0761. MODUL

KERÜLET, TERÜLET

Sokszögek területe

KÉSZÍTETTE: VÉPY-BENYHE JUDIT

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Paralelogramma, háromszög és deltoid területképlete (Területek átdarabolása vágással, lefedéssel, hajtogatással, rajzban pontrácson – egyszerű bizonyítások)
Időkeret	6 tanóra
Ajánlott korosztály	7. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Szűkebb környezetben:* Kerület, terület, felszín, térfogat *Ajánlott megelőző tevékenységek:* tengelyesen és középpontosan tükrös alakzatok, téglalap, négyzet területe, négyszögek, háromszögek szerkesztése, (törtek értelmezése) *Ajánlott követő tevékenységek:* Szabályos és általános sokszögek területének számítása; kör területszámítása; paralelogramma, deltoid, háromszög alapú hasáb felszín- és térfogatszámítása
A képességfejlesztés fókuszai	*Számlálás, számolás kompetencia:* Terület, kerületszámítási feladatok, fejben és kalkulátor használatával egybekötve. *Becslés, mérés:* Méréssel, becsléssel egybekötött problémamegoldások, mértékváltási feladatok, területek meghatározása négyzethálón. *Rendszerezés, kombinativitás:* Terület előállítása ismert területű alakzatok átdarabolásával többféleképpen. *Deduktív következtetés, induktív következtetés:* Általános képletek alkotása a háromszögek, speciális négyszögek területének meghatározására. Egyszerű bizonyítások. *Szövegesfeladat-megoldás, problémamegoldás, metakognició:* Gyakorlati életből vett feladatok átfogalmazása matematikai problémává, kapcsolódó számítási feladatok megoldása. A frissen tanult elnevezések (paralelogramma magassága) használata. Szöveggel megfogalmazott feladatok vázlattal való szemléltetése és a feladatok megoldásához a képletek alkalmazása.

AJÁNLÁS

Frontális-, egyéni-, páros- és csoportmunka. A csoportok 4-6 főből állhatnak. A párokat a padtársak képezik.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Négyzethálós lapok, négyzethálós tábla, mágneses tábla, számológép, írásvetítő, írásvetítő fóliák.

ÉRTÉKELÉS

Az egyéni és csoportos munka megfigyelése alapján, szóbeli értékelés.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. Háromszögek, négyszögek átdarabolása téglalappá			
1.	Ismétlés: háromszögek, négyszögek csoportosítása	Rendszerező képesség	1. feladatlap, 1. tanulói melléklet, 9. tanári melléklet
2.	Sáv, sávba írható négyszögek	Általánosítás	1. feladatlap, papírcsíkok
3.	Négyzetrácson háromszögek, paralelogrammák, deltoidok, stb. átdarabolása téglalappá	Tapasztalatgyűjtés, deduktív, kombinatív készség	Olló, ragasztó, 1. feladatlap, 1. tanulói melléklet, a tanárnál néhány pót 1. tanulói melléklet
II. Paralelogramma területe			
1.	Négyzetrácson paralelogrammák átdarabolása téglalappá	Általánosítás	Olló, írásvetítő, 2. tanári melléklet (színes, nagy paralelogrammák)
2.	A paralelogrammák területképlete	Szabályalkotás, felismerés	A 2. tanári melléklet színes, nagy átdarabolt paralelogrammái, írásvetítő
3.	Elnevezések: a paralelogramma magassága	Fogalomalkotás	Írásvetítő-fóliára a 2. tanári melléklet paralelogrammái, 3. tanári melléklet
4.	Adott paralelogrammáknál a magasság berajzolása, megszerkesztése	Ismeretek gyakorlati alkalmazása	2. feladatlap, körző, vonalzó
5.	A paralelogrammák területképlete általánosan	Szabályalkotás	

III. Háromszögek, négyszögek kiegészítése téglalappá; háromszög, deltoid területe			
1.	Négyzetrácson háromszögek, deltoidok, stb. kiegészítése téglalappá	Tapasztalatgyűjtés	3. feladatlap
2.	A háromszögek területének általános képlete	Szabályalkotás, felismerés	4. tanári melléklet (négyzethálós lapon kinagyított színes háromszögek fólián), írásvetítő, 5. tanári melléklet fólián
3.	A deltoid területének képlete	Általánosítás	6. tanári melléklet (négyzethálós lapon kinagyított színes deltoid fólián)
4.	A deltoid területképlete más úton	Szabályalkotás, felismerés	
5.	A konkáv deltoid területe		

IV. Területképletek középvonallal			
1.	A trapéz területének képlete	Szabályalkotás, felismerés	7. tanári melléklet (négyzethálós lapon kinagyított színes trapéz + két trapéz fólián), 4. feladatlap, üres papírlapok
2.	A trapéz területképlete más úton	Szabályalkotás, felismerés	
3.	A sávba írható sokszögek területképlete	Szabályalkotás, felismerés Általánosítás	rajzlap
4.	Szabályos hatszög, tizenkétszög, nyolcszög területének meghatározása	Mérés, becslés	Rajzlap vagy kartonlap, olló
5.	A páros oldalú szabályos sokszög területe és kerülete közötti összefüggés levezetése	Következtetés, mérés, becslés	Szabályos sokszög, olló, mágneses tábla + mágnes, szétdarabolt sokszögek

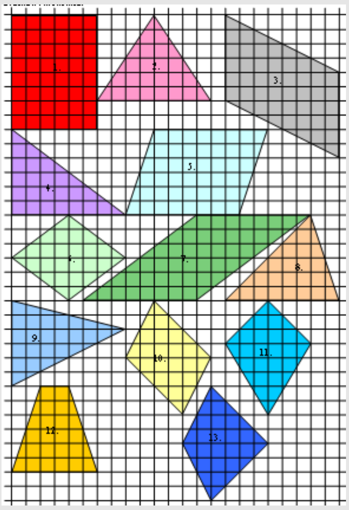
V. – VI. Paralelogramma, háromszög, deltoid, trapéz területképletének gyakorlása			
1.	Paralelogramma területe	Szövegértés, számolás	Feladatgyűjtemény
2.	Háromszög területe	Szövegértés, számolás	Feladatgyűjtemény
3.	Deltoid területe	Szövegértés, számolás	Feladatgyűjtemény
4.	Vegyes területszámítási feladatok	Szövegértés, számolás	Feladatgyűjtemény

A FELDOLGOZÁS MENETE

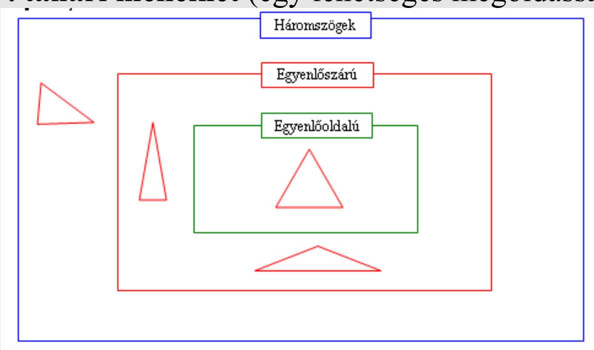
I. Háromszögek, négyszögek átdarabolása téglalappá

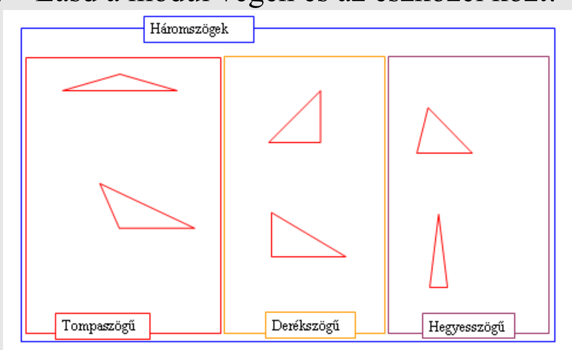
1. Ismétlés: háromszögek, négyszögek csoportosítása

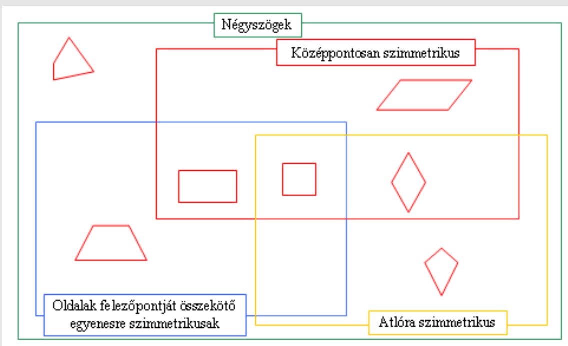
Ha van idő egy kis ismétlésre: a gyerekek az **1. tanulói melléklet** (vagy 1. feladatlap 2. feladatában szereplő) sokszögeket csoportosítsák. Többféle megoldás lehetséges.
1. tanulói melléklet – Lásd a modul végén, a tanulói munkafüzetben és a modulhoz tartozó mellékletekben!



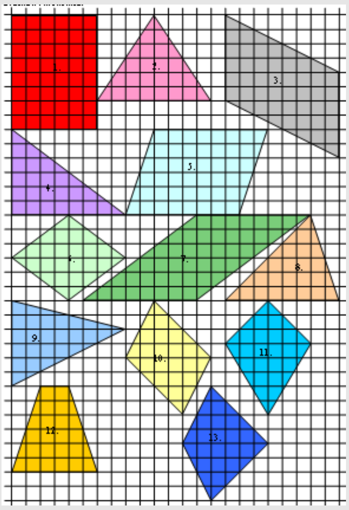
Ha van idő további ismétlésre: A **9. tanári melléklet**et kiosztja a tanár csoportonként. A gyerekek feladata, hogy rajzoljanak bele megfelelő tulajdonságú sokszögeket.
9. tanári melléklet (egy lehetséges megoldással) – Lásd a modul végén és az eszközei közt!







Ezután a tanár kérdezhet a csoportosításról:
– Hová kerültek a trapézok? Oldalak felezőpontját összekötő egyenesre szimmetrikus négyszögek (ezek a tengelyesen szimmetrikus trapézok), a középontosan szimmetrikus négyszögek (ezek a paralelogrammák) és a négyszögek másik három halmazon kívüli részére.
– Melyik rész marad üresen? Az oldalak felezőpontját összekötő egyenesre szimmetrikus négyszögek és az átlóra szimmetrikus négyszögek, de középpontosan nem szimmetrikus négyszögek halmaza marad üresen. Ilyen négyszög nincs.
– Létezik-e egyenlőoldalú, tompszögű háromszög? Nem.
Az **1. tanulói melléklet** síkidomait (melyek a feladatlapon szereplő sokszögek) érdemes kivágatni a gyerekekkel házi feladatként.

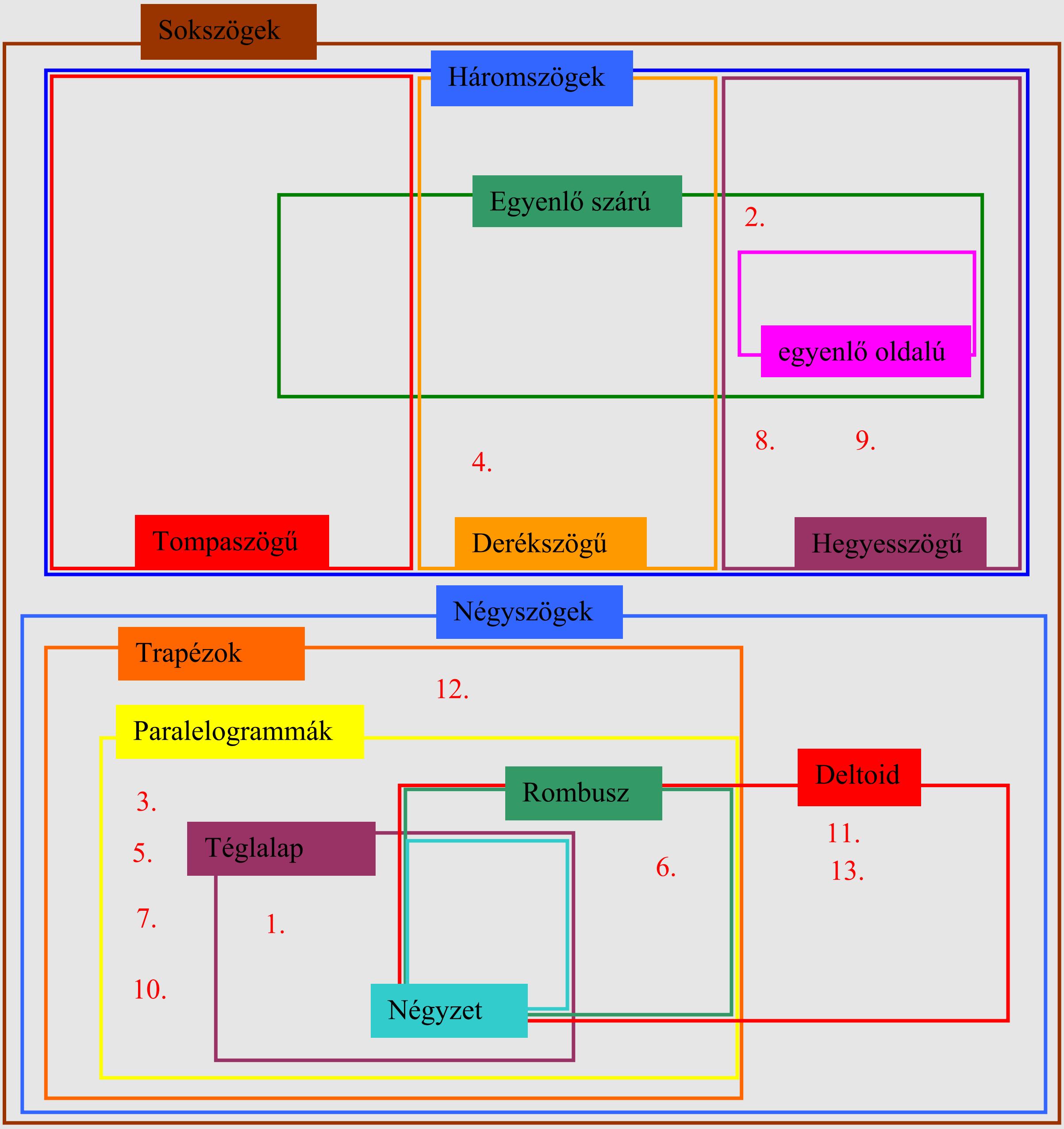


Az előző csoportosítás másik – gyorsabb – módja, ha a tanár azt mondja, válogassák ki a kivágott alakzatok közül az alábbi speciális tulajdonságú sokszögeket:

- egyenlőszárú háromszögeket;
- a deltoidokat (a tanárnak figyelnie kell arra, hogy a rombuszok is ide kerüljenek);
- a trapézokat (ide tartoznak a téglalapok, paralelogrammák, rombuszok is);
- olyan sokszög, melynek legalább egy derékszöge van…

A gyerekek dolgozhatnak párban, csoportokban, vagy önállóan is. Minden válogatás után beszéljék meg frontálisan, melyik sokszögnek kellett a kitüntetett csoportba kerülni.

Nagyon jó képességű gyerekekkel feldolgozható az alábbi halmazábra is. Tanári segítséggel felkerülhet a táblára, és bele lehet írni az **1. tanulói melléklet** síkidomainak sorszámát a megfelelő helyekre.



2. A sáv, sávba írható négyszögek

Az itt leírtak a IV. óra anyagát (Sávba írható sokszögek területképlete középvonal hosszának használatával) készíti elő. A gyerekek csoportokban vagy párokban dolgoznak. Adjunk minden csoportnak egy papírcsíkot, ez lesz a sáv. Elevenítsük fel a sáv fogalmát! (két, egymással párhuzamos egyenessel határolt síkidom)

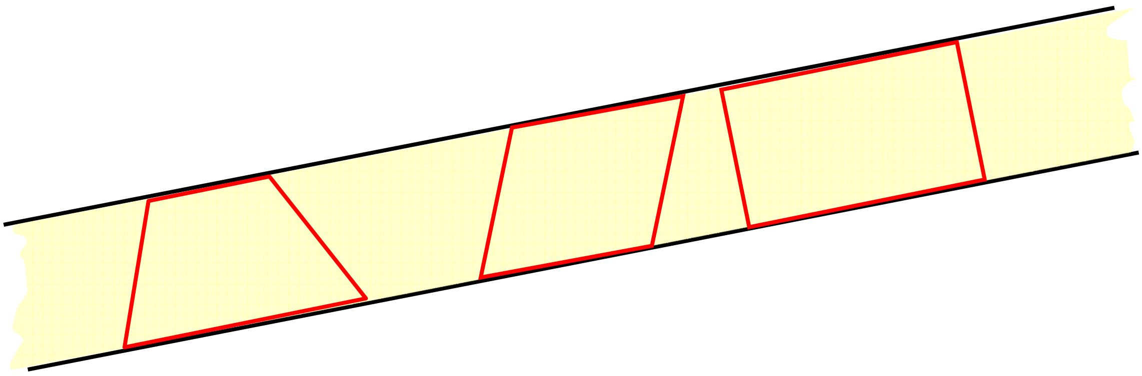
Feladat: Vágjanak ki négyszögeket a sávból! (A négyszögek két oldala legyen az egyeneseken!)

Elevenítsük fel, milyen négyszögekhez juthatnak így! (Trapézhoz jutunk. Lehet ez a trapéz paralelogramma, rombusz, téglalap, négyzet…) Mutassanak mindegyikre példát!

Ha nincs idő erre a tevékenységre, vagy nincs szükség az ismétlésre, csinálják meg az 1. feladatlap 1. feladatát önállóan, vagy párokban dolgozva a gyerekek. (Házi feladatnak is adható.)

1. FELADATLAP

1. Rajzolj a sávra négyszögeket úgy, hogy egy-egy oldala a két egyenesre illeszkedjék! Milyen négyszögeket kaptál?



Trapézokat.

(Itt az alkalom ismét tudatosítani, hogy a paralelogramma, téglalap, négyzet is trapéz!)

Az 1. feladatlap 2. feladatában lévő négyszögek közül melyeket lehet sávba rajzolni (két oldala illeszkedjen a sávot határoló egyenesekre)?

1, 3, 5, 6, 7, 10, 12 (Tulajdonképpen az összes négyszöget a két deltoidon kívül.)

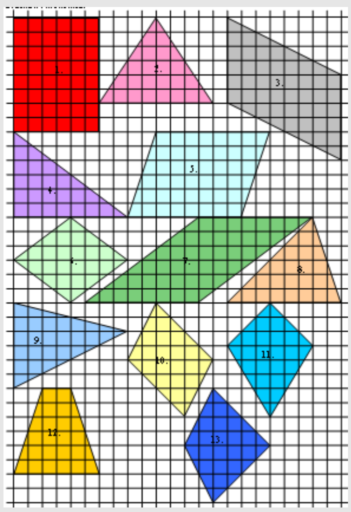
És 3. feladatlap 1. feladatának négyszögei közül?

7, 9, 11, 13

Érdemes hangsúlyozni, hogy azok a négyszögek lesznek a sávok közé írhatóak, melyeknek van egy párhuzamos oldal párja, tehát a trapézok.

3. Négyzetrácson háromszögek, paralelogrammák, deltoidok, stb. átdarabolása téglalappá

1. tanulói melléklet



Az **1. tanulói melléklet** kivágott sokszögeire, és az 1. feladatlap 2. feladatára van szükség. A tanár három kérdést tesz fel:

1.) Mely síkidomoknak egyenlő a területe?
2.) Ha egy négyzetrács a területegység, mekkora a síkidomok területe?
3.) A piros téglalap területének hányszorosa a többi síkidom területe?

(Ezek a kérdések a táblára is felkerülhetnek.) Felhívja a figyelmét a gyerekeknek, hogy próbálják olló segítségével átdarabolni a sokszögeket. (A piros téglalapot nem kell átdarabolni, csak összehasonlításul szerepel.) A tanulók párban vagy csoportban dolgozva darabolják át az **1. tanulói melléklet** kivágott sokszögeit. Itt kifejezetten átdarabolásra és nem kiegészítésre törekszünk most! Természetesen a kiegészítés módszere is elfogadható. Területük mérőszámának, arányának meghatározása a cél. Még nem a képletek megalkotására összpontosítunk, mindössze az átdarabolás lehetőségét ismételjük át.

Minden gyerek kap 2 db-ot az **1. tanulói melléklet**ből. Ezeket a síkidomokat kedvére darabolhatja (ha esetleg kétszer is elrontja a darabolást, nem árt, ha a tanárnál van egy pár tartalék melléklet.) Az elkészített átdarabolt síkidomokat beragasztják az 1. feladatlap üres négyzetrácsára az eredeti mellé. (A pár vagy csoport minden tagjának bekerül a feladatlapjára az átdarabolt síkidom. Csak az átdarabolás módjának megkeresése páros, csoportos feladat.) Így végeredményül egymás mellett lesznek az eredeti síkidomok, és az átdarabolással nyert síkidomok. Aláírják a területeik mérőszámát, valamint azt, hogy a sokszögek területe hányszorosa a piros téglalap területének. A 8., 9., 10. számú sokszögekkel csak azok a gyerekek foglalkozzanak, akik kész vannak az előzőekkel. Optimálisan minden gyerek legalább az ötödik sokszög átdarabolásáig eljut.

A feladatlap a későbbiekben is jól használható: minden sokszög területképletében lévő adata megegyezik az 1. téglalap oldalhosszaival, azaz:

- A téglalap két oldalhossza 6 és 8 egység (T = 48 területegység);
- A háromszögek magassága és hozzá tartozó alapja 6 és 8 egység (T = 24 területegység);
- A deltoidok két átlójának hossza 6 és 8 egység (T = 24 területegység);
- A paralelogrammák rácson fekvő oldalhossza és hozzá tartozó magassága 6 és 8 egység (T = 48 területegység);
- A trapéz két alapjának hosszösszege 8, magassága 6 egység (T = 24 területegység).

