0762. MODUL

KERÜLET, TERÜLET

A kör kerülete

KÉSZÍTETTE: VÉPY-BENYHE JUDIT

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Kör kerületének képlete
Időkeret	3 tanóra
Ajánlott korosztály	7. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Szűkebb környezetben:* VI. Kerület, terület, felszín, térfogat *Ajánlott megelőző tevékenységek:* Sokszögek kerületszámítása; kör fogalma; kör átmérőjének, sugarának, középpontjának, stb. fogalma. *Ajánlott követő tevékenységek:* A kör területének számítása; Körhenger felszín- és térfogatszámítása
A képességfejlesztés fókuszai	*Számlálás, számolás:* Kör kerületének számítása kalkulátor használatával egybekötve. *Becslés, mérés:* Méréssel, becsléssel egybekötött problémamegoldások (kör kerületének közelítő meghatározása fonallal), mértékváltási feladatok. *Szövegesfeladat-megoldás, problémamegoldás, metakognició:* Gyakorlati életből vett feladatok átfogalmazása matematikai problémává, kapcsolódó számítási feladatok megoldása. *Rendszerezés, kombinativitás:* Kör kerületének képletéből félkör, negyedkör kerületére következtetés *Deduktív következtetés, induktív következtetés:* Általános képletek alkotása a kör kerületének meghatározására. Egyszerű bizonyítások.

AJÁNLÁS

Frontális-, egyéni-, páros- és csoportmunka. A csoportok 4-6 főből állhatnak. A párokat a padtársak képezik.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Számológép, Internet, matematikai szakkönyvek (Sain Márton: Nincs királyi út (Matematikatörténet); Hajós György: Bevezetés a geometriába…), mágneses tábla, (fóliák és írásvetítő).

ÉRTÉKELÉS

Az egyéni és csoportos munka megfigyelése alapján, szóbeli értékelés

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. Tapasztalatszerzés a kör kerületének és átmérőjének arányával kapcsolatban, π fogalma			
1.	Kör (illetve korong) alakú tárgyak gyűjtése	Rendszerezés	Kör alakú tárgyak (pénzérme)
2.	A kör részei (ismétlés)	Ismétlés, rendszerezés	Feladatgyűjtemény
3.	A gyűjtött tárgyak átmérőjének és kerületének mérése	Tapasztalatgyűjtés	Kör alakú tárgyak, pénzérmék, vonalzó, cérna vagy madzag, 1. feladatlap
4.	A gyűjtött adatok közös táblázatba foglalása	Rendszerezés	Írásvetítő, 1. tanári melléklet
5.	Korong alakú eszköz	Tapasztalatgyűjtés	Különböző méretű műanyag kör alakú doboztetők (vajkrémek, arckrémek, stb.), cérna
6.	A szalámi és a héja	Tapasztalatgyűjtés	Héjas szalámi szeletek
7.	Kör kerületének közelítése beírt sokszögekkel	Tapasztalatgyűjtés	Körző, vonalzó
II. A kör kerülete			
1.	A táblázat és a tapasztalat összefoglalása, π bevezetése, kör kerületének képlete	Szabályalkotás, felismerés	Írásvetítő, 1. tanári melléklet
2.	Mi a π?	Gyűjtőmunka	Lexikon, szakirodalom, Internet, 2. feladatlap
III. A kör kerületképletének alkalmazása, gyakorlása			
1.	Szöveges feladatok a kör kerületével kapcsolatban	Szövegértés, számolás	3., 4. feladatlap

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Tapasztalatszerzés a kör kerületének és átmérőjének arányával kapcsolatban, π fogalma

Ennek az órának a tapasztalatszerzés a fő célja. A képleteket megalkotni csak a következő óra elején fogjuk. Ha addig valamelyik gyereknek komoly sejtései támadnak, otthon gondolkozhat rajta, és megfogalmazhatja. A jó sejtéseket jutalmazhatjuk.

