0753. MODUL

HÁROMSZÖGEK, SOKSZÖGEK

Speciális négyszögek és sokszögek

KÉSZÍTETTE: JAKUCS ERIKA, TAKÁCSNÉ TÓTH ÁGNES

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Speciális négyszögekről és sokszögekről tanultak ismétlése, mélyítése.
Időkeret	3 óra
Ajánlott korosztály	7. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Tágabb környezetben* háromszögek, sokszögek belső szögeinek összege, háromszögek egybevágóságainak alapesetei, háromszögek szerkesztése; *kitekintéshez:* gömbháromszögek, gömbi sokszögek *Szűkebb környezetben:* Paralelogramma szerkesztése (középpontos szimmetria), tengelyesen szimmetrikus négyszögek illetve szabályos sokszögek szerkesztése (tengelyes szimmetria) *Ajánlott megelőző tevékenységek:* Speciálisnégyszög-definíciók ismerete, ezek kapcsán egyszerűbb állítások megfogalmazása, bizonyítása. Sokszögek belső és külső szögösszegének ismerete. Párhuzamos szárú szögpárok felismerése; *kitekintéshez:* Gömbháromszögek, gömbsokszögek rajzolása, szerkesztése. 5. osztály Ponthalmazok 0571-0576 6. osztály Tengelyes tükrözés 0631-0633; Síkidomok 7. osztály Geometriai transzformációk 0721-0722 *Ajánlott követő tevékenységek:* Speciális négyszögekről tanultak alkalmazása szerkesztési és más feladatokban 8. osztály Geometriai ismétlés 0851-0854; Geometriai transzformációk 0871-0874
A képességfejlesztés fókuszai	Logikai: Deduktív és induktív következtetés. Egyszerű következtetési feladatok megoldása, érvelés általánosan vagy ellenpéldával. Definíció és tulajdonság közötti különbség tételének fokozatos alapozása. Tapasztalatokon alapuló általánosítás és bizonyítás – induktív illetve deduktív következtetés – közötti különbség megállapítása.

AJÁNLÁS

A modul célja, hogy a négyszögekről eddig tanultakat felelevenítsük, gyakoroljuk, mélyítsük. Ehhez játékokat hívunk segítségül. Ne sajnáljunk 2-3 teljes órát áldozni e játékokra, mert különösen sokféle a fejlesztő hatásuk, és széles körben megmozgatják tanulóinkat. További cél a trapéz (mint négyszög) szerkesztésének részletes tárgyalása. Említhetjük, érintőleg ismételhetjük a paralelogramma szerkesztését (részletes tárgyalása: középpontos szimmetriáról szóló modul). A szabályos sokszögek szerkesztése a szimmetria modulokban található (lásd kapcsolódási pontok).

TÁMOGATÓ RENDSZER

A gyerekek által gyűjtött anyagok, vastag filcek, csomagolópapír. Négyszögek kártyakészlet: tanári és diák változat. Tanári és diák szerkesztő eszközök. Rajzgömb – készlet.

ÉRTÉKELÉS

Játékok és kísérletek közben folyamatos, szóbeli, szerkesztésekből írásbeli („röpdolgozat”).

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, feladatok
I. Speciális négyszögek és sokszögek			
1.	Bemelegítés: Poszter készítés	Rendszerező képesség, megfigyelőképesség, következtetések	Előző órán kiválasztott négyszög, csomagolópapír, ragasztó
2.	A négyszögek típusai és tulajdonságai	Ismétlés, rendszerező képesség	1.a., 1.b. tanulói melléklet, 2. tanári melléklet (Négyszögek)
3.	A négyszögek tulajdonságai (játékos gyakorlás: ”Ha…, akkor…” játék)	Rendszerező képesség, következtetések	3. tanári melléklet
4.	Négyszögek síkon és gömbön	Rendszerezés, következtetések, térszemlélet	Lénárt-gömb

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, feladatok
II. Speciális négyszögek szerkesztése I.			
1.	Bemelegítés: Mutass be!	Rendszerező képesség, következtetések	Nagyobb papírlap, például csomagolópapír, színesek
2.	Szögszámítási feladatok, szerkesztési adatok	Becslés, mérés, rajzkészség, szerkesztési készség, következtetések	1. feladatlap, átlátszó lap, például celofán, fólia, vagy 0751-ben elkészített szögtartományok; ollók
3.	Egyszerű szerkesztések, a szerkesztés menete. („Telefonos” vagy „Háttal” játék, „fejlehajtós szavazás”)	Becslés, mérés, rajzkészség, szerkesztési készség, következtetések, kommunikációs képességek	2. feladatlap, körző, vonalzó

III. Speciális négyszögek szerkesztése II.			
1.	A háromszögek nevezetes körei	Rendszerező képesség, problémamegoldás, következtetések	A4-es papírlapok, körző, vonalzó
2.	A sokszögek nevezetes körei	Következtetések, szerkesztési készség	3. feladatlap 1. feladat, körző, vonalzó
3.	Vegyes szerkesztési feladatok	Rajzkészség, szerkesztési készség, következtetések, rendszerező képesség	3. feladatlap többi feladata, körző, vonalzó

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Speciális négyszögek és sokszögek

1. Bemelegítés: Poszter készítés

Az előző években már többször foglalkoztunk négyszögekkel, ismerjük típusait és tulajdonságaikat, ezért a következő órák célja a speciális négyszögekről eddig tanultak felelevenítése. Bemelegítésként készítsünk posztert! Ennek lényege: minden csoport még az előző óra végén kap egy négyszögnevet (például sorsolással). Erről a négyszögről kell most posztert készíteni, melyet végül értékelünk. Előkészületként a csoport tagjai gyűjtsenek a kapott négyszög tulajdonságait szemléltető képeket! Az óra során a csoportok megalkotják plakátjaikat, esztétikai és tartalmi igényességre törekedve. (Erre 20 percnél többet ne szánjunk!). A kész munkákat kihelyezzük a táblára vagy a faliújságra, majd a csoport választott szóvivője kommentálja.
Ha az elmondott ismeretek kiegészítésre szorulnak, akkor a többi csoport tagjai is hozzáfűzéseket tehetnek. A következő négyszögek szerepeljenek: **trapéz, paralelogramma, téglalap, rombusz, négyzet, deltoid.** Így hat csoportunk lesz.
A csoportmunka szervezésekor jó, ha minden gyereknek világos szerepköre is van, mely nélkül a továbbjutás nem lehetséges. Például: szóvivő; jegyző; szerkesztett ábrák elkészítője; feladatmester; szakmai ellenőr; eszközfelelős, csendkapitány, stb.
Az értékelésről: Ha egy poszter például 25 pontot kaphat, akkor ebből 5 pont esztétikumra, 5 pont otthoni előkészületre, 5 pont együttműködésre, 10 pont tartalomra mehet. Ha egy diák egy másik csoport anyagát lényegesen kiegészíti, csoportjának még 2 pontot szerez. Az ismertetésekkel kialakul a csapatsorrend. Az első helyezett csoport tagjai kapjanak jelest, a többiek egyre fogyó mennyiségben jó pontokat; lehetőleg minden alkotást, amelyben munka rejlik, értékeljünk! Csak kirívóan negatív hozzáállást „jutalmazzunk” nem megadott jó pontokkal!

2. A négyszögek típusai és tulajdonságai

A négyszögek tulajdonságainak további rögzítését egy játék keretében oldjuk meg, amelyhez használjuk a „Négyszögek” kártyakészletet (**2. tanári és 1.a., 1.b. tanulói melléklet**).

2. tanári melléklet – lásd e fájl végén és a modul eszközei közt is!

Átlói merőlegesek	Van két egyenlő szöge	Van szimmetria-centruma	Átlói merőlegesek és felezik egymást
Van két szomszédos szöge, amely egyenlő	Tengelyesen is, középpontosan is szimmetrikus	Átlói felezik egymást	Van három egyenlő szöge
Két szimmetria-centruma van	Átlói nem merőlegesek	Pontosan három szöge egyenlő	Két szimmetriatengelye van
Átlói nem felezők	Szemben lévő szögei egyenlők	Nincs hegyesszöge	Átlói merőlegesek, de nem felezik egymást

Két-két szomszédos szöge egyenlő	Pontosan három oldala egyenlő	Átlói felezik egymást, de nem merőlegesek	Van derékszöge
Csak derékszöge van	Minden oldala egyenlő	Minden szöge egyenlő	Minden szöge hegyesszög
Van két egyenlő oldala	Van szimmetria-tengelye	Bármely két szögének összege 180°	Szemben lévő oldalai egyenlők
Két-két szögének összege 180°	Bármely két szomszédos szögének összege 180°	Van két szomszédos oldala, amely egyenlő	Két homorúszöge van

Annyi tompaszöge van, ahány hegyesszöge, és konvex	Két-két szomszédos oldala egyenlő	Pontosan három szöge derékszög	Van homorúszöge
Van három egyenlő oldala	Van két derékszöge	Nincs tompaszöge	Van szimmetriaátlója
Van oldalfelező merőleges szimmetriatengelye	Van olyan kör, amely minden csúcsán áthalad	Van olyan kör, amely minden oldalát érinti	

1.a. tanulói melléklet:

– lásd e fájl végén, és a modul eszközei közt is!

Négyszög, amelynek van párhuzamos oldalpárja.	Négyszög, amelynek szemközti oldalai párhuzamosak.	Négyszög, amelynek minden oldala egyenlő.	Négyszög, amelynek minden szöge egyenlő.
Négyszög, amelynek van csúcson átmenő szimmetriatengelye.	Tengelyesen szimmetrikus négyszög, amelynek tükörtengelye oldalfelező merőleges.	Szabályos négyszög	

1.b. tanulói melléklet:

MINDEN NÉGYSZÖG	NINCS ILYEN NÉGYSZÖG

A tanulói kártyák egyik oldalán szerepel egy definíció, pontosabban egy definiáló tulajdonság. Például: „Négyszög, amelynek minden szöge egyenlő”. Első lépésben a saját kártyakészletében írja rá mindenki a kártya másik oldalára a definiált négyszög nevét!
Egy készlet minden speciális négyszögről 1 lapot tartalmaz, valamint két olyan kártyát, amelyek egyikén ez áll: „minden négyszög”, a másikon pedig: „nincs ilyen négyszög”. Minden gyereknek van egy készlete.
A tanári készlet lapjai tulajdonságokat tartalmaznak. Például: „átlói merőlegesek”. A tanár kiválaszt egy tulajdonság-kártyát, felmutatja, esetleg felteszi a táblára. A gyerekek a saját készletükből kiválasztják és felmutatják annak a négyszögnek a kártyáját, amelyre igaz az állítás. Vannak, akik több kártyát mutatnak fel. Körülnéznek, megvitatják a látottakat. Érveléshez nincs más a birtokukban, mint az adott négyszög definíciója vagy a róla megtanult ismeretek. Kétféle változatban játszhatjuk a játékot: „Biztos”, illetve „Lehet” változat. Az első szerint az(oka)t a kártyá(ka)t mutatják fel, amely(ek)re biztos igaz az állítás, a másik változat szerint pedig az(oka)t, amely(ek)re igaz lehet! Amennyiben nincs ilyen négyszög, vagy minden négyszögre igaz az állítás, akkor a készletben szereplő ilyen tartalmú kártyát mutatják fel.

