0752. MODUL

HÁROMSZÖGEK, SOKSZÖGEK

Háromszögek szerkesztése, egybevágósága

KÉSZÍTETTE: JAKUCS ERIKA, TAKÁCSNÉ TÓTH ÁGNES

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Háromszögek szerkesztése. Háromszögek egybevágóságának alapesetei.
Időkeret	3 óra
Ajánlott korosztály	7. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Ajánlott megelőző tevékenységek:* Alapszerkesztések ismerete, a kör, mint mértani hely ismerete, Két halmaz közös részének fogalma, a közös részbe tartozó elemek jellemző tulajdonságának megfogalmazása **6. osztály**: Síkidomok 0661-0664 *Ajánlott követő tevékenységek:* Összetett szerkesztési, bizonyítási feladatok, mértani hely keresés, -szerkesztés **7. osztály**: Speciális négyszögek 0753 **8. osztály**: Geometriai ismétlés 0851-0852
A képességfejlesztés fókuszai	*Matematikai nyelvhasználat.* *Logikai képességek:* összes eset keresése –indoklások; állítások összekötése *és*-sel, *vagy*-gyal *Személyiségfejlesztés:* vitahelyzetben a türelem, a tolerancia fejlesztése. *Rendszerezés, kombinativitás:* háromszögek csoportosítása különböző szempontok szerint, a szerkesztés lépéseinek megtervezése, több megoldás keresése szerkesztési feladatok megoldása során *Deduktív, induktív következtetés:* tapasztalatgyűjtés; egyes háromszögek tulajdonságainak meghatározásából következtetés a hasonló háromszögek tulajdonságaira; a háromszögek egybevágóságának eseteire; igaz-hamis állítások; geometriai összefüggések alkalmazása szerkesztéskor; geometriai jelrendszer-használat, tapasztalatra épülő általánosítás, bizonyítás; definíció – tulajdonság különbségtétel fokozatos alapozása *Beszédkészség, szövegértés:* összefüggések felismerése szövegből illetve összefüggések pontos, szabatos megfogalmazása, szöveg alapján rajzkészítés

AJÁNLÁS

Az órákon vegyesen alkalmazzuk az egyéni, frontális és csoportmunkát. A munkaformák szervezése főként kooperatív legyen, így tanulóink elsajátíthatják a megfelelő együttműködési szabályokat. Ezzel szociális készségeik is fejlődnek. A csoportokban kb. négyen dolgozzanak, gondoskodjunk a kényelmes elhelyezkedésről, emellett a táblát is jól kell látnia minden tanulónak. A csoportmunkában fontos az egymás véleményének tiszteletben tartása, a másik fél türelmes meghallgatása, a vita pozitív menete. Nélkülözhetetlen főleg az új fogalmak megismerése során a tapasztalatszerzés, az észrevételek megfogalmazása. Ugyanakkor elengedhetetlen a pontosítás, ezt a legtöbb esetben frontálisan tehetjük meg.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Mobil körök, egyenesek – tanári és diákkészlet. Kérdések papírcsíkon – táblai applikáció; csomagolópapír, vastag filc. Táblai háromszög és sokszorosított másolatai.

ÉRTÉKELÉS

A csoportok munkáját folyamatosan ellenőriznünk és értékelnünk kell, ha szükséges segítsünk, és feltétlenül pontosítsunk. Igyekezzünk pozitívan értékelni, ne vegye kedvét tanulóinknak a hibázás lehetősége, mindig érezniük kell, hogy a hiba önmagában nem feltétlenül jelent bajt. Nagyobb problémát okoz, ha nem vagyunk hajlandóak észrevenni és kijavítani hibáinkat. Ugyanakkor követeljük meg a pontos, igényes, fegyelmezett munkavégzést. Az egyéni munkavégzést is értékeljük legalább szóban. A hiányosságok pótlására feltétlenül differenciáljuk, a házi feladatok kiadásánál is figyeljünk az egyéni igényekre.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. Háromszögek szerkesztése			
1.	Bemelegítés: A háromszögek tulajdonságai (füllentős játék; „kerekasztal”)	Emlékező-, rendszerező képesség, kombinativitás	írólap
2.	Az euklideszi szerkesztés (emlékeztető)	Rendszerező képesség, Induktív gondolkodás, rajzkészség	Körző, vonalzó
3.	Milyen adatokból szerkeszthető háromszög?	Rendszerező képesség, induktív, deduktív következtetés, becslés, ismétlés	Körző, vonalzó, 1. tanári melléklet (Háromszögek), 1. feladatlap, másolópapír
4.	A szerkesztések végrehajtása	Becslés, mérés, rajzkészség, szerkesztési készség, következtetések	1. feladatlap befejezése, 0664 2. tanári melléklete (mobilkörök)
II. Háromszögek egybevágóságának alapesetei			
1.	Háromszögek egybevágóságának alapesetei	Becslés, mérés, rajzkészség, szerkesztési készség, következtetések	1. feladatlap befejezése, másolópapír, körző, vonalzó
2.	A háromszögek szerkeszthetőségének egyértelműsége (csoportkonzultáció)	Rendszerező képesség, kombinativitás, induktív, deduktív következtetések	2. feladatlap

III. Vegyes szerkesztési feladatok			
1.	A háromszögek szerkeszthetőségének egyértelműsége (gyakorlás)	Rendszerező képesség, kombinativitás, induktív, deduktív következtetések	Körző, vonalzó, 3. feladatlap 1. feladat
2.	Vegyes szerkesztési feladatok		Körző, vonalzó, a 3. feladatlap többi feladata

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Háromszögek szerkesztése

1. Bemelegítés: A háromszögek tulajdonságai

A háromszögek csoportosításával, tulajdonságaival 6. osztályban megismerkedtünk, ezért itt az ismeretek felelevenítésére van szükség. Ezt megtehetjük például a füllentős játékkal, amelyben minden csoport megfogalmaz három állítást (kettő igazat, egy hamisat), a többi csoportnak ki kell találni, melyik a hamis. Kombinálhatjuk a feladatküldés módszerével, ebben az esetben először minden csoport leírja egy papírra az állításokat, majd egy, például a tanár által kijelölt csoportnak átküldik a kérdéseket (3 perc), majd minden csoport megoldja a kapott feladatot (3 perc). Végül ismertetik sorban a megoldásaikat (6 perc).
Amennyiben kevesebb időt szeretnénk erre szánni, alkalmazzuk a „kerekasztal" kooperatív technikát. Minden csoportnak adunk egy írólapot, amelyre minél több igaz állítást kell írniuk a háromszögekről, úgy hogy egy tanuló leír egy állítást, majd továbbadja a papírt a bal szomszédjának, ő is ír egy állítást, stb. Versenyezhetnek is a csoportok aszerint, hogy mennyi jó állítást írtak. Az állítások helyességét együtt ellenőrizzük, így mindenki megismerheti a többiek megoldását.