1. Kör (illetve korong) alakú tárgyak gyűjtése

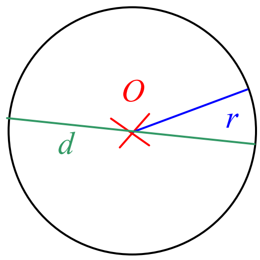
Tanár frontálisan felteszi a kérdést: Milyen kör alakú tárgyak vannak körülöttünk? Pl.: korong, pénzérme, poháralátét, stb. (Jó, ha a tanár bevisz egy pár ilyen tárgyat az órára.) Olyan tárgy is jó, melynek van vizsgálható körlappal határolt síklapja. Pl. Egyenes körhenger alakú tolltartó, pohár, stb.

2. A kör részei (ismétlés)

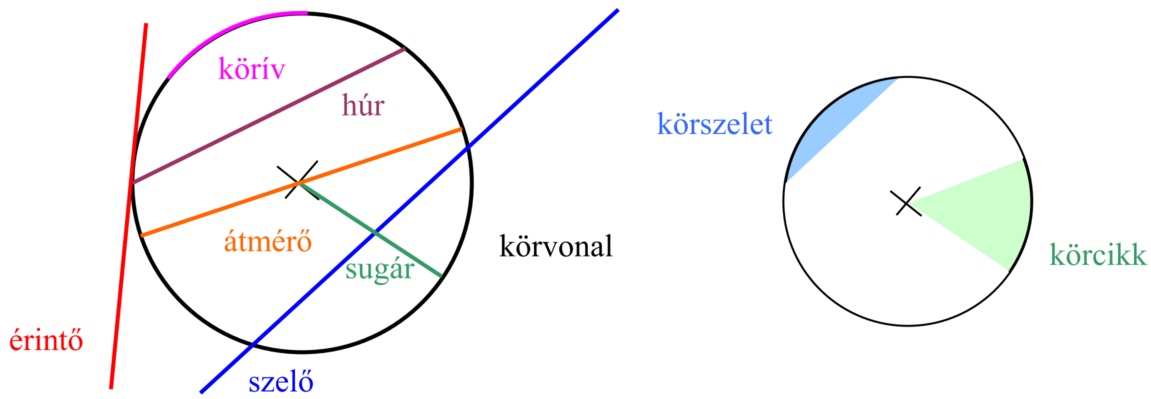
Utána felelevenítik a kör definícióját és a kör nevezetes részeit pl egy „Ki vagyok én?” játékkal. Egy vállalkozó kedvű gyerek kimegy, a háta mögé felírja a tanár a fogalmat, hogy ki is ő, és a többiek állításokat mondanak róla, amíg ki nem találja.
Pl.: Körcikk.
1. „Ha a tortából vágok, olyan alakú lesz, mint Te vagy.”
2. „Két sugár és egy körív határol”
Vagy: Húr
1. „Egy szakasz vagy.”
2. „Ezt kapom, ha összekötöm a körív két pontját.”
3. „Végtelen sok van Belőled egy körben, és a leghosszabb az átmérő.”
Fontos, hogy minden „Összefoglalás”-ban szereplő fogalom elhangozzék.
Megoldhatják a feladatgyűjtemény feladatait is ismétlésképpen.

EMLÉKEZTETŐ:

A kör: olyan pontok halmaza a síkon, melyek egy adott ponttól adott távolságra helyezkednek el.
A pontot a kör középpontjának (az ábrán O pont), a távolságot a kör sugarának (r) hívjuk. A kör átmérője a körív két átellenes pontját összekötő szakasz (d), mely éppen a sugár kétszerese.



A kör részei:



3. A gyűjtött tárgyak átmérőjének és kerületének mérése

Az ismétlés után a gyerekek megpróbálják lemérni a körök kerületét. Érdemes megbeszélni előtte, milyen módszerekkel lehetséges ez: cérna segítségével (A cérnát körbevezetik a kör kerületén, majd lemérik a cérnát vonalzóval.), vagy vonalzó mentén gördítéssel. (Pl. a pénzérméknél nagyon szerencsés a vonalzó mentén való gördítés. A nullát hozzáilleszthetjük a pénzérmén található egyenes vonal végéhez, így pontosan lehet gördíteni az egész kerületen. Érdemes minél jobban hozzányomni a vonalzóhoz a pénzérmét, úgy kevésbé csúszik el.)