PÉLDA EGY JÁTÉKRA

<u>Biztos – változat</u>

A tanár felmutatja például a következő feliratot: „Van két egyenlő szöge”. A gyerekek közül néhányan a paralelogrammát, mások a rombuszt, megint mások a deltoidot mutatják. Vannak, akik több kártyát felmutatnak.
Például: minden paralelogramma jó, mert ezeknek 2-2 szemben levő szögük egyenlő.
A deltoid is jó, mert a szimmetriaátló által nem metszett szögei egyenlők.
A húrtrapéz is ide tartozik, mert alapon fekvő szögei egyenlők.
Minden olyan négyszög jó, amelyik valamilyen szimmetriával rendelkezik, mert egy szögének a képe vele egyenlő szög.
A nem szimmetrikus négyszögekről csak azt mondhatjuk, hogy lehet két egyenlő szöge, de nem biztos.

<u>Lehet – változat</u>

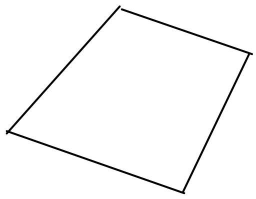
A tanár felmutatja a következő kártyát: „Átlói felezik egymást, de nem merőlegesek”. A gyerekek keresgélnek, majd feltartják a kiválasztott kártyákat. Némelyiket felszólítjuk, hogy indokolja meg választását:
A téglalap lehet ilyen, ha nem négyzet.
A paralelogramma lehet ilyen, ha nem rombusz.
„Okoska” beszéde: Ha a négyszög átlói felezik egymást, akkor középpontosan szimmetrikus, ezért paralelogramma. Ezek közül tehát csak a merőleges átlójúakat kell kihagyni, azaz a rombuszokat, ezért a második felszólalás magában foglalja az elsőt.

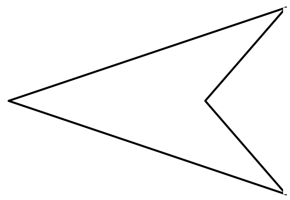
A „Lehet” változatot inkább gyorsabban haladó osztályokban használjuk, hiszen itt már összetettebb gondolkodásra van szükség.

EMLÉKEZTETŐ:

A négyszögeknek négy oldaluk és négy szögük van. Egy négyszög lehet

konvex vagy konkáv.

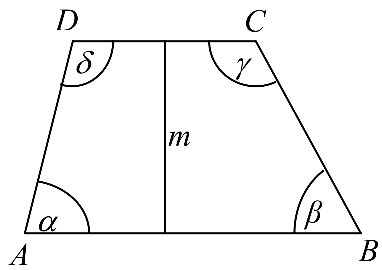




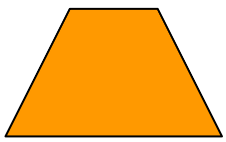
A négyszögek belső szögeinek összege 360°, külső szögeinek összege szintén 360°. Külső szöge csak konvex négyszögnek van.

A **trapéz** olyan négyszög, amelynek van párhuzamos oldal párja.
A párhuzamos oldalakat alapoknak, a másik két oldalt száraknak nevezzük.
Az alapok távolsága a trapéz magassága.

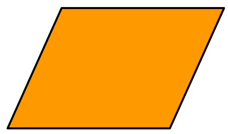
$\boldsymbol{AB \,||\, DC}$
Az egy száron lévő szögek összege 180°.
$\boldsymbol{\alpha + \delta = 180°}$
$\boldsymbol{\beta + \gamma = 180°}$



A tengelyesen szimmetrikus trapéz a **húrtrapéz.**

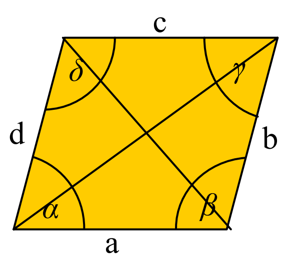


A középpontosan szimmetrikus trapéz a **paralelogramma.**

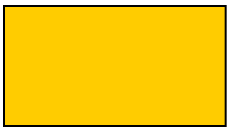


A **paralelogramma** olyan négyszög, amelynek a szemközti oldalai párhuzamosak.

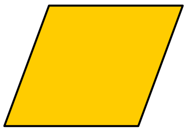
A szemközti oldalak egyenlők.
$\boldsymbol{a = c \quad b = d}$
A szemben lévő szögek egyenlők.
$\boldsymbol{\alpha = \gamma \quad \beta = \delta}$
A szomszédos szögek összege 180°.
$\boldsymbol{\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°}$
Az átlók felezik egymást.



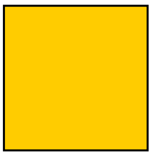
A **téglalap** egyenlő szögű paralelogramma.



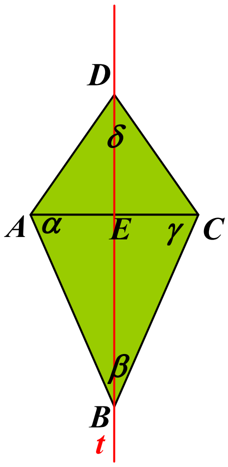
A **rombusz** egyenlő oldalú paralelogramma.

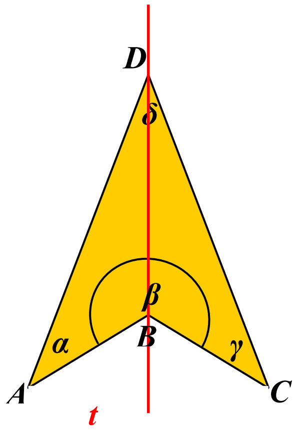


A **négyzet** szabályos négyszög.



A **deltoid** olyan négyszög, amelynek van csúcson átmenő szimmetriatengelye.





Két-két szomszédos oldal egyenlő.
$AD = DC \qquad AB = BC$
Két szöge egyenlő.
$\alpha = \gamma$
A szimmetriaátló egyenese merőlegesen felezi a másik átlót.
$DB \perp AC \qquad AE = EC$
A szimmetriaátló egyenese felezi a két szöget, amelyen áthalad.

Speciális négyszögek

A speciális négyszögek szimmetriatulajdonságai:
A speciális négyszögek minden fontos tulajdonságát kiolvashatjuk a szimmetriájukból.

Deltoid: Van egy szimmetriatengelye, amely tartalmaz egy átlót.

Húrtrapéz: Van egy szimmetriatengelye, amely két párhuzamos oldal felezőmerőlegese.

Paralelogramma: Van egy szimmetria középpontja, amely az átlók metszéspontja.

Rombusz: Tengelyesen szimmetrikus mindkét átlójára, és középpontosan szimmetrikus ezek metszéspontjára. A rombusz egyszerre deltoid és paralelogramma.

Téglalap: Tengelyesen szimmetrikus két-két szemközti oldal felező merőlegesére, és középpontosan szimmetrikus ezek metszéspontjára. Egyszerre húrtrapéz és paralelogramma.

Négyzet: tengelyesen szimmetrikus a két átlójára és két oldalfelező merőlegesére, és középpontosan szimmetrikus ezek metszéspontjára. Egyszerre rombusz és téglalap.

3. A négyszögek tulajdonságai

Az óra utolsó részében játékos gyakorlással áttekinthetjük, rendszerezhetjük a négyszögekkel kapcsolatos ismereteket (**3. tanári melléklet**).

3. tanári melléklet – lásd e fájl végén és a modul eszközei közt is!

A NÉGYSZÖGNEK VAN PÁRHUZAMOS OLDALPÁRJA	A NÉGYSZÖG SZÖGEI EGYENLŐK	A NÉGYSZÖG PARALELOGRAMMA
A NÉGYSZÖGNEK VAN KÉT EGYENLŐ SZÖGE	A NÉGYSZÖGNEK VAN KÉT EGYENLŐ OLDALA	A NÉGYSZÖG OLDALAI EGYENLŐK
A NÉGYSZÖG SZEMKÖZTI OLDALAI PÁRHUZAMOSAK	A NÉGYSZÖG SZOMSZÉDOS SZÖGEINEK ÖSSZEGE 180°	A NÉGYSZÖG PONTOSAN EGY SZIMMETRIATENGELYE VAN
A NÉGYSZÖG ÁTLÓI FELEZIK EGYMÁST	A NÉGYSZÖG PARALELOGRAMMA	A NÉGYSZÖGNEK NÉGY SZIMMETRIATENGELYE VAN
A NÉGYSZÖG ÁTLÓI EGYENLŐ HOSSZÚAK	A NÉGYSZÖG DELTOID	A NÉGYSZÖG ÁTLÓI FELEZIK A SZÖGEKET
A NÉGYSZÖG ÁTLÓI MERŐLEGESEK EGYMÁSRA	A NÉGYSZÖG TRAPÉZ	A NÉGYSZÖGNEK VAN ÁTLÓJA, AMELY EGYBEN SZÖGFELEZŐ IS
A NÉGYSZÖG SZOMSZÉDOS OLDALAI EGYENLŐK	A NÉGYSZÖG ROMBUSZ	A NÉGYSZÖG SZEMKÖZTI SZÖGEI EGYENLŐK
A NÉGYSZÖG SZEMKÖZTI OLDALAI EGYENLŐK	A NÉGYSZÖG OLDALAI MERŐLEGESEK EGYMÁSRA	A NÉGYSZÖGET ÁTLÓJA KÉT TÜKRÖS HÁROMSZÖGRE BONTJA
A NÉGYSZÖG TENGELYESEN SZIMMETRIKUS	A NÉGYSZÖG TÉGLALAP	A NÉGYSZÖG ÁTLÓI MERŐLEGESEN FELEZIK EGYMÁST
A NÉGYSZÖG KÖZÉPPONTOSAN SZIMMETRIKUS	A NÉGYSZÖG NÉGYZET	A NÉGYSZÖGNEK VAN CSÚCSON ÁTMENŐ TÜKÖRTENGELYE

A **3. tanári melléklet**ben minden papírcsíkon egy-egy állítás található a négyszögekkel kapcsolatban. Írjuk fel a táblára a „HA” illetve az „AKKOR” szavakat egymástól olyan távolságra, hogy közéjük és az akkor szó után oda tudjunk helyezni egy-egy állítást tartalmazó papírcsíkot! A feladat: az így kapott összetett állításról el kell dönteni, és a füzetbe le kell írni, hogy igaz vagy hamis! Ezután cseréljük fel a két papírcsík helyét, és a fordított állításról is döntsék el, hogy igaz-e! A feladatot megoldhatják csoportmunkában, de egyénileg is! Példa a feladatra:

„HA a négyszögnek van párhuzamos oldal párja, AKKOR a négyszögnek van két egyenlő oldala.” Hamis

„HA a négyszögnek van két egyenlő oldala, AKKOR a négyszögnek van párhuzamos oldal párja.” Hamis

HA a négyszög átlói felezik egymást, AKKOR a négyszög téglalap. Hamis

HA a négyszög téglalap, AKKOR a négyszög átlói felezik egymást. Igaz

HA a négyszög tengelyesen szimmetrikus, AKKOR a négyszögnek van két egyenlő szöge. Igaz

HA a négyszögnek van csúcson átmenő tükörtengelye, AKKOR a négyszög rombusz. Hamis

HA a négyszögnek rombusz, AKKOR a négyszögnek van csúcson átmenő tükörtengelye. Igaz

HA a négyszögnek van két egyenlő szöge, AKKOR a négyszög tengelyesen szimmetrikus. Hamis

A játékot játszhatjuk a következő nehezített változatban is. Gyorsabban haladó osztályokban javasoljuk.