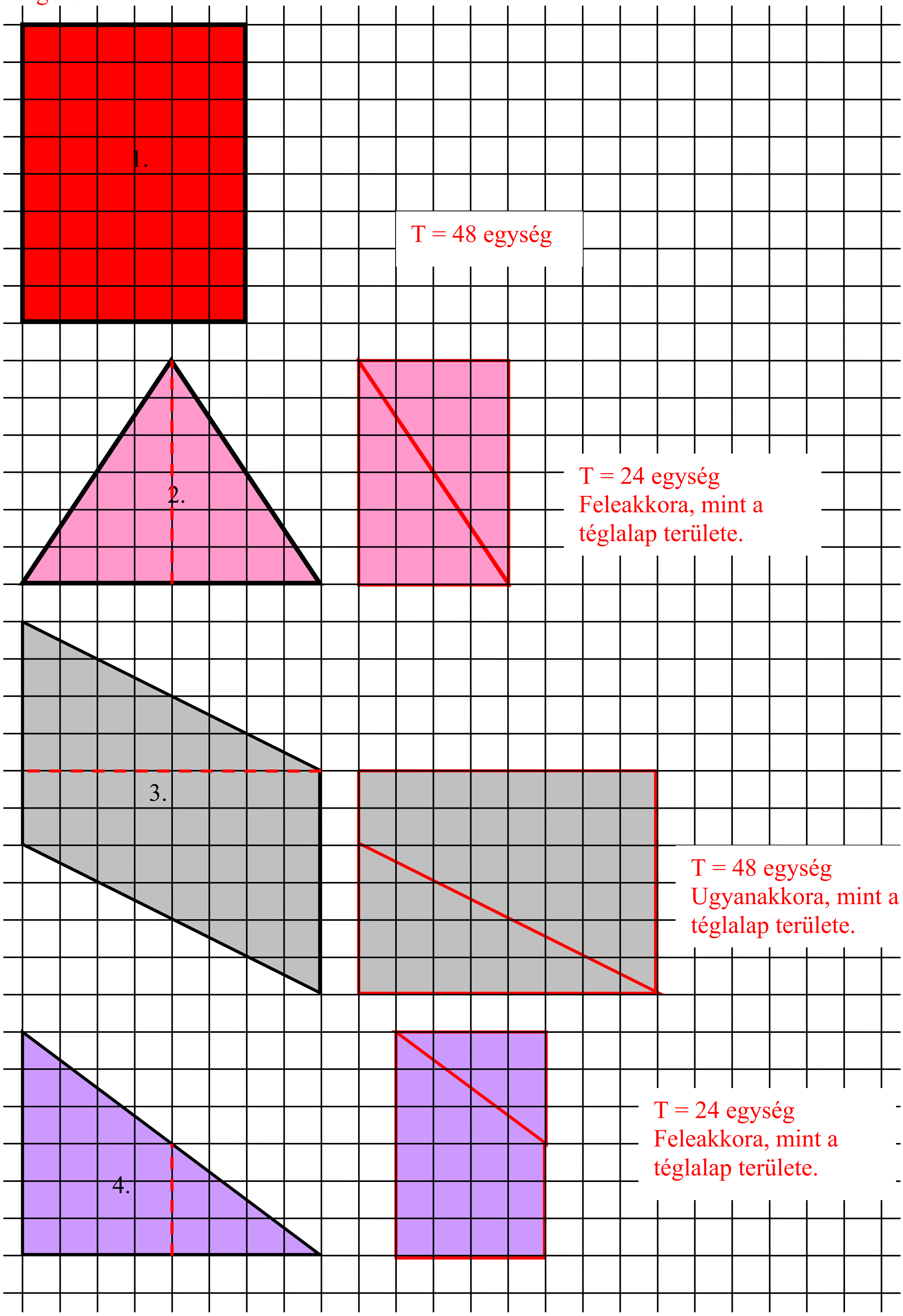
Ezekből az adatokból szépen levezethető pl.:

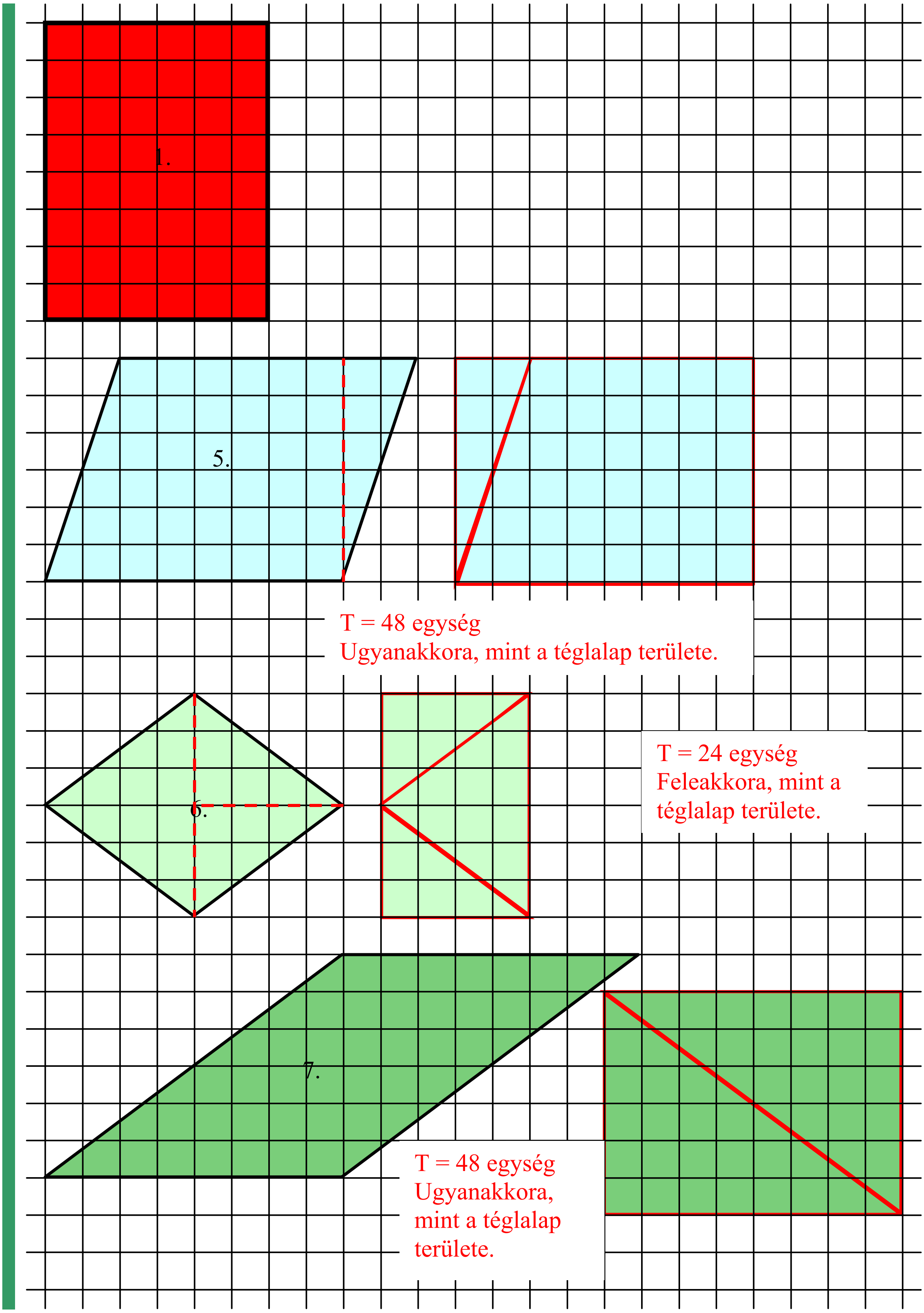
„A háromszög területe egyenlő az oldalhosszával és a hozzá tartozó magasságának hosszával, mint oldalhosszakkal szerkesztett téglalap területének fele.” (Természetesen ezt a bonyolult mondatot nem kell kimondatni a gyerekekkel, hiszen ez szemléletesen kiderül az ábrákból!)

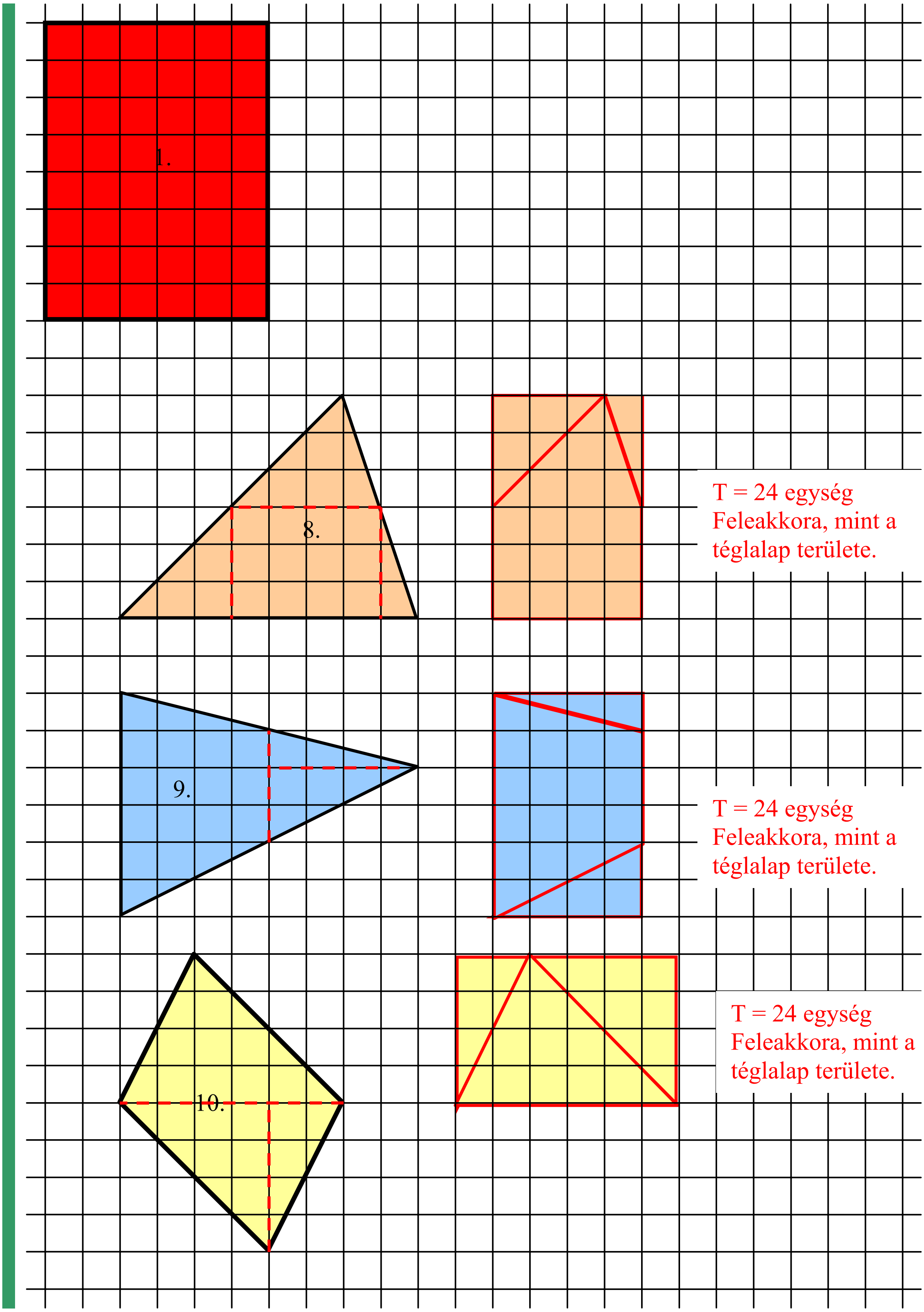
Gyorsabban haladó osztályoknál (főleg, ha 6. osztályban elég idő volt a szimmetrikus sokszögek területének kitapasztalására) felesleges az ollóval való vagdosás. Elég, ha sokszögek mellé rajzolják, mit kapnak átdarabolás után, és kiszámolják területeiket.

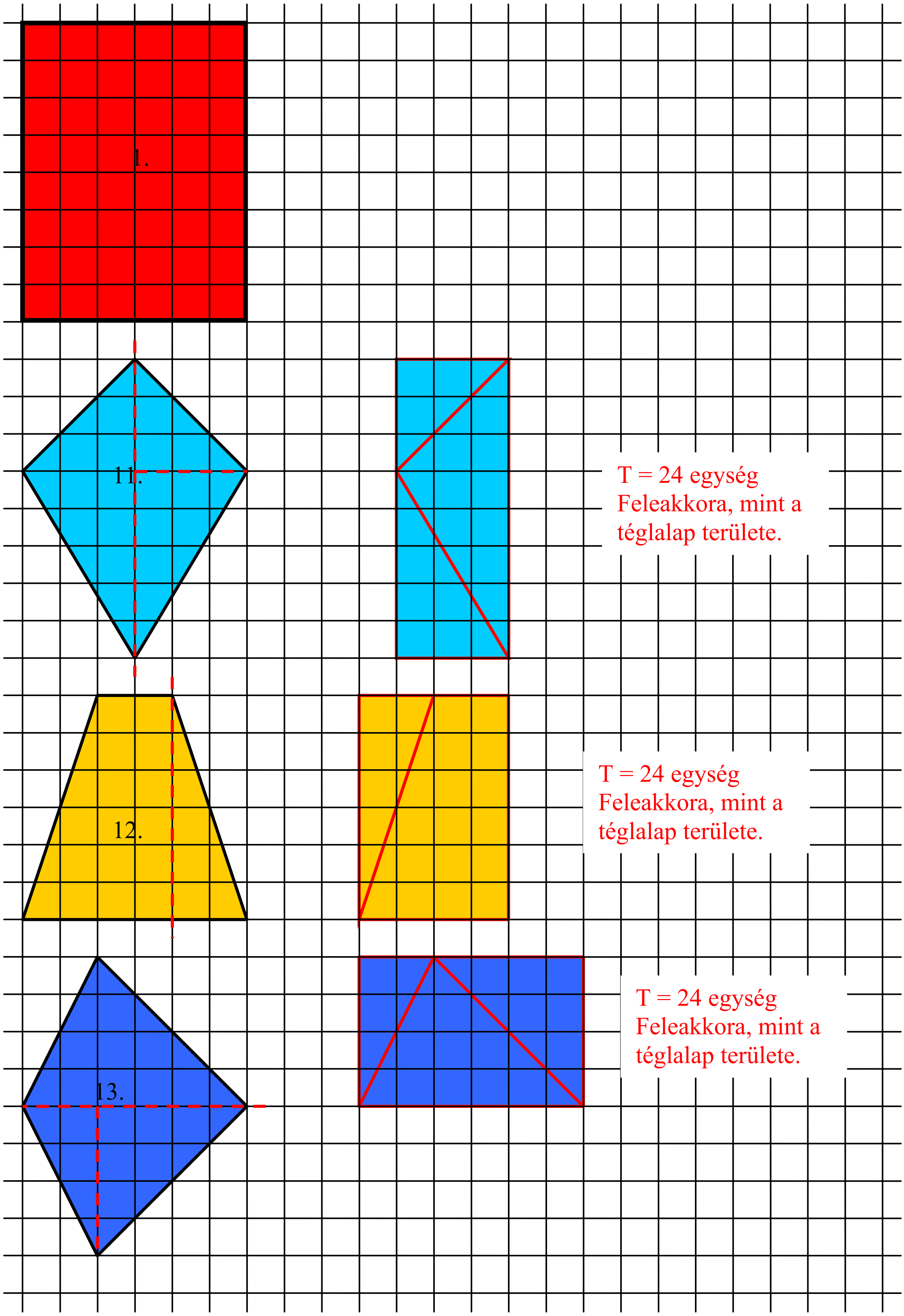
2. Darabolás segítségével állapítsd meg a sokszögek területét és hasonlítsd a piros téglalap (1. sz.) területéhez! A sokszögek az **1. tanulói melléklet**ben szerepelnek.

Megoldás**:**




1.
5.
T = 48 egység
Ugyanakkora, mint a téglalap területe.
6.
T = 24 egység
Feleakkora, mint a
téglalap területe.
7.
T = 48 egység
Ugyanakkora,
mint a téglalap
területe.


1.
8.
T = 24 egység
Feleakkora, mint a
téglalap területe.
9.
T = 24 egység
Feleakkora, mint a
téglalap területe.
10.
T = 24 egység
Feleakkora, mint a
téglalap területe.

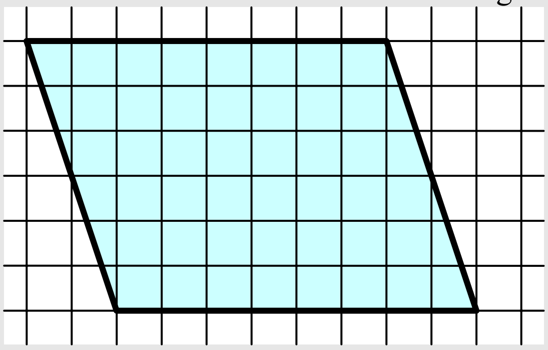

1.
11.
T = 24 egység
Feleakkora, mint a
téglalap területe.
12.
T = 24 egység
Feleakkora, mint a
téglalap területe.
13.
T = 24 egység
Feleakkora, mint a
téglalap területe.

II. A paralelogramma területe

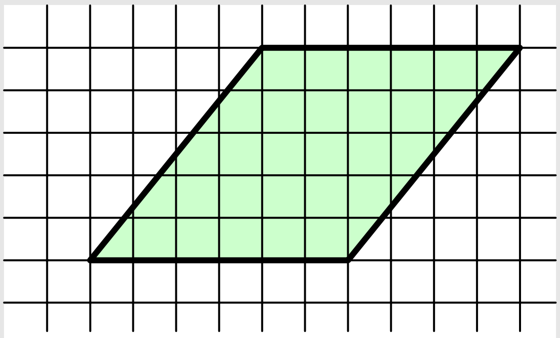
1. Négyzetrácson paralelogrammák átdarabolása téglalappá

A gyerekek csoportokban dolgoznak A tanár kiosztja a **2. tanári melléklet** négyzethálón lévő paralelogrammáit (minden csoport egy paralelogrammát kap, a csoportok különböző paralelogrammával dolgoznak). Ezeket kell téglalappá darabolni. Ha valamelyik csoport előbb elkészül a többinél, kérhet új paralelogrammát.

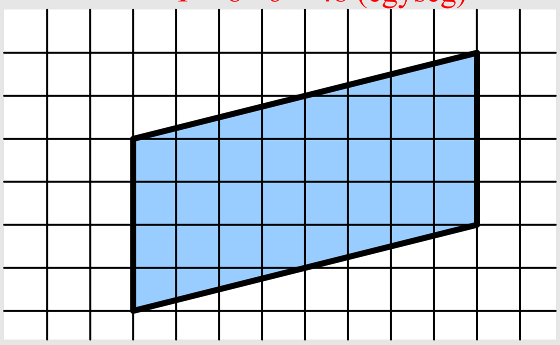
2. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!



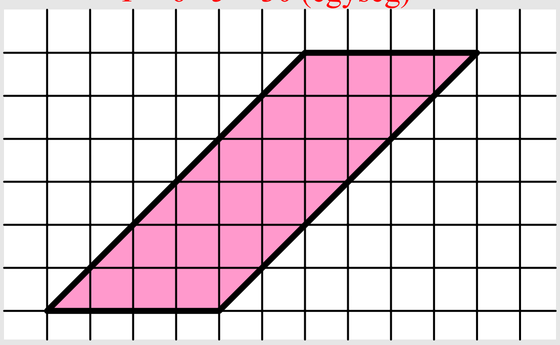
T = 8 · 6 = 48 (egység)



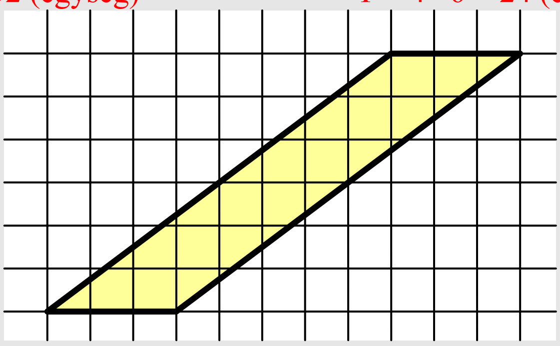
T = 6 · 5 = 30 (egység)



T = 4 · 8 = 32 (egység)



T = 4 · 6 = 24 (egység)



T = 3 · 6 = 18 (egység)

Minden csoportból egy kiválasztott gyerek megmutatja a többieknek a táblánál az átdarabolást, valamint elmondja a terület megkapott mérőszámát.

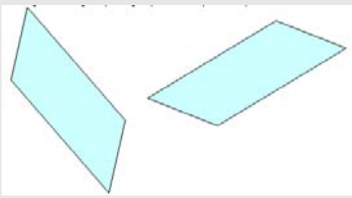
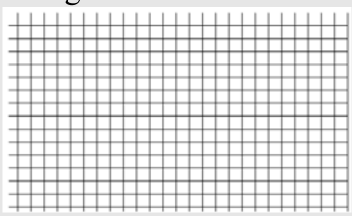
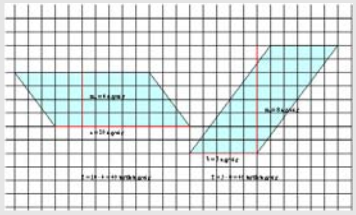
Ez a feladat kihagyható, ha úgy találja a tanár, hogy a paralelogramma területszámítását már alaposan bevezették. Esetleg egy kiválasztott paralelogrammán frontálisan megbeszélhetik az „Összegzés”-ben leírtakat.

2. A paralelogrammák területképlete

Ezután egyenként megbeszélik frontálisan az egyik paralelogramma segítségével, hogy az átdarabolás után mindig téglalap keletkezik, és ennek a téglalapnak az egyik oldala a paralelogramma egyik oldala, másik oldala pedig a paralelogramma magassága. Itt vezeti be a tanár a fogalmat – ha eddig nem volt még róla szó –: a magasság a két szembelévő oldal távolsága. (Másképpen a sávba írt paralelogrammánál a sávot határoló egyenesek távolsága.) Ezután ugyanígy az általános képlet felírása: $T = a \cdot m_a$

3. Elnevezések: a paralelogramma magassága

Most szakítsunk időt a paralelogramma magasságának átismétlésére!
3. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

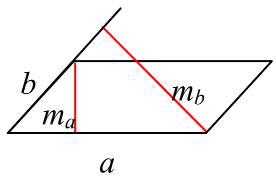
A **3. tanári melléklet** tartalmaz egy négyzetrácsot és két egybevágó paralelogrammát. A paralelogrammát négyzetrács nélkül (!) az írásvetítőre helyezve kellene mindkét magasságát megkeresni. Egy vállalkozó gyerek kijön az írásvetítőhöz és a tanár segítő kérdéseivel levezetik, bemutatják a következőket: Hol van a magassága? Mivel ez az oldalak távolsága, merőlegest kell szerkeszteni a szembe lévő oldalakra. Derékszögű vonalzóval ezt bemutatja a gyerek az írásvetítőnél. (Fontos, hogy lássák, ez bárhol berajzolható, akár a paralelogrammán kívül is!) Ezután megbeszélik, hogy létezik egy másik magasság is, ami a másik két szembelévő oldalhoz tartozik. Ezt is bemutatják. (Ez egy kicsit nehezebb. Mert ez a magassága nem rajzolható a paralelogrammán belülre.) Ezután a négyzetrácsra helyezhető a paralelogramma, hogy leszámlálható legyen az alapja és a hozzá tartozó magassága. (Természetesen úgy, hogy egyik oldala a négyzetrácsra illeszkedjen.) Kiszámolják a területet. Utána a másik oldalát illesztik a négyzetrácsra, és így is leszámlálják az oldal- és a magassághosszt. (Két példány van a paralelogrammából, így az is lehetséges, hogy egyszerre lássák a két különböző illesztési lehetőséget.) Ismét megbeszélik a területet. Megállapítják, hogy a két érték természetesen egyezik, hiszen ugyanarról a paralelogrammáról van szó. (A 4. fólián szerepel a megoldás.) Ez a feladat jó az olyan típusú feladatok előkészítésére is, melyben meg van adva a paralelogramma két oldalhossza, egyikhez tartozó magassága, és kérdezik a másik magasságot.
Ha van még idő, érdemes a felelevenítése a paralelogramma másik értelmezésének: két sáv találkozása. A magasság ekkor a sávot alkotó két párhuzamos egyenes távolsága. (Szintén írásvetítőn vagy táblánál megbeszélhető.)

2. FELADATLAP

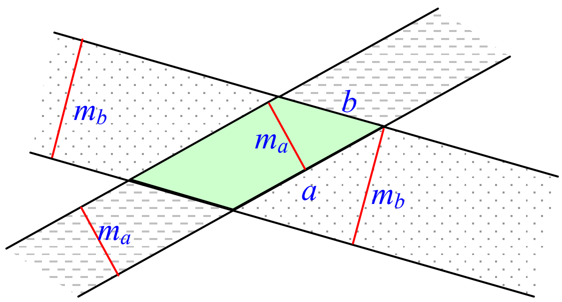
ÖSSZEGZÉS:

A paralelogramma magassága

a) A **paralelogramma magassága** a paralelogramma párhuzamos oldalegyeneseinek távolsága. A magasságvonal merőleges két szembelévő oldalra. (Megj.: A magasságvonal haladhat a paralelogrammán kívül is. A paralelogramma magasságvonalát végtelen sok helyre szerkeszthetjük. Egy paralelogrammának két különböző magassága van, ezek a két szemközti oldalpárhoz tartoznak.)



