0741. MODUL

SZÁMELMÉLET

Oszthatóság, számolás maradékokkal, prímtényezős felbontás

KÉSZÍTETTE: CSAHÓCZI ERZSÉBET, KOVÁCS CSONGORNÉ

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A pontos és a maradékos osztás közötti különbség ismétlése. Az oszthatóság fogalmának ismétlése, mélyítése. Számolás maradékokkal. Összeg, szorzat maradéka. Oszthatósági szabályok ismétlése, újak megfogalmazása (2,4,5,..100) 1000 osztóival való bővítés (8,125,200,…,1000). A 3-mal és 9-cel való oszthatósági szabály bizonyítása. Prímszám, összetett szám fogalmának ismétlése. Prímtényezős felbontás. Adott tulajdonságú számok építése szorzással. Összetett oszthatósági szabályok vizsgálata. Közös osztók keresése, relatív prímek fogalmának ismétlése, mélyítése, többszörösök keresése, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös. A tanultak alkalmazása törtekkel végzett műveletekben, szöveges feladatok megoldásában, egyszerű bizonyításokban.
Időkeret	10 óra
Ajánlott korosztály	7. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Tágabb környezetben:* az élet minden területén előforduló periodikus jelenségek, események, természettudományok. *Szűkebb környezetben:* összeg, szorzat tulajdonságai, műveleti tulajdonságok, számok különböző alakjai, műveletek sorrendje, hatványozás, algebrai kifejezések, egyszerű bizonyítások. *Ajánlott megelőző tevékenységek:* műveletek a tanult számkörökben, műveletek sorrendje, műveleti tulajdonságok, sorozatok, hatványozás. *Ajánlott követő tevékenységek:* műveletek törtekkel, elsőfokú egyismeretlenes egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása, szöveges feladatok megoldása.
A képességfejlesztés fókuszai	*Számolás, számlálás:* Számolási feladatok a természetes számok (és a törtek körében), maradékos és maradék nélküli osztás, számolási „trükkök”. *Mennyiségi következtetés, valószínűségi következtetés:* Műveleti tulajdonságok – elsősorban az osztás tulajdonságai – megfigyelése, felhasználása mennyiségi következtetésekre. Biztos; lehetetlen; lehet, de nem biztos kérdések eldöntése. *Becslés, mérés:* Legnagyobb közös osztó fel használása közös mérték keresésére. *Szövegesfeladat-megoldás, problémamegoldás, metakognició:* A jelenségek világában megfigyelhető ritmikusság, periodikusság matematikai átfogalmazása, kapcsolódó problémák megoldása. *Rendszerezés, kombinativitás:* Oszthatósággal kapcsolatos leszámolási feladatok megoldása: osztók száma, adott tulajdonságú számok keresése, adott területű, egész oldalú téglalapok száma. *Deduktív következtetés, induktív következtetés:* Egyszerű érvelések állítások igazságának eldöntésére, példák, ellenpéldák keresése, egyszerű bizonyítások.

AJÁNLÁS:

Frontális, egyéni és csoportos munka, kooperatív módszerek.
A modul szerves folytatása az első két modulnak (Számok és műveletek, Hatványozás, normálalak). Mindkét modul fókuszában állt a számok sokféle alakban való megadásának fejlesztése. Az ott tanultakra alapozunk, az ott megértett a gondolatokat gondoljuk újra, visszük tovább, használjuk fel. Az algebrai átalakítások megértése felé teszünk egy újabb lépést. A törtekkel való műveletek újra előkerülnek, de csak annyira, hogy a gyerekek megtapasztalják a számelméleti ismeretek hasznát a műveletvégzésben is.
A tárgyalt anyag sok apró mozaikja ott van már a gyerekek fejében, ezért nagyon fontos, hogy az órák megtervezésében fontos szempont legyen a gyerekek tudásának előhívása.

TÁMOGATÓ RENDSZER:

Fóliák, prímtáblázat, feladatlapok, kalkulátor, prímkártyák, matematikatörténeti érdekességek, játékok, számolási trükkök.

ÉRTÉKELÉS:

Szóbeli értékelés az egyéni és csoportos munka megfigyelése alapján, diagnosztizáló és értékelő mérés.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, feladatok
I. Számolás maradékokkal, összeg, szorzat maradéka; pontos és maradékos osztás; osztó, többszörös definíciója			
1.	Osztó, többszörös fogalmának ismétlése, általános alak megadása algebrai kifejezéssel	Számolás, absztrakció	3. tanári melléklet, 1. feladatlap
2.	Számolás maradékokkal	Osztási maradékok megállapítása összegre vagy különbségre bontással	1. feladatlap
3.	Gyakorlás	Rögzítés, mélyítés	1. feladatlap
II. A tanult oszthatósági szabályok ismétlése (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100); 1000 osztóival való bővítés (8, 40, 125, 200, 250, 500, 1000)			
1.	Oszthatósági szabályok megállapítása számok helyi értékesen bontott összegalakjából	Általánosítás	4. tanári melléklet, érmék, 2. feladatlap
2.	Az utolsó egy, két, három jegyből megállapítható oszthatósági szabályok alkalmazása	Konkretizálás	2. feladatlap
III. 3-mal és 9-cel való oszthatósági szabály bizonyítása			
1.	A 9-cel való oszthatósági szabály bizonyítása	A bizonyítási igény felkeltése	3. feladatlap
2.	A 3-nal való oszthatósági szabály levezetése a 9-cel való oszthatósági szabályból	Dedukció	3. feladatlap
3.	A tanultak alkalmazása	Rögzítés, mélyítés, alkalmazás	3. feladatlap

IV. Az oszthatósági szabályok gyakorlása, alkalmazása			
1.	Matematikatörténeti érdekesség: „kilences próba”; számkitalálós trükkök	Rögzítés, alkalmazás, A tanultak alkalmazása összetettebb feladatokban	4. feladatlap, 5. tanári melléklet („kilences próba”)
2.	Vegyes gyakorló feladatok; összeg, különbség, szorzat, hányados oszthatósága adott számmal; igaz, hamis állítások	A tanultak elmélyítése összetettebb feladatokban	4. feladatlap

V. Prímszám, összetett szám; összetett számok felírása többtényezős alakban; prímtényezős felbontás; adott tulajdonságú számok felépítése prímtényezős felbontásból			
1.	Prímszám és összetett szám fogalmának ismétlése; számok építése prímtényezőkből	Definiálás	2. tanulói, 6. tanári melléklet (prímkártya készlet), 1. tanulói és tanári melléklet (prímszámtáblázat)
2.	Prímtényezőkből felépített számok tulajdonságai; négyzetszámok szerkezete; igaz, hamis állítások	Általánosítás, bizonyítás	5. feladatlap, 2. tanulói, 6. tanári melléklet, 1. tanulói és tanári melléklet

VI. Összetett oszthatósági szabályok			
1.	Mi a feltétele annak, hogy egy szám osztóinak szorzata is osztója legyen a számnak? A relatív prím fogalmának ismétlése	Sejtés, bizonyítás, definiálás	6. feladatlap
2.	Összetett oszthatósági szabályok megfogalmazása	Általánosítás, bizonyítás	6. feladatlap
3.	Gyakorlás, alkalmazás		Feladatgyűjtemény: 1–10.

VII. Osztók keresése osztó párokkal és prímtényezős felbontásból; összes osztó összegyűjtése; közös osztók keresése, legnagyobb közös osztó			
1.	Adott szám összes osztóinak összegyűjtése osztó párokkal, prímtényezős felbontásból; a két módszer összevetése (ismétlés)	A tanult ismeretek előhívása, számolás, kombinatív gondolkodás fejlesztése, általánosítás	2. tanulói, 6. tanári melléklet: prímkártya készlet, 7. feladatlap
2.	Közös osztók megépítése prímtényezőkből; a legnagyobb közös osztó	Általánosítás, definíció	2. tanulói, 6. tanári melléklet: prímkártya készlet, 7. feladatlap
3.	A tanultak alkalmazása	Rögzítés, mélyítés	7. feladatlap

VIII. Közös többszörösök keresése, legkisebb közös többszörös			
1.	Többszörös, közös többszörös, legkisebb közös többszörös keresése a 6. osztályban tanult módszerekkel (ismétlés)	A már tanult ismeretek előhívása, pontosítása, rögzítése	8. feladatlap
2.	Többszörös, közös többszörös, legkisebb közös többszörös előállítása prímtényezők szorzatából	Sejtés, bizonyítás, definíció	2. tanulói, 6. tanári melléklet: prímkártya készlet, 8. feladatlap

IX. Gyakorlás			
	Gyakorlás, elmélyítés, szummatív mérés előkészítése	Rögzítés, mélyítés	TOTÓ

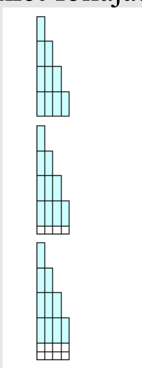
X. Értékelő felmérő			
	Egyszerűbb felmérő	Számonkérés	Értékelő felmérő

A FELDOLGOZÁS MENETE

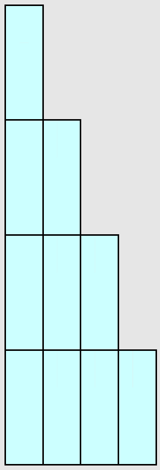
I. Számolás maradékokkal, összeg, szorzat maradéka; pontos és maradékos osztás; osztó, többszörös definíciója

1. Osztó, többszörös fogalmának ismétlése, általános alak megadása algebrai kifejezéssel

A demonstrációs készlet segítségével kirakjuk a világoskék rudakból álló sorozatot. Kevés alappal rendelkező csoportokban ajánlott a színes rudak kirakása páros munkában. Általában nem szükséges a konkrét tanulói tevékenység, elegendő számukra a tanári demonstráció, annak alapján is tudnak a tanári kérdésekre válaszolni, le tudják vonni a megfelelő következtetéseket.
E feladatok kapcsán fogalmazzuk meg, illetve ismételjük át az osztó, többszörös fogalmát. Megadjuk a definíciót. A **3. tanári melléklet** fóliáját használjuk!

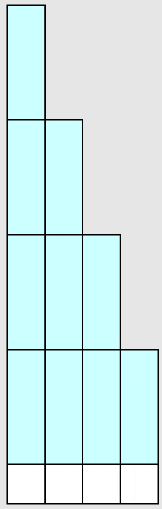


A színesrúd-készlet kék rúdjaiból „számtornyokat” építünk. A fehér kocka 1 egészet érjen!

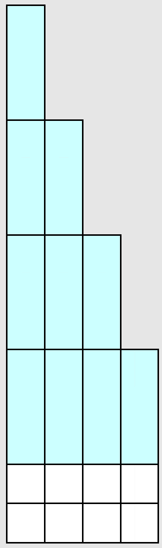


a) Milyen magas tornyokat tudunk építeni? 3, 6, 9…
b) Milyen tulajdonságúak ezek a számok? 3 többszörösei, vagy 3-mal osztható pozitív számok

A 3-mal osztható számokat $3 \cdot k$ alakban tudjuk felírni, ahol k pozitív egész szám. Ha a kék rudak számát k betűvel jelöljük, akkor k helyére 1, 2, 3... számokat behelyettesítve megkapjuk 3 összes pozitív többszörösét.



c) Mondj olyan számokat, amelyeket valahány kék rúdból és egy fehér rúdból tudunk megépíteni! 4, 7, 11…
Milyen tulajdonságúak ezek a számok? 3-mal osztva 1-et adnak maradékul
Azokat a számokat, amelyek 3-mal osztva 1-et adnak maradékul, $3 \cdot k + 1$ alakban tudjuk röviden leírni.



d) Milyen rudakból tudjuk kirakni a $3 \cdot k + 2$ alakú számokat? 2 fehér és valahány kék
Milyen tulajdonságúak ezek? 3-mal osztva 2-t adnak maradékul
Azokat a számokat, amelyek 3-mal osztva 2-t adnak maradékul, $3 \cdot k + 2$ alakban tudjuk röviden leírni.