2. Az euklideszi szerkesztés

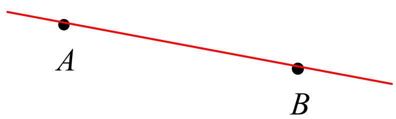
Az euklideszi szerkesztés lépéseivel szintén foglalkoztunk 6. osztályban, , ezért itt is az ismeretek felelevenítésére van szükség. Beszéljük meg a gyerekekkel, hogy az euklideszi szerkesztés lépéseit már eddig is használtuk egyszerű szerkesztésekben. Soroljuk is fel ezeket:
- Szakaszmásolás;
- Szögmásolás;
- Szakasz felezőpontjának, és felezőmerőlegesének szerkesztése;
- Adott pontból adott egyenesre állított merőleges egyenes szerkesztése;
- Adott ponton áthaladó adott egyenessel párhuzamos egyenes szerkesztése;
- Kör érintőjének szerkesztése adott érintési pont esetén.

Az alapszerkesztéseket is ismételjük át! Amennyiben úgy látjuk szükséges mindenkinek minden szerkesztést végrehajtani, akkor ne sajnáljuk rá az időt, tegyék ezt meg a füzetükben! Párban dolgozva segítsék, ellenőrizzék egymást!
Amennyiben nincs szükség ilyen részletes gyakorlásra, párban felváltva, vagy a csoporton belül sorban egymás után hajtson mindenki végre egy-egy szerkesztést! Így ellenőrizhetik, kisegíthetik egymást.

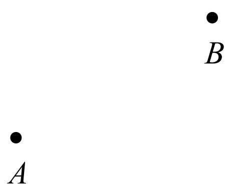
EMLÉKEZTETŐ:

Az euklideszi szerkesztés lépései

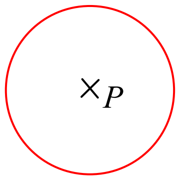
1. Két pont összekötő egyenesét megrajzolhatjuk vonalzóval.



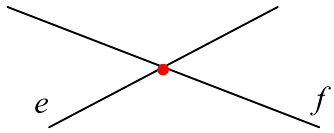
2. Két adott pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.



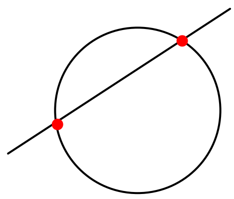
3. Adott pont körül adott körzőnyílással kört rajzolhatunk.



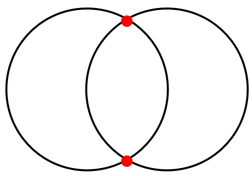
4. Két metsző egyenes metszéspontját megkereshetjük.



5. Ha egy kör és egy egyenes metszi egymást, akkor mindkét metszéspontjukat megkereshetjük.



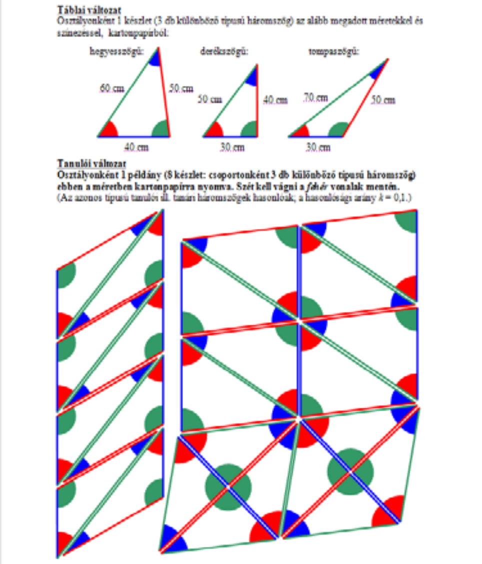
6. Ha két kör metszi egymást, akkor mindkét metszéspontjukat megkereshetjük.



3. Milyen adatokból szerkeszthető háromszög?

Az óra feladata, hogy tanulóink saját tapasztalataik útján jöjjenek rá arra, hogy a háromszögek megszerkesztéséhez maximum három adat szükséges, és mely három adat megadása ad egyértelmű megoldást. Az óra hátralévő idejében a lehetséges esetek megkeresése történik. Ez elég időigényes, így nem lehetetlen, hogy a befejezés a következő órára csúszik át. Ez nem okoz gondot, hiszen a következő órán a mostani szerkesztésekből vonjuk le a tanulságokat, és állapítjuk meg a háromszögek egybevágóságának különböző eseteit.
Az első részben ismertessük a munka menetét! A feladat elvégzéséhez használjuk az **1. tanári mellékletet**, a gyerekek csoportokban dolgozzanak. Csoportonként 3 különböző, kivágott háromszöget osztunk. Minden gyerek a füzetébe készíti a szerkesztéseket. A tapasztalatok frontális megbeszéléséhez a tanár használhatja a melléklet táblára való változatát.

1. tanári melléklet – lásd e fájl végén és a modul eszközei közt is!



A mellékletben található a) hegyes-, b) derék- és c) tompaszögű háromszög, oldalaik különböző hosszúak, és különböző színnel jelöltek. A szemben lévő oldalak és szögek színezése azonos. Betűjelzéseik is a megfelelő színnel szerepelnek. Ezek közül válasszunk ki egyet! (Gyorsabban haladó osztályokban megpróbálhatjuk, hogy mind a három típust szerkesztjük az órán, csoportonként egy-egy típust!) Ennek a másolatait fogják szerkesztéssel elkészíteni, úgy, hogy mindig csak az előre kiválasztott adatokat használhatják fel.
(Ha a másolás technikai nehézséget okoz a gyerekeknek, akkor megengedheti a tanár, hogy rajzolják először körbe a háromszöget, és arról másolják a kiválasztott adatokat.)