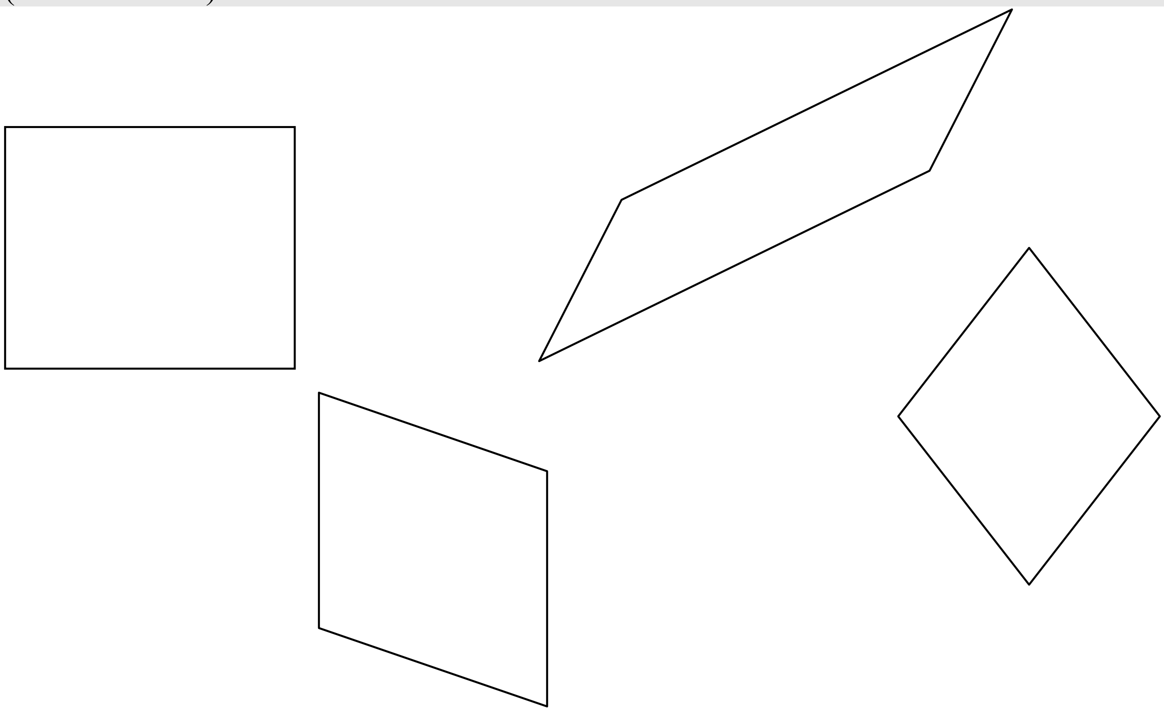
b) Emlékeztető: A paralelogramma két sáv (sáv: két, egymással párhuzamos egyenessel határolt síkidom.) közös része.
A **paralelogramma magassága** a sávokat határoló párhuzamosok távolsága.



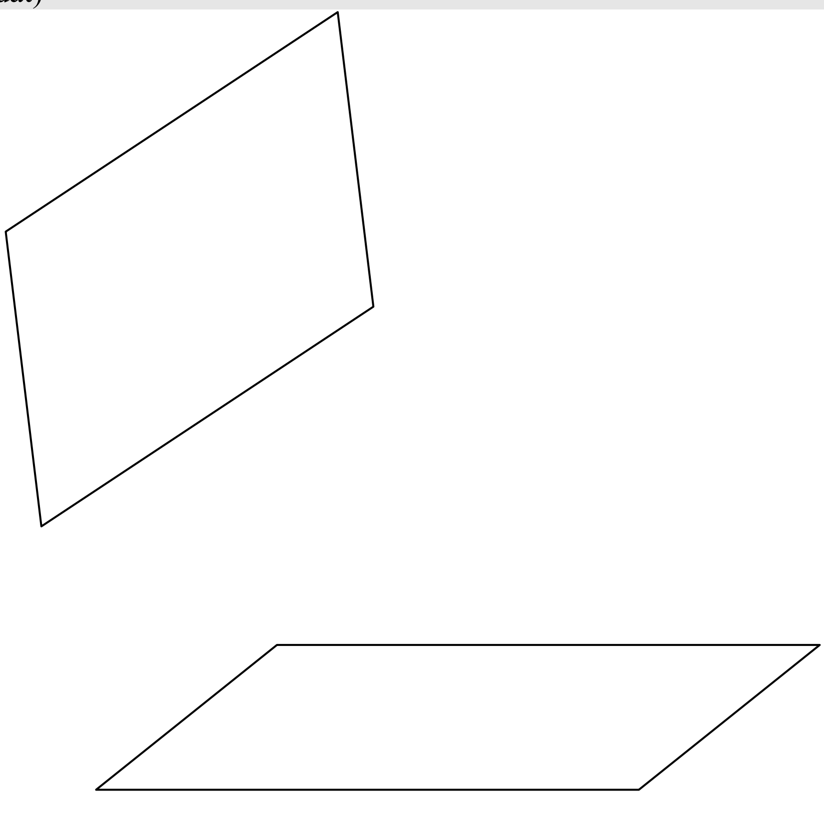
4. Adott paralelogrammáknál a magasság berajzolása, megszerkesztése

Ez a rész kihagyható gyorsabban haladó osztályoknál. 2. feladatlap 1. feladatát a gyerekek csinálják meg önállóan, derékszögű vonalzók segítségével szerkesszenek. Ha nehezen megy, újra be lehet mutatni a táblánál a magasság szerkesztésének menetét. A 2. feladatnál már euklideszi szerkesztést követeljen meg a tanár. Ha szükséges, előtte frontálisan beszéljék meg, hogyan kell merőlegest szerkeszteni euklideszi módon.

1. Rajzold meg az alábbi paralelogrammák magasságait derékszögű vonalzó segítségével! (Ismétlő feladat)



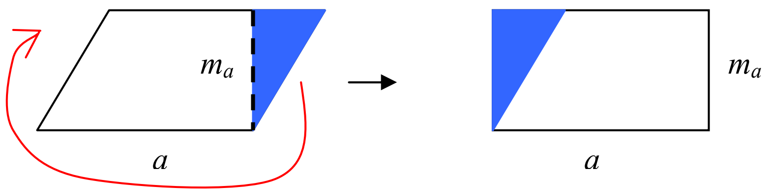
2. Szerkeszd meg az alábbi paralelogrammák magasságait! (Euklideszi szerkesztéssel!) (Ismétlő feladat)



5. A paralelogrammák területképlete általánosan

ÖSSZEGZÉS:

A paralelogramma területe:
A paralelogrammát át tudjuk darabolni egy vele egyező területű téglalappá.



A téglalap egyik oldala a paralelogramma egyik oldalával egyezik meg, másik oldala pedig a paralelogramma említett oldalához tartozó magasságával.
$T_{paralelogramma} = T_{téglalap} = a \cdot m_a$
Egy paralelogramma területét tehát a következő képlettel tudjuk kiszámolni:
$T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$, ahol a, illetve b a paralelogramma egy-egy oldala, m_a és m_b a hozzájuk tartozó magassága.

Az óra hátralévő részében, vagy házi feladatként szerkesztési feladatokat adhat a tanár. Pl.:
Egy paralelogramma területe 80 cm^2, egyik oldala 10 cm. Szerkeszd meg a paralelogrammát! Hány megoldás létezik?
A 10 cm-es oldalhoz tartozó magasság 8 cm. Végtelen sok megoldás létezik, hiszen a másik oldal legalább 8 cm, de bármekkora lehet.
Válogathat a tanár a Feladatgyűjtemény első 4 feladatából.

III. Háromszögek, négyszögek kiegészítése téglalappá; háromszög, deltoid területe

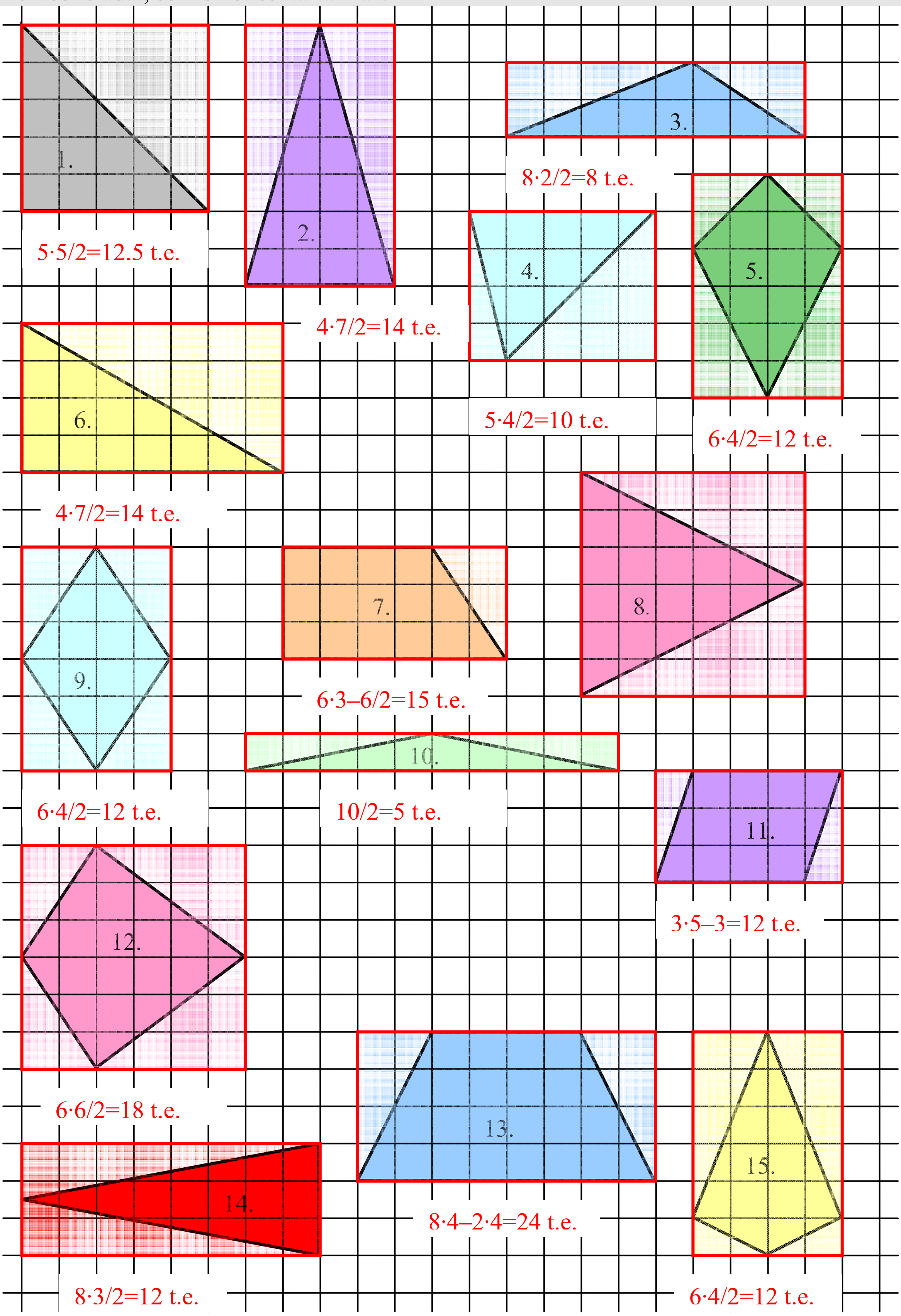
I. Négyzetrácson háromszögek, deltoidok, stb. kiegészítése téglalappá

A 3. feladatlap páros, vagy csoportos, esetleg önálló munkának adható.
1.) Mely síkidomoknak egyenlő a területe?
2.) Ha egy négyzetrács a területegység, mekkora a síkidomok területe? (Ezek a kérdések a táblára is felkerülhetnek.)
A tanár felhívja a figyelmét a gyerekeknek, hogy próbálják meg olyan síkidommá kiegészíteni a sokszögeket, aminek tudják a területét, illetve eldönthető a kiegészítés segítségével a sokszögek területének mérőszáma. Itt kifejezetten a kiegészítés és nem az átdarabolásra törekszünk most! Természetesen az átdarabolás módszere is elfogadható. Még nem a képletek megalkotására törekszünk, mindössze a kiegészítés lehetőségeit ismételjük.

3. FELADATLAP

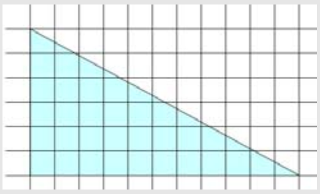
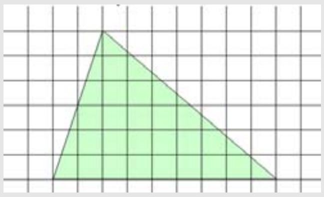
1. Egészítsd ki a síkidomokat téglalappá! Mekkora az alábbi síkidomok területe, ha egy négyzetrács a területegység? Írd alá vagy mellé!

Fontos feladat, sok ismétlést tartalmaz.



2. A háromszögek területének általános képlete

A **4. tanári melléklet** két nagy háromszöge felkerül a táblára vagy írásvetítőre, és megbeszélik frontálisan, hogy hogyan érdemes kiegészíteni, berajzolják, majd levezetik együtt a háromszög területképletét.
4. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

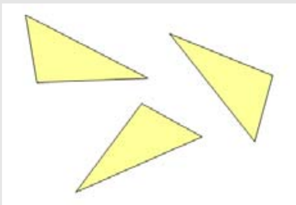
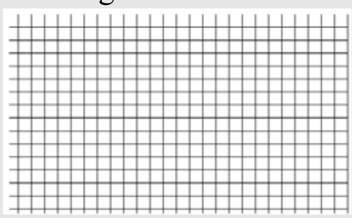
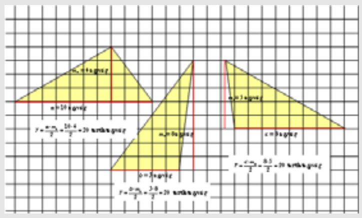



Az **5. tanári melléklet** négyzetrácson nem lévő háromszöge hasonlóan „működik”, mint a **3. tanári melléklet** paralelogrammája. Minden oldalával a rácspontokra illeszthető (kis pontatlansággal), és megint kiszámolható háromféleképpen a terület:

$T = \dfrac{a \cdot m_a}{2} = \dfrac{b \cdot m_b}{2} = \dfrac{c \cdot m_c}{2}$, ami itt:

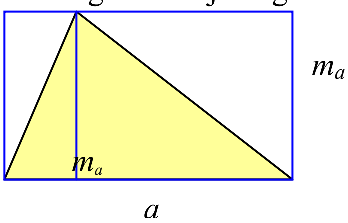
$T = \dfrac{10 \cdot 4}{2} = \dfrac{5 \cdot 8}{2} = \dfrac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ t.e.}$

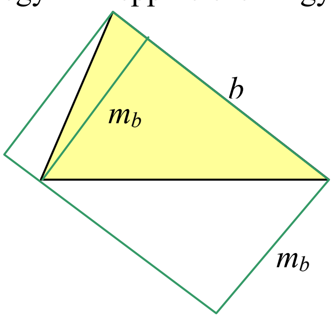
5. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

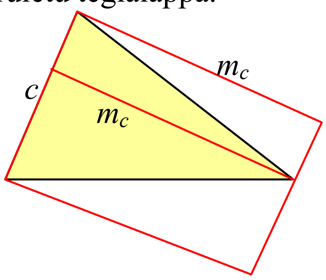




ÖSSZEGZÉS:

A háromszög területe
A háromszöget ki tudjuk egészíteni egy nála épp kétszer nagyobb területű téglalappá.







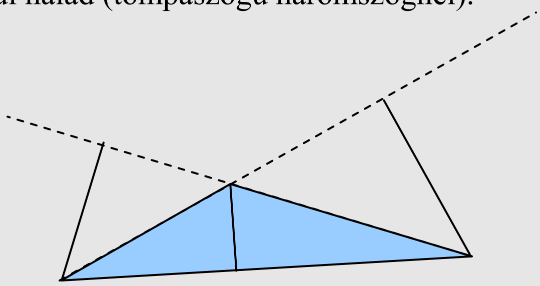
A téglalap egyik oldala a háromszög egyik oldalával egyezik meg, másik oldala pedig a háromszög említett oldalához tartozó magasságával.

$T_{\text{háromszög}} = T_{\text{téglalap}} : 2 = (a \cdot m_a) : 2 = \dfrac{a \cdot m_a}{2}$

Egy háromszög területét tehát a következő képlettel tudjuk kiszámolni:

$T = \dfrac{a \cdot m_a}{2} = \dfrac{b \cdot m_b}{2} = \dfrac{c \cdot m_c}{2}$, ahol a, illetve b a paralelogramma egy-egy oldala, m_a és m_b a hozzájuk tartozó magassága.

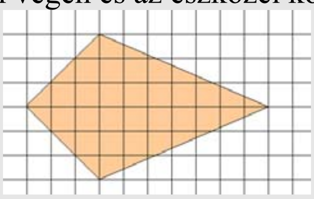
Nagyon fontos lenne, hogy a tanulók lássák azt az esetet, mikor a magasságvonal a háromszögön kívül halad (tompaszögű háromszögnél).



3. A deltoid területének képlete

Ez a rész ismétlés, tavaly már elhangzott a tükrös négyszögek területképleteinél. Gyorsabban haladó osztályoknál kihagyható. A **6. tanári melléklet** nagy deltoidjának segítségével megbeszéli frontálisan a tanár a gyerekekkel, hogy a kiegészítés után mindig téglalap keletkezik, és ennek a téglalapnak az egyik oldala a deltoid egyik átlójával, másik oldala pedig a deltoid másik átlójával egyezik meg. A téglalap területe kétszer akkora, mint a deltoidé. Általános képlet felírása: $T_{deltoid} = \frac{e \cdot f}{2}$.

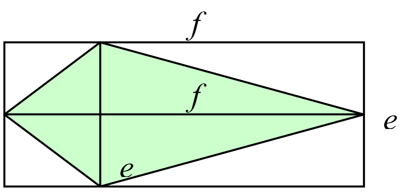
6. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!



EMLÉKEZTETŐ:

A deltoid területe

A deltoidot ki tudjuk egészíteni egy nála épp kétszer nagyobb területű téglalappá.



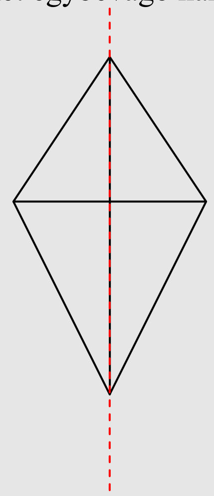
A téglalap egyik oldala a deltoid egyik átlójával egyezik meg, másik oldala pedig a deltoid másik átlójával.

$T_{deltoid} = T_{téglalap} : 2 = (e \cdot f) : 2 = \frac{e \cdot f}{2}$

4. A deltoid területképlete más úton

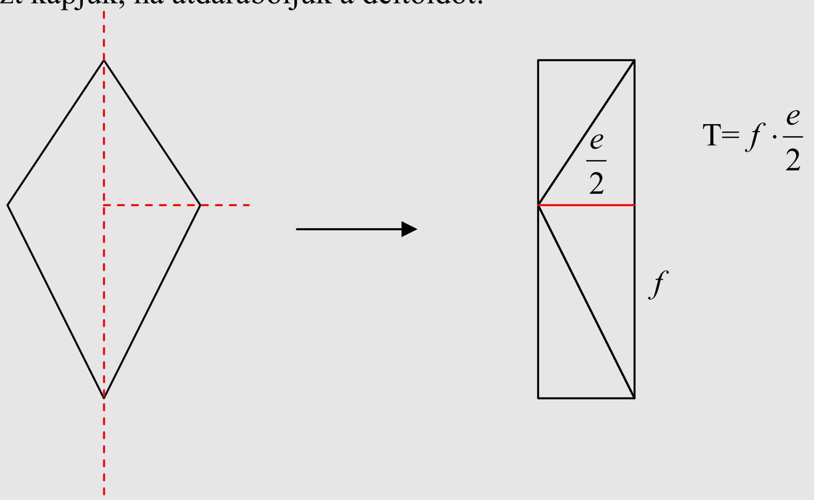
Ennek tárgyalását gyorsabban haladó osztályokban ajánljuk. Érdemes más úton is eljutni a deltoid területképletéhez:

I. A deltoid szimmetriaátlója mentén két egybevágó háromszögre bontható:



Mivel a háromszögek területképletét az előbb tárgyaltuk, így visszavezettük a feladatot az előzőre. Ha a két egybevágó háromszög alapjának a szimmetriaátlót tekintjük, és figyelembe vesszük, hogy a szimmetriaátló felezi a másik átlót, melyre merőleges, akkor következik, hogy a háromszögek magassága $\frac{e}{2}$. Tehát a deltoid területképlete: $f \cdot \frac{e}{2}$, amit el kell osztanom 2-vel, majd a kétszeresét venni, vagyis marad $f \cdot \frac{e}{2}$.

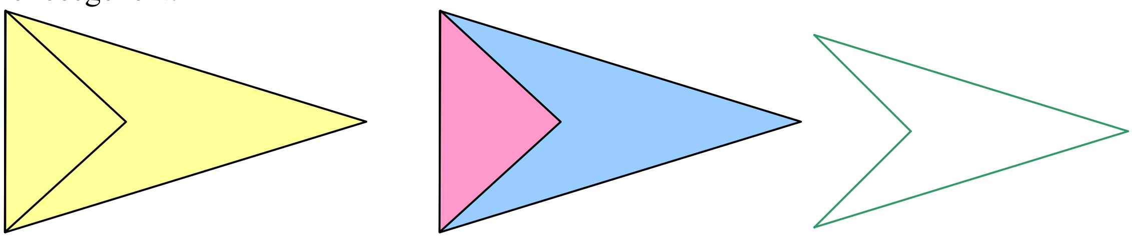
II. Ugyanezt kapjuk, ha átdaraboljuk a deltoidot:



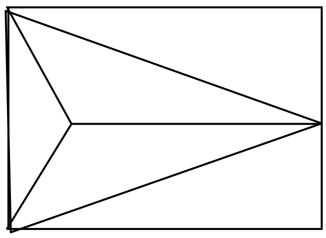
Mindeközben (szinte észrevétlenül) bebizonyítottuk a deltoid területképletének többféle alakjával a következő azonosságot: $\frac{e}{2} \cdot f = \frac{e \cdot f}{2}$.

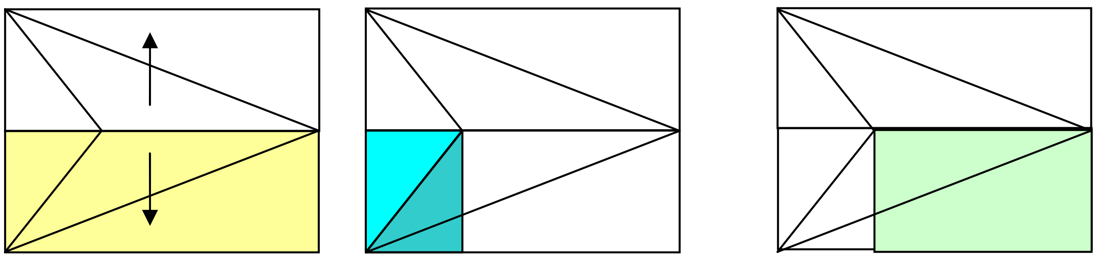
5. A konkáv deltoid területe

A konkáv deltoid területe felírható két közös alapú, egyenlő szárú háromszög területének különbségeként.



A konkáv deltoid ugyancsak befoglalható egy olyan téglalapba, melynek oldalai a konkáv deltoid átlóinak hosszával egyenlők és területe kétszerese a deltoid területének, illetve átdarabolható egy, a deltoid területével megegyező területű téglalappá, melynek oldalai a deltoid szimmetriaátlójával és a másik átló hosszának felével egyenlők.