Két gyereket kiválasztunk (kisorsolunk), egyik a HA, a másik az AKKOR feliratot kapja fejére, vagy egyik kezébe.

Egy harmadik és egy negyedik gyerek húz 1-1 kártyát a tanári készletből, és beállnak az előbbi váltakozó sorrendbe úgy, hogy olvasható legyen egy ilyen mondat:

1. HA van két egyenlő szöge, AKKOR van két egyenlő oldala.

A kialakított állításról a gyerekek eldöntik, hogy igaz, vagy hamis. Ha igaznak vélik, meg kell indokolniuk, ha hamis, akkor rajzolnak egy ellenpéldát.

Hasonló formában, de más mondatszerkezetekkel is játszhatjuk:

2. HA paralelogramma, AKKOR…

A gyerekek kikeresik a tanári készletből az összes olyan kártyát (tulajdonságot), amellyel befejezve a megkezdett mondatot igaz állításhoz jutunk

Általában a HA…, AKKOR… típusú mondat két nyitott helyére a tulajdonságokból és a nevekből tetszőleges összeállításban húzhatunk (a név-név változat is érdekes és talán az összes között a legegyszerűbb), de nem árt előre átgondolni, milyen kártyákat használjunk fel a készletből ehhez a játékhoz, milyen állítások adódhatnak, mert akadhat nehezebb halacska is a horogra.

4. Négyszögek síkon és gömbön

Ha tehetjük, szakítsunk időt arra, hogy párhuzamba állítsuk a négyszögeket síkon és gömbön. Osszunk ki a csoportoknak egy-egy Lénárt-gömböt, amelyen próbálják megrajzolni a síkban megismert négyszögek gömbi megfelelőjét!

Feladatgyűjtemény: 1. – 5. feladat

II. Speciális négyszögek szerkesztése I.

1. Bemelegítés: Mutass be!

Indíthatjuk az órát játékos gyakorlással. Minden csoportnak be kell mutatni egy négyszöget, amelynek nevét sorsolással, vagy a tanár kijelölésével kapnak meg! Történhet a bemutatás úgy, hogy előadásszerűen bemutatják a négyszöget, vagy úgy, hogy mondanak egy tulajdonságot, amely alapján ki kell találni, mely négyszögről lehet szó! Ha még nem tudja senki kitalálni a négyszög nevét, mondanak egy újabb tulajdonságot mindaddig, amíg valaki kitalálja, melyik négyszögről van szó.. A játékidő maximum 15 - 20 perc, ezen belül a felkészülés 5 perc, a bemutatás 2-2 perc csoportonként. A bemutatáshoz osszunk ki nagyobb papírlapot, például csomagoló papírt, színeseket!

2. Szögszámítási feladatok, szerkesztési adatok

A szerkesztési feladatok során fontos tudnivaló, hogy a megadott alakzat megszerkesztéséhez hány adatra van szükségünk. Már hatodik osztályban, és ebben a tanévben is megtapasztaltuk, hogy a háromszögek megszerkesztéséhez maximum 3 (például a három oldal), illetve minimum 1 adatra (egyenlő oldalú háromszög esetén az oldal ismerete), a speciális négyszögek (trapéz, deltoid, paralelogramma) szerkesztéséhez pedig legfeljebb 4, illetve legalább 1 adatra van szükség. Mostani feladatunk ezen ismeretek felelevenítése, rendszerezése és bővítése, mélyítése. Megismertük az euklideszi szerkesztést is, így törekednünk kell arra, hogy tanulóink valóban szerkesszenek, és a szerkesztésük átgondolt, pontos, tiszta, jól követhető legyen.
Első lépésben hívjuk elő az ezekhez szükséges ismereteket. A négyszögek tulajdonságait az előző órán, és az óra elején felelevenítettük. A szerkesztés menete, végrehajtása az óra második részének feladata. Az 1. feladatlap megoldásával a szerkesztéshez szükséges adatokkal foglalkozunk. A csoportok együtt beszélik meg a feladatokat, de mindenki a saját füzetében dolgozik. A 2. feladat megoldásához rajzolják fel egy egy-egy átlátszó lapra (például celofán, fólia) a megadott szögtartományokat, vágják ki (mindegyikből 2-2 darabot), és ezek segítségével próbáljanak speciális négyszögeket kirakni! A 0751 Sokszögek szögei című modulban (I./2. 1. feladatlap 2. feladat) már használtunk ilyen szögtartományokat, amennyiben el tudtuk őket tenni, most ismét elővehetjük. Ehhez osszunk ki írólapokat és ollókat minden csoportnak! Elégedjünk meg egy-egy lehetséges megoldással, csak a leggyorsabbaktól várjuk el az összes megoldás megtalálását! A lassabban haladók ki is hagyhatják ezt a feladatot.
Fontos a 3. feladat is, mert ebben azt vizsgáljuk, hogy szerkeszthető-e négyszög a megadott adatokból. Ennek folytatása a 4. feladat, amelyben azt kell átgondolni most már általánosan, hogy hány és milyen adat birtokában lehet a szerkesztést végrehajtani. Érdemes ezt csoportmunkában megoldatni, majd meghallgatni a kialakult véleményeket. Gyorsabban haladó csoportokban feltétlenül szakítsunk időt ennek vizsgálatára, lassabban haladó

csoportban konkrét szerkesztésekkel vezethetjük rá tanulóinkat, hogy nem mindegy melyik adatot ismerjük.

1. FELADATLAP

1. Legkevesebb hány szög ismerete elegendő, hogy megadd egy négyszög összes szögét? Válaszolj minden speciális négyszög esetében!
Négyzet, téglalap: 0
Rombusz, paralelogramma, húrtrapéz: 1
Trapéz, deltoid: 2
Négyszög: 3.

2. Vágjatok ki átlátszó lapból 2 – 2 darabot a következő szögtartományokból: 135°, 120°, 90°, 60°, 45°. Építs belőlük speciális négyszögeket! Milyet lehet, hogyan; milyet nem lehet?
Nem lehet négyzetet, téglalapot, mert nincs 4 db derékszög.
Előállítható: rombusz, paralelogramma (pl.: 60°, 60°, 120°, 120°; vagy 45°, 45°, 135°, 135°)
húrtrapéz (pl.: 60° ,60°, 120°, 120°; vagy 45°, 45°, 135°, 135°),
derékszögű trapéz: (pl.: 90°, 90°, 60°, 120° vagy 90°, 90°, 45°, 135°)
trapéz, mely nem húr- és nem derékszögű (pl.: 60°, 120°, 45°, 135°)
deltoid (pl.: 90°, 90°, 60°, 120°)

3. Az alábbi esetekben döntsétek el, elegendőek-e az adatok a megadott alakzat megszerkesztéséhez!

a) A négyzet oldala 6 cm.	Igen.
b) A téglalap egyik oldala 7 cm, egyik szöge 90°.	Nem.
c) A szimmetrikus háromszög alapja 4 cm, szára 5 cm.	Igen.
d) A paralelogramma oldalai 5 cm és 3 cm, egyik szöge 100°.	Igen.
e) A rombusz oldala 3,5 dm.	Nem.

4. Hány adat szükséges legalább, illetve legfeljebb egy háromszög, valamint egy négyszög megszerkesztéséhez? Gondoljátok végig, mely adatok birtokában lehet valóban megszerkeszteni
a) a téglalapot;
b) a négyzetet;
c) a rombuszt;
d) a paralelogrammát?

Legalább 1 adat szükséges mindkettőhöz, a háromszöghöz legfeljebb 3, a négyszöghöz legfeljebb 4 adat kell.
a) Téglalapot szerkeszthetünk például, ha ismert két oldala; egy oldala és az átlója; az átlója és az átlók által bezárt szöge.
b) Négyzetet szerkeszthetünk például, ha ismert az oldala; átlója; körülírt köre; beírt köre.
c) Rombuszt szerkeszthetünk például, ha ismert egy oldala és egy szöge; a két átlója; egyik átlója és az átlónak az oldallal bezárt szöge; az oldala és a hozzátartozó magassága.
d) Paralelogrammát szerkeszthetünk például, ha ismert két oldal és a közbezárt szög; két átlója és az átlók által bezárt szöge; két oldala és az egyik magassága; egy oldala, egy szöge és az egyik magassága.

3. Egyszerű szerkesztések, a szerkesztés menete

A szerkesztési feladatoknál nagyon fontos, hogy át tudjuk gondolni a szerkesztés menetét, értsük, és pontosan lássuk, mit, miért hajtunk végre. Ezért nagyon fontos a vázlat megléte, hiszen ebben tervezzük meg a szerkesztés menetét. Szintén lényeges, hogy tanulóink valóban az euklideszi lépéseket alkalmazzák.
A bemelegítő, legegyszerűbb szerkesztési feladatok (2. feladatlap), kiválóan alkalmasak a matematikai nyelvhasználat fejlesztésére. Először készítsünk színes vázlatot az elemzéshez! Jelöljük a vázlaton pirossal azokat az adatokat, melyeket a szöveg megadott, majd sárgával azokat, melyeket ismereteink segítségével mi kikövetkeztetünk, és a szerkesztésben fel fogunk használni! (Így az ábrán sárgával jelennek meg az adottakkal összefüggő adatok. Ez fontos szemléletalakító hatású.) Érdemes a szerkesztés lépéseinek sorrendjét is jelölni a vázlaton, és leírni őket szavakkal.
A szerkesztési vázlat közös elkészítése után a gyerekek megvalósítják a szerkesztést, de adhatjuk ezt házi feladatnak is.
A vázlat készítése közben következő gondolatok kerülhetnek elő:
Ha egy húrtrapéznak van 60°-os szöge, akkor kettő is van, ezek az egyik alapon fekszenek, de nem tudjuk, hogy melyiken, ezért 2 esetet kell vizsgálnunk, 2 vázlatot kell rajzolnunk. Ha a 60°-os szög a nem ismert alapon fekszik, akkor a másik két szögre is szükségünk van*: ezek kiegészítők lévén 120°-osak, és sárgával jelöljük, mert mi számoltuk ki.
* Ez a gondolat nem feltétlen kerül elő a vázlat rajzolásakor, ne sugalljuk! A szerkesztési lépések megtervezésekor a II. esetben a szerkesztés e nélkül elakad. Ha ekkor nincs tanulói ötlet, akkor kérdezzünk! Nem tudnánk-e valamilyen ismeretünket mozgósítani, hogy segítsen? Miért akadtunk el? Azért, mert a szárakról nem tudjuk, hogyan csatlakoznak az adott alaphoz. Nem tudnánk kiszámítani? Ja, persze…most kell a sárga szín a vázlaton, hogy vizuálisan is elkülönüljön az ismeretrendszerünkből előrángatott adat. Ez rejtett adat, a húrtrapéz kifejezés rejtette magába
Az 1. feladat kidolgozott, mintául szolgál a szerkesztésekkel kapcsolatos elvárásokra. Ennek ellenére hajtsák végre a gyerekek is ugyanezt a szerkesztést vagy a kidolgozott minta alapján, vagy anélkül!
A teljes tanulócsoport figyelmének aktivizálására vessük be a „háttal” változatot, és a szerkesztést ezen a módon hajtsuk végre az 1. feladat esetében!
A 2. feladat esetében a színes vázlatot önállóan készítsék el a gyerekek. Ha a terület segítségével nem számolják ki maguktól a magasságot, ne mi javasoljuk! Amikor a vázlat készítése közben elakadnak, akkor jön a kulcskérdés: Felhasználtam-e minden adatot? Van-e rejtett információ? Így már megszületik a megoldási ötlet.