1. FELADATLAP

3, 6, 9...

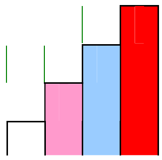
A 3-mal osztható számokat $\mathbf{3 \cdot k}$ alakban tudjuk felírni, ahol k pozitív egész szám. A *k* helyére az 1, 2, 3... számokat behelyettesítve megkapjuk 3 összes pozitív többszörösét.

1, 4, 7...

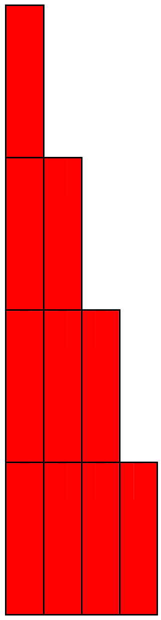
Azokat a számokat, amelyek 3-mal osztva 1-et adnak maradékul, $\mathbf{3 \cdot k + 1}$ alakban tudjuk röviden leírni.

2, 5, 8…

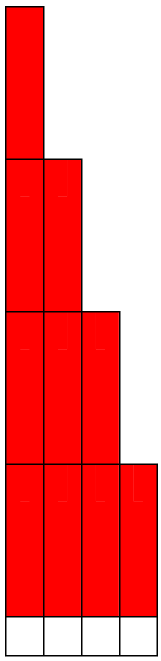
Azokat a számokat, amelyek 3-mal osztva 2-t adnak maradékul, $3 \cdot k + 2$ alakban tudjuk röviden leírni.
Ilyen színes rudakból építünk számokat.



1. A színesrúd-készlet segítségével kirakjuk a piros rudakból álló sorozatot.

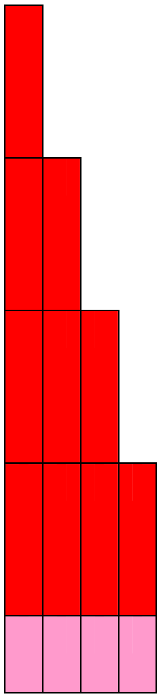


Milyen tulajdonságú számokat tudunk kirakni csupa piros rúdból? Milyen alakúak ezek?
4 többszörösei, $4 \cdot k$



Milyen tulajdonságú számokat tudunk kirakni csupa piros rúdból és egy fehérből? Milyen alakúak ezek?

4-es osztási maradékuk 1, $4 \cdot k + 1$



Milyen tulajdonságú számokat tudunk kirakni csupa piros rúdból és egy rózsaszínből? Milyen alakúak ezek?
4-es osztási maradékuk 2, $4 \cdot k + 2$

a) Adj meg egy-egy olyan háromjegyű számot, amely $3 \cdot k$, $3 \cdot k + 1$, $3 \cdot k + 2$, $4 \cdot k$, $4 \cdot k + 1$, $4 \cdot k + 2$, $4 \cdot k + 3$ alakú!

b) Kirakható-e a 618 csupa világoskék rúdból? Igen

Itt érdemes átismételni az osztó és többszörös fogalmát.
A 618 kirakható 206 darab világoskék rúdból, azaz találtunk egy olyan pozitív egész számot, amellyel a 3-at megszorozva 618-at kapunk. Ezért a 3-at a 618 **osztó**jának nevezzük. Így a 206 is osztója a 618-nak. Ha lenne 206-ot érő rudunk, akkor 3 darabbal tudnánk kirakni a 618-at. A 618 **többszörös**e a 3-nak és a 206-nak is.

c) Kirakható-e a 618 csupa piros rúdból? Nem

Itt érdemes átismételni a maradékos osztás fogalmát.
A 618 piros rudakkal csak úgy rakható ki, hogy egy rózsaszín rúddal kipótoljuk.
$618 = 4 \cdot 154 + 2$
Mivel nincs olyan pozitív egész szám, amellyel a 4-et megszorozva 618-at kapunk, ezért a 4 nem osztója a 618-nak. Hasonló okok miatt a 154 sem az. A 618 így nem többszöröse sem 4-nek, sem 154-nek

2. Számolás maradékokkal

A feladatok megbeszélése a gyerek ötletei alapján történik. A feladatokkal célunk azt megmutatni, hogy az osztás elvégzése nélkül is válaszolhatunk a felvetődő kérdésekre. Sokszor elegendő csak az osztási maradékokkal számolni. Sokszor gyorsabb, kevesebb hibalehetőséget rejtő megoldásmód. Nézzünk erre néhány példát!
A tanár fölrajzol a táblára hét zsákot, és elkezd a zsákokba számokat rakni aszerint, hogy milyen maradékot adnak 7-tel osztva. A gyerekek feladata kitalálni, hogy mi a szabály. A tanár néhány szám berakása után rákérdez, hogy a felmutatott számot hova tennék a gyerekek. Milyen osztó szerint csoportosítottunk?

Hány szám kihúzása elegendő a zsákok címkézéséhez?
Azt akarjuk megmutatni, hogy bármely zsák tetszőleges eleme egyértelműen reprezentálja a zsák tartalmát. A 771 ugyanúgy jó, mint az 1. Ezért a legegyszerűbb, hogy a zsákot a legkisebb számmal címkézzük, ha jellemezni akarjuk a zsák tartalmát. A maradékok szempontjából a zsákba tehető végtelen sok szám egyenrangú. Frontálisan irányított beszélgetés.
A további három feladat csoportokban vagy párban oldhatják meg a gyerekek. A leggyorsabb jó megoldásokat jutalmazzuk.

2.

a) Három dobozban üveggolyók vannak. Az egyikben 34, a másikban 27, a harmadikban 36. Szét tudja-e osztani egyenlően a gyerekek édesanyja három gyereke között?
Két tag osztható 3-mal és egy nem az, ezért nem osztható szét egyenlően.

b) Hét testvér együtt vitte vissza az üres üvegeket. Összesen 6852 Ft-ot kaptak. Szét tudják-e egyenlően osztani egymás között a pénzt?
A gyerekek nem tudják egyenlően szétosztani a pénzt.

Ha a gyerekek megoldásai között nem szerepel az célnak jól megfelelő összegre bontás módszere, akkor mutassunk rá példát.
Ügyes összegre bontással oldható meg gyorsan a feladat. Például így:

$6852 = 6300 + 552$
$552 = 490 + 62$
$62 = 56 + \boxed{6}$

A pirossal jelölt tagok mindegyike osztható 7-tel, ezért azokat „eldobhatjuk”, a maradékot bontjuk tovább. Az eljárás végén megkapjuk a 6852-nek a 7-tel való osztási maradékát, az 6-ot.
Tehát a gyerekek nem tudják egyenlően szétosztani a pénzt.

c) Egy 11 fuvarost foglalkoztató cég négy ajánlatot kapott homokszállításra. Egyenlő arányban szeretné elosztani a fuvart a tulajdonos. Mivel az ajánlatok között nincs nagy számbeli különbség, ezért azt az ajánlatot fogadja el, amelyik osztható 11-gyel. Melyik az?
A *C* ajánlatot fogadja el.

A 674523	B 674513	C 674520	D 674532	E 674521

Ha a gyerekek nem összegre bontással oldották meg, mutassunk rá példát, hogy lássák mennyivel rövidebb út.
Összegre bontással gyorsan meg lehet oldani a feladatot, például így:

$67\,45\,23 = 66\,44\,22 + 10\,101$
$10\,101 = 9\,999 + 102$
$102 = 99 + \boxed{3}$

A pirossal jelöltek 11 többszörösei, ezeket „eldobjuk”. Az utolsó összeg második tagja adja a maradékot.
Erre a módszerre a továbbiakban „eldobós módszerként” fogunk hivatkozni.

Egy *c* pozitív egész számnak osztója az *a* pozitív egész szám, ha van olyan *b* pozitív egész szám, amelyre igaz, hogy $c = a \cdot b$. A *c* szám *a*-nak és *b*-nek is többszöröse.

3. Gyakorlás

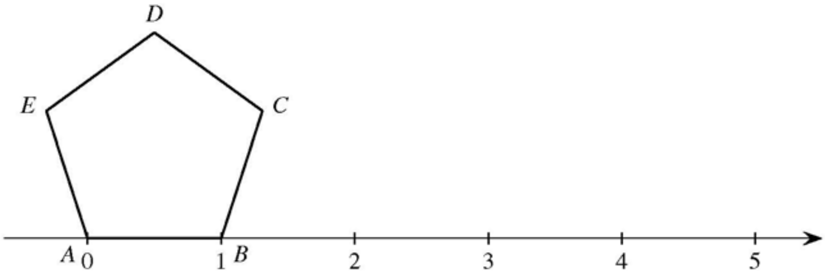
A feladatgyűjteményből válogathatunk képesség szerinti differenciálással.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1.

Könnyű gyakorló feladat.

Ennek a szabályos ötszögnek minden oldala 1. Gördítsd a számegyenesen!



a) Kerülhet-e valamikor az A csúcs a 125-ös számra?

igen

b) Hét teljes körülfordulás után, melyik számra kerül először a D csúcs?

38-ra

c) Milyen számokra kerülhet az E csúcs?

$5k + 4$ alakúakra

d) Add meg az összes 150 és 160 közötti számot, amely $5 \cdot k+1$ alakú, $5 \cdot k+3$ alakú, $5 \cdot k$ alakú!

$5k$	$5k+1$	$5k+3$
150	151	153
155	156	158
160		

e) Milyen alakúak az alábbi számok az 5-tel való oszthatóság szempontjából?

8313, 26, 717, 84, 93501, 110, 1005

$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
110	26	717	8313	84
1005	93501			

2.

Jó számolási készséget igénylő, időigényes feladat.

Írd a számokat a táblázat megfelelő helyére!

1, 3, 626, 414, 1000, 47, 4004, 535, 538

a) Melyik számnak nincs helye ebben a táblázatban? 3

b) Melyiket írhatjuk több helyre is? 1, 626, 414, 4004, 535, 538

c) Írj néhány újabb számot a táblázatba!

$3 \cdot k+1$	$4 \cdot k+2$	$2 \cdot k+0$	$6 \cdot k+1$	$7 \cdot k+5$	$8 \cdot k+4$
1	414	626	1	47	4004
535	626	414	535		538
538	538	538			
1000		4004			

3.

Nehezebb feladat, a 7-es maradékok megállapítása miatt.

Folytasd a táblázat kitöltését! Keress szabályt!

A bemenő szám 7-es maradéka a kijövő szám.

Be	19	87	1979	0	$7k$ alakú számok	7513	854	$7k+2$ alakú számok	$7k+6$ alakú számok
Ki	5	3	5	0	0	2	0	2	6

4.

Fontos, de könnyű feladat.

Négy szám összege osztható 4-gyel. Melyik igaz és melyik nem az alábbi állítások közül? Lehet-e, hogy közülük

egyik sem osztható 4-gyel;	igaz
egyik sem osztható 4-gyel a másik három nem;	igaz
kettő osztható 4-gyel, kettő nem;	igaz
három osztható 4-gyel, egy nem;	hamis
mindegyik osztható 4-gyel?	igaz

5.