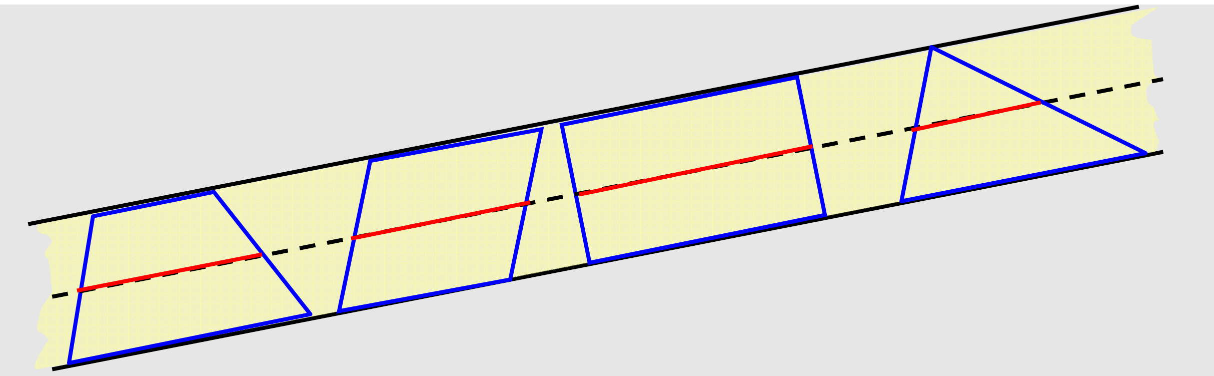




IV. Területképletek középvonallal

1. A trapéz területének képlete

Osszunk a csoportoknak A4-es üres lapokat. Most rajzoljanak a gyerekek sávot a lapjukra (ha lehet, a lap szélével ne legyen párhuzamos a határoló egyenes pár). A feladatuk az, hogy rajzoljanak bele négyszögeket, és háromszöget is (a háromszög mindhárom csúcsa illeszkedjen a sávokat határoló egyenesekre). Ezek után hajtsák össze a lapot úgy, hogy a két határoló egyenes pár egymásra kerüljön! Vizsgáljuk a hajtásélt!
Tanári közlés: A hajtásél négyszögekbe (illetve háromszögekbe) eső részét a négyszög (háromszög) **középvonalának** hívjuk.



Próbálják meg kitalálni a gyerekek, hogyan lehet megszerkeszteni a középvonalat a speciális trapézok, majd általános trapéz esetében. A négyzetnél, téglalapnál látható, hogy a szimmetria tengelyről van szó, itt könnyű megszerkeszteni. A paralelogrammánál és a húrtrapéznál valószínűleg ki fogják találni, hogy az oldalakat meg kell felezni. Kitapasztalhatják, hogy trapéznál is működik ez a módszer, az oldalfelezésekkel megtalálható a középvonal.

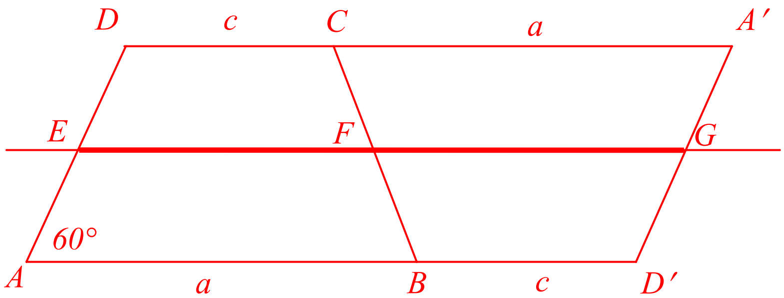
A 0753-as modul (Speciális négyszögek és sokszögek) 3. feladatlap 2. feladatában már szerepelt trapéz szárának felezőpontjára való tükrözés. Itt megemlítettük a trapéz középvonalának fogalmát is. Ismételjük át a feladatot! (4. feladatlap 1. feladata) Önállóan, vagy párosával gondolkozhatnak rajta a tanulók, majd beszéljük meg velük frontálisan a megoldást.

4. FELADATLAP

1. Szerkessz trapézt, melynek egyik alapja 6 cm, szárai 4 cm! Az említett alap mindkét szárral 60°-os szöget zár be.

a) Szerkeszd meg az egyik szárának felezőpontját, majd tükrözd erre a pontra a trapézt! Milyen alakzatot határoz meg az eredeti trapéz és a tükörképe? Mekkorák ennek az alakzatnak az oldalai?

b) Rajzolj a tükörközépponton átmenő, a trapéz alapjaival párhuzamos egyenest! Milyen hosszú annak a szakasznak a hossza, amelyet az eredeti trapéz metsz ki a párhuzamos egyenesből? Hogy hívjuk ezt a szakaszt?

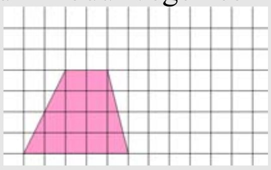


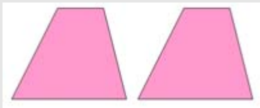
a) A trapéz és tükörképe együtt egy paralelogrammát alkot, amelynek egyik oldala a trapéz két alapjának összegével ($a + c$), a másik oldala a trapéz szárának hosszával egyezik meg.

b) A párhuzamos egyenes EG szakaszának hossza a paralelogramma egyik oldalával egyenlő: $a + c$. Mivel E és F pontok egymásnak középpontos tükörképei, ezért $EF = FG = (a + c) : 2$. Az EF szakasz a trapéz középvonala.

Bebizonyítottuk tehát, hogy a trapéz és tükörképe együtt egy paralelogrammát alkot. Erre az ismeretre alapozva, és a **7. tanári mellékletet** használva frontálisan megbeszélhetők az „Összegzés”-ben foglaltak. (A trapéz területképlete) A mellékletben szereplő két egybevágó

trapézt használhatjuk a trapéz és tükörképe szemléltetésére. Ha az írásvetítőn egy gyerek illeszti be a középpontos tükörképet, akkor ezzel a középpontos tükrözés is ismétlésre kerül.
7. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

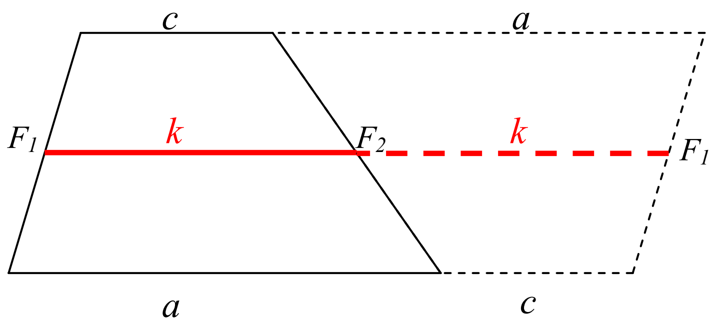




ÖSSZEGZÉS:

A trapéz középvonala

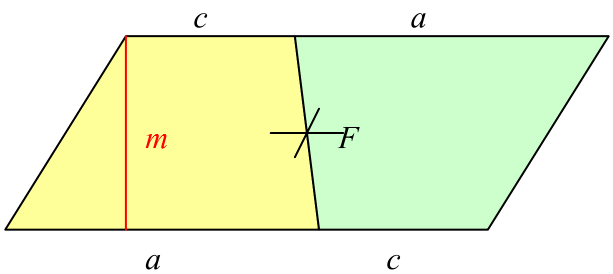
A trapéz két szárának felezőpontját összekötő szakaszt a trapéz középvonalának nevezzük. A középvonal párhuzamos az alapokkal, hosszúsága a két alap hosszának számtani közepe.



$$k = \frac{a+c}{2}$$

A trapéz területe

Ha a trapézt tükrözzük egyik szárának felezőpontjára, az eredeti és a trapéz képe együtt egy paralelogrammát alkot.



A paralelogramma egyik oldala a trapéz két alapjának összegével ($a + c$), a másik oldala a trapéz szárának hosszával egyezik meg. A paralelogramma és a trapéz magassága megegyezik.

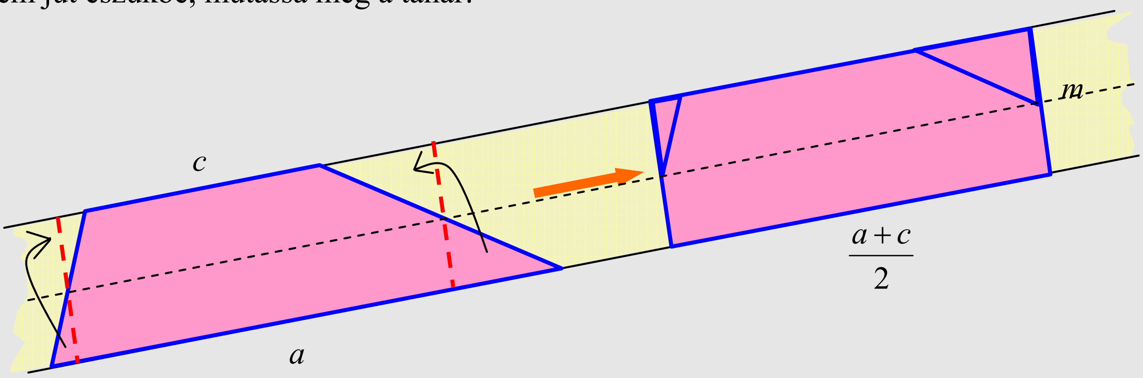
$T_{paralelogramma} = (a+c)\cdot m$ A paralelogramma két egybevágó trapézból „készült”, ezért:

$$T_{trapéz} = \frac{(a+c)\cdot m}{2}$$

2. A trapéz területképlete más úton

Ennek tárgyalását is csak gyorsabban haladó osztályokban ajánlom.
Másik lehetőség a trapéz területképletének levezetéséhez: Bebizonyítottuk az előbb említett példánál azt is, hogy a trapéz középvonalára igaz, hogy hossza: $\frac{a+c}{2}$

Most próbáljuk átdarabolni másképp a trapézt a terület kiszámításához! A tanulók vegyék kézbe ismét a félbehajtott papírcsíkot! Próbálkozzanak a trapéz téglalappá átdarabolásával. Ha nem jut eszükbe, mutassa meg a tanár:



Tehát. Minden trapéz átdarabolható olyan téglalappá, melynek egyik oldala a trapéz magassága, másik oldala a trapéz középvonala:

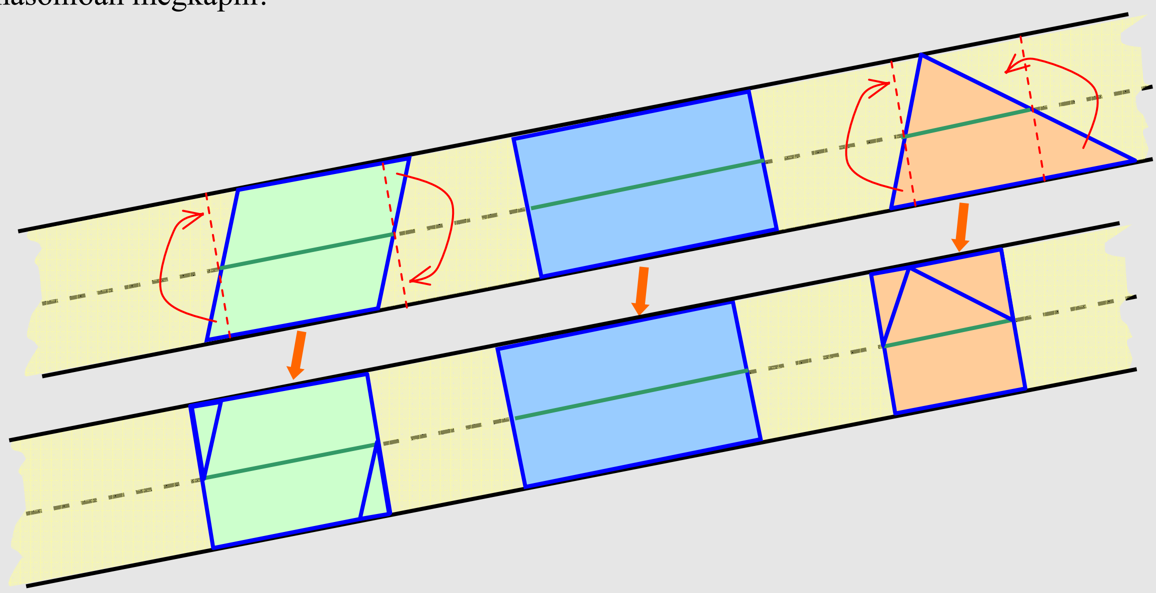
$$T_{trapéz} = \frac{a+c}{2} \cdot m$$

Ezzel egyébként bebizonyítottunk egy azonosságot:

$$T_{trapéz} = \frac{a+c}{2} \cdot m\,;\; T_{trapéz} = \frac{(a+c)\cdot m}{2} \;\rightarrow\; \frac{a+c}{2} \cdot m = \frac{(a+c)\cdot m}{2}$$

3. A sávba írható sokszögek területképlete

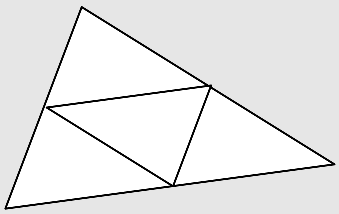
Most próbálják meg a gyerekek a többi sávba rajzolt négyszög, háromszög területét is hasonlóan megkapni!



Megállapítható, hogy minden sávba írható sokszög területe számolható a következő képlettel (az oldalak szokásos jelöléseivel):
$T = k \cdot m$, ahol k a középvonal hossza, m a sávot határoló egyenesek távolsága (a síkidom magassága).
– paralelogrammánál: $k = a \rightarrow \mathrm{T} = a \cdot m_a$.
– téglalapnál: $k = a$; $m = b \rightarrow \mathrm{T} = a \cdot b$
– háromszögnél: $k = \frac{a}{2}$; $\rightarrow \mathrm{T} = \frac{a}{2} \cdot m_a = \frac{a \cdot m_a}{2}$
Az utóbbira érdemes részletesen kitérni.
A háromszög középvonalának hosszához kétféle úton juthatunk:

1. Egy elfajult trapéz, melynek egyik alapja 0. Így a középvonal hossza: $\frac{a+0}{2} = \frac{a}{2}$

2. Ez egy kicsit időigényes, de nagyon tanulságos megközelítés, előkészíti a hasonlóság témakörét is.
Érdemes a csoportoknak rajzlapra, vagy legalábbis különálló papírlapra, és nem a füzetbe szerkeszteni. Érdekesebb, ha úgy adjuk meg a feladatot, hogy minden csoport szögek és oldalak szerint másfajta háromszögeket kapjon feladatul (pl. az egyik csoport egyenlőszárú, derékszögű háromszöget, a másik tompaszögűt, melynek minden oldala különböző hosszúságú, a harmadik hegyesszögű egyenlőszárút, a negyedik egyenlő oldalút…). Most szerkesszenek a lapra két egybevágó háromszöget, és vágják ki! Rajzolják be az egyiken a háromszög összes középvonalát! Vágják szét a középvonalak mentén a háromszöget, és vizsgálják a kapott háromszögeket. Jó, ha tárlatlátogatás módszerével minden csoport megnézi a többiek munkáját is.

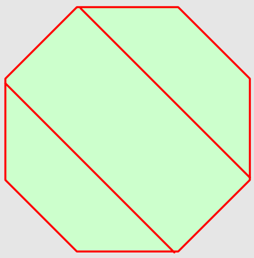


Milyen háromszögeket kaptunk? Egybevágó. (Ezt kivágással, és a darabok egymásra illesztésével tapasztalhatják a tanulók. Elmondhatja a tanár, hogy később bizonyítani is fogják majd a sejtést.)
Vizsgáljuk meg a kisháromszögek oldalait! Minden oldal feleakkora, mint a nagy háromszög megfelelő oldala.
Azt tapasztaltuk tehát, hogy a háromszögek két oldalának felezőpontját összekötő középvonalai feleakkora hosszúságúak, mint a harmadik oldal hossza.
A kivágott háromszögeket el lehet tenni a 8. osztályos hasonlóság témakör feldolgozásához.

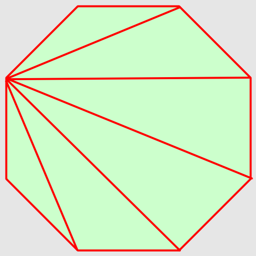
4. Szabályos hatszög, tizenkétszög, nyolcszög területének meghatározása

A gyerekek csoportokban dolgoznak. A tanár kiosztja a csoportoknak a feladatot: Szerkesszenek vékony kartonlapra (rajzlapra) 2 egybevágó szabályos sokszöget! A csoportoknak érdemes különböző feladatot adni, hogy érdekesebb legyen: szabályos hatszöget, tizenkétszöget, nyolcszöget. (Legkönnyebb a szabályos hatszög szerkesztése, legnehezebb a szabályos nyolcszög szerkesztése.) A munka megkezdése előtt érdemes egyeztetni, hogyan kezdenek neki: Első lépésként meg kell rajzolni a sokszögek köré írható kört. A kör sugara lehet: 7 cm; 8 cm; 10 cm vagy 20 cm (A közölt megoldásban ezek az esetek szerepelnek.)

Megrajzolják a sokszög körülírt körét (A csoportok választhatnak a különböző nagyságú sugarak közül), és
– a sugárral egyező körzőnyílással elmetszik a körívet → hatszög;
– ezeket a metszéspontok által határolt szakaszokat felezik → 12 szög;
– vagy a kör középpontjába szerkesztenek egy 45°-os középponti szöget, a szögszárak kimetszik a körívből a szabályos nyolcszög oldalát.
Amelyik csapat hamar elkészült, másik sokszöget is kaphat feladatnak.
Ha minden csapat kész, a következő feladat, hogy a csoportok próbálják meg feldarabolni az egyik sokszöget úgy, hogy meg tudják állapítani a területét. Pár lehetséges darabolási mód pl. nyolcszög esetében:



1 db téglalap+2 db trapéz.



6 db háromszög

Jó, ha több lehetséges darabolási módot is megbeszélnek utána frontálisan. Akár úgy, hogy minden csapatnak egy képviselője kijön, és bemutatja mágneses táblán, hogyan daraboltak. Természetesen számolja is ki minden csapat a területet. Néhány megoldás segítségül:

(A megoldásban az $\frac{a \cdot m_a}{2} \cdot n$ képletet használtam, ahol a a sokszög oldala, m_a a magassága az egybevágó egyenlőszárú háromszögeknek, melyeket akkor kapunk, ha a középpontból felbontjuk a szabályos sokszöget, n a sokszög oldalainak a száma.)

	$r = 10$ cm	$r = 20$ cm	$r = 8$ cm	$r = 7$ cm
hatszög	$\frac{10 \cdot 8,7}{2} \cdot 6 =$ $= 261\ \text{cm}^2$	$\frac{20 \cdot 17,4}{2} \cdot 6 =$ $= 1044\ \text{cm}^2$	$\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 6 =$ $=168\ \text{cm}^2$	$\frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 6 =$ $126\ \text{cm}^2$
nyolcszög	$\frac{7,6 \cdot 9,2}{2} \cdot 8 =$ $=280\ \text{cm}^2$	$\frac{15,2 \cdot 18,4}{2} \cdot 8 =$ $=1119\ \text{cm}^2$	$\frac{6,2 \cdot 7,4}{2} \cdot 8 =$ $=184\ \text{cm}^2$	$\frac{5,4 \cdot 6,5}{2} \cdot 8 =$ $=140\ \text{cm}^2$
tizenkétszög	$\frac{5,2 \cdot 9,7}{2} \cdot 12 =$ $=303\ \text{cm}^2$	$\frac{10,4 \cdot 19,4}{2} \cdot 12 =$ $=1210\ \text{cm}^2$	$\frac{4,2 \cdot 7,7}{2} \cdot 12 =$ $=194\ \text{cm}^2$	$\frac{3,6 \cdot 6,8}{2} \cdot 12 =$ $=147\ \text{cm}^2$

5. A páros oldalú szabályos sokszög területe és kerülete közötti összefüggés levezetése

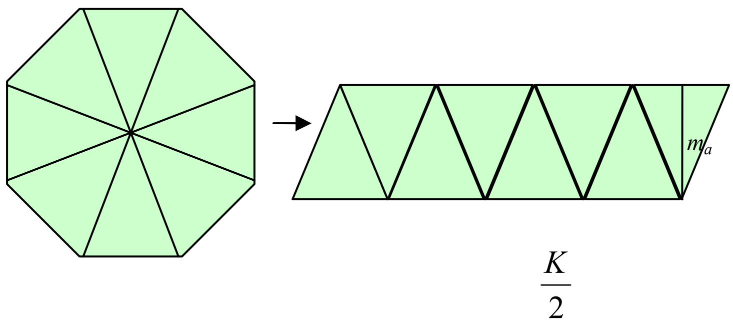
Most rátérünk arra a darabolási módra, ami miatt belevágtunk ebbe a feladatba! A végső cél az, hogy majd (következő órán) a kör területét is hasonló módszerrel közelítsünk.
Ha egyik csoport se csinálta, akkor a tanár mutatja be mágneses táblán a következő darabolási módot: A sokszöget a középpontjából kiindulva egyenlőszárú háromszögekre bontja, majd ezeket összeilleszti paralelogrammává. (Lásd ábra az összegzésnél!) Utána a sokszög

területének képletét is levezetik (csoportokban vagy frontálisan). Fontos, hogy elhangozzon: a kerület és a terület között találtunk összefüggést.
A gyerekek megpróbálják a másik (az előbbivel egybevágó) szabályos sokszögüket az előbb látott módon darabolni paralelogrammává. Megállapítható, hogy a keletkezett paralelogramma alapja a sokszög kerületének fele, a magassága pedig lemérhető (megegyezik az egyenlőszárú háromszögek magasságával). Így kiszámolható a paralelogramma területe, ami egyben a sokszög területe is. Akár a következő képletet is levezethetjük gyorsabban haladó osztályokban: $T_{\text{paralelogramma}} = \frac{K}{2} \cdot m_a$, (Nem feltétlenül a képlet alkotása a cél, hanem a szemlélet bemutatása) Miután kiszámolták a konkrét esetben a területet összehasonlítják a másik fajta átdarabolással kapott területtel. Ha a két mérőszám egyezik, jól számoltak.
A rendelkezésre álló idő függvényében megelégedhet a tanár egy sokszög szerkesztésével is, ez esetben csak a második átdarabolást mutassa be.
Kitekintésként a gyorsabban haladó vagy nagyobb óraszámban tanuló osztályoknál megállapíthatják közösen még a következőket is. Tekintsük az azonos sugarú körbe írható szabályos sokszögeket. Ekkor minél több oldala van a sokszögnek, annál nagyobb a területe, és ennek a területnek a mérőszáma annál közelebb van a körülírt kör területéhez.

ÖSSZEGZÉS:

Szabályos sokszögek területe

Szabályos páros oldalú sokszögek területét akarjuk meghatározni. Minden szabályos sokszögnél eljárhatunk úgy, hogy a sokszög köré írt kör középpontját összekötjük a sokszög csúcsaival, így egybevágó egyenlőszárú háromszögeket kapunk. Ezeket a háromszögeket egymás mellé rakhatjuk az ábra szerinti elrendezésben. Így egy paralelogrammát kapunk.



$T_{\text{szabályos nyolcszög}} = T_{\text{paralelogramma}} = \frac{K}{2} \cdot m_a$, ahol K a nyolcszög kerülete, m_a a felosztáskor kapott háromszögek magassága.

V.–VI. Paralelogramma, háromszög, deltoid, trapéz területképletének gyakorlása

A következő két órában a sokszögek területeinek számolását gyakoroltassuk a feladatgyűjtemény példáival. Lehet szakértői mozaikot használni, illetve önállóan vagy csoportokban dolgozni. A feladatok előtt olvasható, hogy elsősorban mely sokszögek területképletének ismerete szükséges hozzá, valamint a nehézségi szint (egyszerű vagy összetett).

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Paralelogramma területe

1.

(Egyszerű feladat.)

Mekkora a paralelogramma területe, ha

a) $a = 3$ cm; $m_a = 2$ cm

$T = a \cdot m_a = 3 \cdot 2 = 6$ cm^2

b) $b = 6$ m; $m_b = 3{,}5$ m

$T = b \cdot m_b = 6 \cdot 3{,}5 = 21$ cm^2

c) egyik oldala 8,5 dm, a hozzá tartozó magasság 500 mm.