„Telefonos” vagy „háttal” játék

Definíciók megfogalmaztatására is használható. Nehéz nyelvi helyzetekben, amikor a gyerek mutatószók erdejével próbál eligazítani, azt mondjuk, hogy semmit sem látunk, csak telefonon érintkezünk.
Önként vállalkozó (később bárki) adja az utasításokat háttal állva, vagy ülve a táblának, esetleg telefonkagylóval eljátszva, hogy vidékről beszél. A tanár, vagy egy önként jelentkező tanuló szerkeszt, minden pontatlanságot kihasználva ügyetlenkedik. Később erre a szerepre is gyereket kérünk fel. Gondunk legyen rá, hogy a víg kedély ne kinevetésbe torkolljon, hanem vidám formában tanulás legyen az eredménye! A játék igen gyorsan fejleszti mind a nyelvi készséget, mind a pontatlanságok feltárására irányuló figyelmet. A játék lényege megegyezik a 0662 modulban (I/3.) előforduló „Kekec”-játékhoz.
A szerkesztés végrehajtása után vitassuk meg, hány megoldás lehetséges például a „Fejlehajtós szavazás” játék segítségével! Mindig vannak, akik a jobbról, vagy balról felmért hegyesszögekkel alkotott paralelogrammákat különböző megoldásnak gondolják, mert nem

egy irányba „dőlnek”. Ismét beszéljük meg, hogy ha nincsenek helyhez kötött adatok, akkor az egybevágó alakzatok nem különböző megoldások.

Fejlehajtós szavazás

Egy-egy kísérlet kimenetelét megjósoljuk. A jóslatokat tippeket összegyűjtjük a táblán, és eldöntendő kérdés formájában vetjük fel, hogy melyik következik majd be. A gyerekek fejüket lehajtva a padra kézfeltartással szavaznak, így a tekintélyesebbek véleménye nem befolyásolja a többieket, és mindenki állásfoglalásra kényszerül.
Ha csak egy lehetséges kimenetelről akarunk szavaztatni, akkor az álláspontok lehetnek: IGEN, bekövetkezik, NEM következik be, FOGALMAM SINCS. Ez utóbbit vegyük fel a választási lehetőségek közé, mert fontos, hogy megtanuljuk eldönteni, hogy valami nincs, vagy csak nem tudom, hogy van-e. Amikor a gyerekek tippelték meg a lehetséges kimeneteleket, akkor erre nincs szükség.
A szavazati eredményeket csak számszerűen rögzítjük a táblán, ezután végezzük el a kísérleteket, majd a tapasztalatot összevetjük a jóslatokkal. Váratlan fordulatokat tapasztalhatunk.
A játék állásfoglalásra, előre elgondolásra kényszerít, fejleszti a feltételek áttekintésére való képességet, az előrelátást.

A 3. feladatot adjuk önálló munkára! Hasonlít az előző feladathoz, ezért a vázlatok elkészítése nem okoz gondot. Szerkesszék is meg a gyerekek, majd ellenőrizzük „háttal”! Miközben dolgoznak, a tanár az asztalok közt sétálva, kiválaszthatja a háttal szerkesztésre „áldozatát” – lehetőleg olyat, aki nem gondolt mindkét megoldásra, de nem is nagyon félénk (nem az a célunk, hogy szégyenbe hozzuk diákunkat, hanem, hogy tanuljunk).
Háttal szerkesztőnk 4. lépésekor:
1. változat: a köríveket meghúzzuk úgy, hogy mind a négy metszéspont létrejöjjön, akkor is, ha ő ezt nem diktálja. Ezután ő beszél összekötendő pontokról, mi minden lehetséges összekötést elvégzünk, ekkor ő azt mondja kész a trapéz, csakhogy ezt senki sem látja. Közösen keressük a trapézt, közben vita támad a paralelogramma trapéz voltáról, és a megoldások számáról. Végül megegyezünk abban, hogy két különböző megoldásunk van, egy húrtrapéz, és egy paralelogramma.

2. változat: a köríveket úgy húzzuk meg, hogy egy-egy metszéspont jöjjön létre, mégpedig nem azok, melyekre a többség számít, hanem az egyik paralelogramma csúcsai. Innen ismét az előbbi vitában találjuk magunkat.

Nagy valószínűséggel egy óra nem elegendő még gyorsan haladó osztályokban sem a 2. feladatlap minden szerkesztésének elvégzésére, részletes megbeszélésére, ezért a következő órán fejezzük be a feladatlapot! Nem érdemes sietni, hiszen most az a legfontosabb feladatunk, hogy a szerkesztések végrehajtásának lépései rögződjenek, és minél pontosabb, átláthatóbb szerkesztések szülessenek!

2. FELADATLAP

1. Szerkessz szimmetrikus trapézt, melynek egyik alapja 5 cm, van 60°-os szöge, és szára 3 cm!

Először készíts színes vázlatot az elemzéshez! Jelöld a vázlaton pirossal azokat az adatokat, melyeket a szöveg megadott, majd sárgával azokat, melyeket ismereteink segítségével mi kikövetkeztetünk, és a szerkesztésben fel fogunk használni! Jelöld a szerkesztés lépéseinek sorrendjét a vázlaton, és írd is le a lépéseket szavakkal.

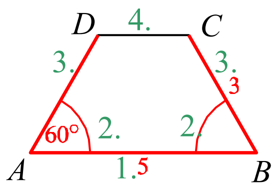
A szerkesztés menete

Adatok
$AB = 5$ cm

$\alpha = 60°$
$AD = BC = 3$ cm

Összefüggések
A szimmetrikus trapéz alapon fekvő két-két szöge egyenlő.
A trapéz egy száron fekvő szögeinek összege 180°.

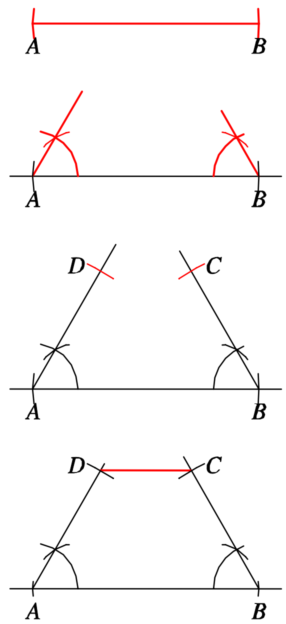
Vázlat
I.



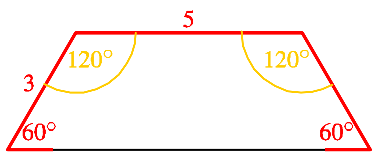
A szerkesztés lépései

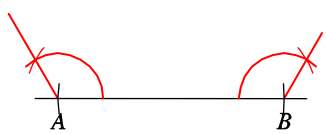
1. Felvesszük az *AB* oldalt (5 cm).
2. Megszerkesztjük a 60°-os szögeket, *A* illetve *B* csúccsal.
3. A szögszárakra felmérem az *AD* illetve *BC* oldal hosszát (3-3 cm).
4. Összekötjük a *CD* pontokat.

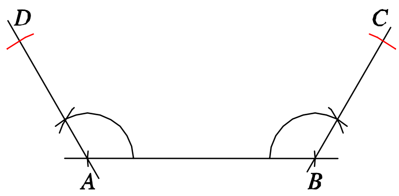
A szerkesztés végrehajtása

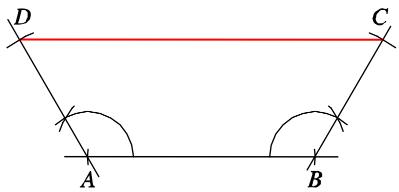


II. A szerkesztés menete megegyezik a I.-ben leírtakkal, annyi különbséggel, hogy a 2. lépésben 120°-os szöget mérünk fel az *AB* szakasz két végpontjába.









2. Szerkessz paralelogrammát, amelynek egyik oldala 6 cm, területe 18 cm^2, és hegyesszöge 45°-os!

A szerkesztés menete

Adatok

AB = 6 cm

α = 45°

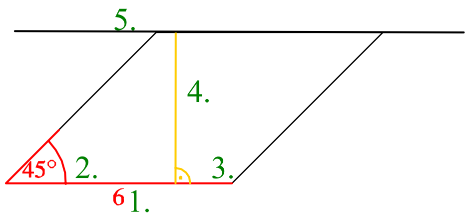
T = 18 cm^2

Összefüggések

A paralelogramma szomszédos szögei kiegészítő szögek.

A paralelogramma területe: $T = a \cdot m_a$

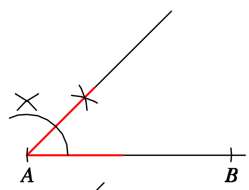
Vázlat

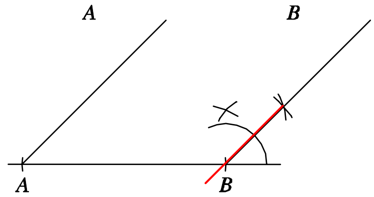


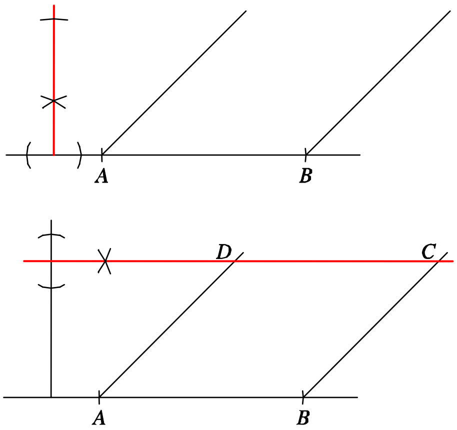
A szerkesztés lépései

1. Felvesszük az AB oldalt (6 cm).
2. Felmérem A csúccsal 45°-os szöget.
3. Az AB oldalon fekvő másik szög 180° - 45° = 135°, melyet megszerkesztünk B csúccsal.
4. A terület segítségével kiszámítjuk az AB oldalhoz tartozó magasságot: 18 cm^2 ÷ 6 cm = 3 cm. Felmérjük m_a-t az AB oldalra szerkesztett merőlegesre.
5. Merőlegest szerkesztünk a magasságra, és ez a merőleges kijelöli a szögszárakon a C és D csúcsot.

A szerkesztés végrehajtása







3. Szerkessz trapézt, egyik alapja 5 cm, magassága 3 cm, szárai 4 cm hosszúak!

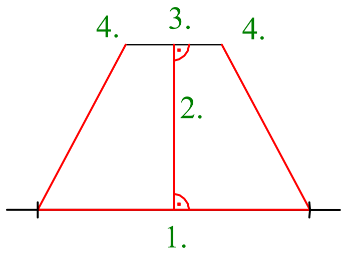
Adatok

AB = 5 cm
m = 3 cm
AD = BC = 4 cm

Összefüggések

A trapéz szárai egyenlők (lehet húrtrapéz is, paralelogramma is).