Közepesen nehéz, mert a periodikusságot is észre kell venniük a gyerekeknek.

A $\frac{2}{7}$ tizedes tört alakjában milyen számjegy áll a tizedes vessző utáni 7. helyen? 2

Mi áll a 605. helyen? 1

Mi áll a 3302. helyen? 8

6.

Könnyű feladat.

Újonc katonákat sorakoztat a parancsnokuk. Ha hármasával sorakoztatja fel őket, akkor két katona kimarad. Akkor is két katona marad ki, ha hatosával sorakoztatja őket?

Nem biztos, lehet, hogy 5.

7.

Nehéz feladat

Egy piaci árus tyúk- és kacsatojásokat árul. A tojások hat kosárban vannak, az egyes kosarakban 4 ; 6; 12; 13; 22; 29 tojás található. A kétféle tojás keverten fér el a kosarakban. „ Ha ezt a kosár tojást eladom, akkor pontosan kétszer annyi tyúktojás marad, mint kacsatojás."- gondolja magában az árus. Melyik kosárra gondolt?

Mivel kétszer annyi tyúktojás maradt, mint kacsatojás, a megmaradt tojások száma 3-mal osztható. Az egyes kosarakban levő tojások számának 3-as maradéka rendre: 1,0,0,1,1,2. Ahhoz, hogy a megmaradt tojások száma 3 többszöröse legyen szükséges, hogy a visszamaradt öt kosár 3-as maradékainak összege osztható legyen 3-nal. Ez csak akkor lehetséges, ha az árus az utolsó, 29 tojást tartalmazó kosarat adta el. A megmaradt tojásokból 38 a tyúktojás, 19 a kacsatojás.

II. A tanult oszthatósági szabályok ismétlése (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100); 1000 osztóival való bővítés (8, 40, 125, 200, 250, 500, 1000)

1. Oszthatósági szabályok megállapítása számok helyi értékesen bontott összegalakjából

Az órát indító játékkal célunk
– egyrészt az, hogy rámutassunk arra, hogy sokszor érdemes a számokat helyi érték szerinti összeg alakban felírni,
– másrészt, feleleveníteni a tanult oszthatósági szabályokat.
Minden gyerek a 2. feladatlap **A** táblázatával dolgozik. A gyerekek munkáját fólián követhetjük (**4/a. tanári melléklet**).
4/a. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

51	52	53	54	55
61	62	63	64	65
71	72	73	74	75
81	82	83	84	85
91	92	93	94	95

2. FELADATLAP

A táblázat

51	52	53	54	55
61	62	63	64	65
71	72	73	74	75
81	82	83	84	85
91	92	93	94	95

Rakjatok le egy forintost az 53-ra, aztán a 61-re, majd folytassátok a lerakást úgy, hogy minden sorban és oszlopban pontosan egy érme álljon! Az a játékos nyer, akinél a lefedett számok összege a legnagyobb.

A gyerekek azt tapasztalják, hogy mindenki ugyanazt az összeget kapja. Keressük az okát! A megbeszélés során bizonyára megfogalmazzák a gyerekek, hogy mindenki ugyanannyi tízest

és ugyanannyi egyest adott össze, ez az oka annak, hogy mindenki ugyanazt az összeget kapta. Emeljük ki: az indoklásban azt használtuk ki, hogy a számokat $10 \cdot a + b$ alakban is fel lehet írni.
A **B** táblázatot írásvetítőn kivetítve játsszunk a gyerekekkel! (**4/b. tanári melléklet**)
4/b. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

1598	1599	1600	1601	1602
1698	1699	1700	1701	1702
1798	1799	1800	1801	1802
1898	1899	1900	1901	1902
1998	1999	2000	2001	2002

Átlátszó színes fóliából készült korongokkal takarjuk le a számokat! Fontos, hogy lássák a gyerekek is a kiválasztott számot.
A gyerekeket kérjük meg, hogy 1 forintosokkal jelöljék meg a fólián letakart számokat. A gyerekek a táblázatára lerakják az érméket, és közösen összegezzük a tapasztalatokat. A megbeszélés során átismételjük a tanult oszthatósági szabályokat, és újabbakat keresünk.
A játékot csoportban is játszhatják a gyerekek a szerepeket váltogatva. Az összes feladat lejátszása után a csoportok beszámolnak a tapasztalataikról.

B táblázat

1598	1599	1600	1601	1602
1698	1699	1700	1701	1702
1798	1799	1800	1801	1802
1898	1899	1900	1901	1902
1998	1999	2000	2001	2002

1. Letakartam a táblázatban egy számot. Takarj le egy másikat úgy, hogy az összeg osztható legyen
a) 2-vel, **b)** 5-tel, **c)** 10-zel!

A gyerekek a táblázatában kijelölik 1 forintosokkal (lencseszemekkel) a fólián letakart számokat és a tanár által adott feladatnak megfelelően a maguk által választott mezőt is.
A megbeszélés során megfogalmazzák az oszthatósági szabályokat.
Megállapíthatjuk azt, hogy az egyesnél nagyobb helyi értéken álló számjegyek nem szólnak bele a10 osztóival való oszthatósági szabályokba.
Ennek indoklása a számok helyi érték szerinti összegre bontott alakjával történhet: $\mathbf{10 \cdot a}$.
Az összeg második tagja dönti el, hogy a szám osztható-e 10 osztóival, hiszen az első tag 10 többszöröse.

2. Letakartam a táblázatban két számot. Takarj le egy harmadikat úgy, hogy az összeg osztható legyen
a) 2-vel, 4-gyel, **b)** 5-tel, 25-tel, **c)** 10-zel, 100-zal!

Megállapíthatjuk azt, hogy a tízeseknél nagyobb helyi értéken álló számjegyek nem szólnak bele a100 osztóival való oszthatósági szabályokba.
Ennek indoklása a számok ilyen alakban való felírásával történhet:
100 · valamilyen szám + $\overline{bc}$
Az összeg második tagja dönti el, hogy a szám osztható-e 100 osztóival.

3. Letakartam a táblázatban három számot. Takarj le egy negyediket úgy, hogy az összeg osztható legyen
a) 2-vel, 4-gyel, 8-cal,
b) 5-tel, 25-tel, 125-tel,
c) 10-zel, 100-zal, 1000-rel!

A megbeszélés során átismételjük a tanult oszthatósági szabályokat, és újabbakat keresünk.
Megállapíthatjuk azt, hogy a százasnál nagyobb helyi értéken álló számjegyek nem szólnak bele az 1000 osztóival való oszthatósági szabályokba.
1000 · valamilyen szám + $\overline{abc}$
Az összeg második tagja dönti el, hogy a szám osztható-e 1000 osztóival.

Kirakunk egy ötjegyű számot számkártyákból úgy, hogy a kártyákat arccal lefelé tesszük.
A legnagyobb helyi- értéktől lefelé egyesével visszafordítjuk a számjegyeket, és minden esetben megkérdezzük, hogy lehet-e tudni, hogy mivel osztható a szám.
Ebben az esetben megállapítjuk, hogy csak az egyes számjegy megismerése után tudunk bármit mondani.
Ugyanezt egy másik számmal is megcsináljuk, de a számjegyek felfedését az egyes helyi értékkel kezdjük.
A tanulságokat levonjuk, és precízen megfogalmazzuk az oszthatósági szabályokat.

ÖSSZEGZÉS:

10 osztóival való oszthatóság:
Minden szám felírható ilyen alakban:
$10 \cdot a + b = 10 \cdot \text{valamilyen szám} + b$
Az összeg második tagja dönti el, hogy a szám osztható-e 10 osztóival, hiszen az első tag 10 többszöröse.
Egy számban az egyesek helyén álló szám dönti el, hogy osztható-e 2-vel, 5-tel, 10-zel.

100 osztóival való oszthatóság:
Minden szám felírható ilyen alakban:
$100 \cdot a + \overline{bc} = 100 \cdot \text{valamilyen szám} + \text{valamilyen kétjegyű szám}$
Az összeg második tagja dönti el, hogy a szám osztható-e 100 osztóival, hiszen az első tag 100 többszöröse.

A számnak az utolsó két jegyét összeolvassuk. Ha ez a kétjegyű szám osztható 4-gyel, 20-szal, 25-tel, 50-nel, 100-zal, akkor a szám is osztható ezekkel.

1000 osztóival való oszthatóság:

Minden szám felírható ilyen alakban:

$1000 \cdot a + \overline{abc} = 1000 \cdot$ valamilyen szám + valamilyen háromjegyű szám

Az összeg második tagja dönti el, hogy a szám osztható-e 10 osztóival, hiszen az első tag 10 többszöröse.

A számnak az utolsó három jegyét összeolvassuk. Ha ez a háromjegyű szám osztható 8-cal, 40-nel, 125-tel, 200-zal, 250-nel, 500-zal, 1000-rel, akkor a szám is osztható ezekkel.

2. Az utolsó egy, két, három jegyből megállapítható oszthatósági szabályok alkalmazása

A gyerek képességeinek megfelelően differenciáltan adjuk a feladatokat a Feladatgyűjteményből.
A megoldásokat írásvetítőn kivetítve ellenőrizzük. A típushibákat frontálisan megbeszéljük.

Egyszerű feladat, de a rosszul számoló gyereknek túl sok idejét elviheti. Ösztönözzük őket az ügyes összegre való bontásra, az „eldobós” módszer használatára.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Hány különböző háromjegyű számot tudsz készíteni, ha ezek a számkártyáid vannak? hat

2 **3** **4**

a) Ezek közül hány lesz páros? négy (234, 324, 342, 432)
b) Hány lesz 4-gyel osztható? kettő (324, 432)
c) Hány lesz 8-cal osztható? egy (432)

2.

Az előző feladatra épül, de így is időigényes.

Hány különböző négyjegyű számot tudsz készíteni, ha ezek a számkártyáid vannak? huszonnégy

1 **2** **3** **4**

a) Ezek közül hány lesz páros? tizenkettő (1342, 1432, 3142, 3412, 4132, 4312, 1324, 1234, 3124, 3214, 2134, 2314)
b) Hány lesz 4-gyel osztható? hat (1432, 3412, 4132, 4312, 1324, 3124)
c) Hány lesz 8-cal osztható? három (1432, 3412, 4312)

3.

Ezt a nulla szerepe miatt javasoljuk mindenki számára.

Hány különböző háromjegyű számot tudsz készíteni, ha ezek a számkártyáid vannak? $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$, tizennyolcat

0 **1** **2** **3**

a) Ezek közül hány lesz páros? tíz
b) Hány lesz 4-gyel osztható? négy (1032, 1320, 3012, 3120)
c) Hány lesz 10-zel osztható? hat (1230, 1320, 2130, 2310, 3210, 3210)
d) Hány lesz 20-szal osztható? kettő (1320, 3120)
e) Hány lesz 8-cal osztható? három (1032, 1320, 3220)

4.

Könnyű feladat

Melyik a legnagyobb, és melyik a legkisebb nullásokból és egyesekből álló 8-cal osztható szám? A legkisebb 1000, legnagyobb nincs.

5. Oszthatók-e 8-cal az alábbi összegek?

$10^{11} + 8$ igen, mert mindkét tag osztható vele

$1^{999} + 2^9$ nem, mert páratlan a szám

6. Keresd meg azokat a pozitív egész számokat, amelyek oszthatók 8-cal, számjegyeik összege 8, és jegyeinek szorzata 8? Ez a szám csak az 1, 1, 2, 4 jegyekből vagy az 1, 1, 2, 2, 2 jegyekből állhat. Három ilyen szám van: 1124, 4112, 22112.