Mérőeszköz nem áll rendelkezésre, csupán körző és egy olyan vonalzó, amelyről lekopott a skála, és egyetlen éle egyenes, a többit megrágta a kiskutyánk. (Ügyeljünk arra, hogy a kiosztott háromszög oldalai 2 és 7 közötti egész szám hosszúságúak legyenek cm-ekben mérve, illetve a tanári változat a tanári készlet egységeiben mérve, mert ezekhez van mobilunk.)
A kísérlet adatait és a tapasztalatokat az 1. feladatlap táblázatába foglaljuk. A táblázat a következőképpen születik:
A tanár kitűzi a problémát, miszerint a mindenkinek kiosztott háromszöget fogjuk újra és újra megszerkeszteni, s hogy mely adatait használjuk fel, azt mi magunk fogjuk megválasztani. Egyetlen megszorítás, hogy csak az oldal hosszát, vagy a szög nagyságát tekinthetjük adatnak, ezeket fogjuk másolni az eredeti háromszögről.
Vitassuk meg, hogy hány adatot érdemes használni! (Ha túl kevés, vagy túl sok adatra tippelnek, akkor egy-egy kísérlettel vezessük rá őket, hogy 3 adatot használjunk). Ebben a témában már vannak tapasztalataik, hiszen 6. osztályban már szerkesztettek háromszöget.
Szedjük össze először, hogy milyen adathármasokkal dolgozhatunk majd! A táblázatban a fejlécen az összes oldal és szög szerepel, a sorok egy-egy feladatot tartalmaznak, a csillag jelzi, hogy melyik adatot használhatjuk fel a szerkesztés során. (Például a 4. feladatban az eredeti háromszög a, b oldalát és β szögét használjuk, és másolással készítjük el a szerkesztendő háromszögben.) A táblázat utolsó oszlopában pedig majd a tapasztalatainkat rögzítjük.
A csoportokon belül tekintsék át az összes esetet, rendszerezzék, hogy milyen adathármasok jöhetnek szóba a szerkesztéseknél!
Négy típus lehetséges:
1. három oldal;
2. két oldal és egy szög;

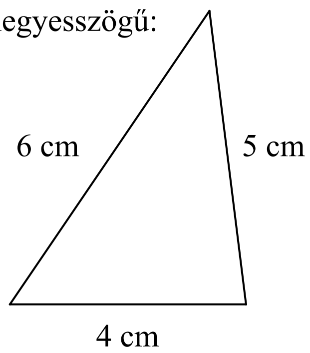
3. egy oldal és két szög;
4. három szög.
Ezeken belül még változatok is vannak, két oldalhoz háromféleképp választhatunk szöget (közbezárt, nagyobbal szemközti, kisebbel szemközti) és két szöghöz is háromféleképp választhatunk oldalt.

1. FELADATLAP

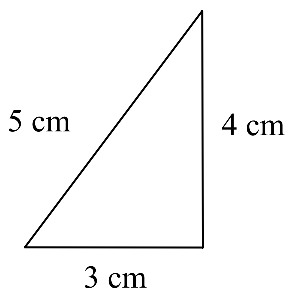
A táblázat sorai egy-egy feladatot tartalmaznak, a csillag jelzi, hogy a háromszögnek melyik adatát használhatod fel a szerkesztés során. Minden esetben végezd el a szerkesztést a füzetedben, az adatok az óra elején kapott háromszögre vonatkoznak. Mérőeszközként a körződet és a vonalzód egy élét használhatod! A megszerkesztett háromszöget másolópapír segítségével hasonlítsd össze az eredeti háromszöggel! Tapasztalatodat a táblázat utolsó oszlopában rögzítsd!

adat	***a*** (>)	***b***	***c***	α	β	γ	tapasztalat
1.	*	*	*				Egybevágóság
2.	*	*				*	Egybevágóság
3.	*	*		*			Egybevágóság
4.	*	*			*		Nem egybevágóság
5.	*				*	*	Egybevágóság
6.	*			*		*	Egybevágóság
7.	*			*	*		Egybevágóság
8.				*	*	*	Nem egybevágóság

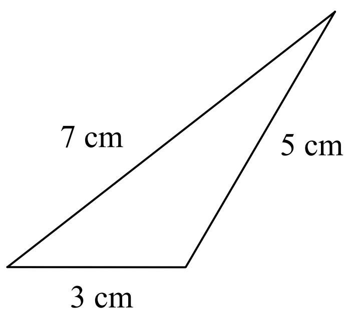
a) hegyesszögű:



b) derékszögű:



c) tompaszögű:



4. A szerkesztések végrehajtása

Az első szerkesztés 5. osztály óta ismert, most mélyreható elemzéssel átismételjük, miért éppen úgy oldjuk meg, ahogy szoktuk. <u>Mobilokkal</u> (1. tanári melléklet) is dolgozhatunk. Hívjuk fel a figyelmet a szerkesztés lépéseire (ezzel szintén foglalkoztunk 6. osztályban)!

1. A gyerekek által választott oldal (a) átmásolásával kezdi, megvan tehát a C és a B csúcs.
Mi az a legkisebb darab, amire még szükségünk van a háromszög megismeréséhez? Csak az A csúcs.
Válasszuk ki az egyik még fel nem használt adatot! Kiválasztják a b oldalt.
Mit árul el az A csúcs helyéről ez az adat? Azt, hogy az A csúcs milyen messze van a C csúcstól.
E szerint az adat szerint, a sík mely pontjai közül választhatjuk ki az A-t? A C középpontú, b sugarú kör pontjai közül. (Ezt a mondatot több tanulóval ismételtessük el, hogy „dallama" rögzüljön, mert a matematikai nyelvhasználat fontos mintapéldánya.)
Feltesz egy alkalmas mobil kört. Ugyanígy folytatja a kimaradt harmadik adattal. A gyerekek kommentálják a tevékenységet.

1. A három adat közül kiválasztottunk egyet – tetszőlegesen, ennek felvételével kezdtük a munkát.
2. A fennmaradó két adat közül az egyik az egyik mobil kört jelöli ki a keresett csúcs mértani helyeként, a másik a másik mobil kört.
3. A két feltételnek egyidejűleg kell teljesülnie, ezért a keresett pont mindkét körön rajta van, azaz ezek közös pontja.
4. A megszerkesztett csúcsok összekötésével elkészült a keresett háromszög.

Megjegyzés: Nagyon fontos módszertani adaléka ennek a megoldásmenetnek, hogy a feladat matematikai szempontból könnyű, régóta ismert, megoldása nem visz el energiát, figyelmünket teljes egészében annak szentelhetjük, hogy értelmezzük az adatokat. Milyen információt hordoz a kérdéses helyzetben egy adat. Azt szeretnénk elérni, hogy egy szerkesztési feladat megoldása során tanítványaink ne vaktában lövöldözzenek körökkel, egyenesekkel, hanem pontosan megértsék, melyik adat milyen mértani helyet jelöl ki egy keresett pont számára, s melyek közös részében kell azt a pontot keresni. Természetesen vannak más típusú megoldások is (Például a transzformációt használók), de a MÉRTANI HELYES típus az első, amellyel találkoztunk, ebből van már annyi tapasztalatunk, hogy itt az ideje a tudatosításnak.
A tartalom megértése után megszerkesztik a háromszöge(ke)t, és megvitatják a megoldások számát. Az ezekből az adatokból szerkeszthető háromszögek egybevágók, ezt a táblázat utolsó rovatában jelezzük

2. Ezután már nincs szükség a mobilokra (ha úgy érezzük mégis, használjuk tovább), de az előbbi gondolatmenetet erősítve élünk újra a szóhasználattal:
Mit ismerünk már?
Mit keresünk még?
Melyik adatot nem használtuk még?
Mit árul el ez az adat?
Kulcsfontosságú kérdések ezek, elkészíthetjük papírcsíkokra vastag filccel, és minden alkalommal, amikor elhangzik az egyik, felhelyezzük a táblára (mágnes, vagy gyurmaragasztó)
Megszerkesztik a háromszöget, megindokolva minden szerkesztési lépést, majd megállapítják, hogy az ezekből az adatokból szerkesztett háromszögek mind egybevágók.