Vázlat

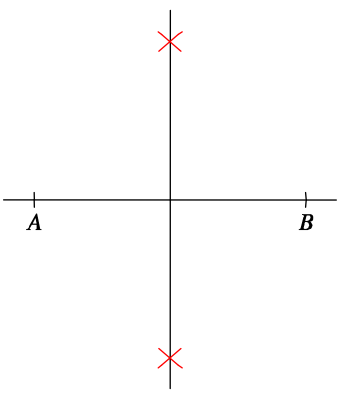


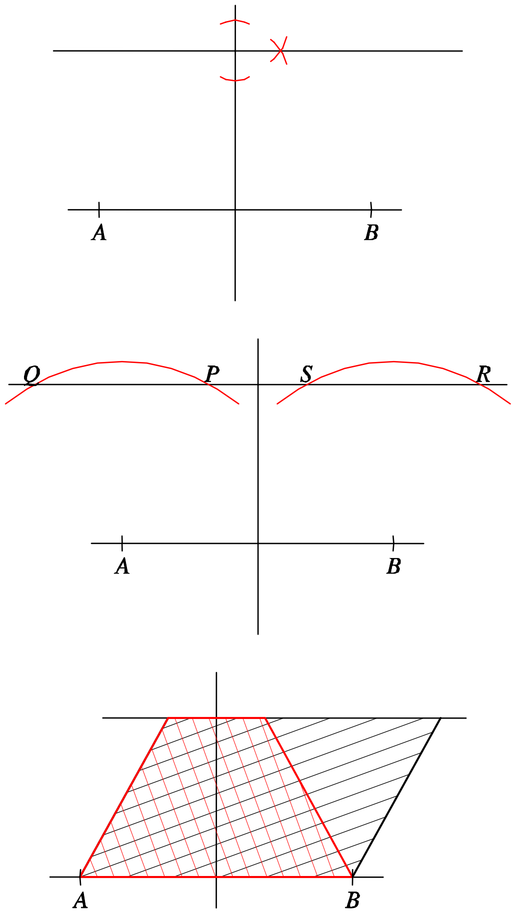
A szerkesztés lépései

1. Felvesszük az AB oldalt (5 cm).
2. Megszerkesztjük az AB felezőmerőlegesét, majd rámérjük a magasságot (3 cm).
3. A magasság végpontjába merőlegest szerkesztünk.
4. Körzőnyílásba vesszük a szár hosszát (4 cm), és az alap végpontjaiba szúrva 3. pont merőlegeséből kimetsszük a trapéz két csúcsát.

Két megoldás van: 1. húrtrapézt kapunk;
2. paralelogrammát kapunk.

A szerkesztés végrehajtása





Feladatgyűjtemény: 6. - 11. feladat

III. Speciális négyszögek szerkesztése

1. A háromszögek nevezetes körei

Amennyiben az előző órán nem tudtuk befejezni a 2. feladatlapot, akkor kezdjünk most ezzel! Ezek után idézzük fel a 6. osztályban a háromszög nevezetes köreiről szerzett tapasztalati ismereteket! Osszunk ki minden csoportnak két darab A4-es lapot, mindkettőre rajzoljanak egy-egy háromszöget! Az egyik háromszögnek próbálják megszerkeszteni a körülírt körét, a másiknak pedig a beírt körét! Célszerű párban dolgozni, így megoszthatják egymás között a munkát, ezzel időt takarítunk meg! Amennyiben szeretnénk, hogy minden háromszög típus esetén megtörténjen a szerkesztés, adjuk meg az egyes csoportoknak, hogy milyen háromszöggel dolgozzanak! Sorsolással is eldönthetjük ezt, ebben az esetben írjuk fel egy-egy papírra a háromszögtípusok nevét, majd a csoportok feladatfelelősei húzzanak egy-egy nevet! Hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a háromszög megfelelő nagyságú legyen! Lassabban haladó csoportoknál esetleg adatokkal együtt adjuk meg a háromszöget! Amikor kész vannak, minden csoport szóvivője mutassa be az elkészült ábrákat! A feladat megoldási ideje 10 perc.

2. A sokszögek nevezetes körei

Miután felidéztük a háromszög nevezetes köreivel kapcsolatos ismereteket, térjünk át a négyszögek (sokszögek) nevezetes köreire! A 3. feladatlap 1. feladata ehhez nyújt segítséget.

Ha időt szeretnénk megtakarítani, akkor ismét páros munkában dolgozzanak! Az egyik páros az a), a másik a b) szerkesztést hajtsa végre, majd mutassák be munkájukat egymásnak!

3. FELADATLAP

1. Szerkessz szimmetrikus trapézt, amelynek

a) egyik alapja 7 cm, szára 4 cm, az ezek által bezárt szög 60°! Szerkeszd meg a körülírt körét!

A 7 cm-es alapra rámérjük mindkét végén a 60°-os szöget, majd a szög száraira a 4 cm-t. Így megkapjuk a húrtrapéz hiányzó csúcsait.
Az oldalfelező merőlegesek metszéspontja a trapéz köré írható kör középpontja.

b) Szerkessz egy négyzetet, amelynek oldala 4 cm! Szerkeszd meg a négyzet beírt körét!

A négyzet megszerkesztéséhez felvesszük a 4 cm hosszú szakaszt, mindkét végpontjába merőlegest állítunk, amelyekre felmérjük a 4-4 cm-t. Végül összekötjük az így kapott két pontot. A négyzet érintőnégyszög, mivel oldalai érintői a beírt körének. A beírt kör középpontja a négyzet szögfelezőinek metszéspontja, sugara pedig a kör középpontjából a négyzet oldalára bocsátott merőleges szakasz hossza (a négyzet oldalfelező merőlegesének megszerkesztése kijelöli ezt a szakaszt.).

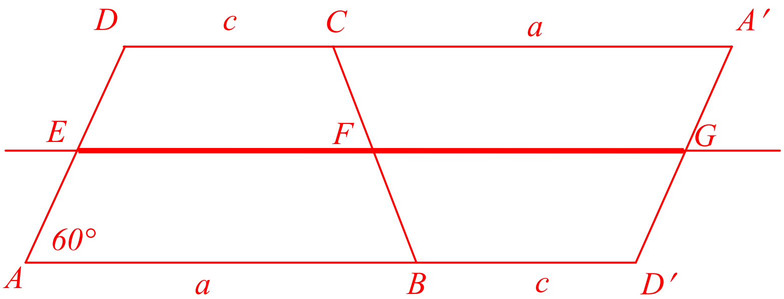
c) Szerkessz egy 3 cm sugarú kör köré négyzetet!

Érintőnégyszöget kell szerkeszteni. Tudjuk, hogy az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért szerkesszük meg a kör két, egymásra merőleges átmérőjét, majd a köríven így kijelölt négy érintési ponthoz szerkesszük meg az érintőket (merőlegest állítunk az átmérőre)! A négy érintő metszéspontjai a keresett négyzet csúcsai.

2. Szerkessz trapézt, melynek egyik alapja 6 cm, szárai 4 cm, az általuk bezárt szög 60°!

a) Szerkeszd meg az egyik szárának felezőpontját, majd tükrözd erre a pontra a trapézt! Milyen alakzatot határoz meg az eredeti trapéz és a tükörképe? Mekkorák ennek az alakzatnak az oldalai?

b) Rajzolj a tükörközépponton átmenő, a trapéz alapjaival párhuzamos egyenest! Milyen hosszú annak a szakasznak a hossza, amelyet az eredeti trapéz metsz ki a párhuzamos egyenesből?



a) A trapéz és tükörképe együtt egy paralelogrammát alkot, amelynek egyik oldala a trapéz két alapjának összegével ($a + c$), a másik oldala a trapéz szárának hosszával egyezik meg.

b) A párhuzamos egyenes EG szakaszának hossza a paralelogramma egyik oldalával egyenlő: $a + c$. Mivel E és F pontok egymásnak középpontos tükörképei, ezért $EF = FG = (a + c) : 2$. Az EF szakasz a trapéz középvonala.

3. Szerkessz deltoidot, ha

a) egyik oldala 5 cm, az oldalon fekvő két szög 120° illetve 45°! Két megoldás van.

1). Az 5 cm-es oldalból kiindulva, felmérjük a szakasz egy-egy végpontjába a 120°-os illetve a 45°-os szöget. Az 45°-os szög szárára ismét felmérünk 5 cm-t, s ennek végpontjában megszerkesztjük a 120°-os szöget. A két 120°-os szög szárainak metszéspontja lesz a deltoid negyedik csúcsa.
2) Ugyanúgy indulunk ki, mint az előbb, de most a 120°-os szög másik szárára mérjük fel az 5 cm-t, s ennek végpontjába a 45°-os szöget. Most a két 45°-os szögszár metszéspontja lesz a negyedik csúcs.

b) szimmetriaátlója 8 cm, a másik átló 6 cm, egyik oldala 45 mm!

Egy megoldás van. A 6 cm-es átlóból indulunk ki, melynek megszerkesztjük a felezőmerőlegesét, ez lesz a szimmetriaátló egyenese. A 6 cm hosszú átló egyik végpontja köré rajzolt, 45 mm sugarú körívvel elmetsszük a felezőmerőlegest. Az így kapott metszéspont a deltoid harmadik csúcsa, melyből kiindulva felmérjük a szimmetriaátló egyenesére a 8 cm-t. Ezzel megkapjuk a negyedik csúcsot is.

4. Szerkessz húrtrapézt, amelynek

a) alapja 9 cm, szára 4 cm, átlója 8 cm

A 9 cm-es alap egyik végpontjából 8 cm-es körívet rajzolunk, a másik végpontból pedig 4 cm sugarú körívvel elmetsszük az előző körívet. Ez a metszéspont lesz a harmadik csúcs. Az eljárást megismételjük fordított körív méretekkel. Így megkapjuk a negyedik csúcsot is.

b) alapjai 5 cm és 3 cm, szára 4 cm.

Megrajzoljuk az 5 cm-es alapot, és mindkét végpontja körül rajzolunk egy-egy 4 cm-es körívet. Megszerkesztjük az alap felezőmerőlegesét, melyre tetszőleges magasságban, egy merőlegest állítunk. Erre a felezőmerőlegessel közös pontjából mindkét irányba felmérünk 1,5 cm-t, s az így kapott pontokban ismét állítunk egy-egy merőlegest. Ezen merőlegeseknek az 5 cm-es alap végpontjai köré rajzolt 4-4 cm-es körívekkel alkotott metszéspontja határozza meg a hiányzó csúcsokat.

5. Szerkessz rombuszt, amelynek

a) átlói 6 cm és 4 cm;

Felveszünk két, egymásra merőleges egyenest, és a metszéspontjukból mindkét irányban felmérünk az egyikre 3 – 3 cm-t, a másikra 2 – 2 cm-t. Az így kapott négy pontot összekötve jutunk a keresett rombuszhoz.

b) oldala 55 mm, egyik szöge 70°;

A megadott oldal egyik végpontjában felmérjük a 70°-os szöget, melynek szögszárára pedig felmérjük az 55 mm-t. A 70°-os szög két szárán lévő pontokból 55 mm-es körívet szerkesztünk. Ezek metszéspontjánál van a rombusz 4. csúcsa.

c) rövidebbik átlója 5 cm, egyik szöge 105°!