7.

2, 22, 222, 2222, 22222…

Tartalmaz-e a sorozat végtelen sok olyan számot, amely osztható

a) 2-vel**;** igen, mind az

b) 4-gyel**;** nem, egyet sem

c) 8-cal; nem, egyet sem

d) 11-gyel; igen, minden második 11-gyel osztható

e) 22- vel; igen, minden második 22-vel osztható

f) 111-gyel; igen, minden harmadik 111-gyel osztható

g) 222-vel? igen, minden harmadik 222-vel osztható

8. Egészítsétek ki a következő számokat egy-egy számjeggyel úgy, hogy azok oszthatók legyenek

a) 2-vel; **b)** 4-gyel; **c)** 5-tel; **d)** 10-zel; **e)** 25-tel; **f)** 8-cal!

5 3 7 ■ **4 ■ 1 2** **6 8 ■ □** **■ 4 7 □**

<table>
<tr><th></th><th>5 3 7 ■</th><th>4 ■ 1 2</th><th colspan="2">6 8 ■ □</th><th colspan="2">■ 4 7 □</th></tr>
<tr><td rowspan="2">2-vel</td><td rowspan="2">0, 2, 4, 6, 8</td><td rowspan="2">bármi</td><td>□</td><td>bármi</td><td>■</td><td>bármi</td></tr>
<tr><td>■</td><td>0, 2, 4, 6, 8</td><td>□</td><td>0, 2, 4, 6, 8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4-gyel</td><td rowspan="2">2, 6</td><td rowspan="2">bármi</td><td colspan="2" rowspan="2">■ □ kétjegyű szám osztható legyen 4-gyel</td><td>■</td><td>0 kivételével bármi</td></tr>
<tr><td>□</td><td>2, 6</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5-tel</td><td rowspan="2">0, 5</td><td rowspan="2">nem lehet</td><td>■</td><td>bármi</td><td>■</td><td>0 kivételével bármi</td></tr>
<tr><td>□</td><td>0, 5</td><td>□</td><td>0, 5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">10-zel</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">nem lehet</td><td>■</td><td>bármi</td><td>■</td><td>0 kivételével bármi</td></tr>
<tr><td>□</td><td>0</td><td>□</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">25-tel</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">nem lehet</td><td colspan="2" rowspan="2">■ □ kétjegyű szám osztható legyen 25-tel</td><td>■</td><td>0 kivételével bármi</td></tr>
<tr><td>□</td><td>5</td></tr>
<tr><td>8-cal</td><td>6</td><td>1, 3, 5, 7</td><td colspan="2">■ □ kétjegyű szám osztható legyen 8-cal</td><td>■</td><td>0 kivételével bármi</td></tr>
</table>

9. Mindig arra a csúcsban vagy élben szomszédos mezőre lépj, amelyben az ott álló szám osztható 125-tel! Melyik mezőre lépsz utoljára? 50^2

Start	7500	100205	125525	3100
1255	42550	100750	42625	20^3
2^{25}	25^2	1600	125050	5^6
50^2	5^{10}	5^4	123875	10^3-125

III. A 3-mal és 9-cel való oszthatósági szabály bizonyítása

1. A 9-cel való oszthatósági szabály bizonyítása

A tanár kitűzi a feladatokat, a tanulók tevékenységét folyamatosan figyelemmel kíséri, szükség esetén segít.
Az 1. feladattal, a 9-cel való oszthatósági szabály előkészítése a célunk. Az alábbiak felfedeztetését szolgálják a feladatok:
a) Minden 10 hatvány 9-cel való osztási maradéka 1. Ha 10 hatványait 0-tól, illetve 9-től különböző egyjegyű számmal szorozzuk meg, a szorzó egyben a szorzat 9-cel való osztási maradéka.
b) Ha egy számot helyi érték szerinti összegre bontott alakban adjuk meg, akkor a 10 hatványok szorzóit összeadva, a szám 9-cel való osztási maradéka megadható.
c) Számok 9-cel való osztási maradéka számjegyeinek összegéből is megkapható.

3. FELADATLAP

1. Ebbe a gépbe csak természetes számokat lehet bedobni. A gép 9-cel oszt, és a maradékot dobja ki. Töltsd ki a táblázatot! Észrevételeidet fogalmazd meg!

a)

be	1	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
ki	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

b)

be	2	$2 \cdot 10^1$	$5 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^6$	$6 \cdot 10^7$	$8 \cdot 10^8$
ki	$2 = 2$	$2 \cdot 1 = 2$	$5 \cdot 1 = 5$	$5 \cdot 1 = 5$	$9 \cdot 1 = 9$	$3 \cdot 1 = 3$	$4 \cdot 1 = 4$	$6 \cdot 1 = 6$	$8 \cdot 1 = 8$

c)

be		ki
$2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 1 = 23$	$2 + 3 = 5$	5
$5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 1 = 523$	$5 + 2 + 3 = 10$	1
$5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 1 = 5422$	$5 + 4 + 2 + 3 = 13$	4
$6 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^3 = 608\,000$	$6 + 8 = 14$	5

d)

be	120	210	111	1011	2001	230	50	1220	11111
ki	3	3	3	3	3	5	5	5	5

A tapasztaltak megbeszélése után a gyerekek önállóan oldják meg a többi feladatot. Ezekkel a feladatokkal az 1. feladatban tapasztaltak rögzítése a célunk. Lassabban haladó csoportban frontálisan vagy csoportmunkában.
A 2. feladat kapcsán kitérhetünk arra is, hogy az ilyen típusú számok mindegyike előállítható 10 hatványainak összegeként.

2. Igaz-e, hogy a $10^1 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 + 10^6 + 10^7 + 10^8 + 10^9$ összeg osztható 9-cel?
Igaz. Az összeg 1 111 111 110. Tíz minden hatványának 1 a 9-es maradéka, ezek összege éppen 9.

3. Igaz-e, hogy az 1, 11, 111, 1111… sorozatnak végtelen sok 9-cel osztható tagja van?
Az állítás igaz. A sorozat minden olyan eleme, amelyben 9, 18, 27,… darab 1-es számjegy szerepel,osztható 9-cel..
Az ilyen számok számjegyeinek számát megadó szám 9 többszöröse.

A 4. a) feladattal célunk annak megmutatása, ha 10 hatványait ugyanazzal a számmal szorozzuk, a kilences maradékuk megegyezik. Pl. A $2 \cdot 10^4$, a $2 \cdot 10^3$ és a $2 \cdot 10^2$ számok mindegyikének 2 a 9-es maradéka.

4. Mennyi a 9-cel való osztási maradéka az összeg alakban felírt számoknak?
a) $5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1$
b) $2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1$
c) $3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1$
Mindegyik számnak ugyanannyi a kilences maradéka, mert ugyanazokból a számjegyekből építhetők fel.

Az 5. feladattal célunk rögzíteni azt a tényt, hogy a 9-cel való oszthatóság nem függ a szám jegyeinek sorrendjétől, csak azok összegétől. Önálló munkának szánjuk, közös megbeszéléssel.
Lassabban haladó csoportban szükség lehet a hat - hat szám kirakására, és az eddigiek során használt eljárás újragondolása. Például így:
237 = 2 százas + 3 tízes + 7 egyes
Minden százas 9-cel osztva 1-et ad maradékul, 2 százas 2-t.
Minden tízes 9-cel osztva 1-et ad maradékul, 3 tízes 3-at.
Minden egyes 9-cel osztva 1-et ad maradékul, 7 egyes 7-et.
A maradékok összege: 2 + 3 + 7 = 12, amely ugyanannyi maradékot ad 9-cel osztva, mint a 3.

5. Igazak-e az állítások?
a) A 10 minden hatványa 9-cel osztva 1-et ad maradékul. igaz
b) A **2** **3** **7** kártyákból kirakható 3 jegyű számok egyike sem osztható 9-cel. igaz
c) A **8** **3** **7** kártyákból kirakható 3 jegyű számok mindegyike osztható 9-cel. igaz
d) Ha egy szám nem osztható 9-cel, akkor a jegyei felcserélésével kapott számok egyike sem osztható 9-cel. igaz
e) Ha egy szám osztható 9-cel, akkor a jegyei felcserélésével kapott számok mindegyike osztható 9-cel. igaz

A 6. feladat szervesen kapcsolódik az előzőhöz. Jól mutatja, hogy az 5-tel való oszthatóságnál számít a jegyek sorrendje. Mondjanak a gyerekek más példát is olyan esetre, amelyeknél számít a jegyek sorrendje!

6. Igazak-e az állítások?

a) A 10 minden hatványa osztható 5-tel.

Igaz.

b) A **2** **5** **7** kártyákból kirakható 3 jegyű számok egyike sem osztható 5-tel.

Hamis, 275, 725.

c) A **7** **3** **5** kártyákból kirakható 3 jegyű számok mindegyike osztható 5-tel.

Hamis, a nem 5 végűek nem oszthatók 5-tel.

d) Ha egy szám nem osztható 5-cel, akkor a jegyei felcserélésével kapott számok egyike sem osztható 5-tel.

Hamis. Csak akkor lehetne igaz, ha jegyei között nem szerepelne sem az 5, sem a 0.

e) Ha egy szám osztható 5-tel, akkor a jegyei felcserélésével kapott számok mindegyike osztható 5-cel.

Hamis. Csak akkor lenne igaz, ha jegyei között csak az 5 és a 0 szerepelne.

A 7. és 8. feladat a tanultak alkalmazását, elmélyítését szolgálhatja.
A 7. feladat megoldása kapcsán mutatható meg, hogy például 5723 kilences maradéka megegyezik számjegyeinek összegének kilences maradékával, 5+7+2+3= 17 kilences maradékával. Aminek kilences maradéka megegyezik számjegyeinek összegével, 1+7=8-cal.
Röviden: ha egy szám jegyeit összeadva többjegyű számot kapunk, és ennek jegyeit összeadva megint többjegyű összeget kapunk, amelynek jegyeit összeadjuk … és így tovább, egészen addig , amíg egyjegyű számot nem kapunk, az eredeti szám kilences maradéka lesz az eljárás végén kapott egyjegyű szám. Valamint azt is, hogy a 10 hatványok szorzói közül a 9-eseket, illetve azokat, amelyek összege 9, elhagyhatjuk.

7. Mennyi a 9-cel való osztási maradéka az összeg alakban felírt számoknak?

a) $3 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1$ 5

b) $5 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1$ 0

8.

a) Az **123□** szám végére írj egy számjegyet úgy, hogy a kilences maradéka ne változzon!

0, 9

b) **68□1** számban pótold a hiányzó számjegyet úgy, hogy 9-cel osztható számot kapj!

3

c) **68□⌂1** számban pótold a hiányzó jegyeket úgy, hogy 9-cel osztható számot kapj!

A □+⌂ összeg 9-cel osztva 3-at adjon maradékul: □+⌂ = 3 vagy 12.

2. A 3-mal való oszthatósági szabály levezetése a 9-cel való oszthatósági szabályból

Az alábbi két feladat szóról-szóra szerepelt az előző részben, csak ott a 9-cel való oszthatóságot vizsgáltuk. Mi a hasonlóság?
E feladat megoldása során a gyerekek rájöhetnek arra, hogy miden 10 hatvány 3-as maradéka 1. Ennek oka, hogy 3 osztója a 9-nek. Arra is rájöhetnek, hogy ahány darabot veszünk valamelyik 10 hatványból, az annyiszor 1 maradékot ad.
Ha például az 500 maradékát vizsgáljuk, ez százasonként 1 maradék, tehát öt maradék. A hármas maradék szempontjából mindegy, hogy 5-tel vagy 2-vel számolunk.
A gyerekek csoportban vagy párokban dolgozhatnak, észrevételeiket írásban is megfogalmazzák.