$T = 85 \cdot 5 = 425$ cm^2

2. Egy paralelogramma egyik oldalának hossza 5 cm, ehhez az oldalához tartozó magassága 3,5 cm, másik oldala 4 cm. Szerkeszd meg a paralelogrammát! Mekkora a paralelogramma kerülete, területe?

(Egyszerű feladat.)

$K = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (5 + 4) = 18$ cm

$T = a \cdot m_a = 5 \cdot 3{,}5 = 17{,}5$ cm^2

3. Egy paralelogramma területe 44 dm^2. Mekkora az oldalának hossza, ha a hozzá tartozó magasság 40 cm? Létezik-e ilyen paralelogramma?

(Egyszerű feladat.)

$a = T : m_a = 44 : 4 = 11$ dm

Létezik ilyen paralelogramma.

4. Szerkessz paralelogrammát, ha két oldala 5,4 cm; illetve 6 cm, egyik szöge pedig 30°? A szükséges adatok lemérése után számold ki a területét, kerületét!

(Egyszerű feladat.)

$K = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (5{,}4 + 6) = 22{,}8$ cm

Az 5,4 cm-es oldalhoz tartozó magasság 3 cm, a 6 cm-es oldalhoz tartozó magasság 2,7 cm.

$T = 5{,}4 \cdot 3 = 6 \cdot 2{,}7 = 16{,}2$ cm^2

5. Derékszögű koordináta rendszerben egy paralelogramma 3 csúcsának koordinátája: (–1; –3), (–1; 5), (4; 5). Mi a negyedik pont koordinátája? Hány megoldás lehetséges? Minden esetben számold ki a kapott paralelogramma területét, ha a területegység a koordinátarendszer egy egység oldalú négyzetrácsa!

(Összetett feladat.)

3 megoldás lehetséges:

a) D_1 (4; -3)	$T = 7 \cdot 5 = 35$ egység (Ekkor a paralelogramma téglalap)
b) D_2 (4; 11)	$T = 7 \cdot 5 = 35$ egys.
c) D_3 (-6; -3)	$T = 5 \cdot 7 = 35$ egys.

6. Egy rombusz oldala 4 egység. Hány db ilyen rombuszt tudsz elképzelni? Melyiknek a legnagyobb ezek közül a területe?

(Összetett feladat.)

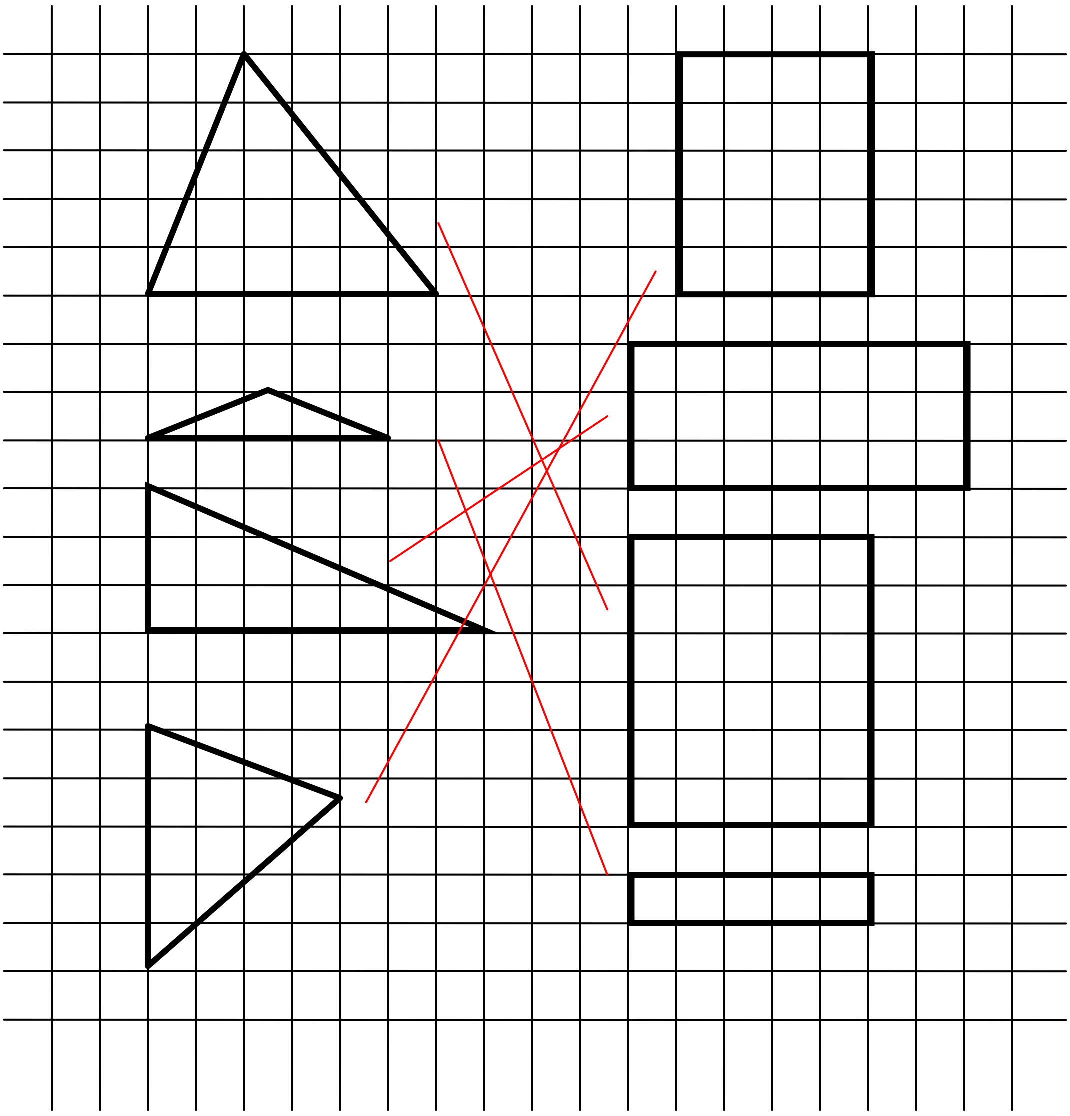
Végtelen sok ilyen rombusz létezik. A gyerekek a füzetbe készíthetnek egy párat, illetve szívószálból zsineggel átfűzve is lehet ilyen rombuszt készíteni. Ekkor jól szemléltethető, ahogy a rombuszok területe csökken a magassága csökkentésével, míg végül az elfajult rombusz területe 0 egység. Ebből következik, hogy a legmagasabb rombusz területe a legnagyobb. Algebrailag is levezethető ugyanez, hiszen a rombusz területe = alap · magasság, ahol az alap nem változik, a magasságot tudjuk növelni. Tehát a legnagyobb területű rombusz a 4 egység oldalú négyzet. T = $a \cdot a$ = 16 területegység.

7. Egy paralelogramma egyik oldala 6 cm, hozzá tartozó magassága 40 mm. Másik oldala 4,8 cm. Mekkora magasság tartozik ehhez az oldalhoz?
(Összetett feladat.)
m_b = 5 cm
Több megoldási menet is létezik: 1. Megszerkeszti a paralelogrammát, majd leméri a kérdezett magasságot; 2. Számolhatja terület segítségével a magasságot: T = $a \cdot m_a = b \cdot m_b$ → 24 cm^2 = 4,8 cm · m_b → m_b = 5 cm.)

8. Egy rombusz két átlója 8 cm és 60 mm. Mekkora a területe?
(Összetett feladat.)
T = 24 cm^2 Több megoldási menet is létezik: 1. Megszerkeszti a rombuszt, és leméri az oldalát, valamint a magasságát. (a = 5 cm; m_a = 4,8 cm) 2. A megadott adatokból szerkesztés nélkül is számolhat a tavaly már tanult deltoid területképlettel.

2. Háromszög területe

9. Párosítsd össze háromszögeket azokkal a téglalapokkal, melyeket a kiegészítésükkel kaphatsz! Mi a háromszög és a hozzá tartozó téglalap területének aránya az egyes esetekben? (Egyszerű feladat.)



10.
(Egyszerű feladat.)
Mekkora a háromszög területe, ha

a) a = 5 cm; m_a = 4 cm
T = 10 cm^2

b) c = 7,4 m; m_c = 6 m
T = 22,2 cm^2

c) egyik oldala 7 dm, ehhez az oldalhoz tartozó magassága 41 cm.
T = 1435 cm^2 = 14,35 dm^2

11. Szerkeszd meg az alábbi háromszöget, és a szükséges adatok lemérése után számold ki a területét többféleképpen!
a = 60 mm; b = 8 cm; c = 1 dm
(Egyszerű feladat.)

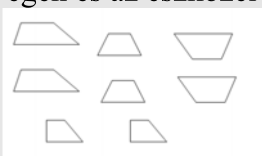
A háromszög derékszögű: $T = \frac{a \cdot b}{2} = 24cm^2$

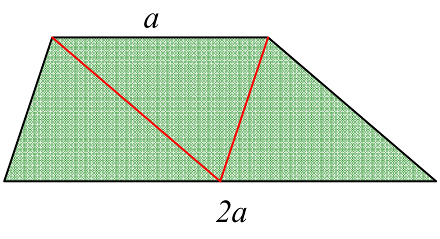
Másképp: $T = \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{10 \cdot 4{,}8}{2} = 24cm^2$

12. Szerkeszd meg az alábbi háromszöget, és a szükséges adatok lemérése után számold ki a területét többféleképpen!
a = 7 cm; β = 30°; b = 5 cm
(Összetett feladat.)
2 háromszög van: c_1 = 2,5 cm; c_2 = 9,6 cm
A táblázat tartalmazza a kerekített értékeket, de a gyerekektől nem várhatunk pontos mérési eredményt!

a	b	c	m_a	m_b	m_c	T
7	5	2,5	1,25	1,75	3,5	4,38
7	5	9,6	4,8	6,7	3,5	16,8

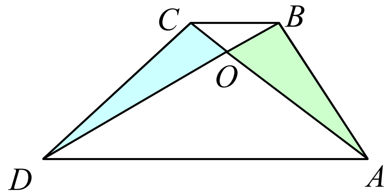
13. Három testvér egy nagy, trapéz alakú földet örökölt, melynek egyik alapja éppen kétszer akkora, mint a másik. Hogyan osszák fel igazságosan egymás között?
(Összetett feladat.)
A feladathoz a tanár kioszthat minden csoportnak egy **8. tanári melléklet**et, melyen adott tulajdonságú trapézok szerepelnek, így ezek darabolásával próbálkozhatnak a gyerekek.
8. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!





A hosszabb alapot elfelezik, majd az ábrán látható módon három háromszög alakú kertre bontják a keretet. Így három egyenlő alapú és egyenlő magasságú (mindhárom magasság a trapéz magasságával egyezik meg) háromszöget kapnak, melyeknek természetesen a területük is egyenlő.

14. Bizonyítsuk be, hogy a kékre festett terület egyenlő a zöldre festett területtel! (A négyszög egy trapéz, és az átlóit húztuk meg.)
(Összetett feladat.)



ABD Δ területe = *ACD* Δ területe, mert alapjuk *AD* oldal, magasságuk pedig a trapéz magassága. → A színes területek egyenlők, mert a két előbb említett háromszögből levágtuk az *ADO* Δ-et.

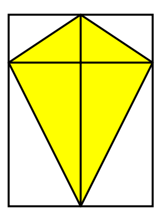
Megjegyzés: Segíthetjük a megoldást, ha előbb szimmetrikus trapézzal foglalkozunk. Ekkor könnyen látható a két háromszög egybevágósága (egymásra helyezhetők). Ezután általánosíthatunk tetszőleges trapéz esetére.

4. Deltoid területe

15.
(Egyszerű feladat.)
Számold ki a deltoid területét, ha
a) két átlója: $e = 3$ cm; $f = 8$ cm. Rajzolj ilyen deltoidot!
T = 12 cm^2.
Fontos látnia a gyereknek, hogy több ilyen deltoid is létezik! (A konkáv deltoidot is megmutathatjuk, illetve a háromszöggé fajuló deltoidot.)
b) két átlója: $e = 4{,}3$ dm; $f = 25$ cm
T = 537,5 cm^2 = 5,375 dm^2
c) szimmetria átlója 3 m; másik átlója 4,5 m. Létezik-e ilyen deltoid?
T = 6,75 m^2; Létezik ilyen deltoid. (Szimmetria átlója rövidebb a másik átlónál, ezért furcsa lehet a gyerekeknek.)

16. Egy deltoid területe 66 m^2, az egyik átlója 11 m. Mekkora a másik átló?
(Egyszerű feladat.)
***f* = 12 m.**

17. Szerkeszd meg az alábbi deltoidot! Rövidebbik oldala 4 cm; hosszabb oldala 5,5 cm; a két különböző hosszúságú oldal által közbezárt szög 120°. A szükséges adatok lemérése után határozd meg mekkora a deltoid területe!
(Egyszerű feladat.)
A deltoid szimmetria átlója: 8,26 cm; a másik átlója: 4,61 cm, a területe **19,05 cm^2**.


18. feladat

18. Ákos és édesapja deltoid alakú papírsárkányt készítenek. Ehhez egy 3 m · 4 m oldalhosszúságú téglalap alakú kartonlap áll rendelkezésre. A deltoidot úgy akarják kivágni, hogy a két átlója párhuzamos legyen a papír oldalaival. Hogyan vágják ki a deltoidot ebből a papírból, hogy a lehető legnagyobb területű deltoidot kapják? Mekkora lesz ennek a deltoidnak a területe?
(Összetett feladat.)
Az összes ilyen deltoid területe megegyezik egymással, hiszen mindegyik területét a két átló határozza meg, ami nem változik. **T = 6 m^2**

19. Egy rombusz oldala 6 cm, egyik belső szöge 120°. Szerkeszd meg a rombuszt, majd számold ki többféleképpen a területét!

(Összetett feladat.)

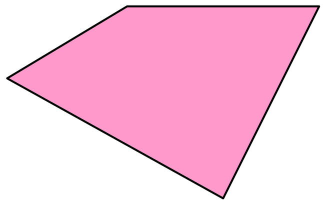
$a = 6$ cm; $m_a = 5{,}2$ cm; $e = 6$ cm; $f = 10{,}4$ cm

$$T = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot m_a = 31{,}2\,\text{cm}^2$$

5. Vegyes területszámítási feladatok

20. Számítsd ki az alábbi négyszög területét! (Darabold a négyszöget, és mérd le a szükséges adatokat!)

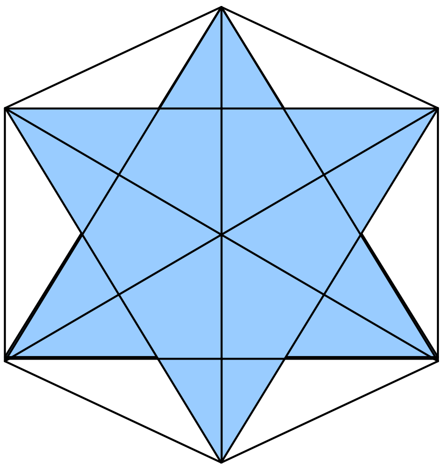
(Egyszerű feladat.)



20. feladat

Feldarabolhatjuk háromszögekre a négyszöget. (Ezt a két átlóval kétféleképpen tehetik meg.) A háromszög magasságainak lemérése után kapjuk, hogy

T ≈ 5,9 cm²



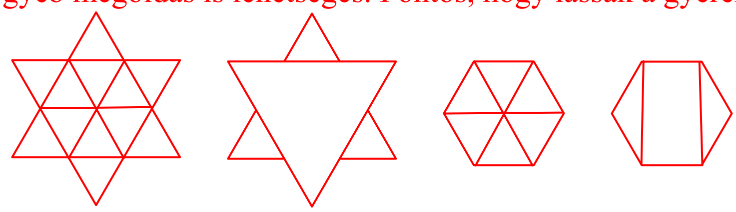
21. feladat

21. Meghúztuk egy szabályos hatszög átlóit. Mekkora a csillag területe?

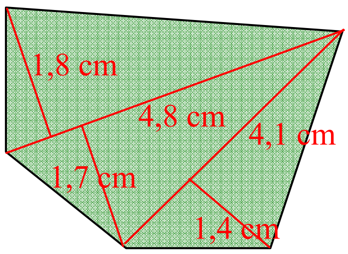
(Egyszerű feladat.)

T ≈ 18 cm².

A csillagot lehet 12 db egybevágó egyenlő oldalú háromszögre bontani (1.), vagy két nagy egyenlő oldalú háromszög területösszegéből kivonni a hatszög területét (2.). A hatszög területét 6 db egybevágó háromszöggel (3.) vagy egy téglalap és két egyenlőszárú háromszög területeinek összegeként (4.) számolható. Természetesen egyéb megoldás is lehetséges. Fontos, hogy lássák a gyerekek a felosztás többféle lehetőségét.



1. 2. 3. 4.



22. feladat

22. Egy kert lekicsinyített ábráját látod felülnézetben. A kicsinyítés aránya 1:100. Hány kg fűmagot kell vennünk, hogy megfelelő mennyiségű fű nőjön rajta, ha egy m^2-re kb. 30 g fűmag kell?

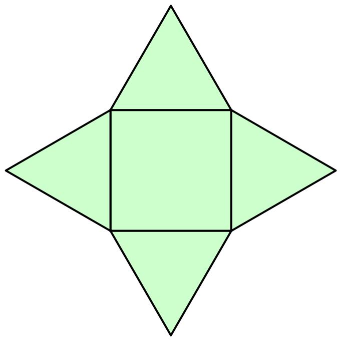
(Összetett feladat.)

$T \approx \frac{4,8 \cdot (1,8 + 1,7)}{2} + \frac{4,1 \cdot 1,4}{2} = 11,3$

$T \approx 11\ m^2$.→ 11 · 30 g = **330 g** fűmag kell körülbelül.

Ennél a példánál érdemes megbeszélni a kicsinyítés fogalmát. Miért kicsinyítünk? Milyennek kell lennie a kicsinyített ábrának? Mihez tudnánk hasonlítani a kicsinyített ábrát? (Például mintha helikopterből fényképeznénk a telket.)

23. Szerkessz egy 6 cm oldalhosszúságú négyzet minden oldalára egyenlőoldalú háromszöget az ábrán látható módon! A szükséges adatok lemérése után számold ki az így kapott „csillag” területét!



23. feladat

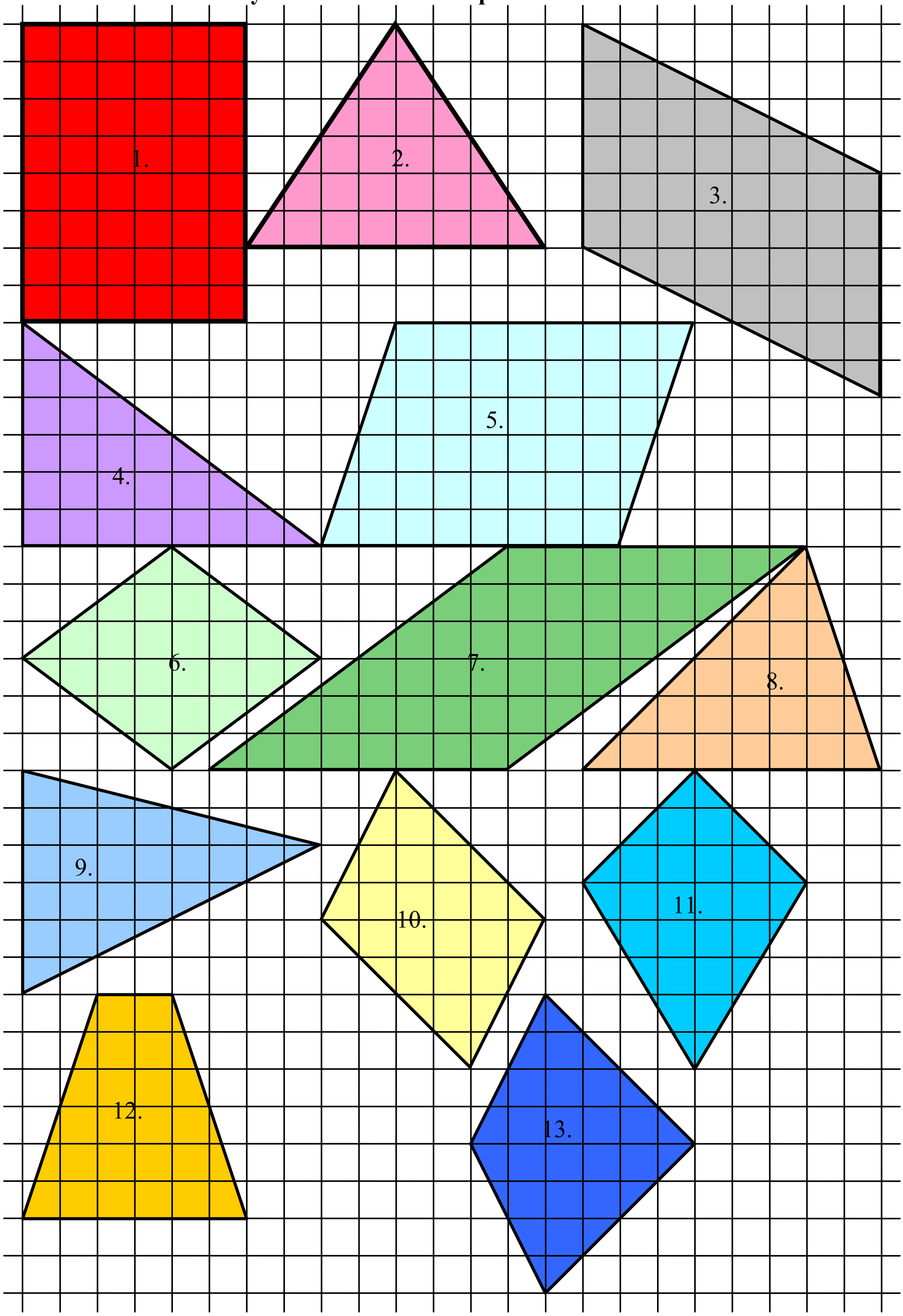
A háromszögek területe: $\frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{6 \cdot 5,2}{2} = 15,6$