1. FELADATLAP

1. Mérd meg kör alakú tárgyak átmérőjét és kerületét, jegyezd fel a mért adatokat. Számold ki a kerület és az átmérő arányát számológéppel!

Néhány kör alakú tárgy adatai az ellenőrzés segítésére: (*K*/*d* természetesen kb. 3,14)

	A tárgy neve	**Átmérő (*d*) (cm)**	**Kerülete (*K*) (cm)**
1.	1 forintos érme	1,6	5
2.	2 forintos	1,9	6
3.	5 forintos	2,1	6,5
4.	10 forintos	2,5	7,8
5.	20 forintos	2,6	8,2
6.	50 forintos	2,7	8,5
7.	100 forintos	2,4	7,5
8.	Kék-piros korong	2,5	7,8
9.			
10.			

4. A gyűjtött adatok közös táblázatba foglalása

A tanár írásvetítőre felteszi az 1. tanári mellékletet (ez egyébként megegyezik az 1. feladatlap táblázatával, de több sora van, és tartalmazza a kerület és átmérő hányadosát). Egyenként szólítja a gyerekeket az adatok beírásához. Minden beírt sor végén együtt kiszámolják a kerület és az átmérő hányadosát.

Így egy igazi statisztikát kapunk. Alkalom nyílik megbeszélni a tapasztalatokat, kiugró eltéréseket, mérési hibákat, illetve átlagot számolhat a gyerekekkel együtt a kerület és az átmérő arányának adataiból.
Végül megállapítják együtt, hogy a kör kerületének és átmérőjének aránya állandó.

5. Korong alakú eszköz

A korong gyártását már pár nappal az óra előtt ki kell adni a gyerekeknek. Jó, ha a tanár mutat egy már elkészített eszközt példának. Fontos, hogy különböző méretű korongok legyenek majd a készletben. A feladatot csoportoknak is kiadhatjuk. Elég, ha minden csoport készít egy eszközt.
Gyűjtsenek kerek műanyag vagy kartonpapír dobozfedőket (sajtos doboz, bonbonos doboztető, vajkrémes doboztető…), és készítsenek belőle eszközt, ami a következőképpen történik: A doboztető peremén két átellenes ponton lyukat fúrnak tűvel, amin átfűzhető a cérna. A két lyuk közötti távolságot beosztásokkal látják el, ami tíz egyenlő részre osztja az átlót.
Jó, ha erre az órára a tanár készít pár ilyen korong alakú eszközt arra az esetre, ha a gyerekek nem csinálnak megfelelő számút vagy valamiért azok nem használhatók.
A tanár megmutatja az elkészített korongok használatát: egy zsineget körbe kell tekerni a korong külső peremén és megjelölni vagy levágni ott, ahol pontosan körbeéri. Így meg van a kör kerületének a hossza. Utána a korong átmérője mentén, az átellenes lyukakon át körbetekerik a zsineget, és leolvassák, hogy hányszor fér rá a kerület az átmérőre. (Az átmérő fel van osztva 10 egyenlő részre, így jól látható az arány.) Minden csoport megnézi a saját korongját, majd ahol kész vannak a csoportok, korongot cserélnek.
Végül megbeszélik a tapasztalatokat, miszerint a korong méretétől függetlenül hasonló eredményre jutottak, tehát az átmérőt mindig ugyanazzal a számmal (kb.: 3,14) kell megszorozni ahhoz, hogy megkapjuk a kerületet.

6. A szalámi és a héja

Az órán nem szerencsés ezzel a feladattal bajlódni, de házi feladatnak adható, próbálják ki a gyerekek a vacsoránál otthon. Különböző méretű kör alakú szeletelt héjas szalámiról leszedik a héjat, majd körbetekerik az átmérő mentén. Megállapítható, hányszor „fér rá” az átmérőre a kerület.(→ 3,1) Mindenképpen szerencsés, ha ezzel a gyakorlati példával tapasztalatot szereznek a tanulók.