9. Ebbe a gépbe csak természetes számokat lehet bedobni. A gép 3-mal oszt, és a maradékot dobja ki. Töltsd ki a táblázatot!
Észrevételeidet írásban fogalmazd meg!

a)

be	1	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
ki	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Minden 10 hatvány hármas maradéka 1.

b)

be	2	$2 \cdot 10^1$	$5 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^6$	$6 \cdot 10^7$	$8 \cdot 10^8$
ki	2	2	5	5	9	3	4	6	8

A10 hatványok szorzatainak hármas maradéka megegyezik a szorzó hármas maradékával.

c)

be		**ki**
$2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 1 = 23$	$2 + 3 = 5$	2
$5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 1 = 523$	$5 + 2 + 3 = 10$	1
$5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^1 + 2 \cdot 1 = 5422$	$5 + 4 + 2 + 2 = 13$	1
$6 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^3 = 608000$	$6 + 8 = 14$	2

A 10 hatványok szorzatainak összege esetén a szorzók összegének hármas maradéka megegyezik az összeg hármas maradékával.

d)

be	120	210	111	1011	2001	230	50	1220	11111
ki	0	0	0	0	0	2	2	2	2

Ezzel a feladattal az a célunk, hogy a gyerekek felismerjék, hogy a 9-cel való oszthatóság vizsgálatakor kimondott törvényszerűségek érvényben maradnak, hiszen a számjegyek itt is az osztási maradékokat adják. Ezért, ha a számjegyeket összeadjuk, akkor a maradékok összegét kapjuk.

Ha a számokat felírjuk helyi érték szerinti összegalakban, akkor a c) feladat megállapításai érvényesek itt is. A 10 hatványok szorzói a szám jegyei, ezért a számjegyek összegének hármas maradéka megegyezik a szám hármas maradékával.

10. Mennyi a 3-mal való osztási maradéka az összeg alakban felírt számoknak?
Ezzel a feladattal a felismert összefüggések elmélyítése a célunk.

a) $5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1$ 2
b) $3 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1$ 2
c) $5 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1$ 0

Egy szám osztható 9-cel, ha a szám jegyeinek összege osztható 9-cel.
Egy szám osztható 3-mal, ha a szám jegyeinek összege osztható 3-mal.

3. A tanultak alkalmazása

A feladatgyűjtemény feladatai közül válogatva differenciáltan adjuk a feladatokat, az osztály összetételétől függő munkaformában.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1.

Könnyű feladat.

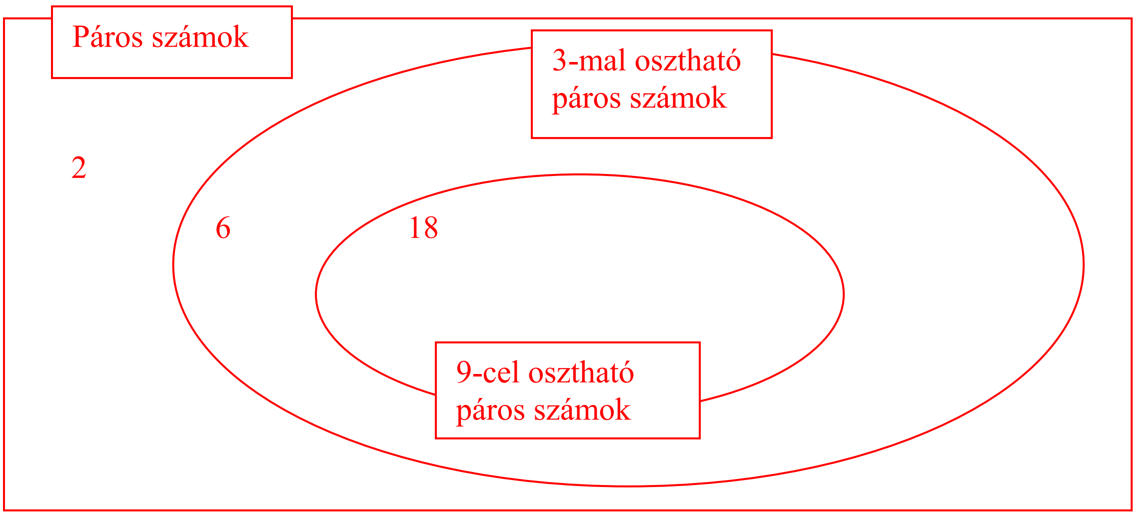
A számoknak néhány jegyét letakartuk. Melyikről tudod biztsan eldönteni, hogy osztható-e a kérdezett számmal? Írj a táblázat megfelelő helyére eldönthető / nem eldönthető választ!

Osztható	■ ■ **2 0**	■ **3** ■ **5 0**	■ **3 6 0 0**	**8** ■ **3** ■ **5**
2-vel	eldönthető (osztható)	eldönthető (osztható)	eldönthető (osztható)	eldönthető (nem osztható)
3-mal	nem eldönthető	nem eldönthető	nem eldönthető	nem eldönthető
4-gyel	eldönthető (osztható)	eldönthető (nem osztható)	eldönthető (osztható)	eldönthető (nem osztható)
8-cal	nem eldönthető	eldönthető (nem osztható)	eldönthető (osztható)	eldönthető (nem osztható)
9-cel	nem eldönthető	nem eldönthető	nem eldönthető	nem eldönthető
10-zel	eldönthető (osztható)	eldönthető (osztható)	eldönthető (osztható)	eldönthető (nem osztható)
20-szal	eldönthető (osztható)	eldönthető (nem osztható)	eldönthető (osztható)	eldönthető (nem osztható)
25-tel	eldönthető	eldönthető (osztható)	eldönthető (osztható)	nem

2.

a) Készíts halmazábrát, úgy, hogy az alaphalmaz a páros számok halmaza legyen, és ebből válaszd ki a 3-mal osztható számokat és a 9-cel osztható számokat.

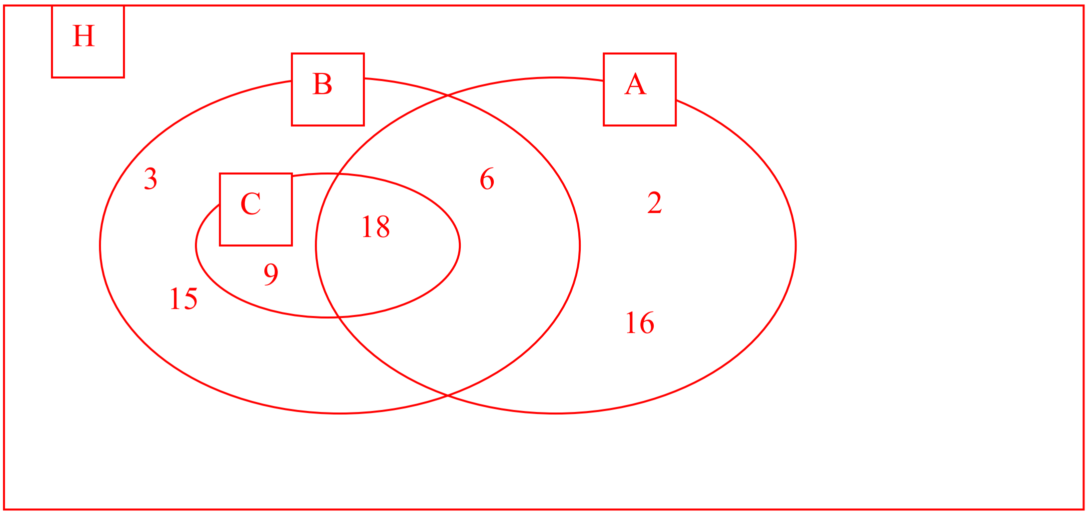
Úgy rajzold a halmazábrát, hogy ne legyenek benne üres részek! Írj minden részbe néhány elemet!



b) Készíts halmazábrát az alábbi halmazokhoz! Alaphalmaz (**H**) az 50-nél kisebb természetes számok halmaza.

A: {páros számok}
B: {3-mal osztható számok}
C: {9-cel osztható számok}

Úgy rajzold a halmazábrát, hogy ne legyenek benne üres részek! Írj minden részbe néhány elemet!



3.

Könnyű feladat.

Mennyi a felsorolt számok 9-es és 3-as maradéka?

642, 3, 0 1539, 0, 0 214, 7, 1 9735, 6, 0 6060, 3, 0 162918 6, 0

4. Pótold a **4375**□ ötjegyű számban a hiányzó számjegyet úgy, hogy a szám osztható legyen
a) 3-mal, 2, 5, 8 **b)** 9-cel, 8 **c)** 3-mal igen, de 9-cel nem! 2, 5

5. Hány csupa olyan 2-esből álló szám van, amely osztható
a) 3- mal; Végtelen sok; 222, 222222,… Jegyeinek száma három többszöröse.
b) 9-cel; Végtelen sok; 222222222,… Jegyeinek száma kilenc többszöröse
c) 8-cal? Nincs egy sem, hiszen 22-re végződő 8-cal osztható szám nincs.

6. A 2005 szám végére írj még számjegyet úgy, hogy ne változzon a szám
a) 3-as; **b)** 4-es; **c)** 5-ös; **d)** 9-es maradéka!
a) 0, 3, 6, 9 b) 3, 7 c) 0, 5 d) 0, 9

7. A pozitív egész számok sorozatában melyik
a) a századik 3-mal osztható szám, 300
b) a századik 4-gyel osztható szám, 400
c) a századik 9-cel osztható szám, 900
d) a negyvenedik 3-nal osztva 1 maradékot adó szám, 118
e) a negyvenedik 4-gyel osztva 3 maradékot adó szám, 15
f) a negyvenedik 9-cel osztva 7-et maradékul adó szám? 367

8. a) Az 16631663 szám lehet-e két egymást követő egész szám szorzata?
nem, mert a szorzatnak párosnak kell lennie
b) Az 16641664 szám lehet-e két egymást követő egész szám összege?
nem, mert az összegnek páratlannak lennie

c) Az 16641664 szám lehet-e három egymást követő egész szám összege?
nem, mert az összeg 3 többszöröse lesz, ez a szám pedig nem az
d) Az 16641664 szám lehet-e három egymást követő egész szám szorzata?
nem, mert a szorzatnak 3 többszöröse lesz, ez a szám pedig nem az

9.
Könnyű feladat.
Ezek a számkártyáink vannak: 1 2 6
a) Hány különböző háromjegyű számot tudsz készíteni belőlük? Hatot
b) Hány lesz közülük 3-mal, 4-gyel, 9-cel osztható?
Mindegyik osztható 3-mal és 9-cel, kettő lesz 4-gyel osztható, a 216 és a 612.

10.
Könnyű feladat.
Ezek a számkártyáink vannak: 2 3 7
a) Hány különböző háromjegyű számot tudsz készíteni belőlük? Hatot
b) Hány lesz közülük 3-mal, 4-gyel, 9-cel osztható?
Mindegyik osztható 3-mal, egyik sem osztható 9-cel, kettő lesz 4-gyel osztható, a 372 és a 732.