3 - 4. A feldolgozás szóhasználata egyezik az előzőekével. A megoldások számának elemzését viszont csak a két eset megszerkesztése után végezzük, mert ekkor már általában van olyan gyerek, aki észreveszi, hogy a megoldások száma az a és b oldal relációján múlik. Két oldal és a hosszabbal szemközti szög ismeretében csak egybevágó háromszögek szerkeszthetők. Ha viszont a rövidebbel szemközti szöget ismerjük, akkor két nem egybevágó háromszöget is találunk.

5. Tárgyalás az előzőekhez hasonló.

6. Hagyjuk magukra tanítványainkat. Itt az idő egy kis önálló munkára. Pillanatok alatt kiderül, hogy ez lényegesen nehezebb az eddigieknél. Kis motiváció nem árt: tűzzük ki gyorsasági versenyre. Így kevés idő telik, hasznosan. Vigyázat, mérni nem tudunk! Első nekirugaszkodásra csak kevés gyerek birkózik meg a problémával, ezért itt a nagy módszertani pillanat! (A jó megoldókat jutalmazzuk, de a megoldás ismertetését itt ne bízzuk rájuk, fontos, hogy a többiek jól megértsék, miért akadtak el, és hogyan segíthetnek magukon hasonló helyzetben!) Próbáljuk megfejteni, miért akadtunk el, mennyiben más ez, mint az előzőek! Az a baj, hogy az α-val nem érünk semmit, mert nem tudjuk hova felmérni. „Nem tudjuk hova felmérni az α -t", azaz nincs kapcsolata a másik két adattal." Keressünk a fejünkben olyan kapcsolatot, mely összeköti adatainkat, összeragasztja az ábrát! A háromszög belső szögeinek összege 180 fok.
Most megvan a kapcsolat, csakhogy nem tudunk mérni, így számolni sem. Adjunk ismét pár percet gyorsasági formában, de csak az első 3-4 legyen versenyben! Itt kell a kreativitás! Többnyire 1-2 perc után megjön az ötlet: Egy egyenesre felmérjük a két ismert szöget, mellettük keletkezik a harmadik, amit így megszerkesztettünk.
Befejezzük a probléma tárgyalását a táblázat kitöltésével.

7. Adjuk önálló munkára.

8. Adjuk önálló munkára. Várjuk a gyerekektől a végtelen sok megoldás meglelését. Találgatnak, a két utolsóról látják, hogy egyforma, de ez nem elég.
Hány egybevágóságot találtunk? Természetesen a gyerekek annyit mondanak, ahány E-t látnak a táblázatban. Mire a tanár: Az a 6 db csak 4 ám! Vajon miért?

ÖSSZEFOGLALÁS:

A szerkesztés menete

Először készíts színes vázlatot az elemzéshez! Jelöld a vázlaton pirossal azokat az adatokat, melyeket a szöveg megadott, majd sárgával azokat, melyeket ismereteink segítségével mi kikövetkeztetünk, és a szerkesztésben fel fogunk használni! Jelöld a szerkesztés lépéseinek sorrendjét a vázlaton, és írd is le a lépéseket szavakkal!

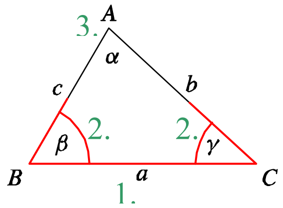
I. Adott egy oldal és a rajta fekvő két szög

Adatok

$a =$
$\beta =$
$\gamma =$

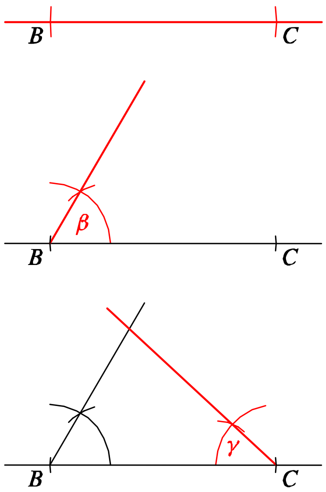
Összefüggések

Vázlat



A szerkesztés lépései

1. Felveszem az adott hosszúságú szakaszt.
2. A szakasz egyik végpontjához megszerkesztem a β, a másik végpontjához a γ szöget.
3. A két szögszár metszéspontja lesz a háromszög harmadik csúcsa.



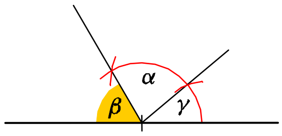
II. Adott egy oldal és a két szög, az egyik az oldalon fekvő szög (*γ* vagy *β*), a másik az oldallal szemközti szög (α).

a) Adatok

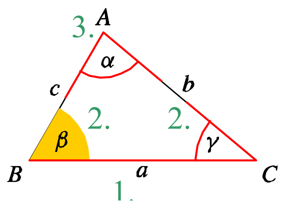
$a =$
$\alpha =$
$\gamma =$

Összefüggések

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$

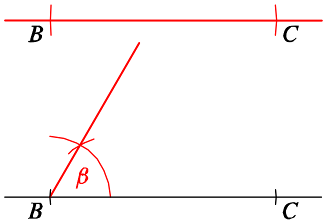


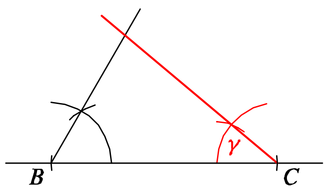
Vázlat



A szerkesztés lépései

1. Felveszem az adott hosszúságú szakaszt.
2. A szakasz egyik végpontjához megszerkesztem a β, a másik végpontjához a γ szöget.
3. A két szögszár metszéspontja lesz a háromszög harmadik csúcsa.