7. Kör kerületének közelítése beírt sokszögekkel

A tanár megmutatja, mi a beírt sokszög, és hogyan szerkesztjük. A tanulók rajzolnak a füzetbe egy kört (a sugár nagyságát minden csoport maga választhatja meg, nem árt, ha egész szám centiméterben), majd megpróbálnak szabályos beírt sokszögeket rajzolni a körbe. Érdemes egyre nagyobb oldalszámú szabályos sokszöget rajzolni (hatszög, nyolcszög, tizenkétszög…). Minden esetben megállapítják ezek kerületét. (Lehet szabályos hatszöget rajzolni, majd az oldalak felezőmerőlegeseinek megszerkesztésével szabályos tizenkétszöget szerkeszteni, majd újabb felezéssel huszonnégyszöget szerkesztenek, és így tovább. Természetesen itt fontos, hogy megfelelően nagy körből induljanak ki.) Az adatokat táblázatba foglalják, megállapításokat tesznek róla: Ha növekszik az oldalszám, nő a beírt sokszög kerülete. A beírt sokszög kerületének mérőszámainál több kell legyen a kör kerületének mérőszáma. Minél nagyobb a beírt szabályos sokszög oldalszáma, annál inkább közelebb van a kör kerületének mérőszámához…

Végül frontálisan összefoglalják a tapasztalatokat, K/d arányát kiszámolják minden esetben. → Újabb tapasztalat ennek állandóságáról.

II. A kör kerülete

1. A tapasztalat összefoglalása, π bevezetése, kör kerületének képlete

Eljött az ideje, hogy tapasztalatainkat összefoglaljuk, lejegyezzük! Ha valamelyikgyerek vállalkozik arra, hogy megfogalmazza, vagy képletbe foglalja sejtését, meghallgathatjuk az osztály előtt. Ha nincs ilyen a kitöltött 1. tanári mellékletet felteszi a tanár ismét írásvetítőre. „Próbáljuk meg megjósolni, hogyan változik a kör kerülete, ha kétszer akkorára növelem az átmérőt.” (Lehet konkrét példát is nézni: az 1 Ft-os átmérője 1,6 cm, kerülete kb. 5 cm. Mekkora lesz egy 3,2 cm átmérőjű kör kerülete?)
Válasz: kétszeresére nő, tehát kb. 10 cm lesz.
Mi történik, ha háromszorosára növelem az átmérőt?
Válasz: háromszorosára nő a kerület.
Hogy lehet egy tetszőleges kör kerületét megjósolni?
Az átmérő 3,14-szerese
Tehát a kör átmérője és kerülete között összefüggés van: K/d értéke állandó. Milyen összefüggés van tehát a kör átmérője és kerülete között?
Egyenes arányosság.

K/d értékét (mely tehát állandó minden kör esetében) nevezzük π -nek, melynek értéke kb. 3,14.
Elhangozhat, hogy ez az érték nem racionális, nem írható fel tört alakban. Erről később, a négyzetgyökvonás témakörénél lesz szó nyolcadik osztályban (0841. modul).

ÖSSZEGZÉS:

Az eddig szerzett tapasztalatok alapján a **kör kerületének és átmérőjének hányadosa állandó** (a két mennyiség egyenesen arányos, azaz ha az átmérő kétszeresére, háromszorosára, felére változik, a kerület is éppen a kétszeresére, háromszorosára, illetve felére változik.) Ezt az állandót ***pi***-nek nevezzük. Jele: π.
Ezért a kör kerülete a következő képlettel számolható:

$K_{kör} = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$

A π nem racionális, tehát nem állítható elő törtalakban.

2. Mi a π?

2. feladatlap gyűjtőmunkát tartalmaz. A gyűjtőmunka házi feladatnak is adható. Amennyiben van időkeret rá, a tanár vezetésével könyvtárban, szakirodalomban vagy Interneten utána nézhetnek a gyerekek az órán is. Csoportoknak kiadható a feladat. Lehet például, hogy minden csoport keresi a kérdésekre a választ, de minden csoport máshol. Egyik az Interneten, másik szakirodalomban, harmadik lexikonokban. Másik lehetőség a csoportmunkára, hogy a csoport feladata felosztani a munkát egymás között, tehát meghatározzák, hogy melyik kérdésre ki keresi a választ, és milyen eszközben. A gyűjtőmunka lezárása a csoportok kiselőadásával is végződhet, vagy a beérkezett adathalmazból készíthetnek csoportonként egy-egy tablót, melyeket mindenki megtekint.