11. Ezek a számkártyáink vannak: 1 1 0 6
a) Hány különböző négyjegyű számot tudsz készíteni belőlük?
Tizenegy számot: 1106, 1160, 1016, 1061, 1610, 1601, 6110, 6101, 6110, 6101, 6011.
b) Hány lesz közülük 3-mal, 4-gyel, 9-cel osztható?
Egyik sem osztható 3-mal, ill. 9-cel; kettő osztható 4-gyel: 1160 és 1016.

IV. Az oszthatósági szabályok gyakorlása, alkalmazása

1. Matematikatörténeti érdekesség: „kilences próba”; számkitalálós trükkök

4. FELADATLAP

Kultúrtörténeti érdekesség, alkalmas az érdeklődés felkeltésére, a tanultak gyakorlására, a kilences maradék gyorsabb megállapítására. Frontális munkára szánjuk.
A gyerekek nyomon követik a megbeszélést, majd a következő feladatban maguk is elvégeznek egy kilences próbát.
5. tanári melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt! (A tanulók tankönvében szereplő 1. táblázat írásvetítő fólián.)

Összeadandók									az összeg kilences maradéka	a tagok kilences maradéka
			3	1	4	5	6	9		1
					6	5	1	3		6
				4	6	1	3	9		5
				5	3	1	7	7		5
			1	1	6	9	8	1		8
		+			4	2	6	5		8
összeg			5	4	1	6	4	4	**6**	a maradékok összegének kilences maradéka: 6

Abban az időben, amikor még nem volt mindenki kezében a zsebszámológép, de még ennél egyszerűbb mechanikus számológép sem, egy hosszú számoszlop összeadását az un. „kilences próbával” ellenőrizték. Lássuk mit jelent ez!

Az előzőekben láttuk, hogy a számjegyek a kilences maradékokat adják. Amikor a számjegyeket összeadjuk, éppen a maradékokat adjuk össze, ezért például a 13-at vagy a 22-t helyettesíthetjük 4-gyel, hiszen mindegyik 9·k+4 alakú. Ezért egy sokjegyű szám jegyeinek összeadásakor a 9-et adó összegeket „eldobhatjuk”, ezek nulla maradékúak. Mutassunk példát erre, mielőtt magát a próbát megbeszélnénk.
Például: **69275431** szám kilences maradékát gyorsan meg lehet állapítani (**1**) , mivel az ugyanolyan színű számok „eldobhatók”.
A „kilences próbában” kiszámították a tagok kilences maradékainak összegét, majd az összeg kilences maradékát. Ha a két maradék megegyezett, akkor valószínűleg jól számoltak.

Összeadandók									az összeg kilences maradéka	a tagok kilences maradéka
			3	1	4	5	6	9		1
					6	5	1	3		6
				4	6	1	3	9		5
				5	3	1	7	7		5
			1	1	6	9	8	1		8
		+			4	2	6	5		8
összeg			5	4	1	6	4	4	**6**	**a maradékok összegének kilences maradéka: 6**

Melyik állítás igaz?
A) Ha a kilences próba szerint helyes az eredmény, akkor biztos, hogy hibátlanul végeztük el az összeadást.
Nem, mert lehet, hogy a hibás összeadás kilences maradéka megegyezik a jó eredmény kilences maradékával.
B) Ha hibátlanul végeztük el az összeadást, akkor biztos, hogy a kilences próba is igazolja ezt.
Ez biztos, persze csak akkor, ha nem számoltuk el a kilences próbát.

1.

a) Kilences próbával ellenőrizd az összeadásokat!

Összeadandók									az összeg kilences maradéka	a tagok kilences maradéka
					2	8	6	1	8	8
				3	1	4	1	3	3	3
					9	1	2	7	1	1
			6	5	4	3	2	1	3	3
		+		4	5	5	6	6	8	8
összeg			7	4	3	2	8	8	**5**	**a maradékok összegének kilence maradéka: 5**

Összeadandók									az összeg kilences maradéka	a tagok kilences maradéka
			3	7	0	5	6	1		4
					6	5	5	2		0
				4	0	1	4	3		3
			9	5	3	1	3	4		7
			1	1	0	9	2	5		0
		+		3	4	2	1	6		7
összeg		1	5	1	5	5	3	1	**3**	**a maradékok összegének kilence maradéka: 3**

b)

Ezzel a feladattal egyrészt az a célunk, hogy megmutassuk, ha egy számot 9-cel vagy 9 többszöröseivel szorzunk, akkor kilences maradéka 0 lesz. Másrészt, ha egy szám jegyeit összeadva többjegyű számot kapunk, majd ennek a jegyeit újra összeadjuk egészen addig, amíg egyjegyű számhoz nem jutunk, az így kapott szám, éppen a kiinduló szám kilences maradéka lesz.

Gondolj egy számot! Add hozzá a házszámodat, és azt, hogy hányas cipőt hordasz! Az összeget szorozd meg 9-cel! Add össze a kapott szám számjegyeit, ha többjegyű számot kaptál, annak is add össze a számjegyeit, egészen addig, amíg egyjegyű számot nem kapsz! Kilencet kaptál! Igaz?

Keress magyarázatot arra, hogy én ezt honnan tudhatom?

c)

Ezzel a feladattal célunk megmutatni, hogy kivonáskor a különbség kilences maradéka megegyezik a tagok kilences maradékának különbségével.

Gondolj egy háromjegyű számot, amelynek mind a három jegye különböző! Írd le a számjegyeket fordított sorrendben, és a nagyobbikból vond ki a kisebbet! Mondd meg a különbség utolsó számjegyét, és én megmondom a különbséget!

Magyarázd meg, hogy találom ki!

A gyerekek konkrét példáit megvizsgálva láthatják, hogy a különbség középső jegye mindig 9. A tagok kilences maradékai megegyeznek, hiszen a számjegyek megegyeznek, ezért a kivonáskor a kilences maradékok is kivonódnak egymásból, azaz a különbség mindig 9-cel osztható szám lesz. Emiatt a szélső jegyek összege 9.

2. Vegyes gyakorló feladatok; összeg, különbség, szorzat, hányados oszthatósága adott számmal; igaz, hamis állítások

A feladatgyűjtemény feladatai közül válogatva differenciáltan kínálhatjuk a gyerekeknek a feladatokat. A gyerekek maguk választhatnak a tanár által felajánlott könnyebb, illetve nehezebb feladatok közül.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1.

Fontos, de időigényes feladat.

Válassz ki a szorzatok közül kettőt úgy, hogy az összegük osztható legyen

a) 3-mal, **b)** 5-tel, **c)** 11-gyel, **d)** 9-cel, **e)** 25-tel!

2 · 5 **5 · 11** **3 · 5** **3 · 11** **5 · 7**

A jó választás feltétele például az a) esetben

a) A két tagnak vagy legyen 3-mal osztható , vagy a hármas maradékuk összege legyen 3-mal osztható. Például: $3 \cdot 5$, $3 \cdot 11$ vagy $2 \cdot 5$, $5 \cdot 7$.

Az összes többi esetre, az adott osztóra nézve, e két feltételnek kell teljesülnie!

2. A szorzás elvégzése nélkül válaszolj a kérdésre!

Osztható-e a **24 · 30** szorzat

a) 3-mal;	igen, mindkét tényező osztható 3-mal
b) 9-cel;	igen, mindkét tényező osztható 3-mal
c) 8-cal;	igen, egyik tényező osztható 8-cal
d) 5-tel;	igen, egyik tényező osztható 5-tel
e) 20-szal;	igen, egyik tényező osztható 5-tel, a másik 4-gyel
f) 25-tel;	nem, egyik tényező sem osztható 5-tel
g) 11-gyel?	nem egyik tényező sem osztható 11-gyel

3.

Időigényes, de nem gyenge csoportban, mindenképpen kitűzésre javasolt feladat.

Írj egy-egy számjegyet a betűk helyére úgy, hogy először 125-tel osztható összegeket kapj, aztán úgy, hogy 3-mal osztható összegeket kapj!

a) 142A + 80B1

b) 14A2 + 8B01

a) 42A + 80B1 = 500 A = 9, B = 7

A 42A + 80B1 összeg 500-nál több nem lehet, ezért ez az egy megoldás van a 125-tel való oszthatóságra.

Az ismert jegyek 3-as maradéka 1, ezért az (A + B) összeg 3-as maradéka 2 legyen! (A + B) összeg lehetséges értékei: 2, 5, 8, 11, 14, 18

b) Az összeg nem lehet 125-tel osztható, mert 3-ra végződik. A 3-mal való oszthatóságra ugyanazoknak a feltételeknek kell teljesülniük, mint az a)-ban.

4. Írj be egy-egy számjegyet a betűk helyére úgy, hogy a szorzatok

a) 100 pozitív többszörösei

b) 9 pozitív többszörösei legyenek!

A) $2 \cdot 5 \cdot x \cdot y$
B) $x \cdot 3 \cdot y \cdot 5$

a) A : az egyik tényező 2,4,6,8, a másik 5.
B : az egyik tényező 4,8 a másik 5.

b) A : vagy az egyik tényező legyen 9, akkor a másik bármi lehet, vagy mindkettő osztható legyen 3-mal.
B: Az egyik tényező osztható legyen 3-mal.

5. Mutasd meg, hogy a $1+11+11^2+11^3+11^4+11^5+11^6+11^7+11^8+11^9$ összeg osztható 10-zel!
Minden tag utolsó jegye 1, a tíz tag összege 0-ra végződik.

6.
Zsebszámológépet használjanak a gyerekek a feladat megoldásához!
Igaz-e, ha egy szám jegyeinek összege osztható 27-tel, akkor a szám is osztható 27-tel?
Nem, például 9981-re sem igaz.

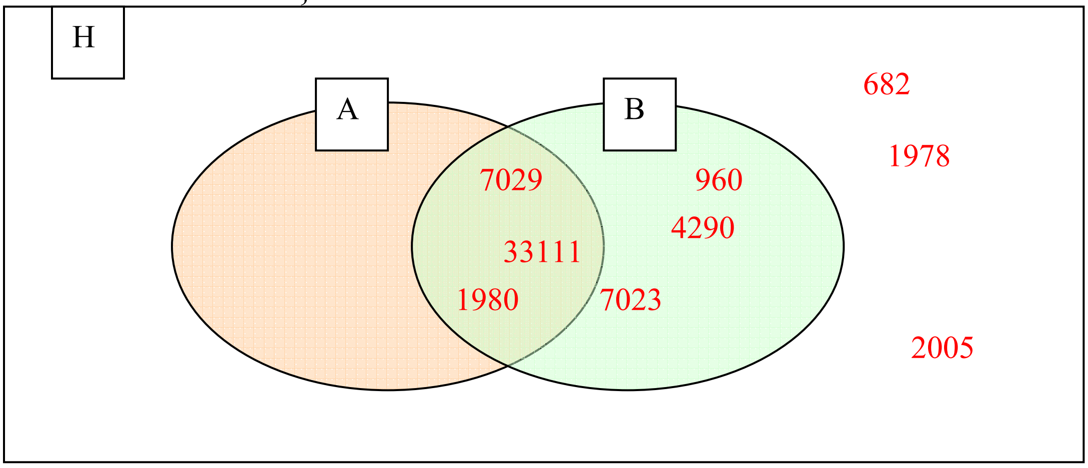
7. A számoknak csak néhány jegyét ismered. Melyikről tudod eldönteni, hogy osztható-e a kérdéses számmal? Töltsd ki a táblázatot (eldönthető / nem eldönthető beírásával)!