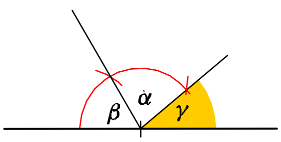


b) Adatok

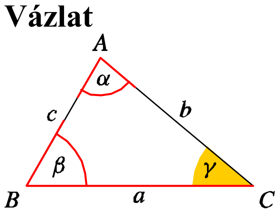
$a =$
$\alpha =$
$\beta =$

Összefüggések

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$



Vázlat



A szerkesztés lépései

Megegyezik az a) feladat szerkesztés lépéseivel

II. Háromszögek egybevágósának alapesetei

1. Háromszögek egybevágósának alapesetei

Legnagyobb valószínűséggel az előző óra nem volt elegendő az összes háromszög-szerkesztés és egybevágóság tanulmányozására, ezért az óra elején befejezzük a megkezdett kísérletsort. Amikor kész vagyunk a táblázat kitöltésével és a megbeszéléssel, a háromszögek egybevágóságának alapeseteinek, és az esetek megfogalmazásával zárjuk a feladatot. Fektessünk hangsúlyt arra, hogy ezek csak alapvető – leggyakoribb esetei két háromszög egybevágóságának, sok más eset is van. Fontos, hogy az itt megfogalmazott mondatszerkezetet jól értsük: ha Pirike Piripócson és Mikiegér Disneylandban ugyanazzal a három adattal szerkeszt háromszöget (az itt megfogalmazottak közül), akkor bizonyosak lehetünk abban, hogy ugyanolyan háromszög született a két helyszínen (feltéve persze, hogy mindketten az ideális mértékben pontosan dolgoztak). Feltétlenül pontosítsuk az egybevágóság jelentését!
Gyakoroljuk a „megfelelő” oldal, illetve szög megkeresését, beszéltessük a gyerekeket, ügyeljünk a pontos megfogalmazásra:
A tanár írásvetítő fóliával, a gyerekek másolópapírral dolgoznak. Mindannyian felveszünk egy háromszöget (lehet az előző feladatban kiosztott háromszög, ennek előnye, hogy mind egybevágó) ez lesz az eredeti háromszög, melynek csúcsai és oldalai betűzve vannak. Ezután egy másik fólián, a gyerekek másolópapíron készítenek egy másolati példányt, mely nincs betűzve.
Válasszunk ki egy adatot (például a leghosszabb oldalt), és ezt színessel is, betűzéssel is jelöljük meg! (Pl.: a) Ezután az eredeti háromszög összes oldalának, illetve szögének megfelelőt keressük meg a másolati példányon:

Melyik a háromszög b oldalának megfelelő oldal?
Melyik a háromszög c oldalának megfelelő oldal?
Melyik a háromszög α szögének megfelelő oldal?
Melyik a háromszög β szögének megfelelő oldal?
Melyik a háromszög γ szögének megfelelő oldal?

2. A háromszögek szerkeszthetőségének egyértelműsége

Az óra hátralévő részében döntsék el a 2. feladatlap háromszögeiről, hogy egyértelműen megszerkeszthetők-e! Alkalmazzuk a „csoportkonzultáció” kooperatív módszert, mert ez lehetővé teszi, hogy együttműködve, és ne csak egyénileg dolgozzanak! A módszer lépései:
1. Mindenki tegye le a tollát!
2. Csoportmunka: Az egyik diák felolvassa az első kérdést, a csoporttagok és/vagy csoportmegbeszélés keretében válaszolnak.

3. Ellenőrzés: A kérdést felolvasó tanuló bal oldalán lévő csoporttag ellenőrzi, hogy mindenki számára világos-e a válasz, és mindenki egyet is ért velük.
4. Egyéni feljegyzések: Mindenki önállóan leírja a választ.
5. lépés: Szerepcsere. Az a diák, aki az előbb az ellenőrzést végezte, felolvassa a következő kérdést, a balján ülő pedig ellenőriz.
Amennyiben nem tudjuk befejezni a mai órán, akkor a következő óra elejét ezzel kezdjük, vagy adjuk fel házi feladatnak, de ebben az esetben is meg kell beszélnünk a megoldásokat!

2. FELADATLAP

1. Megszerkeszthető-e egyértelműen a háromszög, ha adott

a) három szöge? nem
b) három oldala? igen
c) egyik oldala és két szöge? igen
d) egyik oldala és egy szöge? nem
e) két oldala és egy szöge? nem
f) két oldala és az egyik oldalhoz tartozó magasság? igen

2. Megszerkeszthető-e egyértelműen a derékszögű háromszög, ha adott

a) a két befogója; igen
b) az egyik befogója és az átfogója; igen
c) egy szöge és egy oldala; nem
d) az egyik befogója és legnagyobb szögének szögfelezője; igen
e) az egyik befogója és a hozzátartozó súlyvonala; igen
f) az egyik befogója és a háromszög köré írható kör középpontja? igen

3. Megszerkeszthető-e egyértelműen a tükrös háromszög, ha adott

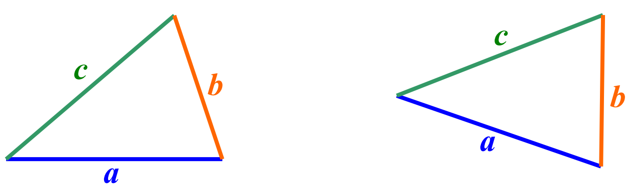
a) az alapja és a szára? igen
b) az alapon fekvő szöge? nem
c) az alapja és az alapon fekvő szöge? igen
d) az alapja 5 cm és a szárszöge? igen
e) az alapja és az alaphoz tartozó magassága? igen
f) a szára és a szárhoz tartozó magassága? nem
g) a szára és a szárszög szögfelezője? nem

ÖSSZEGZÉS:

A háromszög egybevágóságának alapesetei

Két alakzat egybevágó, ha pontosan fedésbe hozhatók.

Két háromszög egybevágó, ha oldalaik páronként megegyeznek.



Két háromszög egybevágó, ha két oldaluk és az általuk közbezárt szög megegyezik.

Két háromszög egybevágó, ha egyik oldaluk és az azon fekvő két szög megegyezik.

Két háromszög egybevágó, ha két oldaluk és a nagyobbikkal szemközti szög megegyezik.

Háromszögek szerkeszthetősége

A háromszögszerkesztés egyértelmű, ha a megadott adatokból szerkesztett minden háromszög egybevágó.

Egyértelműen megszerkeszthető a háromszög, ha adott a három oldala.

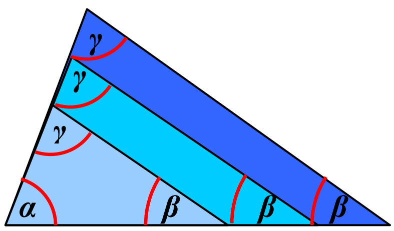
Egyértelműen megszerkeszthető a háromszög, ha adott két oldala és a közbezárt szög.