$T_{négyzet} = 36\ cm^2$; $T_{háromszög} = 15,6\ cm^2$

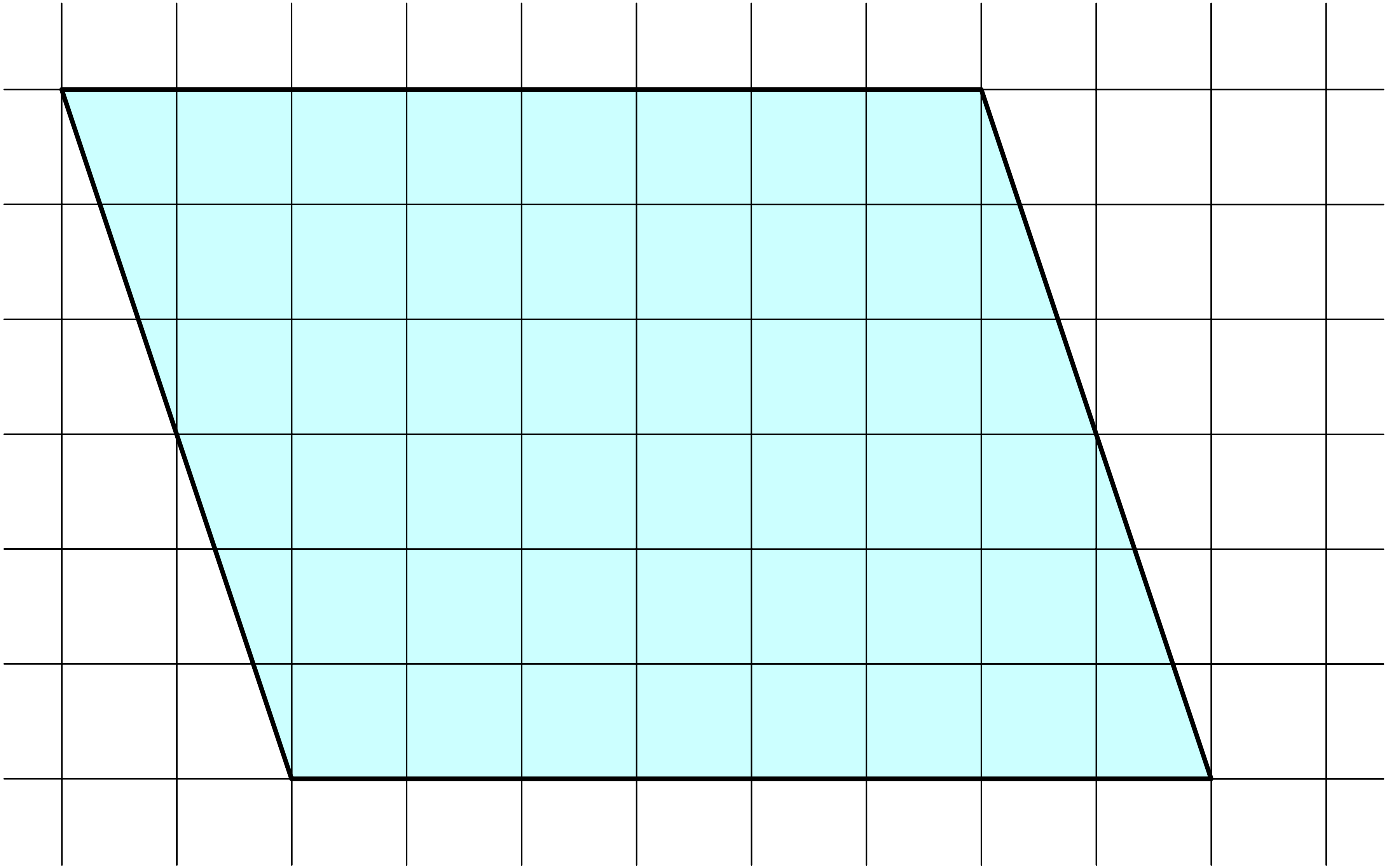
$T_{csillag} = 36\ cm^2 + 4 \cdot 15,6\ cm^2 =$ **$98,4\ cm^2$**

0761 – 1. tanulói melléklet

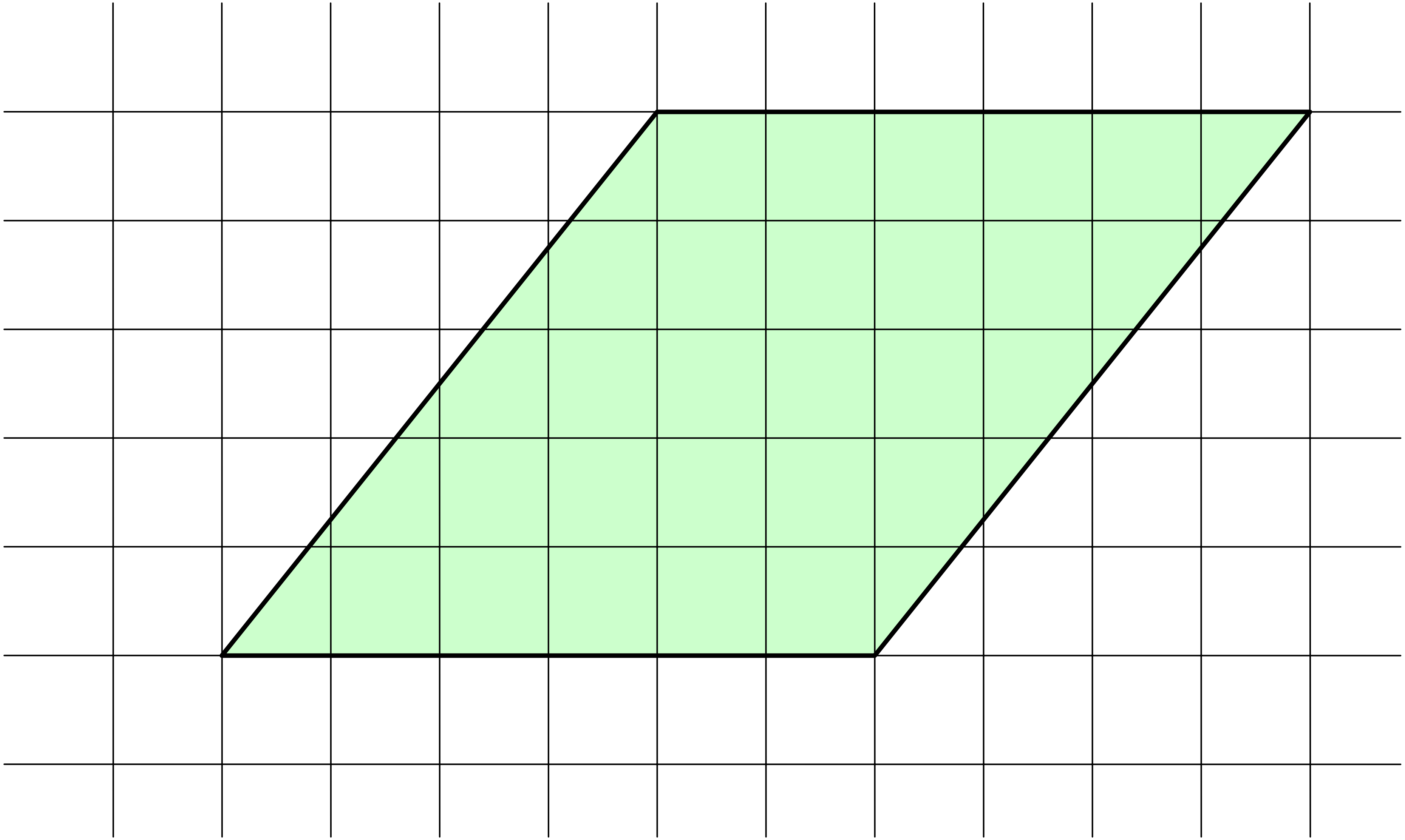
Tanulónként 2 db + osztályonként 5 db a tanárnak géppapírra nyomva + osztályonként 1 db írásvetítő fóliára nyomtatva a tanárnak pontosan ebben a méretben.



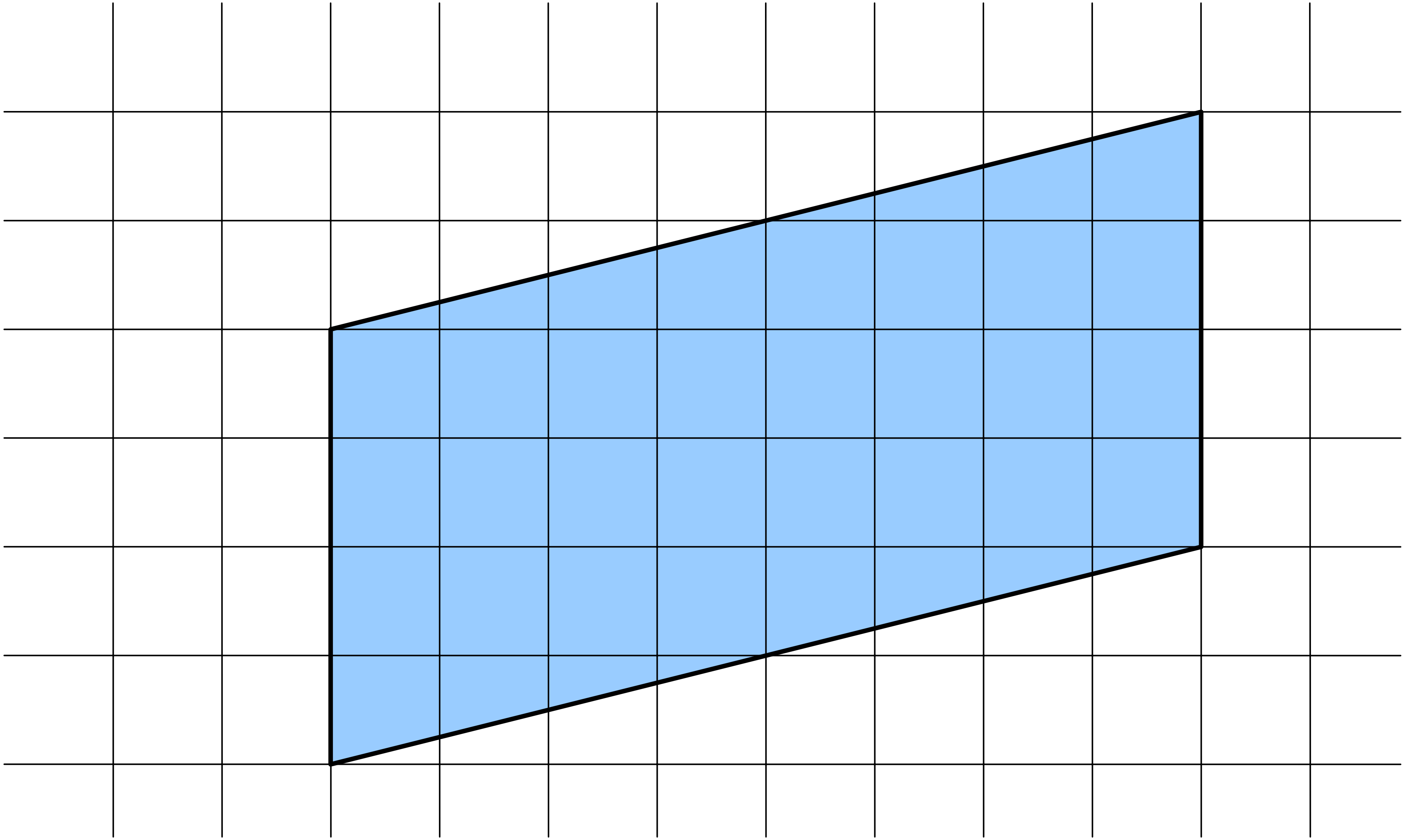
0761 – 2. tanári melléklet (5 oldal)/ 1. oldal: Osztályonként 1 készlet fóliára nyomva A4-es méretben, és 3 készlet vékony kartonpapírra nyomva A4-es méretben.



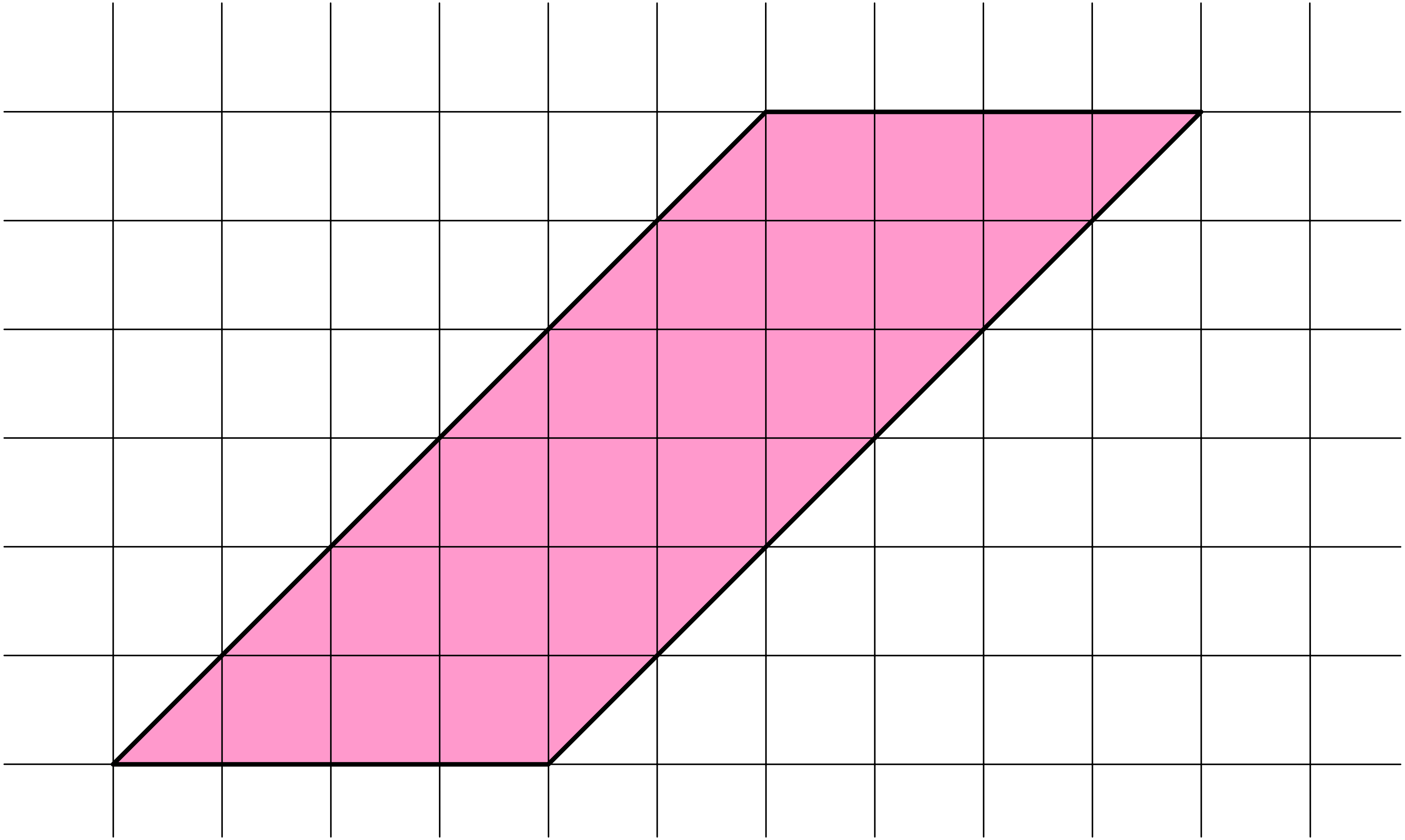
0761 – 2. tanári melléklet/ 2. oldal:



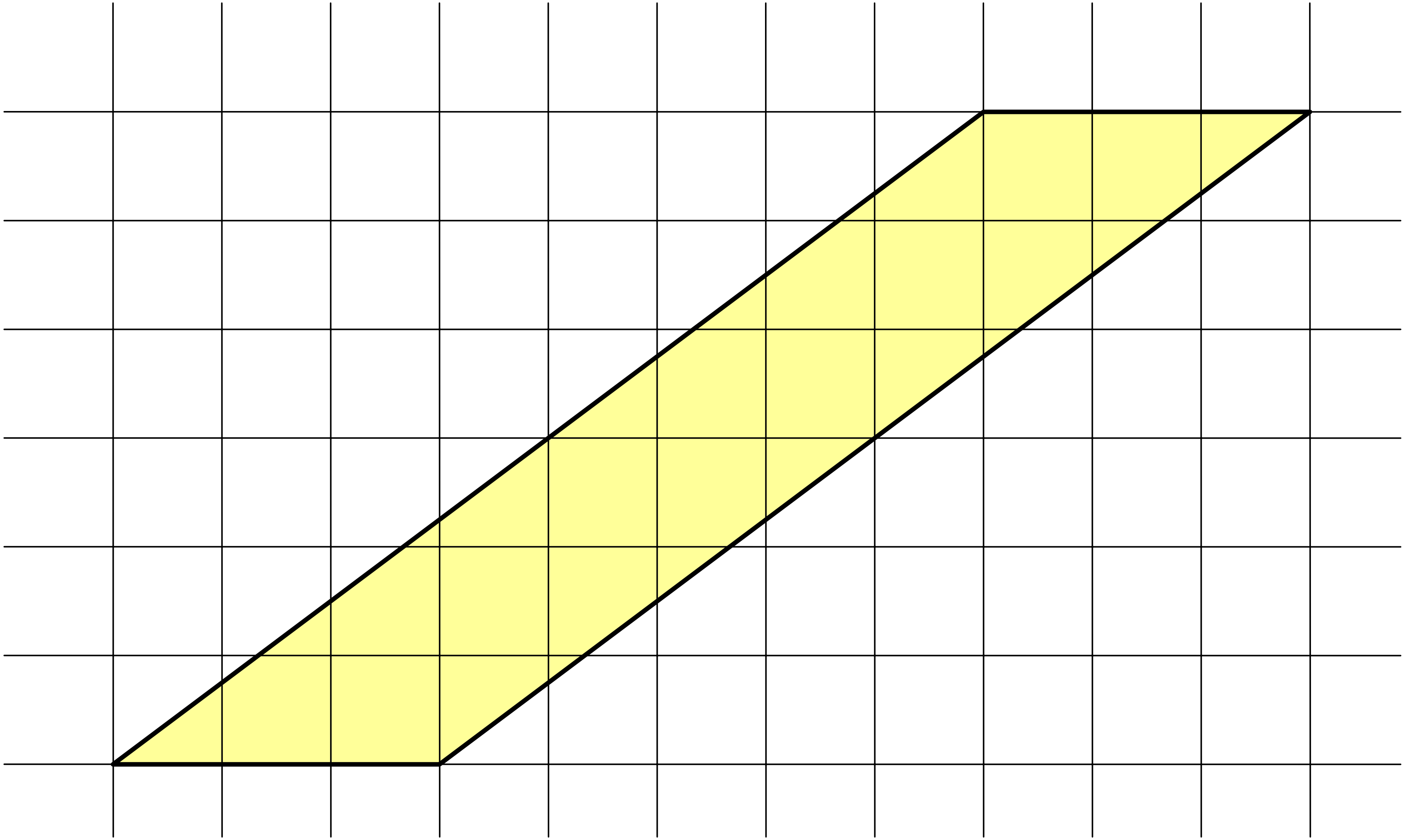
0761 – 2. tanári melléklet/ 3. oldal:



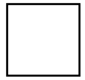
0761 – 2. tanári melléklet/ 4. oldal:

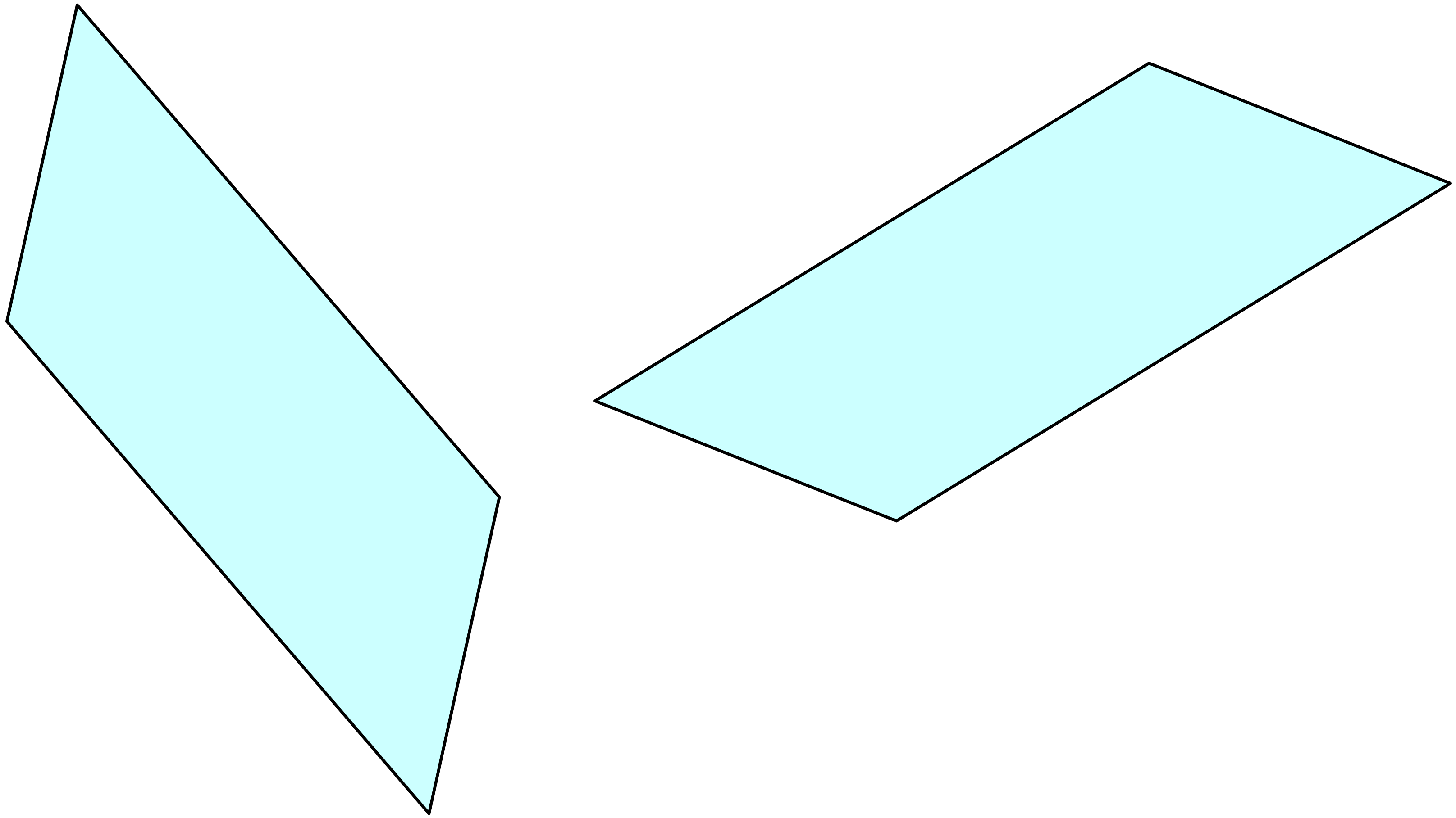


0761 – 2. tanári melléklet/ 5. oldal:

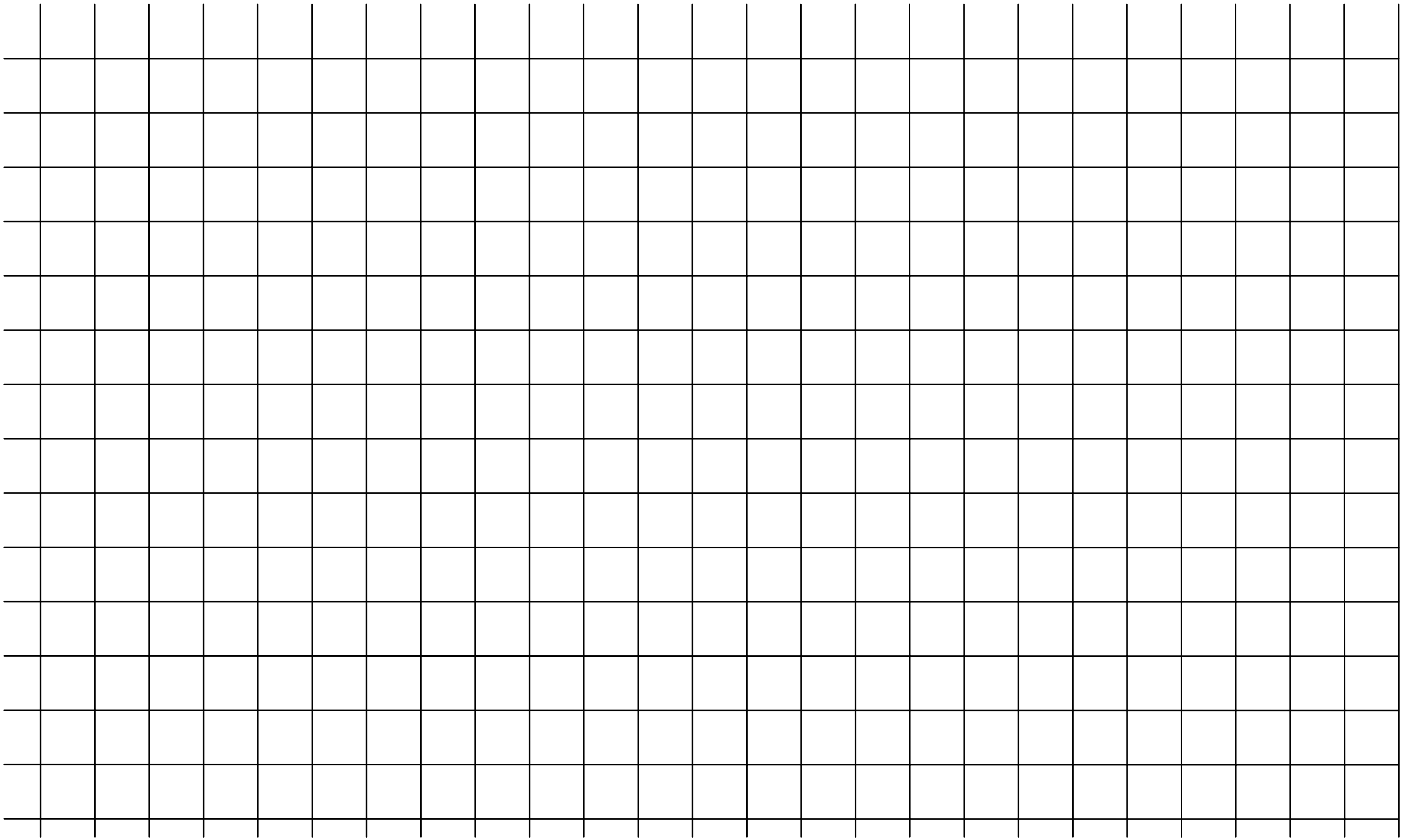


0761 – 3. tanári melléklet (3 oldal) **/1. oldal Fóliára nyomva ebben a méretben osztályonként 1 készlet.**

Mekkora az alábbi paralelogramma területe, ha a területegység ez a négyzet? 
(Segít az alábbi négyzetháló. A két a paralelogramma egybevágó. Keress több megoldási menetet!)

