 2 \cdot 5 \cdot \pi + 2 \cdot 10\ cm = \mathbf{51{,}4\ cm}$

$K_{III.} = 2 \cdot K_{negyedkör} = 2 \cdot (2 \cdot 10cm \cdot \pi : 4) = \mathbf{31{,}4\ cm}$

$K_{IV.} = 4 \cdot K_{félkör} = 4 \cdot (2 \cdot 5cm \cdot \pi : 2) = \mathbf{62{,}8\ cm}$

$T_{I.} = T_{II.} = T_{négyzet} - T_{kör} = (10\ )^2 - (5\ )^2 \cdot \pi = \mathbf{21{,}5\ cm^2}$

$T_{III.} = 2 \cdot (T_{negyed\ kör} - T_{fél\ négyzet}) = 2 \cdot \frac{10^2 \cdot \pi}{4} - \frac{10^2}{2} = \mathbf{57\ cm^2}$

A negyedik alakzat 4 db ugyanolyan formájú alakzatból áll, mint a harmadikat alakzat.

$T_{IV.} = 4 \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{5^2 \cdot \pi}{4} - \frac{5^2}{2} \right) \right] = \mathbf{17\ cm^2}$

2. Az új fogalmak, tanult képletek elmélyítése

Ha van idő egy kis játékos ismétlésre, használhatjuk az 1. tanári melléklet kártyáit. (A kártyáknál nem árt ellenőrizni, hogy a hátoldal a megfelelő kártyához illeszkedik.) A tanulók csoportokban játszanak a kártyával. Pl. játszhatunk a hatodikos 0665-ös modulban leírt társasjátékot. Vagy kérdezhetik egymástól a képleteket, definíciókat körben. A középre helyezett talonból húz mindig egy gyerek (kérdező), leteszi maga elé a kék írással felfelé, és felolvassa a soron következő gyereknek (válaszoló). Ez a gyerek megpróbálja kitalálni, mi van a kártya másik oldalán zölddel, azaz mi a fogalom meghatározása, vagy a hozzá tartozó képlet. Ha a válaszoló nem jól mondta el (összekeverte, vagy nem tudta), akkor kiesik a játékból. Új kártyát húz a kérdező, és a következő (tőle kettővel arrébb ülő) gyereket lesz a válaszoló. Ha viszont jól válaszolt a válaszoló, ő lesz a következő kérdező. Így megy körbe a játék, míg minden gyerek kiesik egy kivételével. A bent maradó gyerek a győztes.

0763 – 1. tanári melléklet – Ismeretanyag-kártyák Kartonlapra nyomtatva osztályonként 8 készlet (csoportonként 1 készlet) ebben a méretben.

Háromszög magassága	Téglalap területképlete	Paralelogramma területképlete
Paralelogramma magassága	Négyzet területképlete	Kör területképlete
Háromszög területképlete	Deltoid területképlete	Kör kerületképlete

0763 – 1. tanári melléklet – Ismeretanyag-kártyák hátoldal (Ha egy A4-es lap két oldalára nyomtatjuk ezt a két oldalt, és utána vágjuk ki, akkor kerül minden kártya hátoldala a megfelelő helyre.)

$a \cdot m_a$ vagy $b \cdot m_b$	$a \cdot b$	Egyik csúcsából a szembelévő oldalra bocsátott merőleges.
$r^2 \cdot \pi$	$a \cdot a$	Két szembelévő oldalának távolsága, vagy a sávot határoló párhuzamosok távolsága.
$2 \cdot r \cdot \pi$	$\frac{e \cdot f}{2}$	$\frac{a \cdot m_a}{2}$ vagy $\frac{b \cdot m_b}{2}$ vagy $\frac{c \cdot m_c}{2}$