Megszerkesztjük a 105°-os szöget, s ennek szögfelezőjét. A szögfelező egyenesére rámérjük az átló hosszát, 5 cm-t. Az így kapott pontban párhuzamost húzunk a 105°-os szög mindkét szárával. Ezek a párhuzamosok kimetszik a szögszárakon a hiányzó csúcsokat.

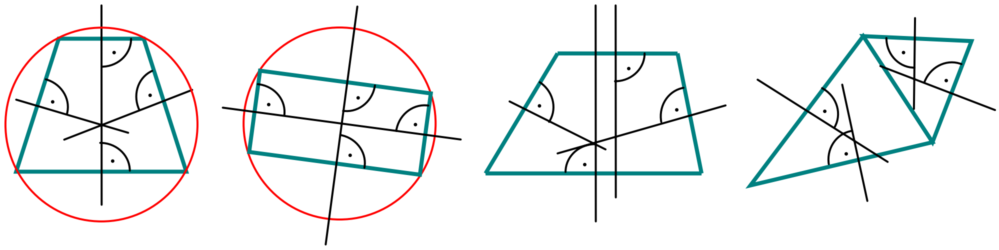
3. Vegyes szerkesztési feladatok

Az óra hátra lévő részében további szerkesztéseket végzünk. A 3. feladatlap 2. feladatában bevezetjük a trapéz középvonalának fogalmát, amelyre később szükségünk lesz. Amennyiben nem tudjuk befejezni az órán a szerkesztéseket, adjuk házi feladatnak!

ÖSSZEGZÉS:

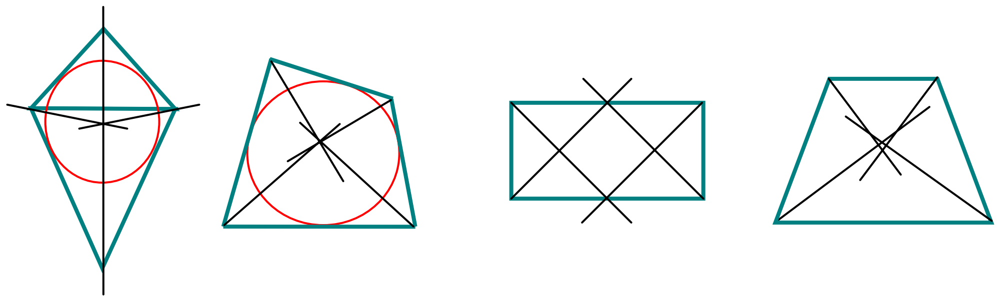
A sokszögek nevezetes körei

A konvex négyszög oldalfelező merőlegesei és a négyszög köré írt köre



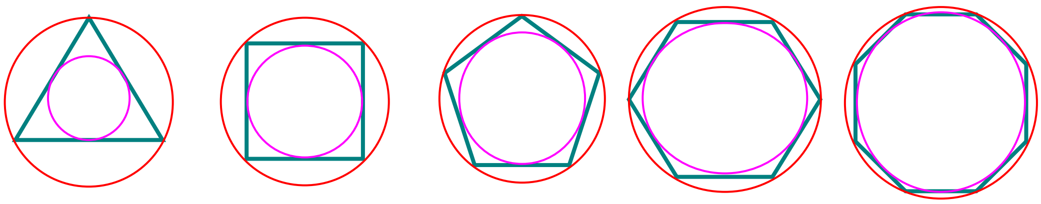
Ha a konvex négyszög oldalfelező merőlegesei egy ponton mennek át, akkor ez a pont a négyszög köré írt körének a középpontja.
Húrnégyszögeknek nevezzük azokat a négyszögeket, amelyeknek van köré írt körük.

A konvex négyszög belső szögfelezői és a négyszög beírt köre.



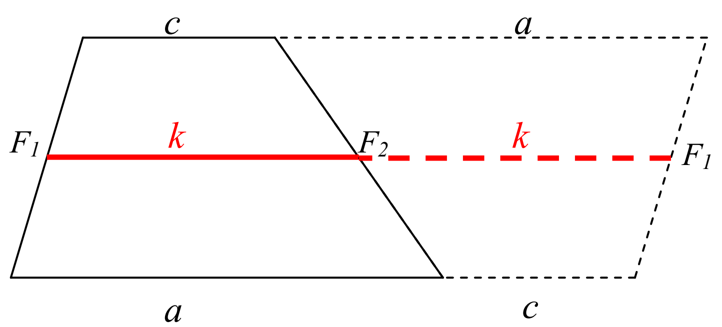
Ha a konvex négyszög belső szögfelezői egy ponton mennek át, akkor ez a pont a négyszög beírt körének középpontja.
Érintőnégyszögeknek nevezzük azokat a négyszögeket, amelyeknek van beírt körük.

Hasonlóan beszélhetünk húrsokszögekről és érintősokszögekről.
A szabályos sokszögeknek van köré írt és beírt köre is.



A trapéz középvonala

A trapéz két szárának felezőpontját összekötő szakaszt a trapéz középvonalának nevezzük. A középvonal párhuzamos az alapokkal, hosszúsága a két alap hosszának számtani közepe.



$$k = \frac{a+c}{2}$$

Feladatgyűjtemény: 12. – 18. feladat

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Mely négyszögekre igazak a következő tulajdonságok?

A: trapézok
B: szimmetrikus trapézok
C: paralelogrammák
D: téglalapok
E: rombuszok
F: négyzetek
G: deltoidok

a) Tengelyesen szimmetrikusak	B; D; E; F; G.
b) Középpontosan szimmetrikusak.	C; D; E; F
c) Van két egyenlő oldaluk.	B; C; D; E; F; G
d) Van két egyenlő szögük.	B; C; D; E; F; G
e) Minden oldaluk egyenlő.	E; F
f) Minden szögük egyenlő.	D; F
g) Van csúcson átmenő szimmetriatengelyük.	E; F; G
h) Két szomszédos szögük egyenlő.	B; D; F
i) Két szemközti szögük egyenlő.	C; D; E; F
j) Van két párhuzamos oldal párjuk.	A; B; C; D; E; F
k) Két szomszédos szögük 180°-ra egészíti ki egymást.	B; C; D; E; F
l) Átlóik merőlegesek egymásra.	D; E; F; G
m) Átlóik felezik egymást.	C; D; E; F

2. Rajzold meg egy szimmetrikus trapéz, egy paralelogramma és egy nem szimmetrikus trapéz egyik átlóját! Van-e a keletkezett két-két háromszög között egybevágó?
A paralelogrammát átlója két egybevágó háromszögre bontja. A másik két esetben nem kapunk egybevágó háromszögeket.

3. Melyik fajta négyszögre igaz, hogy az egyik átlója két egybevágó háromszögre bontja? Válaszodat indokold!
A paralelogrammára.

4. Melyik fajta négyszögre igaz, hogy a két átlója két-két egybevágó háromszögre bontja? Válaszodat indokold!
A paralelogrammára.

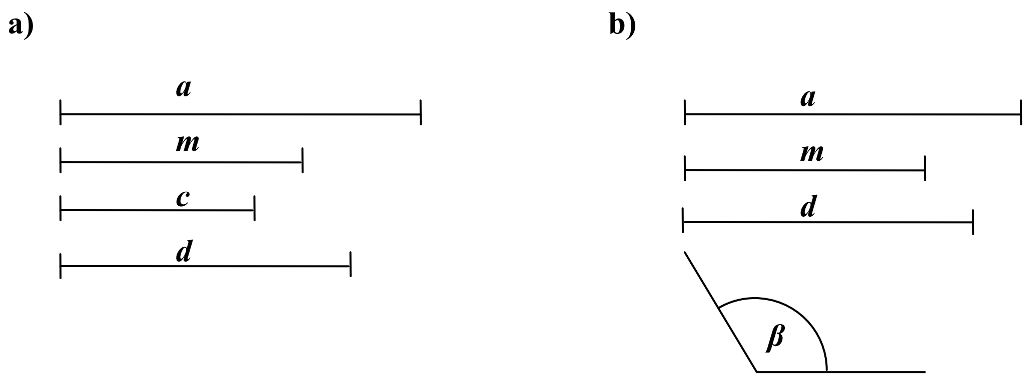
5. Melyik fajta négyszögre igaz, hogy a két átlója négy egybevágó háromszögre bontja? Válaszodat indokold!
A rombuszra.

6. Szerkessz rombuszt az alábbi adatok felhasználásával! Készíts színes vázlatot az adatok elemzéséhez, és szerkesztési vázlatot is! Minden esetben vizsgáld meg a megoldások számát!
a) Oldala 4 cm, hegyesszöge 45º; Egy megoldás van.
b) Oldala 5 cm, magassága 4 cm; Egy megoldás van.
c) Oldala 5 cm, magassága 5 cm; Négyzet lesz.
d) Oldala 4 cm, magassága 5 cm; Lehetetlen.
e) Oldala 5 cm, egyik átlója 7 cm; Egy megoldás van.
f) Átlói 5 cm, illetve 6 cm hosszúak. Egy megoldás van.
Az e) és f) feladatokhoz rajz a feladatgyűjtemény végén található.

7. Szerkessz trapézt! Tudod róla, hogy
a) húrtrapéz, és alapja 8 cm, átlója 6,8 cm, magassága 4,5 cm; Egy megoldás van.
b) húrtrapéz, amelynek három oldala 5 cm, egyik szöge 75°; Két megoldás van: a hosszabb alap és a szárak 5 cm-esek, vagy a rövidebb alap és a szárak 5 cm-esek.
c) derékszögű trapéz, amelynek alapjai 4 cm, ill. 6 cm, egyik átlója 7 cm; Két megoldás van.
d) húrtrapéz, egyik szöge 60°, innen induló átlója 8 cm, egy alapja 5 cm; Egy megoldás van.
e) 5 cm-es alapján fekvő két szöge 60°és 75°, magassága 3 cm; Egy megoldás van.
f) egyik alapja 3 cm, átlói 5 cm és 6 cm-esek, magassága 3,5 cm; Egy megoldás van.
g) egyik alapja 5 cm, magassága 3 cm, szárai 4 cm és 5 cm-esek; Három megoldás van.
h) egyik alapja 5 cm, magassága 3 cm, szárai 4 cm és 3,5 cm-esek; Egy megoldás van.
i) két alapja 5 cm és 3 cm, két átlója 4 cm és 5 cm; Egy megoldás van.
j) két átlója 5 cm és 6 cm, átlóinak szöge 60°, egyik alapja 5,7 cm; Egy megoldás van.
k) alapjai 2 cm és 5 cm, egyik átlója 4 cm, az átlók által bezárt szög 60°. Egy megoldás van.
A c) d) f) g) i) j) k) feladatokhoz rajz a feladatgyűjtemény végén található.

8. Szerkessz deltoidot! Tudod róla, hogy
a) két oldala 2,4 cm és 3,2 cm és a szimmetriaátlója 4 cm. Egy megoldás van.
b) két oldala 2,4 cm és 3,2 cm és a nem szimmetriaátlója 4 cm. Egy megoldás van.

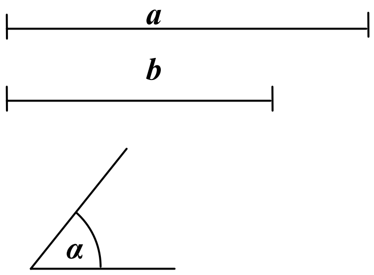
9. Szerkessz trapézt a következő adatokból!