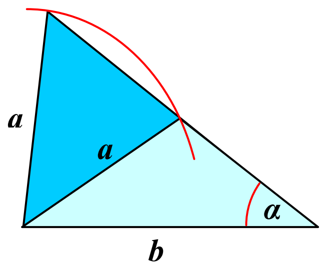
Egyértelműen megszerkeszthető a háromszög, ha adott valamelyik oldala és az azon levő két szöge.

Egyértelműen megszerkeszthető a háromszög, ha adott két oldala és a nagyobbik oldallal szemközti szög.

Nem szerkeszthető meg egyértelműen a háromszög, ha csak a három szöge adott, illetve akkor, ha két oldalát és a kisebbikkel szemközti szögét ismerjük.

A megadott adatok: ***α*, *β*, *γ*** ***a*, *b*, *α***





Feladatgyűjtemény: 1., 3., 11., 12., 13. feladat

III. Vegyes szerkesztési feladatok

1. A háromszögek szerkeszthetőségének egyértelműsége

Az előző órán már foglalkoztunk azzal, hogy a háromszög mely adatainak ismeretében lesz a szerkesztés egyértelmű. Amennyiben úgy látjuk, az eddigi vizsgálatok még nem voltak elegendőek, oldjuk meg a 3. feladatlap 1. feladatát, amelyben háromszögeket kell szerkeszteni különböző adatokból (a feladat hasonló az 1. feladatlap alapján elvégzett szerkesztésekhez)! Minden csoport egy-egy szerkesztést hajtson végre, majd a csoport szóvivője ismertesse a megoldást! Amennyiben kevesebb csoportunk van, mint ahány szerkesztési variáció, jelöljünk ki egy-két csoportot, amelyekben párokban hajtják végre a megfelelő szerkesztést! Eljárhatunk úgy is, hogy a csoportokon belül osztják el maguk között a szerkesztéseket, ebben az esetben lesz, aki több szerkesztést végez. Ezt a változatot csak kifejezetten gyorsan haladó csoportokban javasoljuk, mivel időigényesebb, és az ellenőrzés is nehezebb.

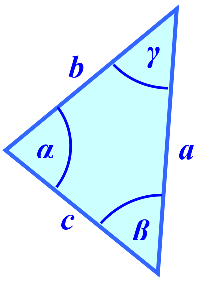
Amennyiben nincs szükség a háromszögek egyértelmű szerkeszthetőségének újbóli vizsgálatára, akkor a 3. feladatlap 2. feladatától kezdve oldjuk meg a feladatokat!

2. Vegyes szerkesztési feladatok

Az óra további részében háromszög szerkesztési feladatokat oldjunk meg! A 3. feladatlap 2. és 3. feladatában ismét mintát adunk a szerkesztés menetére. Ebben a két feladatban már csak a szerkesztés kell végrehajtani! A 4. feladatban a háromszögek egybevágóságának négy alapesetét gyakorolhatják! Érdemes párban dolgozni, hogy segíteni tudjanak egymásnak, és egyben ellenőrizhetik is egymást! A gyorsabban haladók foglalkozhatnak a többi feladattal is, de válogathatunk a feladatgyűjtemény feladataiból is!

3. FELADATLAP

1. Ismerjük az *ABC* háromszög szögeit és oldalait. Szerkeszthetünk-e ugyanilyen háromszöget, ha tetszőlegesen választunk ki az adatokból hármat? Nem.
Végezzétek el a szerkesztéseket, ha a következő három adatot választjuk ki!



$a = 6$ cm $\alpha = 75°$
$b = 5{,}5$ cm $\beta = 60°$
$c = 4{,}5$ cm $\gamma = 45°$

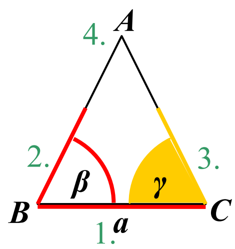
a) a, b, c; Szerkeszthetünk.
b) a, b, α; Szerkeszthetünk.
c) a, b, β; Nem szerkeszthetünk.
d) a, b, γ; Szerkeszthetünk.
e) a, β, γ; Szerkeszthetünk.
f) α, β, γ. Nem szerkeszthetünk.

A következő szerkesztési feladatokat a megadott minta szerint végezd el!

2. Szerkessz szimmetrikus háromszöget, ha alapja 5,5 cm, az alapon lévő szöge 45°!

Adatok	**Összefüggések**
a = 5,5 cm	$\beta = \gamma = 45°$
$\beta = 45°$	

Vázlat



A szerkesztés lépései

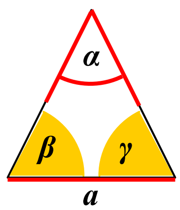
1. Felveszem az a oldalt.
2. Az a oldalra B csúccsal megszerkesztem a β szöget.
3. Az a oldalra C csúccsal megszerkesztem a γ szöget.
4. A két szögszár metszéspontja adja az A csúcsot.

3. Szerkessz szimmetrikus háromszöget, ha alapja 5 cm, a szárszöge 60°!

Adatok
$a = 5$ cm
$\alpha = 60°$

Összefüggések
$\beta = \gamma = (180° - \alpha) : 2 = 60°$

Vázlat



A szerkesztés lépései

Megegyezik a 2. feladat szerkesztés lépéseivel.

4. Szerkessz háromszöget a következő adatokból!
a) A háromszög oldalai: 6 cm, 8 cm és 10 cm;
b) A háromszög két oldala 6 cm és 4 cm, az általuk közbezárt szög 75°;
c) A háromszög egyik oldala 5,5 cm, a rajta lévő két szög 30°és 90°;
d) A háromszög két oldala 6 cm és 4,5 cm, a nagyobbikkal szemközti szög 105°.
Mind a négy esetben egyértelműen végrehajtható a szerkesztés.

5. Szerkeszd meg a háromszöget, ha oldalai 3 cm, 5 cm és 6 cm!
Szerkeszd meg az oldalak felezőpontját, majd kösd össze ezeket a felezőpontokat! Hasonlítsd össze az így kapott háromszög oldalait az eredeti háromszög oldalaival!
A felezőpontokat összekötve olyan háromszöget kapunk, melynek oldalai az eredeti háromszög középvonalaival egyeznek meg, tehát hosszúságuk feleakkora, mint az eredeti oldalak.

6. Szerkessz háromszög szerkeszthető, ha a háromszög két oldala 5 cm illetve 6 cm, az 5 cm-es oldalon fekvő egyik szög 30°!
Két megoldás van: Az egyik, hogy a 30°-os szög az 5 cm és a 6 cm-es oldalak által bezárt szög. A másik megoldás, hogy a 6 cm-es oldal a 30°-os szöggel szemben helyezkedik el.