2. FELADATLAP

Feladatlap a gyűjtőmunkához

A következő kérdésekre keressétek a válaszokat

- Interneten,
- lexikonokban,
- matematikatörténetről szóló könyvekben!

1. Mi a π? Gyűjtsetek róla meghatározásokat!
2. Hogyan közelítették?
Archimédesz a beírt és körülírt szabályos sokszögekkel.
3. Mikori az első forrás a π ismeretéről?
i.e. 1700 körül, egyiptomi papirusztekercs
4. Hány tizedesjegyig számolták ki a különböző korokban?
5. Mi a jelentése?
jelentése: periféria = kerület görög kezdőbetűje
6. Miért hívják Ludolph-féle számnak?
Ludolf 35 tizedesjegyre pontos értékét határozta meg a π –nek.
7. Találtál-e egyéb érdekességet a π-vel kapcsolatban?

Néhány webhely, ahol találhat a gyerek π –vel kapcsolatos anyagot:
http://www.t-es-t.hu/minden/tudom.htm
http://matematika.lap.hu/
http://www.sulinet.hu (eTananyag → eMatek → fogalmak/tételek → π a Ludolph-féle szám, illetve a π első 2000 számjegye)
A google keresőjébe érdemes a „pi meghatározása” szövegre rákerestetni (A szöveget „”–be érdemes a keresőablakba írni!).
Néhány szakkönyv, melyben találhatnak a π –ről irodalmat:
Sain Márton: Nincs királyi út (Matematikatörténet); Hajós György: Bevezetés a geometriába

III. A kör kerületképletének alkalmazása, gyakorlása

1. Szöveges feladatok a kör kerületével kapcsolatban

Megjegyzés 1: A feladatok megoldásánál a π értékénél 3,14-dal számoltuk mindenütt, mivel a gyerekeknél lévő számológépen nem feltétlenül szerepel a π tíz, tizenkét tizedesjegyre pontos értéke, és csak két tizedesjegyre kell fejből tudniuk.
Megjegyzés 2: Hangsúlyozzuk ki, hogy elég az eredményeket két tizedesjegy pontossággal leírni. Remek alkalom nyílik a kerekítés átismétlésére a feladatok megoldásánál.
Megjegyzés 3: Fontos beszélni a π miatt keletkezett állandó pontatlanságról. Tudatosítani kell a gyerekekben, hogy minden számításunk csak közelítő számítás.
A 3. feladatlap egyszerűbb feladatokat tartalmaz. Házi feladatnak és önálló munkának egyaránt adható. Csoportmunkára is alkalmas a feladatsor.
A 4. feladatlap csoportmunkára ajánlott, összetettebb feladatokat tartalmaz.

3. FELADATLAP

Feladatok a kör kerületképletének gyakorlására–egyszerű példák

1. Töltsd ki a hiányzó adatokat a táblázatban (használj számológépet)!

r	5 cm	4 dm	14 m	24 cm	3,02 m
d	10 cm	8 dm	28 m	48 cm	6,04 m
K	31,4 cm	25,12 dm	87,92 m	150,72 cm	18,98 m

2. Mekkora annak a kör alakú fa edényalátétnek a kerülete, melynek átmérője 25 cm?
K = **78,5 cm**

3. Egy lovas kocsihoz kerekeket készítenek fából. A kerék átmérője fél méter. A kerék talajon futó részére fém abroncsot szögelnek, melyet hajlékony fémszalagból készítenek. Mekkora fémszalag kell a négy kerékhez? Ha a kerekek éppen 20 teljes fordulatot tesznek, mennyit halad előre a szekér?
$K_{kerék}$ = 1,57 m → A négy kerékre 4 · 1,57 m = **6,28 m** fémabroncs kell.
20 teljes fordulattal a kocsi 20 · 1,57 m = **31,4 m**-t halad.