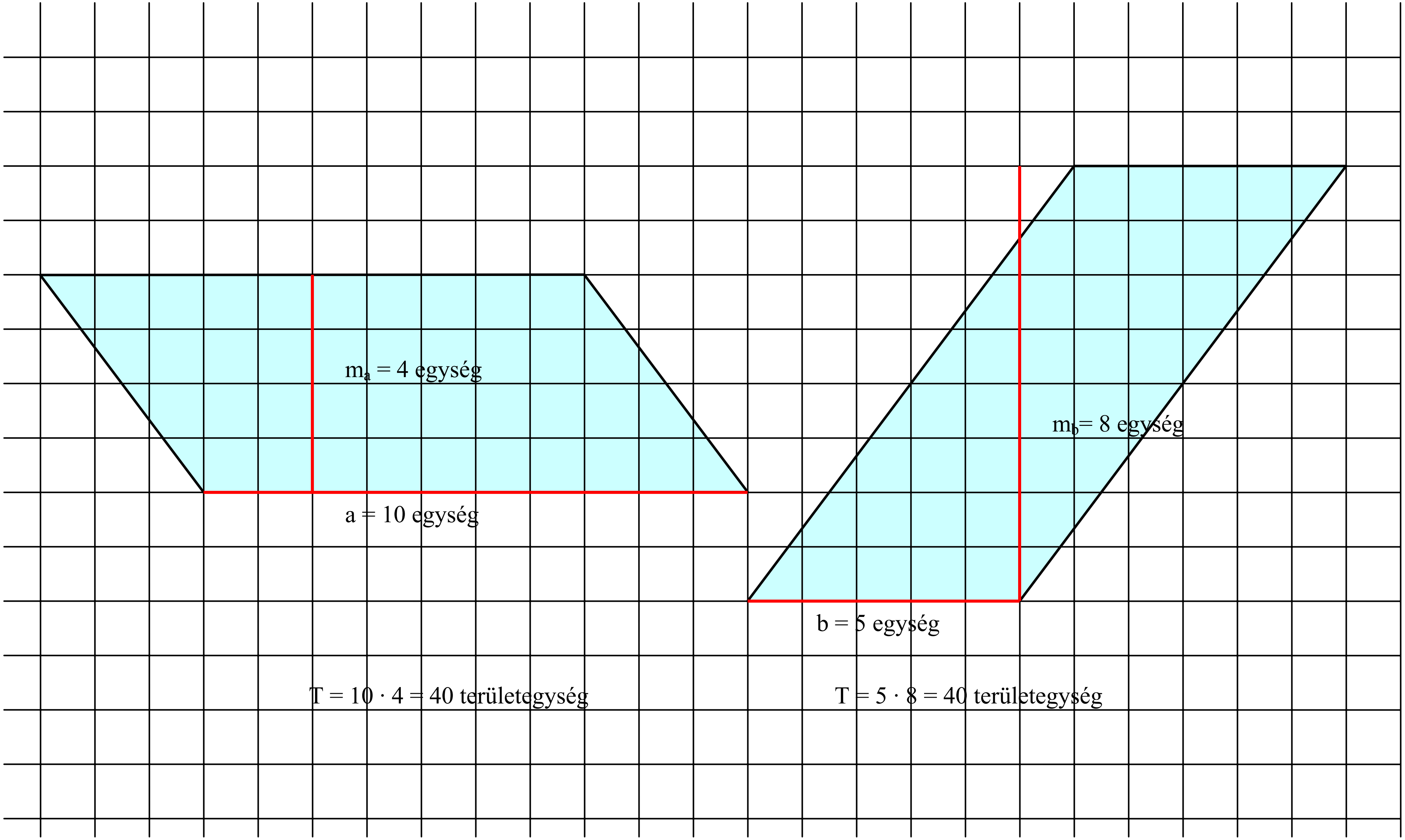


0761 – 2. tanári melléklet/3. oldal (Ez a négyzetrács tartozik az 5. melléklethez is.)

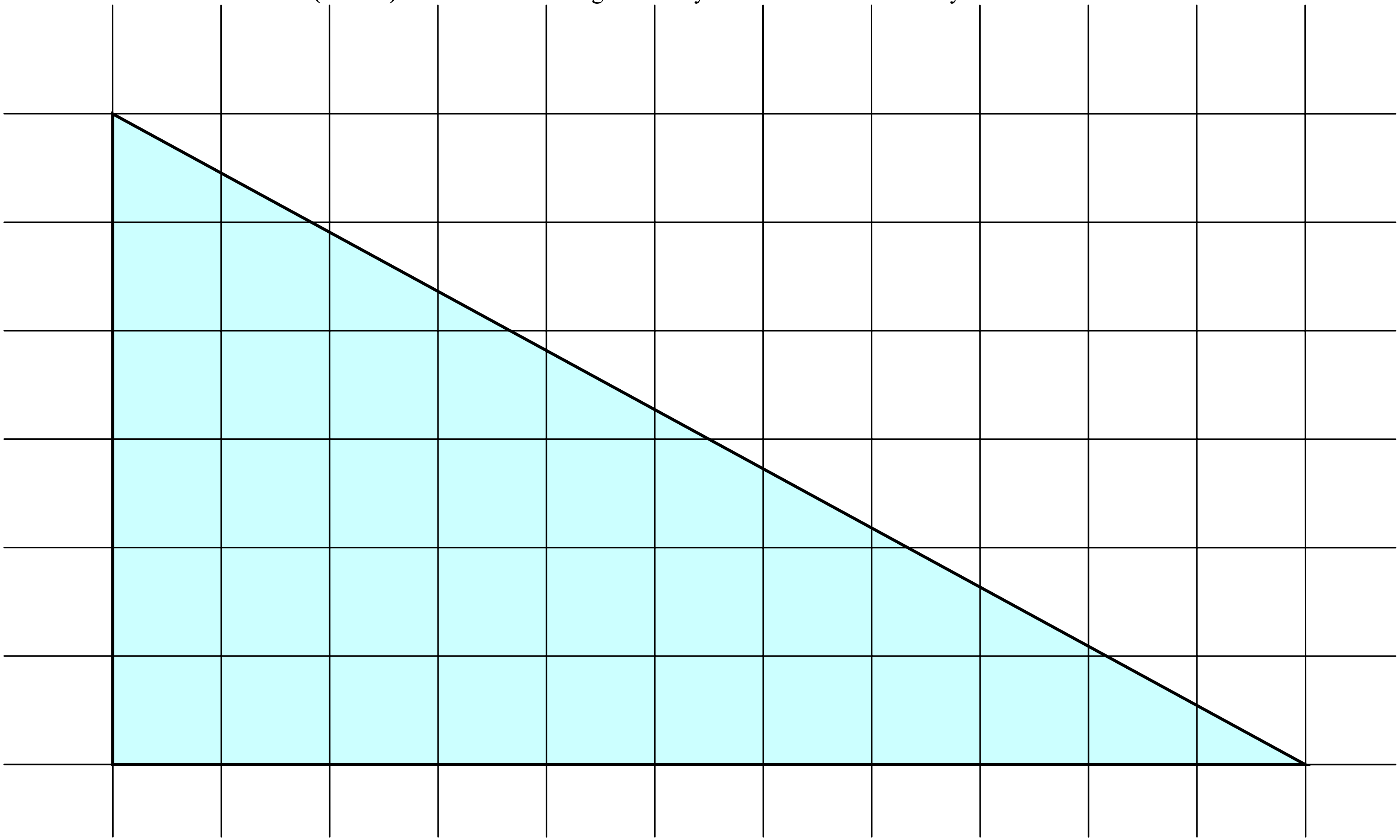


0761 – 3. tanári melléklet/3. oldal:

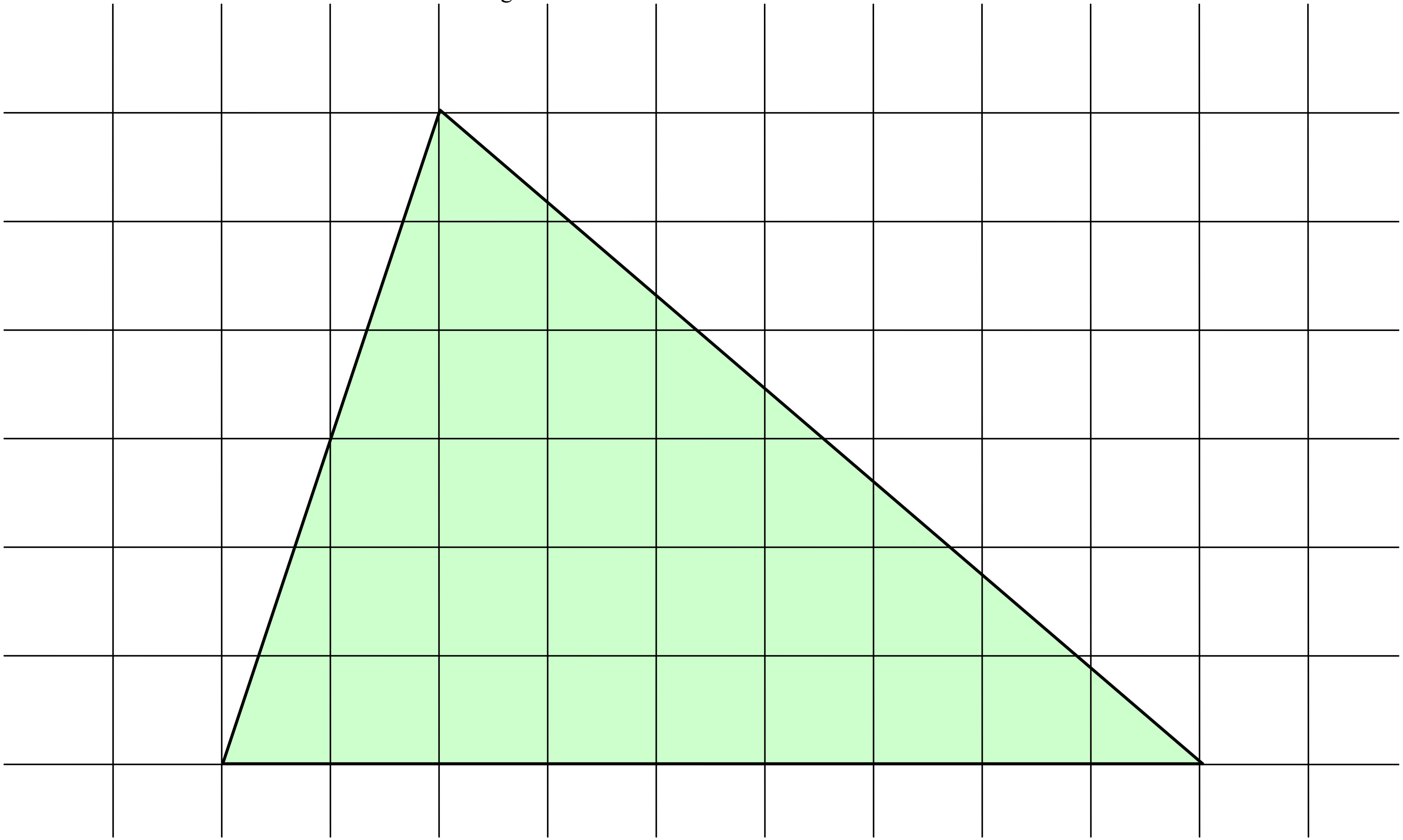
Megoldás:



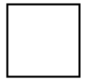
0761 – 4. tanári melléklet (2 oldal)/ 1. oldal: háromszögek Osztályonként 1 készlet fóliára nyomva A4-es méretben.

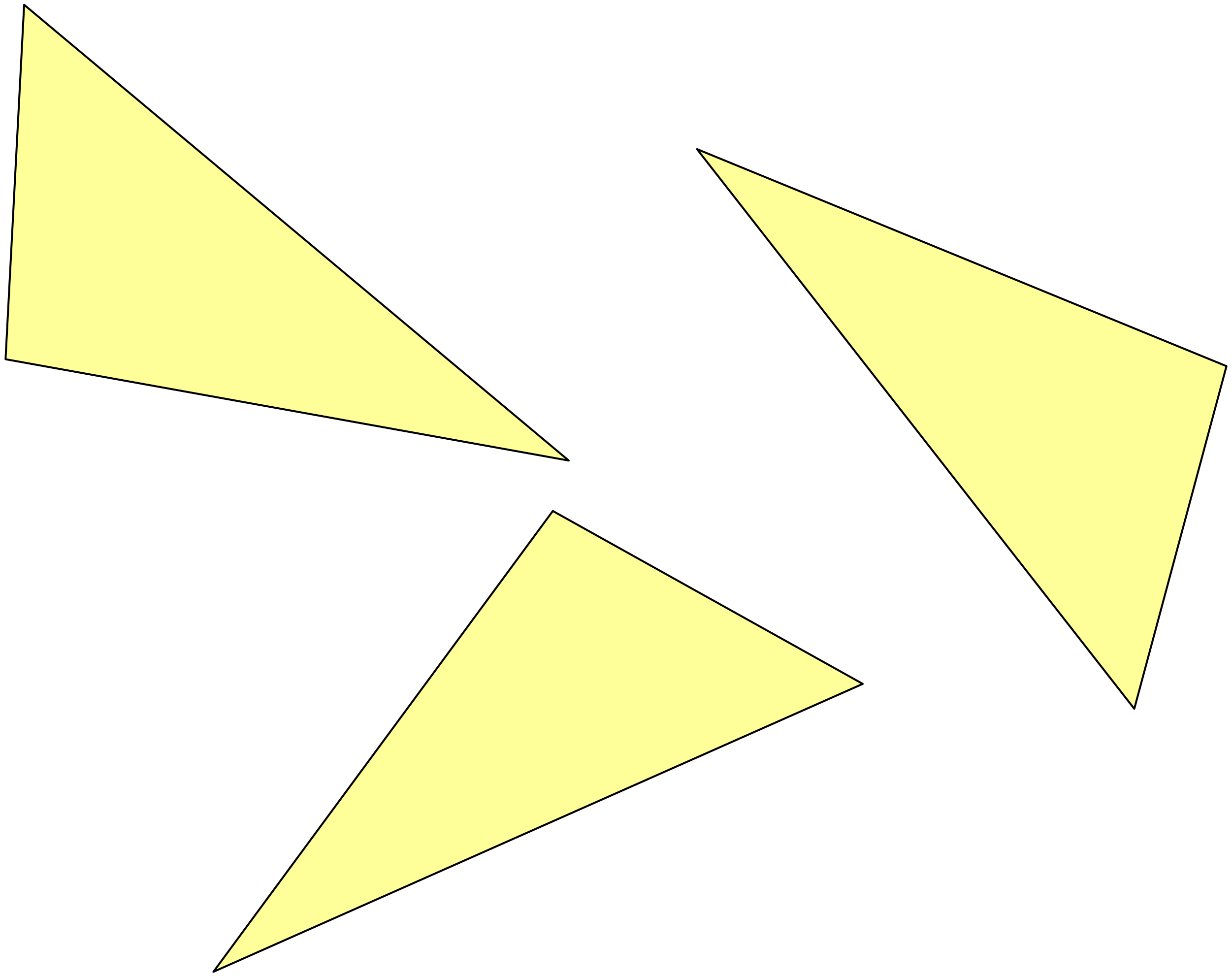


0761 – 4. tanári melléklet/ 2. oldal: háromszögek



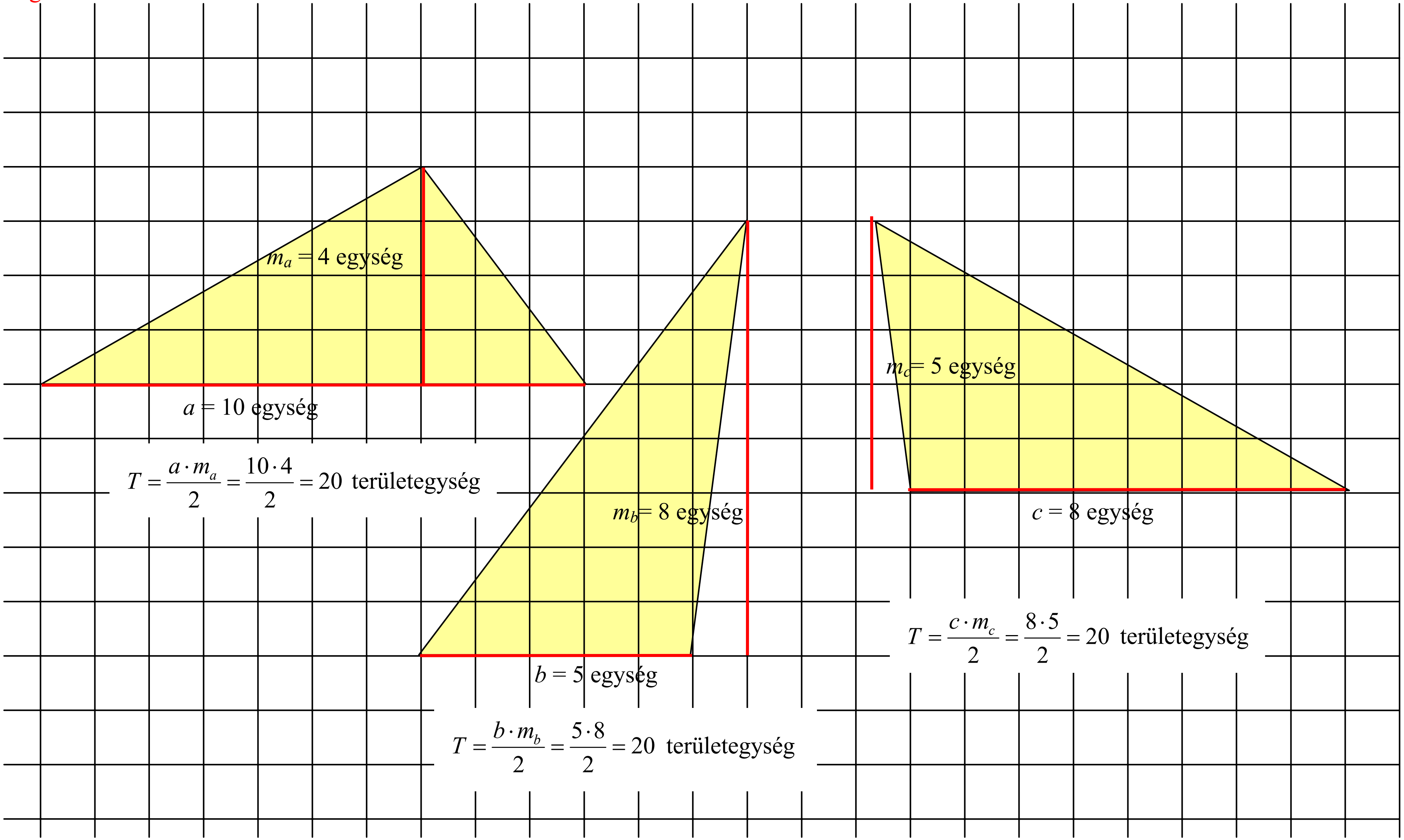
0761 – 5. tanári melléklet/ (2 oldal) 1. oldal: A háromszög magasságai, területe (fóliára nyomva ebbe a méretben osztályonként 1 készlet)

Mekkora az alábbi háromszög területe, ha a területegység ez a négyzet (A 3 háromszög egybevágó)? 
(Segít az alábbi négyzetháló. Keress több megoldási menetet!)