Osztható	**8-cal**	**125-tel**	**200-zal**	**3-mal**	**9-cel**
■■**80**	nem eldönthető	eldönthető (nem osztható)	eldönthető (nem osztható)	nem eldönthető	nem eldönthető
■■**50**	eldönthető (nem osztható)	nem eldönthető	eldönthető (nem osztható)	nem eldönthető	nem eldönthető
■**625**	eldönthető (nem osztható)	eldönthető (osztható)	eldönthető (nem osztható)	nem eldönthető	nem eldönthető
2■■**0**	nem eldönthető	nem eldönthető	nem eldönthető	nem eldönthető	nem eldönthető

8. Ezek a számkártyáink vannak: **0** **2** **5** **1**
Hány háromjegyű számot tudsz készíteni belőlük?
a) Hány lesz közülük 5-tel osztható? 18-at
b) Hány lesz közülük 4-gyel osztható? négy (512, 520, 120, 152)
c) Hány lesz közülük 8-cal osztható? négy (512, 520, 120, 152)
d) Hány lesz közülük 125-tel osztható? kettő (250, 125)
e) Hány lesz közülük 3-mal osztható? kilenc (102, 105, 120, 150, 201, 210, 251, 501, 510)
f) Hány lesz közülük 9-cel osztható? egyik sem, mert a jegyek összege kisebb, mint 9

9.
Könnyű feladat.
Az alábbi számokat írd a halmazábra megfelelő részébe!
Van-e olyan rész, ahová nem kerülhet szám?
H = {682, 4290, 7029, 7023, 1978, 1980, 2005, 960, 33111}
A = {9-cel osztható számok}

B = {3-mal osztható számok}



10. Mi a valószínűsége, hogy a 8452█ szám

a) páros **b)** osztható 8-cal **c)** osztható 125-tel **d)** osztható 9-cel?

a) $\frac{5}{10}$ b) $\frac{2}{10}$ c) nulla (lehetetlen esemény) d) $\frac{1}{10}$

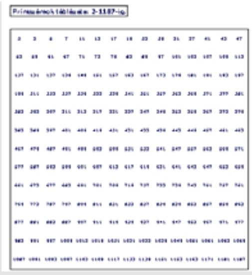
V. Prímszám, összetett szám; összetett számok felírása többtényezős alakban; prímtényezős felbontás; adott tulajdonságú számok felépítése prímtényezős felbontásból

1. Prímszám és összetett szám fogalmának ismétlése; számok építése prímtényezőkből

Prímkártya-készlettel dolgozunk, a gyerekek is a sajátjukkal.
6. tanári melléklet – Lásd a modul eszközei közt!
2. tanulói melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

2	2	3	3	5	5	7	7	17	17	83	83
2	2	3	3	5	5	7	7	17	17	617	881
2	2	3	3	5	5	11	11	19	19	1039	1997
2	2	3	3	7	7	11	11	23	23		
2	2	5	5	7	7	13	13	29	29		
3	3	5	5	7	7	13	13	31	31		

Az **1. tanári és tanulói melléklet** tartalmazza a prímszámokat 2-től 1187-ig.
1. tanári és tanulói melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!



A táblára 10-12 prímkártyát teszünk fel.

- Milyen számok ezek?

prímszámok

- Mit neveztünk prímszámnak?

olyan pozitív egészeket, amelyeknek pontosan két osztójuk van

A gyerekek válasza valószínűleg a következő: a prímeknek csak1 és önmaguk az osztói. Ekkor kérdezzünk rá az 1-re!

- Akkor az 1 miért nincs köztük?

csak egy osztója van

- Ha csak az 1 és a prímszámok állnának rendelkezésünkre, és csak szorozhatunk, akkor elő tudnánk-e állítani az összes pozitív egészet?

Láttassuk be a gyerekekkel, hogy a prímeknek kitüntetett szerepe van az egészek között, mivel minden pozitív egész szám felépíthető prímekből és az 1-ből szorzással.

$1, 2, 3, 2 \cdot 2, 5, 2 \cdot 3, 7, 2 \cdot 2 \cdot 2, \ldots$

Ahogyan a kőműves a téglákat malterral tapasztja össze, mi a prímtégláinkat szorzással fogjuk „összetapasztani”. Minden prím egy építőkő és minden szám egy épület, amelyet prímtéglából szorzás segítségével építünk.

- Vannak olyan számok, amelyek egyetlen téglából állnak. Melyek ezek?

A prímek és az 1. A többieket összetett számoknak nevezzük. Az 1 nem összetett szám és nem is prím.

- Néhány építkezés következik.

Kiraktam három prímtéglát.

$\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{11}$

Építs számokat (házakat) ezekből a téglákból!

$3, 5, 11, 3 \cdot 5, 3 \cdot 11, 5 \cdot 11, 3 \cdot 5 \cdot 11$; hét számot tudtunk ezekből a prímekből építeni.

- Ezek mind megépíthetők, mi a közös bennük?

Mindegyik osztója a $3 \cdot 5 \cdot 11$-nek.

- Mindegyik osztóját megtaláltuk?

Az 1-et nem. Az 1 és a $3 \cdot 5 \cdot 11$ nem valódi osztója a számnak.

Mik a valódi osztók?

$3, 5, 11, 3 \cdot 5, 3 \cdot 11, 5 \cdot 11$

Leteszünk arccal lefelé három prímet, és eláruljuk, hogy ezekből csak három különböző szám építhető.

- Ki vállalja, hogy biztosan megmondja, milyen prímek állnak a kártyákon, ha egyet megnézhet közülük?

A három prím azonos, ez az oka annak, hogy csak háromféle szám építhető belőlük, tehát bármelyiket megnézve, tudhatjuk mind a hármat.

Építs 14-gyel osztható számot!

A gyerekek ötletei alapján megbeszéljük, hogy végtelen sok ilyen szám van. Ezek mindegyikére igaz, hogy a 2 és a 7 szerepel benne. Ha a gyerekek csak a $2 \cdot 7$-et mondják, akkor a tanár mond példát ilyen szorzatokra.

Például ezt a szorzatot felrakja a táblára:

2 · 7 · 13 · 17 · 5 · 2

- Ez is jó?
- Hányszorosa a 14-nek?

13 · 17 · 5 · 2-szerese

Szoktassuk rá a gyerekeket arra, hogy a szorzat alakban megadott válasz többet mond, mintha kiszámolnák. Erről a szorzatról sokféle kérdést tehetünk fel. E kérdésekkel a többszörös és az osztó fogalmát ismételjük át. Néhányat felsorolunk ezek közül:

- Többszöröse-e ez a szám a 17-nek? Ha igen, hányszorosa?
- Többszöröse-e ez a szám a 34-nek? Ha igen, hányszorosa?
- Többszöröse-e ez a szám a 70-nek? Ha igen, hányszorosa?
- Osztója-e ennek a számnak a 340?

2. Prímtényezőkből felépített számok tulajdonságai

6. tanári melléklet – Lásd a modul eszközei közt!
2. tanulói melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

2	2	3	3	5	5	7	7	17	17	83	83
2	2	3	3	5	5	7	7	17	17	617	881
2	2	3	3	5	5	11	11	19	19	1039	1997
2	2	3	3	7	7	11	11	23	23		
2	2	5	5	7	7	13	13	29	29		
3	3	5	5	7	7	13	13	31	31		

A feladatokat a gyerekek párban oldják meg. Továbbra is a táblán lévő számról beszélünk. A további kérdésekkel a szám prímtényezős alakjából további megállapítható tulajdonságokra kérdezhetünk rá. Ilyenek például:

Villámkérdések

2 · 7 · 13 · 17 · 5 · 2

- Hány jegyű ez a szám?

Erre csak becsléssel válaszolunk, ezres nagyságrendű

- Milyen számra végződik?

Ezt rögtön lehet látni, hogy nullára végződik, mert 10-nek többszöröse

Továbbra is ezt a szorzatot tekintjük, de úgy szeretnénk „hozzáépíteni” „számépületeket”, hogy különböző feltételeknek feleljen meg az új „számház”.

Például:

- Két nullára végződjön! Mi kell hozzá?
- Osztható legyen 3-mal! Mi kell hozzá?
- Osztható legyen 25-tel! Mi kell hozzá?

A felvetett kérdések elvezethetik a gyereket a következő tapasztalatokhoz:

– annyi nullára végződik egy szám, ahány 2 · 5 pár van benne
– ha páros számot akarunk építeni, legalább egy 2-es téglát bele kell építeni
– ha 9 többszörösét akarjuk megépíteni, ahhoz legalább két 3-as tégla szükséges.

Négyzetszámok szerkezete
▪ Építsd meg a 45-öt!
$3 \cdot 3 \cdot 5$
▪ Építsd meg a négyzetét!
$3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
A gyerekek megfogalmazzák, hogy minden tényezőt meg kell duplázni.

5. FELADATLAP

A következő feladatokat a gyerekek párban oldhatják meg. Ha szükségük van rá, használják továbbra is a prímkártyáikat.

1. Kiraktam számokat. Melyik négyzetszám? Amelyik nem az, azt építsd tovább úgy, hogy az legyen!

a) $3 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 2$ négyzetszám
b) $5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$
c) $3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$
d) $11 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11$ négyzetszám
e) $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$

A tapasztalatok alapján megállapíthatjuk, hogy ha négyzetszámot akarunk építeni, annak a prímtéglái két tökéletesen egyforma kupacra bonthatók. (A négyzetszám „ikerház”.)
A megbeszélés során a táblán a tanár is két egyforma kupacra bontja a tényezőket.

2. Igaz-e?

a) Ha egy négyzetszám nullára végződik, akkor páros sok nulla van a végén.
Igaz, hiszen, ha páratlan sokszor lenne benne a $2 \cdot 5$, akkor nem tudnánk a prímtégláit két egyforma kupacra szétbontani.

b) Van olyan négyzetszám, amely 14-re végződik.
Nem igaz, mert a 14-re végződő szám olyan páros szám, amely nem osztható 4-gyel, azaz pontosan egy darab kettes tégla épült bele, ezért nem tudjuk prímtégláit két egyforma kupacra osztani.

c) Ha egy négyzetszám osztható 3-mal, akkor 9-cel is.
Igaz, mert páros sok 3-as téglának kellett beleépülnie.

3. Rejtvények

Frontálisan indítjuk ezt a részt is.
Emlékeztetőként felidézzük az adott tulajdonságú számok felépítését prímtényezős felbontásból.