4. FELADATLAP

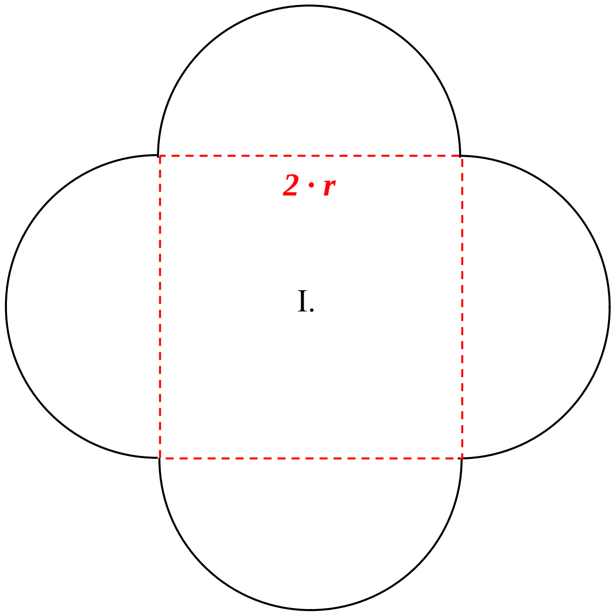
Feladatok a kör kerületképletének gyakorlására – összetett példák

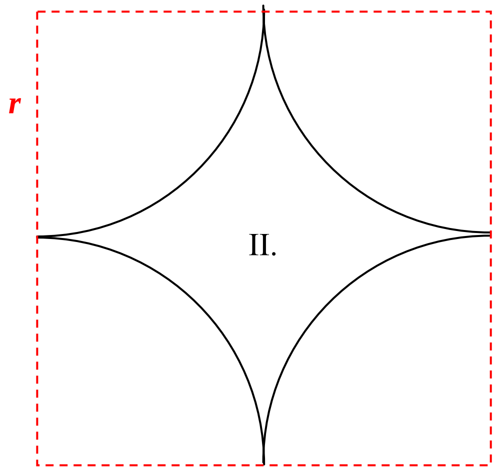
1. Anna tervezett egy szabályos kör alakú virágágyást a kertbe. Az átmérője 2,5 m lesz. Kb. hány db petúnia palántát vegyen, ha szeretné a virágágyás kerülete mentén végigültetni az ágyást 40 cm-enként? Mennyit fog fizetni, ha egy palánta 120 Ft?
K ≈ 15,7 m = 1570 cm
1570 : 40 ≈ **39 db palánta szükséges.**
39 · 120 = **4680 Ft**

2. Éva egy kör alakú terítőt akar készíteni egy asztalra. A kör alakú asztal átmérője 60 cm. Éva úgy tervezi, hogy a terítő mindenhol 40 cm-t lógjon le az asztalról, ha középre teríti. Mekkora lesz a terítő átmérője? Éva szeretné körbeszegni sűrű öltésekkel a terítő szélét. Hány m cérnára lesz szüksége, illetve elég lesz-e egy orsó cérna (50 m) a terítő körbeszegésére, ha kb. a beszegendő hossz háromszorosa fogy cérnából?
d = 60 cm + 2 · 40 cm = **140 cm**
K = **439,6 cm**
Cérna: 3 · 439,6 cm = 1318,8 cm = **13,19 m** → Bőven elég lesz egy orsó cérna.

3. A szükséges adatok lemérése után döntsd el, mekkora az alábbi alakzatok kerülete? (Az alakzatokat szabályos félkörök, illetve negyed körök határolják.)