7. Egy háromszög egyik oldala 8 cm, a másik oldal ennek 75 %-a, a harmadik oldal a másodiknak a kétharmad része. Szerkeszd meg a háromszöget!
Melyik oldallal szemközt található a legkisebb szög?
A második oldal 6 cm, a harmadik pedig 4 cm. A legkisebb szög a 4 cm-es oldallal szemközt található.

Feladatgyűjtemény: 2. 4 - 10. 11, 14 - 15. feladat

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Megszerkeszthető-e egyértelműen a háromszög, ha
a) szögei 40°, 65° és 75°? nem
b) oldalai 4 cm, 6 cm és 6,5 cm? igen
c) egyik oldala 5,3 cm és két szöge 45° és 60°? igen
d) egyik oldala 4 cm és van egy 80°-os szöge? nem
e) két oldala 3 cm és 4,5 cm, és van 30°-os szöge? nem
f) egyik oldala 5 cm, a rajtalevő egyik szög 75° és az 5 cm-es oldalhoz tartozó magasság 4 cm? igen

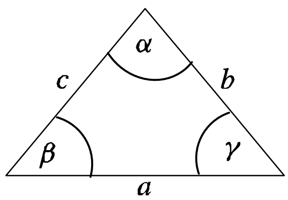
2. Szerkeszd meg az 1. feladatban megadott háromszögek közül azokat, amelyek egyértelműen megszerkeszthetők!

3. Megszerkeszthető-e egyértelműen a tükrös háromszög, ha
a) alapja 4 cm, szára 5 cm? igen
b) alapon fekvő szöge 60°? nem
c) alapja 6 cm és alapon fekvő szöge 45°? igen
d) alapja 5 cm és szárszöge 105°? igen
e) alapja 3,8 cm és az alaphoz tartozó magasság 5 cm? igen
f) szára 8 cm és a szárhoz tartozó magasság 5 cm? nem

4. Szerkeszd meg az 5. feladatban megadott háromszögek közül azokat, amelyek egyértelműen megszerkeszthetők!

A következő feladatokban (5-10.) szerkessz háromszöget a megadott oldalak és szögek ismeretében! A szerkesztéseket az itt látható vázlat jelöléseinek megfelelően végezd! Minden feladatban vizsgáld meg, hányféle háromszög szerkeszthető!

VÁZLAT:



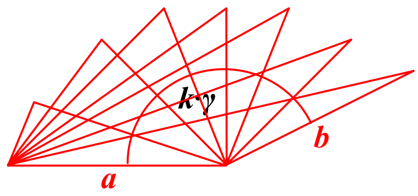
5.
a) $a = 6$ cm, $b = 7$ cm, $c = 8$ cm
b) $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $c = 7$ cm
c) $a = 6$ cm, $b = 7$ cm, $c = 5$ cm
d) $a = 3$ cm, $b = 7$ cm, $c = 4$ cm Nem megszerkeszthető a háromszög-egyenlőtlenség miatt.

6.
a) két oldala 4 cm-es A harmadik oldal hossza: $0 < x < 8$ cm.
b) két oldala 5 cm, illetve 2 cm. A harmadik oldal hossza: $3 < x < 7$ cm.
c) egyenlőszárú és van 3 cm, illetve 5 cm hosszúságú oldala. Kétféle lehetőség van: I. Az alap 3 cm; II. Az alap 5 cm.

d) egyenlőszárú és van 3 cm, illetve 6 cm hosszúságú oldala. Csak egyféle lehetőség van, mivel csak a szár lehet 6 cm a háromszögegyenlőtlenség miatt.

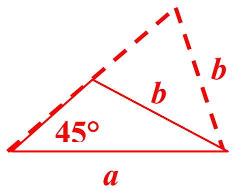
7.

a) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\gamma = 45°$
b) $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $\gamma = 120°$
c) $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $\gamma = 135°$
Mind a három esetben a két oldal és a közbezárt szög adott, a szerkesztések egyértelműen elvégezhetők.
d) $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $\gamma = k \cdot 22{,}5°$ (a k egész számot jelöl, keresd meg az összes megoldást, és egy ábrán végezd el a szerkesztést!) $k = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$



8.

a) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 45°$ Egyértelműen megszerkeszthető.
b) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\beta = 45°$ Két megoldás van, kaphatunk hegyesszögű, illetve tompaszögű háromszöget.



9.

a) $a = 5$ cm, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ $\gamma = 75°$
b) $a = 5$ cm, $\alpha = 45°$, $\gamma = 60°$ $\beta = 75°$
c) $a = 5$ cm, $\gamma = 45°$, $\beta = 60°$
Az a) és b) esetben két szög ismeretében a harmadik szög kiszámítható. Így ismert egy oldal és a rajta fekvő két szög. A c) feladatban ezek az adatok vannak megadva, tehát a szerkesztés egyértelműen végrehajtható.

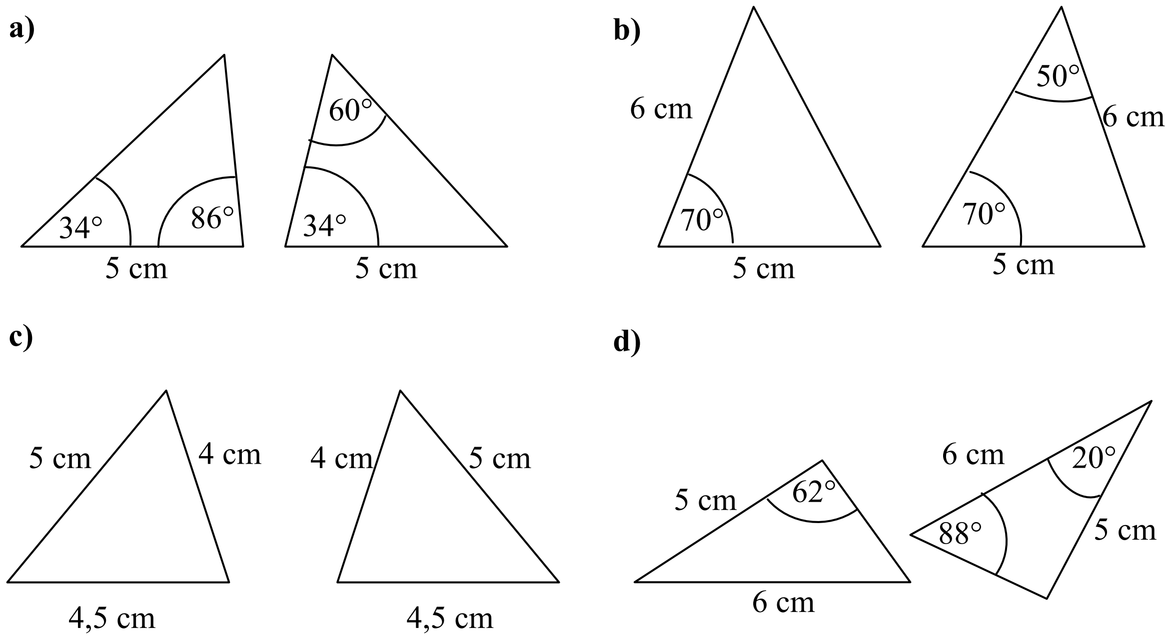
10.

a) $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$ Végtelen sok megoldás van.
b) $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$ Nem szerkeszthető háromszög, mert a belső szögösszeg nagyobb, mint 180°.