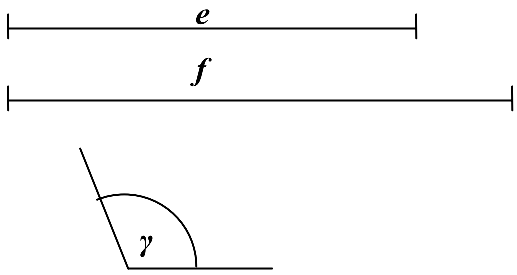
a és *c* a trapéz alapjai, *b* és *d* a szárai; *m* a magassága; *β* az *a* és *b* oldal által bezárt szög
Mind a két esetben egy megoldás van.

10. Szerkessz paralelogrammát a következő adatokból!

a)



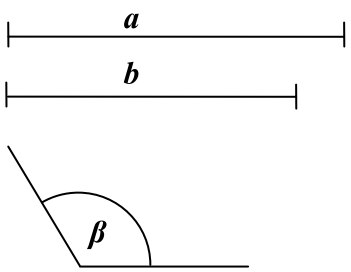
b)



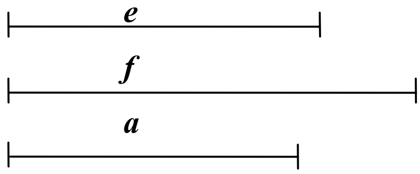
a a paralelogramma egyik oldala; *e* a hosszabb átló, *f* a rövidebb átló; *α* a paralelogramma egyik szöge, *γ* az átlók által bezárt szög. Mind a két esetben egy megoldás van.

11. Szerkessz deltoidot a következő adatokból!

a)



b)



a, *b* a deltoid oldalai; *e* és *f* az átlói; *β* a két oldal által bezárt szög

12. Rajzold meg egy nem szimmetrikus trapéz, egy szimmetrikus trapéz, egy paralelogramma és egy téglalap oldalfelező merőlegeseit! Hány pontban metszik egymást az oldalfelező merőlegesek? Próbáld megindokolni tapasztalataidat!
Kettő pontban metszik egymást a nem szimmetrikus trapéz és a paralelogramma esetén, egy pontban metszik egymást a másik két esetben. Azoknál a négyszögeknél, ahol egy metszéspont van, az átlók egyenlő hosszúak.

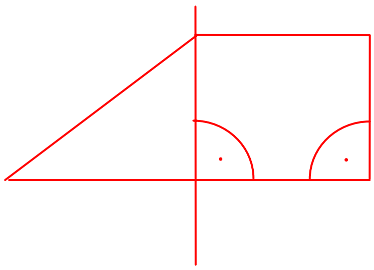
13. Rajzold meg egy szimmetrikus trapéz, egy paralelogramma és egy rombusz szögfelezőit! Hány pontban metszik egymást a szögfelezők?
A paralelogrammánál kettő, a rombusznál egy, a szimmetrikus trapéznál – ha a szimmetrikus trapéz egyenlő oldalú – egy pontban metszik egymást, minden más esetben kettő pontban.

a) Van-e olyan szimmetrikus trapéz, amelynek szögfelezői egy pontban metszik egymást?
Igen, ha a szimmetrikus trapéz egyenlő oldalú.

b) Van-e olyan nem szimmetrikus trapéz, amelynek szögfelezői egy pontban metszik egymást? Nincs.

14. Rajzolj trapézt, amelynek átlója – mindkét összekötött csúcsnál lévő szögre – szögfelező is! Olyan trapéz, amelynek van csúcson áthaladó szimmetriatengelye: rombusz, négyzet

15. Rajzolj olyan trapézt, amelynek valamelyik oldalfelező merőlegese átmegy a trapéz valamelyik csúcsán, és párhuzamos valamelyik szárral!
Olyan derékszögű trapéz, amelyben az egyik alap hossza kétszerese a másik alap hosszának.



16. Rajzolj olyan trapézt, amely középvonalának hossza

a) egyenlő az egyik alapjával!

b) egyenlő mindkét alapjával!

a) Ha a középvonal az egyik alappal egyenlő, akkor a másikkal is egyenlő. Paralelogramma.

b) Paralelogramma.

17. Lehet-e húrnégyszög

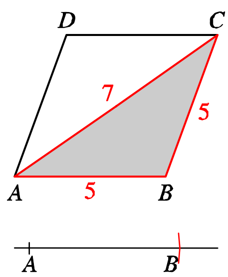
a) egy konvex deltoid;	Lehet, például a négyzet.
b) egy paralelogramma;	Lehet, például a téglalap és a négyzet.
c) egy téglalap;	Igen.
d) egy rombusz;	Lehet, például a négyzet.
e) egy konkáv deltoid?	Nem.

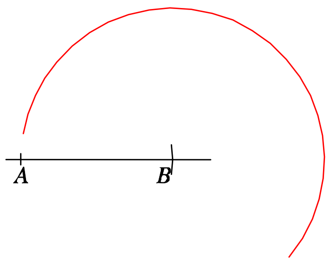
18. Lehet-e érintőnégyszög

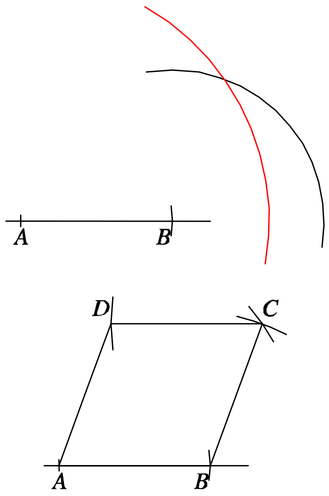
a) egy konvex deltoid;	Igen.
b) egy paralelogramma;	Lehet, például a négyzet.
c) egy téglalap;	Lehet, például a négyzet.
d) egy rombusz;	Lehet, például a négyzet.
e) egy konkáv deltoid?	Nem.

Néhány szerkesztési feladat megoldásának vázlata

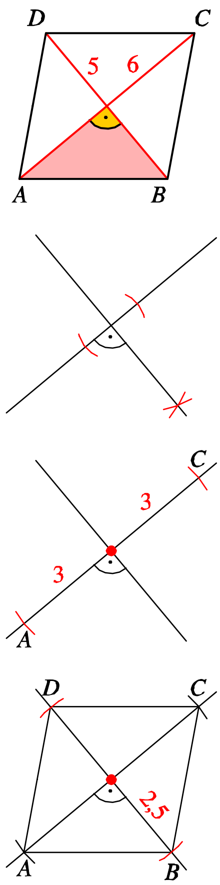
6. e)