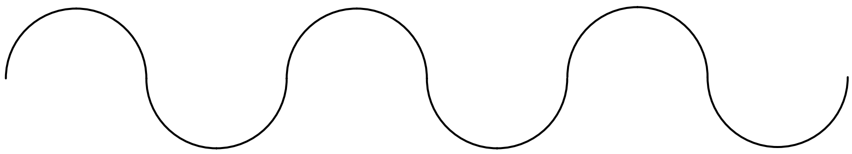
I. alakzat:
4 db félkör: d = 4 cm; r = 2 cm;
$K_{félkör} = r \cdot \pi = 6{,}28$ cm; $K_{I.} = 4 \cdot 6{,}28$ cm = **25,12 cm**
II. alakzat:
4 db negyedkör: r = 3 cm;
$K_{negyedkör} = \frac{r \cdot \pi}{2} = 4{,}71$ cm; $K_{II.} = 4 \cdot 2{,}51$ cm = **18,84 cm**





4. Egy függönyt szeretnénk tenni a konyhaablakra. Úgy tervezzük, hogy a függöny 6 db szabályos félkörbe fog „hullámozni”, mikor behúzzuk.

A függöny felülnézetben:

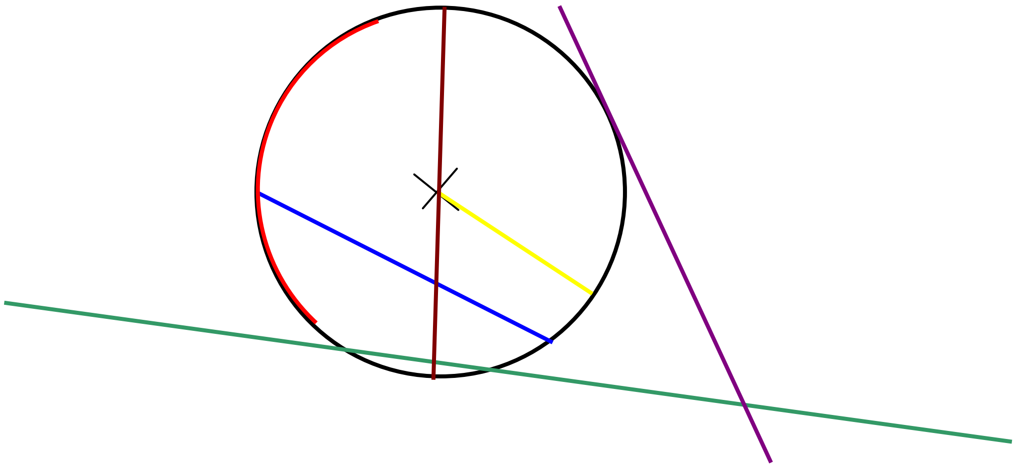


Ha az ablak szélessége 1,5 m, milyen széles függönyt vegyünk, hogy valóban el lehessen az ábrán látható módon rendezni, és az egész ablakot eltakarja?
Egy félkör: d = 1,5 m : 6 = 0,25 m = 25 cm; $K_{félkör}$ = 78,5 cm;
A függöny szélessége: 78,5 cm · 6 = **471 cm**

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Rajzolj egy *P* pontot a füzetedbe! Satírozd kékkel a tőle 3 cm-nél nem nagyobb távolságra lévő pontokat! Satírozd sárgával a tőle 2 cm-nél távolabb lévő pontokat! Az ábra melyik része lett zöld? Milyen tulajdonságú pontok ezek?
Kék: A pont körül 3 cm-es sugárral rajzolt kör lapja és a körvonal.
Sárga: A pont körül 2 cm-es sugárral rajzolt körön kívül eső pontok.
Zöld lesz: Egy körgyűrű (a két koncentrikus kör között), melynek nagyobbik körvonala is zöld, kisebbik nem. Ezek a *P* ponttól 2 cm-nél távolabb, de 3 cm-nél nem nagyobb távolságra lévő pontok

2. Nevezd meg, melyik szín, mit jelöl az ábrán: Írd le a füzetedbe!



Lila: érintő
Zöld: szelő
Kék: húr
Sárga: sugár
Barna: átmérő
Piros: körív

0762 – 1. tanári melléklet A kör kerülete és átmérője közötti összefüggés (Fóliára nyomva osztályonként 1 db ebben a méretben.)

	A tárgy neve	Átmérő (d) (cm)	Kerülete (K) (cm)	Kerület/átmérő (K/d)
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				
11.				
12.				
13.				
14.				
15.				
16.				
17.				
18.				
19.				
20.				