A következő feladatokban (11-13.) el kell döntened két háromszögről, hogy egybevágóak-e, ha az itt megadott adataikban megegyeznek. Válaszaidat indokold!

11. Egybevágó-e két szabályos háromszög, ha páronként egyenlők
a) szögeik; Nem, mert oldalaik különbözők lehetnek.
b) oldalaik? Igen, mert minden szabályos háromszög szögei 60°-osak.

12. Az alábbi háromszögekről döntsd el, hogy egybevágóak-e?



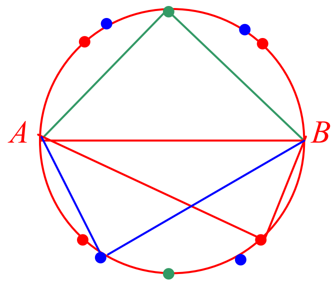
a) Egybevágóak, mert az adott oldalon elhelyezkedő szögek egyenlők (34° és 86°).
b) Nem egybevágóak, mert a két adott oldal által bezárt szög nem egyenlő (70° illetve 60°).
c) Egybevágó a két háromszög, mert az oldalaik páronként megegyeznek.
d) Nem egybevágó a két háromszög, mert a nagyobbik oldallal szemközti szögek különböznek (62° illetve 72°).

13. Egybevágó-e két egyenlőszárú háromszög, ha páronként egyenlő

a) alapjuk és száruk	igen
b) két oldaluk	nem
c) alapjuk és alapon fekvő szögük	igen
d) alapjuk és szárszögük	igen
e) alapjuk és egy szögük	igen
f) alapjuk és két szögük	nem
g) száruk és az alapon fekvő szögük?	igen

14. Rajzolj egy 5 cm-es szakaszt, jelöld a végpontjait A-val, B-vel! Szerkessz legalább 6 db olyan derékszögű háromszöget, amelynek ez a szakasz az átfogója!
Hol helyezkedhetnek el a háromszögek C csúcsai? Az AB szakasz, mint átmérő köré rajzolt körvonalon.

a) Jelöld kékkel azokat a C csúcsokat, melyekhez tartozó háromszög egyik befogója 4 cm!
b) Jelöld zölddel azokat a C csúcsokat, melyekhez tartozó háromszög egyenlőszárú!
c) Jelöld pirossal azokat a C csúcsokat, melyekre a háromszögnek van 60°-os szöge!



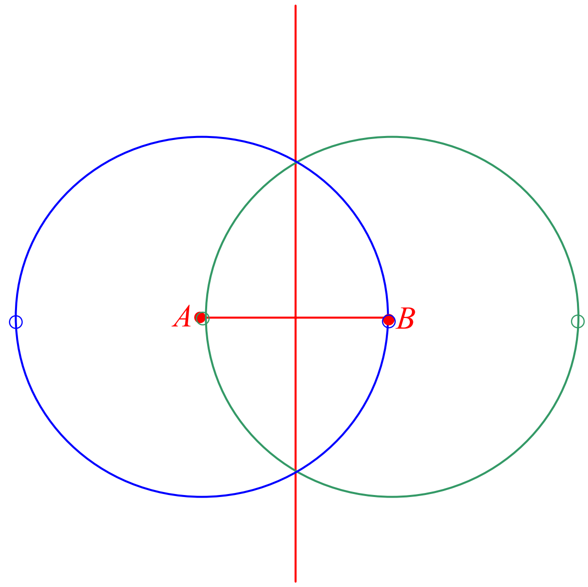
15. Rajzolj egy 3 cm-es szakaszt, jelöld a végpontjait *A*-val és *B*-vel! Szerkeszd meg az összes olyan *C* pontot, amelyekre az *ABC* háromszög egyenlőszárú!

a) Jelöld pirossal azokat, amelyekhez tartozó háromszögben az *AB* oldal az alap! A *C* pont az *AB* szakasz felezőmerőlegesének bármely pontja.

b) Jelöld zölddel azokat, amelyekhez tartozó háromszögben az *AC* oldal az alap! Az *AB* sugarú, *B* középpontú körvonal pontjai, kivéve az *A* pontot és az *A*-val átellenes pontot.

c) Jelöld kékkel azokat, amelyekhez tartozó háromszögben a *BC* oldal az alap! Az *AB* sugarú, *A* középpontú körvonal pontjai, kivéve az *B* pontot és az *B*-vel átellenes pontot.

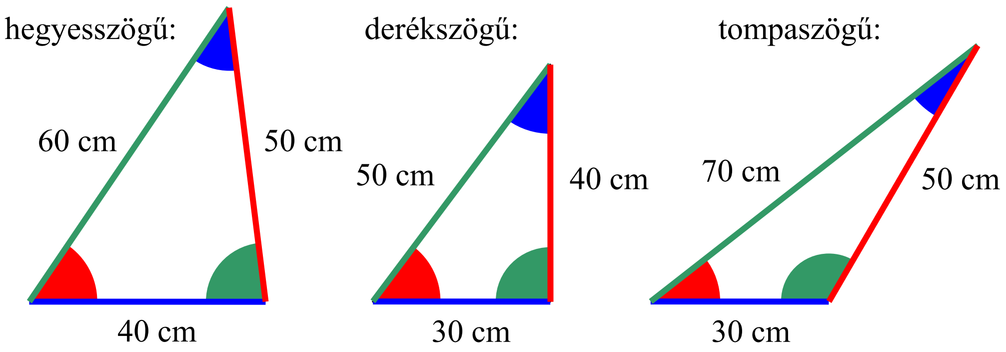
A kék és zöld körök metszéspontjai az *A* és *B* pontokkal egyenlő oldalú háromszöget határoznak meg.



0752 – 1. tanári melléklet, Háromszögek

Táblai változat

Osztályonként 1 készlet (3 db különböző típusú háromszög) az alább megadott méretekkel és színezéssel, kartonpapírból:



Tanulói változat

Osztályonként 1 példány (8 készlet: csoportonként 3 db különböző típusú háromszög) ebben a méretben kartonpapírra nyomva. Szét kell vágni a *fehér* vonalak mentén.
(Az azonos típusú tanulói ill. tanári háromszögek hasonlóak; a hasonlósági arány $k = 0,1$.)