0761 – 5. tanári melléklet/ 2. oldal

Megoldás:

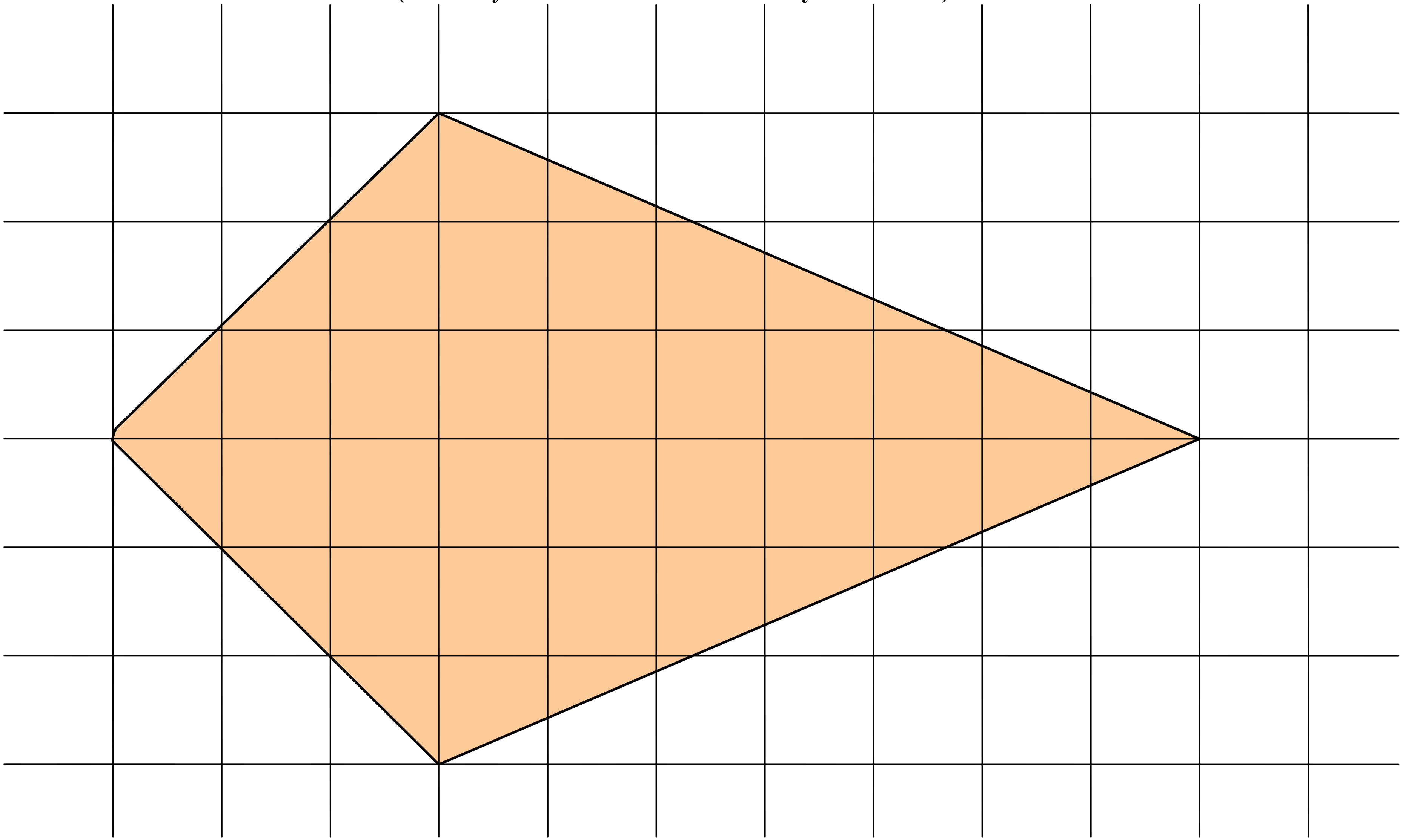


$$T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20 \text{ területegység}$$

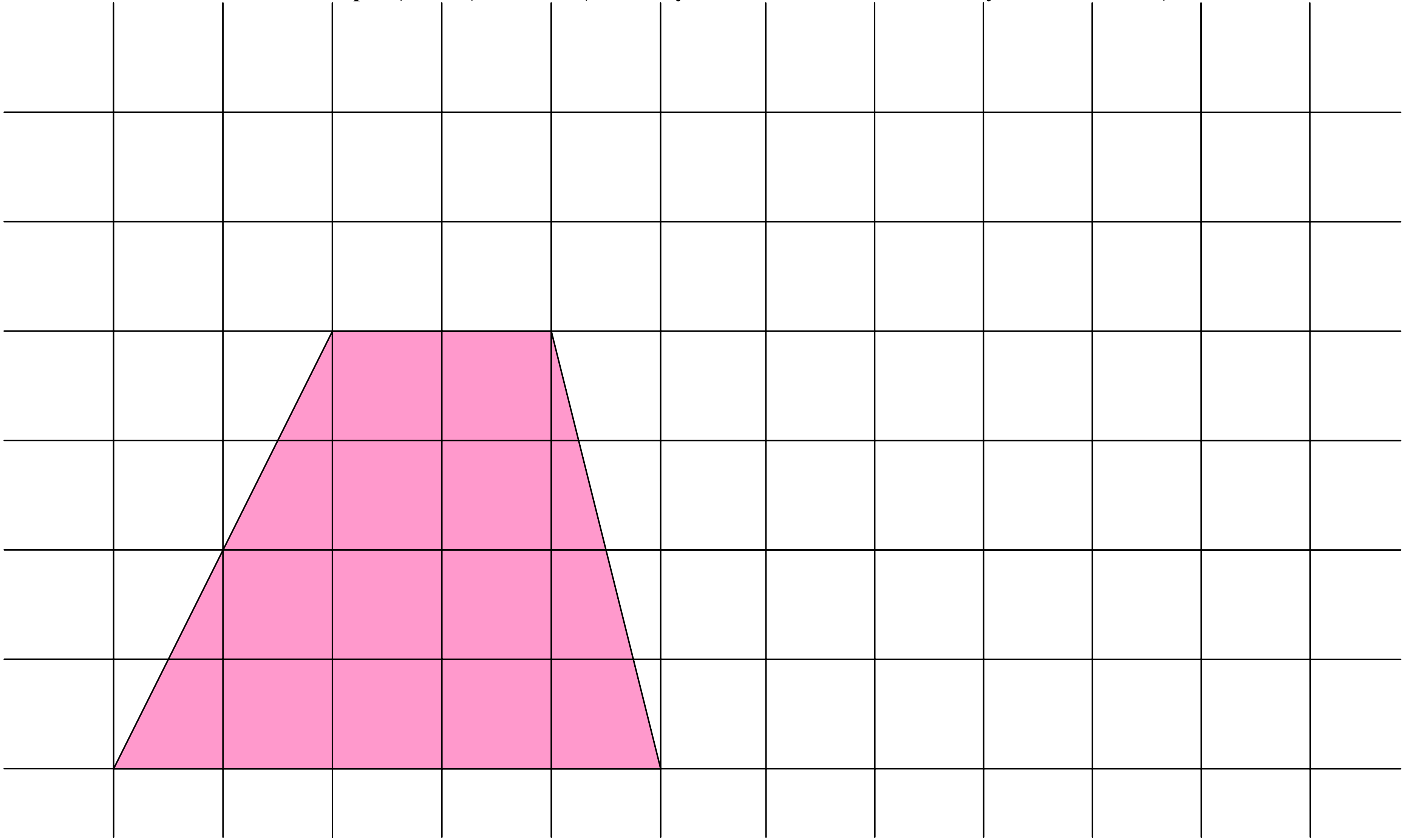
$$T = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20 \text{ területegység}$$

$$T = \frac{c \cdot m_c}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ területegység}$$

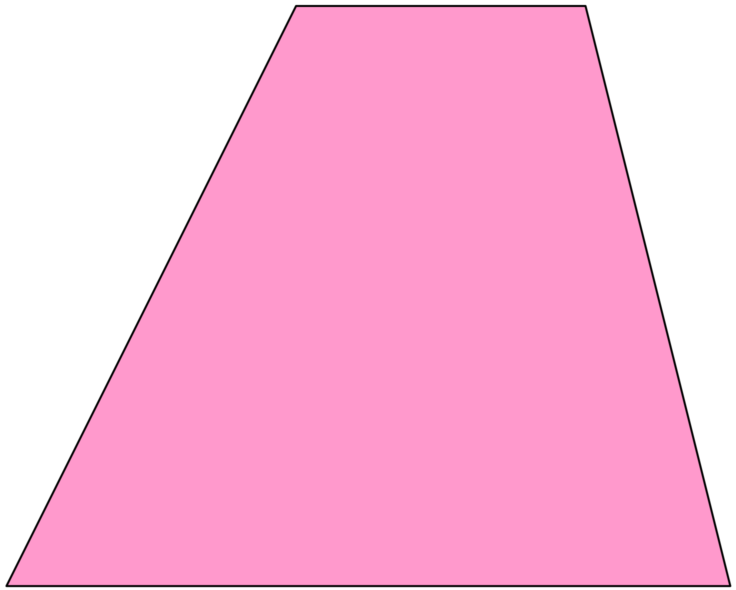
0761 – 6. tanári melléklet: **deltoid (fóliára nyomva ebbe a méretben osztályonként 1 db.)**

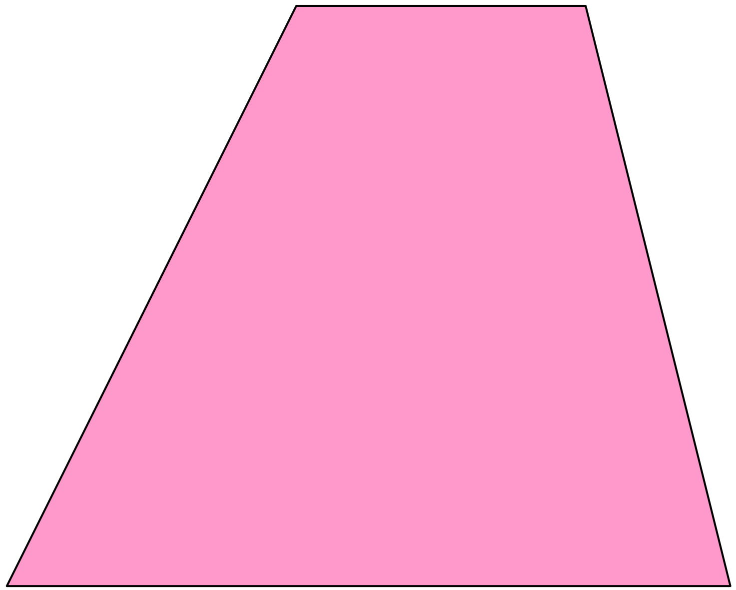


0761 – 7. tanári melléklet: trapéz (2 oldal) / 1. oldal (fóliára nyomva ebbe a méretben osztályonként 1 készlet)

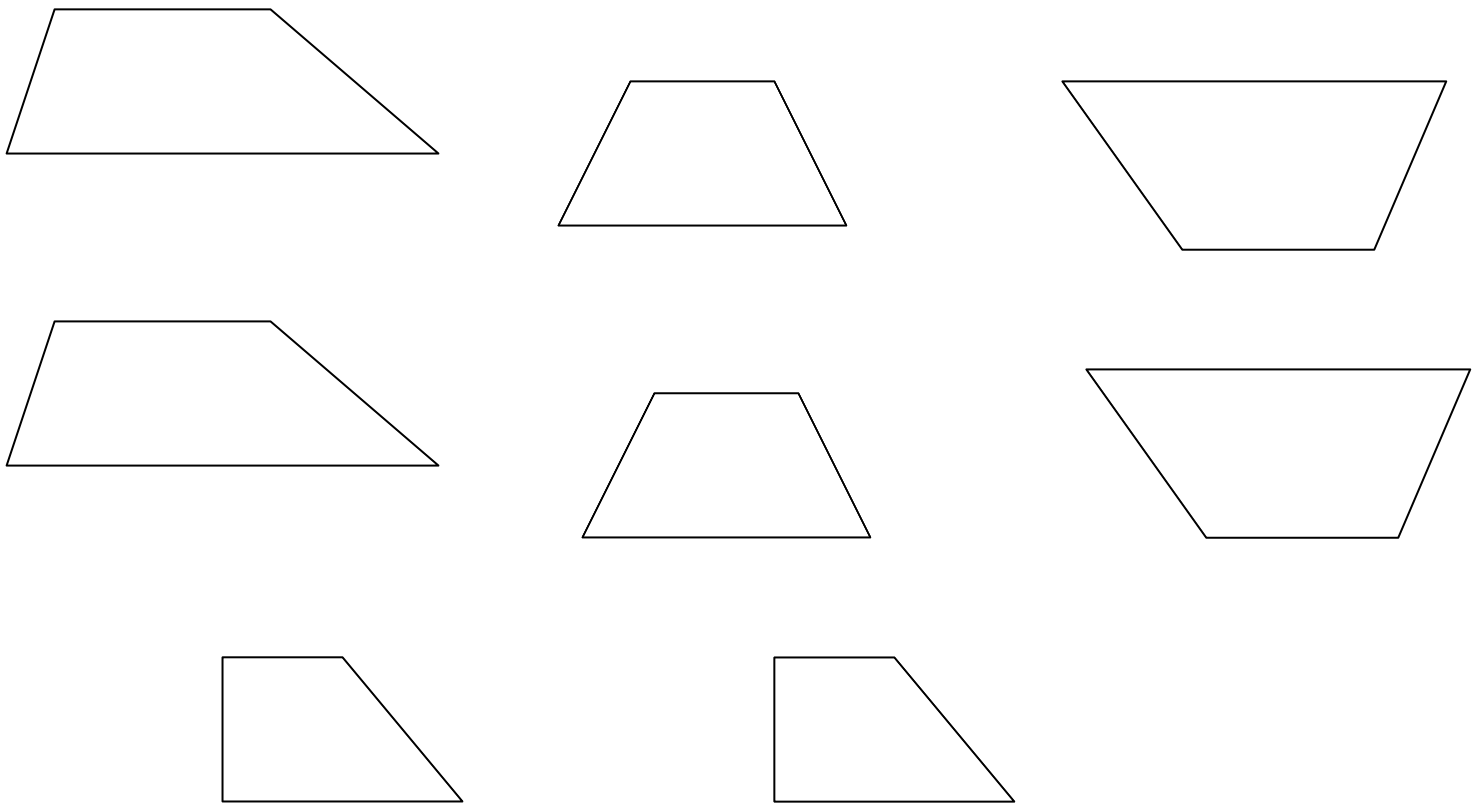


0761 – 7. tanári melléklet/ 2. oldal:

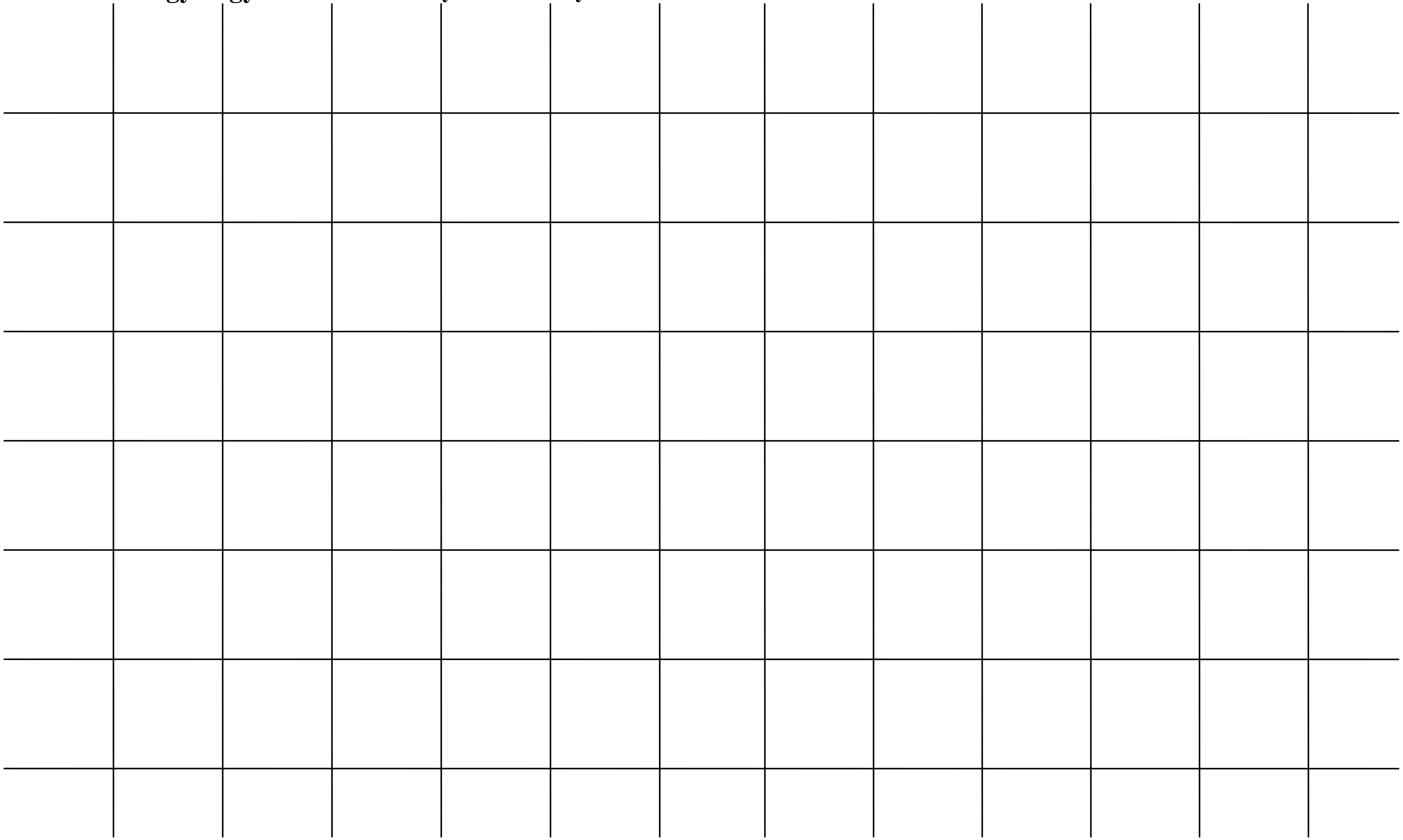




0761 – 8. tanári melléklet (A feladatgyűjtemény 13. feladatához.) Osztályonként 1 példány géppapírra nyomva. Az elkészült mellékletről az iskolában minden új órai felhasználáshoz csoportonként 1 db fénymásolatot kell készíteni.

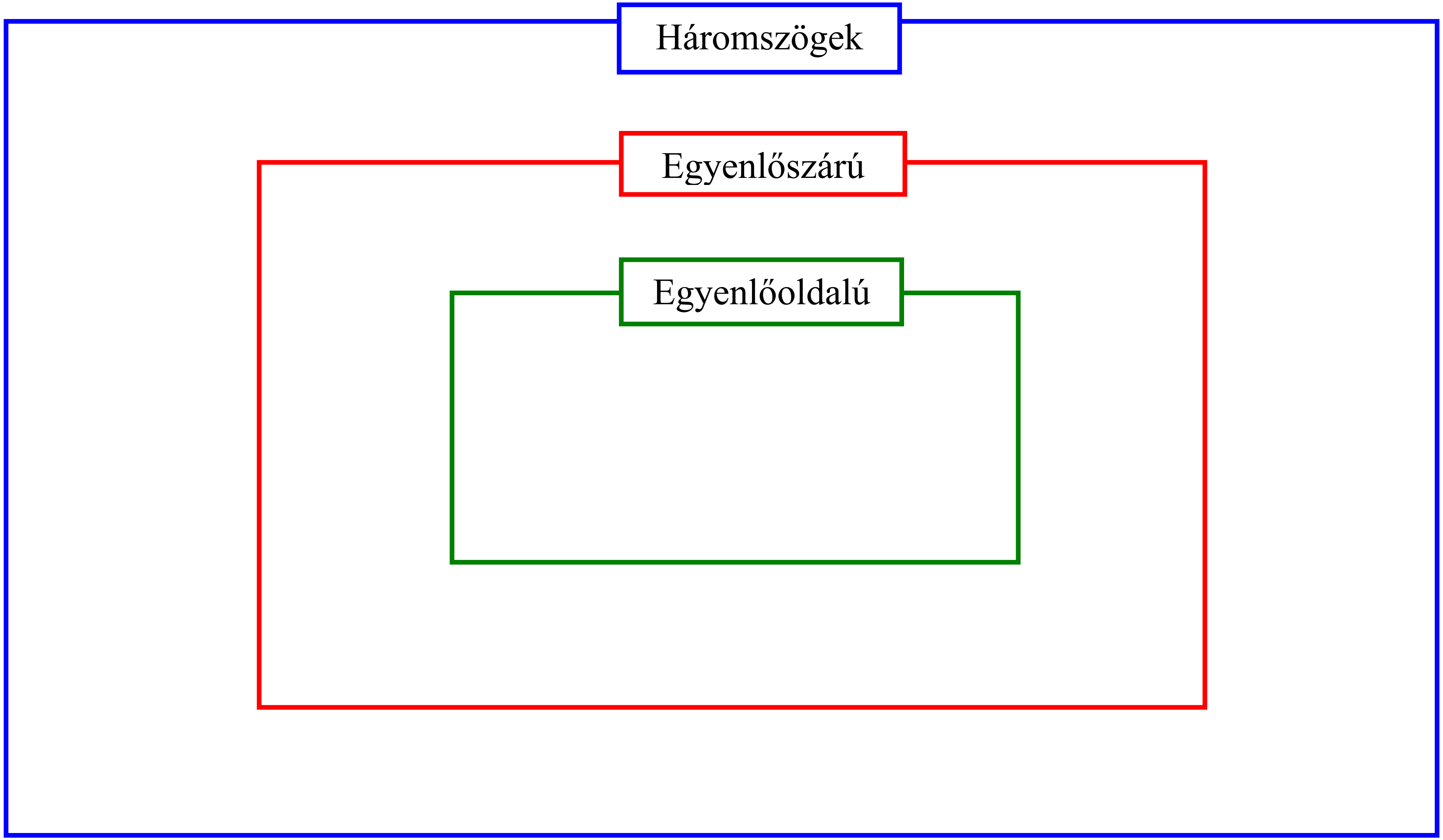


0761 – Pót nagy négyzetrács **Fóliára nyomva osztályonként 1 db ebben a méretben.**

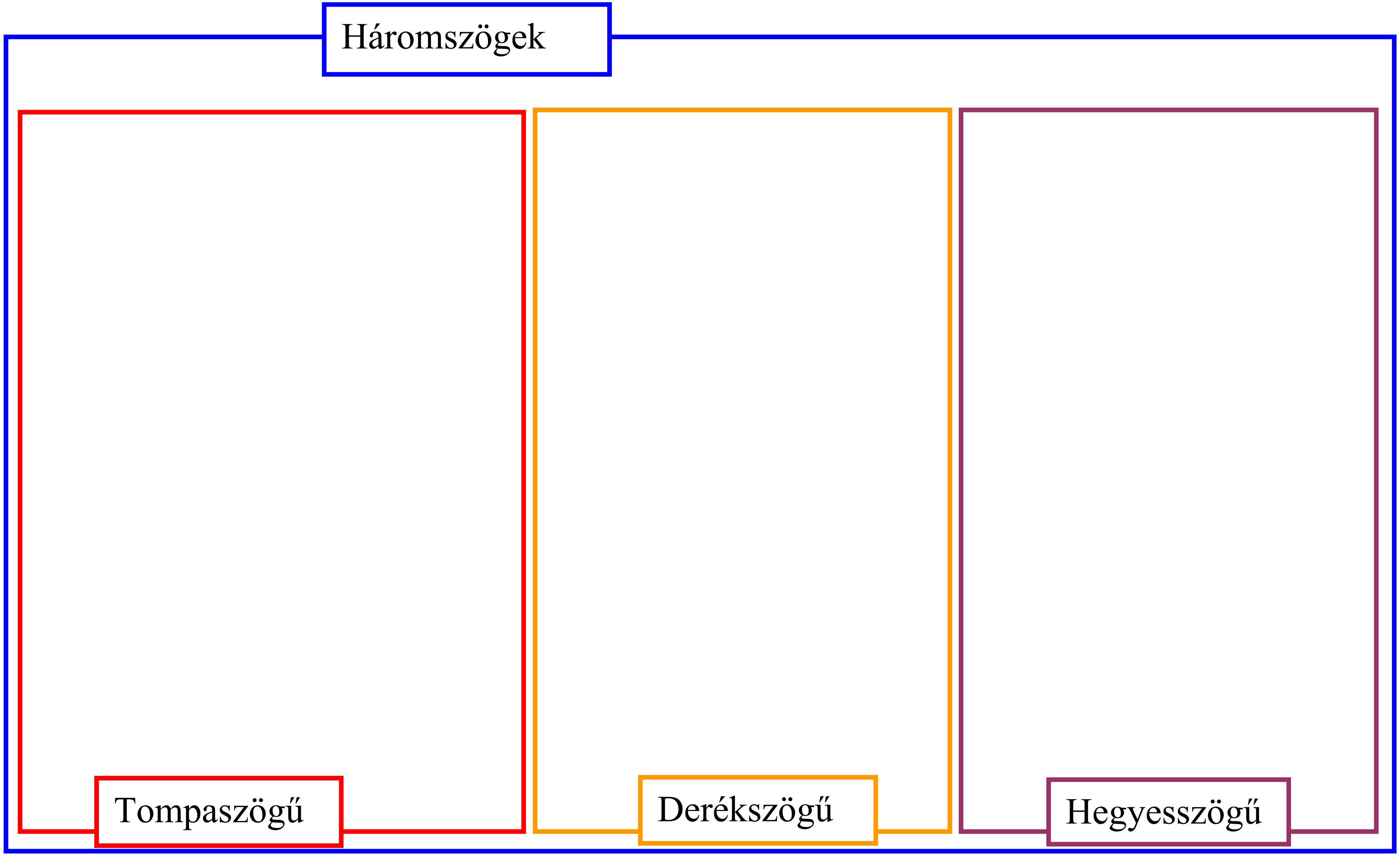


0761 – 9. tanári melléklet: Halmazábrák (3 oldal)/1. oldal

Osztályonként 1 db géppapírra nyomtatva. A mellékletről minden új órai felhasználáshoz a csoportok számának megfelelő fénymásolat készítendő az iskolában.



0761 – 9. tanári melléklet: Halmazábrák (3 oldal)/2. oldal



0761 – 9. tanári melléklet: Halmazábrák (3 oldal)/3. oldal