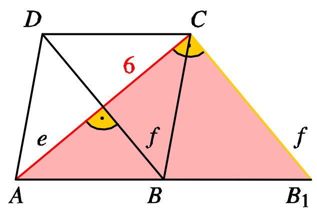


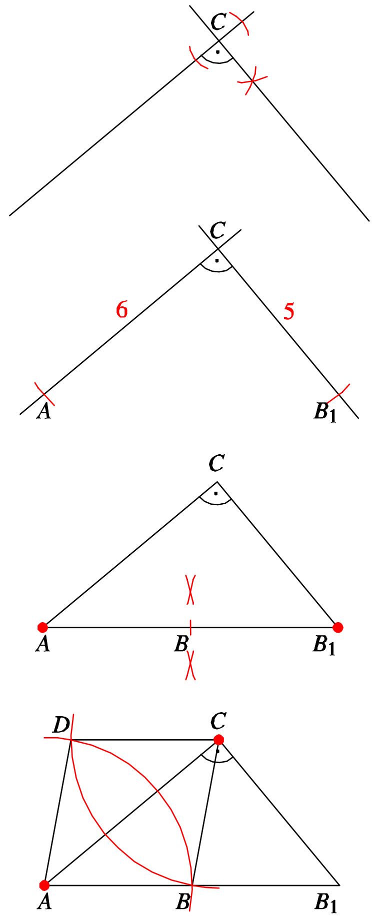


6. f) I. szerkesztés

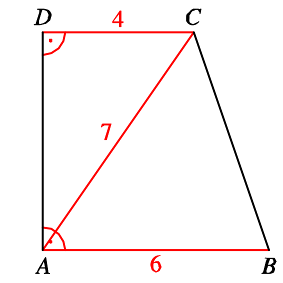


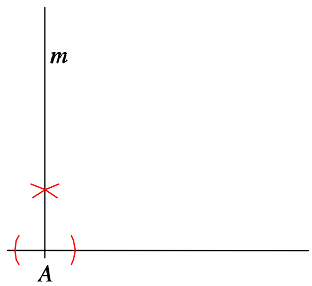
6. f) II. szerkesztés

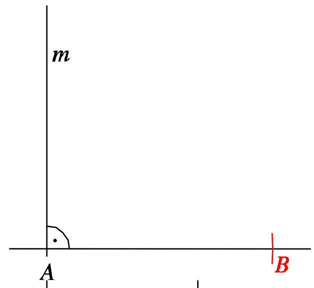


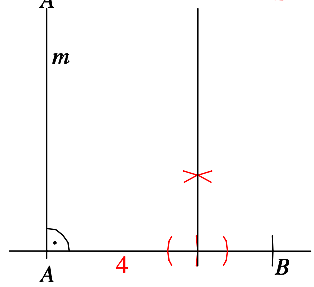


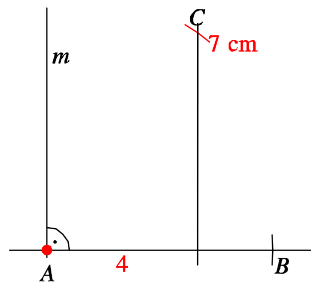
7. c) I. megoldás

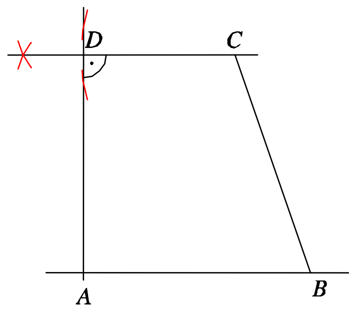




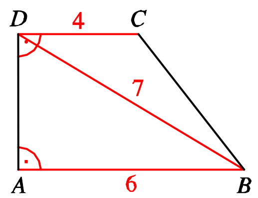


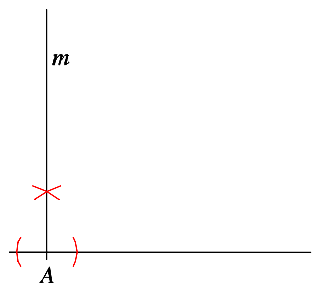


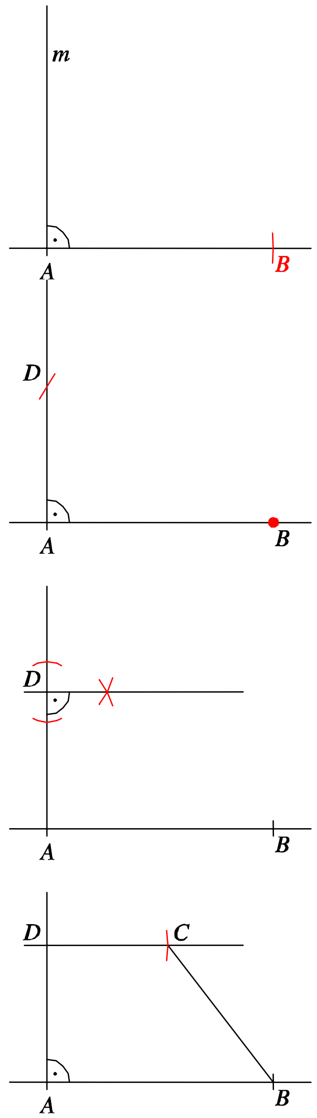




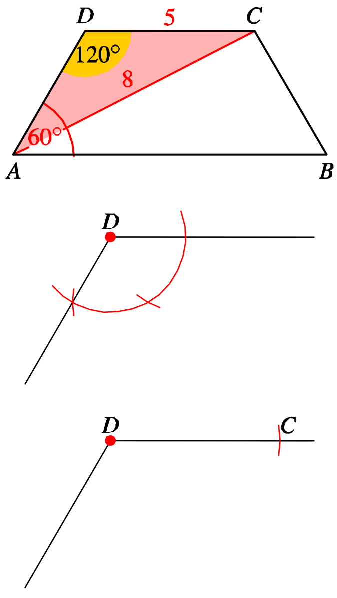
7. c) II. megoldás

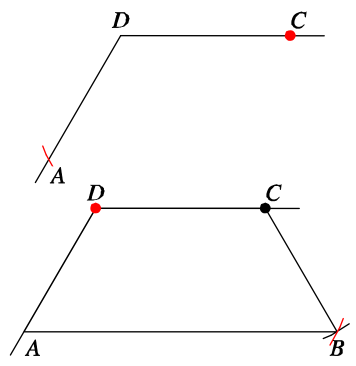




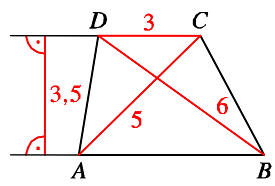


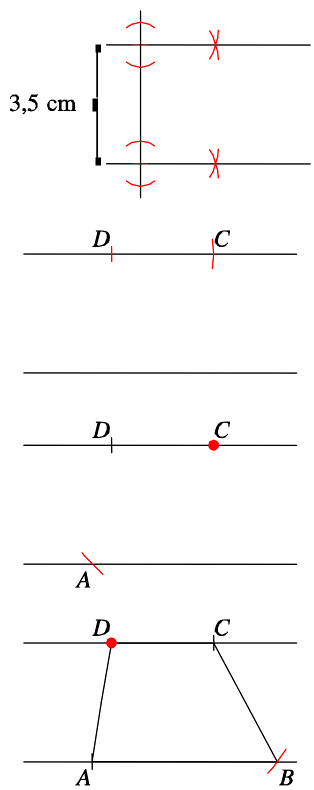
7. d)



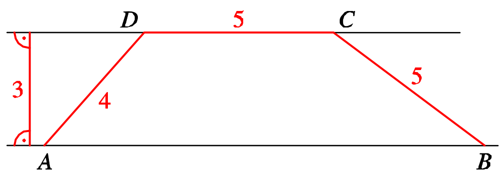


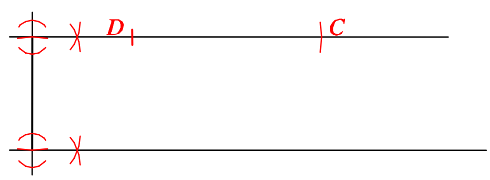
7. f)

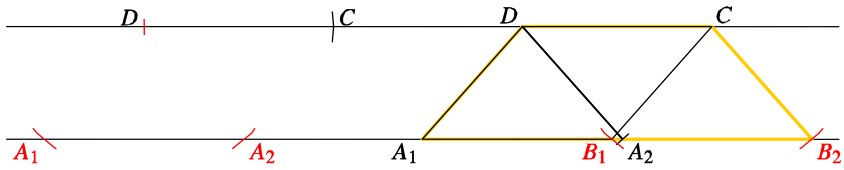




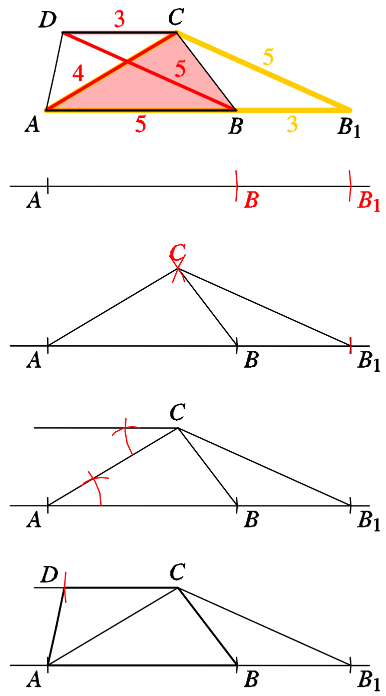
7. g)



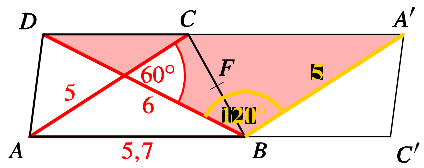




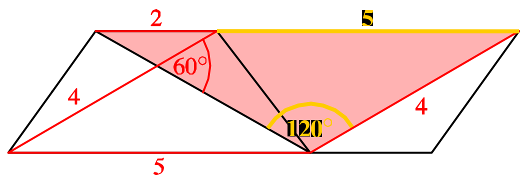
7. i)



7. j) vázlat



7. k) vázlat



0753 – 1. a. tanulói melléklet (7 db kártya)

Osztályonként 32 készlet (tanulónként 1 készlet) nagyobb méretben kartonpapírra nyomva. Ki kell vágni a fekete vonalak mentén.

Négyszög, amelynek van párhuzamos oldal párja.	**Négyszög, amelynek szemközti oldalai párhuzamosak.**	**Négyszög, amelynek minden oldala egyenlő.**	**Négyszög, amelynek minden szöge egyenlő.**
Négyszög, amelynek van csúcson átmenő szimmetriatengelye.	**Tengelyesen szimmetrikus négyszög, amelynek tükörtengelye oldalfelező merőleges.**	**Szabályos négyszög.**	

0753 – 1. b. tanulói melléklet (2 db kártya)

Osztályonként 32 készlet (tanulónként 1 készlet) nagyobb méretben kartonpapírra nyomva. Ki kell vágni a fekete vonalak mentén.

MINDEN NÉGYSZÖG	**NINCS ILYEN NÉGYSZÖG**

0753 – 2. tanári melléklet, Négyszögek (43 db kártya)
Osztályonként 1 készlet nagyobb méretben (tábláról jól látható legyen) kartonpapírra nyomva. Ki kell vágni a fekete vonalak mentén.

Átlói merőlegesek	**Van két egyenlő szöge**	**Van szimmetria-centruma**	**Átlói merőlegesek és felezik egymást**
Van két szomszédos szöge, amely egyenlő	**Tengelyesen is, középpontosan is szimmetrikus**	**Átlói felezik egymást**	**Van három egyenlő szöge**
Két szimmetria-centruma van	**Átlói nem merőlegesek**	**Pontosan három szöge egyenlő**	**Két szimmetriatengelye van**
Átlói nem felezők	**Szemben lévő szögei egyenlők**	**Nincs hegyesszöge**	**Átlói merőlegesek, de nem felezik egymást**

Két-két szomszédos szöge egyenlő	**Pontosan három oldala egyenlő**	**Átlói felezik egymást, de nem merőlegesek**	**Van derékszöge**
Csak derékszöge van	**Minden oldala egyenlő**	**Minden szöge egyenlő**	**Minden szöge hegyesszög**
Van két egyenlő oldala	**Van szimmetria-tengelye**	**Bármely két szögének összege 180°**	**Szemben lévő oldalai egyenlők**
Két-két szögének összege 180°	**Bármely két szomszédos szögének összege 180°**	**Van két szomszédos oldala, amely egyenlő**	**Két homorúszöge van**

Annyi tompaszöge van, ahány hegyesszöge, és konvex	**Két-két szomszédos oldala egyenlő**	**Pontosan három szöge derékszög**	**Van homorúszöge**
Van három egyenlő oldala	**Van két derékszöge**	**Nincs tompaszöge**	**Van szimmetriaátlója**
Van oldalfelező merőleges szimmetriatengelye	**Van olyan kör, amely minden csúcsán áthalad**	**Van olyan kör, amely minden oldalát érinti**	

0753 – 3. tanári melléklet (egy-egy állítás 30 db papírcsíkon)
Osztályonként 1 készlet nagyobb méretben (tábláról jól látható legyen) kartonpapírra nyomva.
Szét kell vágni a fekete vonalak mentén. A háttérszínnek nincs jelentősége.

A NÉGYSZÖGNEK VAN PÁRHUZAMOS OLDAL PÁRJA
A NÉGYSZÖGNEK VAN KÉT EGYENLŐ SZÖGE
A NÉGYSZÖG SZEMKÖZTI OLDALAI PÁRHUZAMOSAK
A NÉGYSZÖG ÁTLÓI FELEZIK EGYMÁST
A NÉGYSZÖG ÁTLÓI EGYENLŐ HOSSZÚAK
A NÉGYSZÖG ÁTLÓI MERŐLEGESEK EGYMÁSRA
A NÉGYSZÖG SZOMSZÉDOS OLDALAI EGYENLŐK
A NÉGYSZÖG SZEMKÖZTI OLDALAI EGYENLŐK

A NÉGYSZÖG TENGELYESEN SZIMMETRIKUS
A NÉGYSZÖG KÖZÉPPONTOSAN SZIMMETRIKUS
A NÉGYSZÖG SZÖGEI EGYENLŐK
A NÉGYSZÖGNEK VAN KÉT EGYENLŐ OLDALA
A NÉGYSZÖG SZOMSZÉDOS SZÖGEINEK ÖSSZEGE 180°
A NÉGYSZÖG PARALELOGRAMMA
A NÉGYSZÖG DELTOID
A NÉGYSZÖG TRAPÉZ
A NÉGYSZÖG ROMBUSZ

A NÉGYSZÖG OLDALAI MERŐLEGESEK EGYMÁSRA
A NÉGYSZÖG TÉGLALAP
A NÉGYSZÖG NÉGYZET
A NÉGYSZÖG PARALELOGRAMMA
A NÉGYSZÖG OLDALAI EGYENLŐK
A NÉGYSZÖGNEK PONTOSAN EGY SZIMMETRIATENGELYE VAN
A NÉGYSZÖGNEK NÉGY SZIMMETRIATENGELYE VAN
A NÉGYSZÖG ÁTLÓI FELEZIK A SZÖGEKET
A NÉGYSZÖGNEK VAN ÁTLÓJA, AMELY EGYBEN SZÖGFELEZŐ IS

A NÉGYSZÖG SZEMKÖZTI SZÖGEI EGYENLŐK
A NÉGYSZÖGET ÁTLÓJA KÉT TÜKRÖS HÁROMSZÖGRE BONTJA
A NÉGYSZÖG ÁTLÓI MERŐLEGESEN FELEZIK EGYMÁST
A NÉGYSZÖGNEK VAN CSÚCSON ÁTMENŐ TÜKÖRTENGELYE