Ahogyan a kőműves a téglákat malterral tapasztja össze, mi a prímtégláinkat szorzással „tapasztottuk össze”. Minden prím egy építőkő és minden szám egy épület, amelyet prímtéglából szorzás segítségével építettünk. Kiraktunk három prímtéglát:

$\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{11}$

Hét számot tudtunk ezekből a prímekből építeni.3, 5, 11, $3 \cdot 5$, $3 \cdot 11$, $5 \cdot 11$, $3 \cdot 5 \cdot 11$.

a) Feltettem arccal lefelé két prímkártyát. Ezt a számot építettem: ▇ · ▇
Gyűjtsünk róla igaz állításokat! összetett szám; ez a szám legalább 4; lehet, hogy négyzetszám; lehet, hogy ez 1 milliónál nagyobb; stb.,

b) Ha tudnánk erről a számról, hogy a prímtégláiból csak két különböző számot tudnánk építeni, akkor mit mondhatnánk a tégláiról?
a két prímtégla azonos

c) Ha tudnánk erről a számról, hogy a két prímtéglája különböző, akkor hány különböző számot tudnánk belőlük építeni?
hármat
d) Eláruljuk, hogy ez egy páros négyzetszám. Mi van a kártyákon?
két 2-es

4.
6. tanári melléklet – Lásd a modul eszközei közt!
2. tanulói melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

2	2		3	3		5	5		7	7		17	17		83	83
2	2		3	3		5	5		7	7		17	17		617	881
2	2		3	3		5	5		11	11		19	19		1039	1997
2	2		3	3		7	7		11	11		23	23			
2	2		5	5		7	7		13	13		29	29			
3	3		5	5		7	7		13	13		31	31			

A tanár előre kirakja a táblára a táblázatban pirossal írt prímkártyákat arccal lefordítva. Mindegyik mellé odaírja, hogy mit árulunk el arról a számról. Ezután választhat közülük egyet az első játékos, vagy az elsőként jelentkező csoport (ha csoportok vetélkednek egymással). A kiválasztott szám tényezőit kell kitalálni. Az a játékos vagy csoport kezdhet, aki vagy amelyik csoport, a legkevesebb prímkártya megnézésével vállalja a szám prímtényezőinek kitalálását. Van olyan szám, amelyről a megadott tulajdonságok alapján minden tényezőjét meg tudjuk határozni. Ilyen például a 7., 8., 10.szám. Például a 7. számnak 9-cel és 7-tel kell oszthatónak lennie, ezért anélkül, hogy egyetlen kártyát megnéznénk, látatlanban meg tudjuk mondani a három prímtényezőt: 3, 3, 7.
Vannak olyanok is, amelyeknek az összes jegyét meg tudjuk mondani egy kártya megfordítása után. Ilyen például az 5. (bármelyiket megfordítva meg tudjuk mondani a másikat, hiszen négyzetszám, így két prímtényezője megegyező.
Tíz számot prímtényezői szorzataként raktam ki, de minden kártya arccal lefelé fordított. Minden tényező egyjegyű prím, és növekedő sorrendben állnak. A tíz szám mindegyikéről elárultam valamit.
Ezt figyelmesen olvasd el!
A játék célja az, hogy a lehető legkevesebb kártya megfordításával meghatározzuk a kiválasztott szám még meg nem nézett prímtényezőit.
Válassz ki egyet a tíz szám közül! Mondd meg, hogy hány kártya megfordításával vállalod a szám prímtényezőinek kitalálását!
Azt is megteheted, hogy egyetlen kártya megfordítása nélkül találod ki a prímtényezőket. Ha nem, akkor a kiválasztott szám egy prímkártyájára mutass rá! Utána fordítsd meg! A kiválasztott kártya megnézése után mondd meg, hogy mi van a többi kártyán! Ha eltaláltad, a következő számot is te választhatod egészen addig, amíg el nem rontod. Annyi pontot kapsz, ahány kártyát eltaláltál. Ezután átadod a következő gyereknek a kérdezés jogát.

Sorszám	A szám prímtényezői arccal lefordítva:	Ezt áruljuk el róla:
1.	$5 \cdot 7$	Tényezőiből háromféle szám építhető.
2.	$7 \cdot 7$	Tényezőiből kétféle szám építhető.
3.	$2 \cdot 3 \cdot 3$	9 többszöröse.
4.	$2 \cdot 5 \cdot 7$	Ez a szám 0-ra végződik.
5.	$3 \cdot 3$	Négyzetszám.
6.	$2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7$	7-tel osztható négyzetszám.
7.	$3 \cdot 3 \cdot 7$	63 többszöröse.
8.	$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$	0-ra végződő négyzetszám.
9.	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	Osztható 3-mal, de 9-cel nem, 0-ra végződik.
10.	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$	Négyzetszám, 6-nak többszöröse.

Hasonló kérdéseket tehetünk fel három arccal lefelé fordított prímkártya esetén is. Erősebb csoportban érdekesebb ezzel kezdeni.

5.

a) Felteszünk arccal lefelé három prímkártyát.

■ · ■ · ■

Ezt a számot építettem. Gyűjtsünk róla igaz állításokat!
Legalább négy osztója van. (három azonos prímkártya esetén pontosan 4 osztója van)
Lehet, hogy hat osztója van. (ha a három kártya közül kettő azonos)
Legfeljebb 8 osztója van. (három különböző prímkártya esetén)
Nem lehet négyzetszám. (nem tudunk „ikerházat” építeni)
Lehet, hogy egyjegyű szám. $(2 \cdot 2 \cdot 2)$
Akármilyen nagy szám lehet. (végtelen sok prím van, tetszőlegesen nagyok lehetnek) stb.

b) ■ · ■ · ■ · ■

Négy prímtéglából építettem egy számot. A prímtéglákat növekvő sorrendben tettem fel. Találd ki, hogy milyen prímtéglákból építkeztem! Ha szükséged van rá, egy kártyát megfordíthatsz.

– 6-tal osztható négyzetszám. $(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3)$
– Páros négyzetszám. az utolsót vagy az előtte levőt fel kell fordítani
– 15 páros többszöröse. Az utolsót érdemes megfordítani. Ha ez 5-nél nagyobb, akkor 2, 3, 5 áll az első három kártyán. Ha az utolsó 5, akkor még három lehetőség van; vagy $(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5)$ vagy $(2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5)$ vagy $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5)$. Ebben az esetben már a szerencsére is szükség van.

Biztassuk a gyerekeket, hogy maguk is készítsenek hasonló rejtvényeket!

Prímszámnak (törzsszámnak) nevezzük azt a pozitív egész számot, amelynek pontosan két osztója van.

Az 1 nem prímszám.

Az összetett számoknak kettőnél több osztójuk van.

Egy szám valódi osztójának nevezzük azokat az osztókat, amelyek különböznek 1-től és magától a számtól. Az utóbbiakat nem valódi osztóknak nevezzük.

Egy szám osztói csak azokat a prímtényezőket tartalmazhatják, amelyből a szám épült.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1.

Könnyű.

Az első 1000 prímszám szorzata páros vagy páratlan?

páros, mert a 2 páros prím, így a szorzatnak van egy páros tényezője

2.

Könnyű.

Az első 1000 prím összeg páros vagy páratlan?

páratlan, mert páratlan sok páratlan szám összege páratlan

3.

Könnyű.

Hány nullára végződik az első 100 prímszám szorzata?

egy, a 2 és az 5 miatt

4.

Könnyű.

Egy összetett számot prímszámok szorzatára bontottam. Hármat megmutatok a négy közül.

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \blacksquare$$

Úgy válaszd meg a negyediket, ha lehet, hogy igazak legyenek az alábbi állítások!

a) A szám nullára végződik. bármi lehet
b) A szám osztható 20-szal. bármi lehet
c) A számnak osztója a 8. 2
d) Kisebb 1000-nél. 50-nél kisebb bármelyik prím
e) Négyzetszám. 5
f) Legalább 8 osztója van. 2 és 5 kivételével bármi

5. Egy összetett számot prímszámok szorzatára bontottam. Kettőt megmutatok a négy közül.

$2 \cdot 5 \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare$

Úgy válaszd meg a hiányzó kettőt, ha lehet, hogy igazak legyenek az állítások!

a) A szám két nullára végződik. 2, 5
b) Négyzetszám. 2, 5
c) A szám 15-tel osztható négyzetszám. nem lehetséges
d) Kisebb 101-nél. 2, 2 vagy 2, 3 vagy 3, 3
e) Legfeljebb nyolc osztója van. 2, 2 vagy 5, 5
f) 1000-nek többszöröse. nem lehetséges

6. Prímjeikből raktuk ki a számokat. A számokat megbetűztük. Melyikre lehet biztosan igaz, hogy

A) $2 \cdot 11 \cdot \blacksquare$
B) $\blacksquare \cdot \blacksquare \cdot 7$
C) $2 \cdot \blacksquare\ 5 \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare \cdot 7$
D) $3 \cdot \blacksquare \cdot 3$
E) $5 \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare$

a) Biztosan páros. A, C
b) Lehet, hogy osztható 8-cal. C, E
c) Lehet, hogy 15 többszöröse. B, C, D, E
d) Nem lehet négyzetszám. A, B, D
e) Biztosan 0-ra végződik. C
f) Biztos, hogy kettőnél többjegyű szám. C

7. Mindegyikről elárulunk valamit, melynek alapján fejtsd meg, melyek ezek a prímtéglák?
a) Nyolc téglás szám. 63-mal osztható, nulla végű négyzetszám. $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$
b) Három téglás. A legkisebb háromjegyű köbszám. $5 \cdot 5 \cdot 5$
c) Három téglás. Osztható 21-gyel és a 7-szerese négyzetszám. $3 \cdot 3 \cdot 7$
d) Négy téglás. Ez egy olyan kétjegyű szám, amelynek a fele páratlan köbszám. $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

8. Fel lehet-e osztani a 10-nél nem nagyobb egész számokat két csoportra úgy, hogy a két csoportban lévő számok
a) összege nem, mert páratlan az összeg
b) szorzata egyenlő legyen? nem, mert a 7-ből csak egy van a tényezők között

9. Összeszorozzuk az első
a) 10 kettő
b) 20 négy
c) 50 tizenkettő
d) 100 huszonnégy
pozitív egész számot.
Hány nulla áll a szorzat végén?
A prímtényezős felbontásukban szereplő 5-ös tényezők száma adja meg a szám végén álló nullák számát.

VI. Összetett oszthatósági szabályok

1. Mi a feltétele annak, hogy egy szám osztóinak szorzata is osztója legyen a számnak? A relatív prím fogalmának ismétlése

Ebben a részben céljaink: a már tanult ismereteiket felelevenítése; relatív prím, oszthatóság megállapítása a szám formai jegyeiből és prímtényezős felbontásból. A tanulók a az 1. feladatot önállóan oldják meg, a közös megbeszélés során ellenőrzik.

6. FELADATLAP

1.

a) Döntsd el, hogy igaz vagy hamis!

– Ha egy szám osztható 2-vel és 3-mal, akkor osztható 6-tal is. igaz

– Ha egy szám osztható 2-vel és 7-tel, akkor osztható 14-gyel is. igaz

– Ha egy szám osztható 3-mall és 11-gyel, akkor osztható 33-mal is. igaz

– Ha egy szám osztható 3-mal és 6-tal, akkor osztható 12-vel is. hamis, például 6-ra nem igaz

– Ha egy szám osztható 4-gyel és 6-tal, akkor osztható 24-gyel is. hamis, például 12-re nem igaz

– Ha egy szám osztható 33-mal és 10-zel, akkor osztható 330-cal is. Igaz

– Ha egy szám osztható a-val és b-vel, akkor osztható a·b-vel is. hamis

b) Mi a feltétele annak, hogy az utolsó állítás igaz legyen? a két szám relatív prím, nincs közös valódi osztójuk.

Az előző feladatsor azt sugallhatja a gyereknek, hogy az állítás csupán akkor igaz, ha **a** és **b** is prímek. Erre a feladatsorban is találnak ellenpéldát, hiszen a 33 és a 10 egyike sem prím. Rakjuk ki a táblán a számokat prímtéglákból, és látni fogjuk, hogy ha van közös prímtéglánk, akkor nem teljesül az állítás. Itt az alkalom a relatív prím fogalmának ismétlésére, prímtényezőkkel megfogalmazva: két szám relatív prím, ha prímtényezős felbontásukban nincs közös tényező.

2. Összetett oszthatósági szabályok megfogalmazása

Két dolgot vizsgáltunk eddig:

– Megnéztük, hogy milyen oszthatóságról árulkodnak a szám jegyei, amit a szám helyi érték szerinti összegre bontott alakjából állapítottunk meg. Itt mindig összeg oszthatóságát vizsgáltuk.

– A szám osztóit a szám prímtényezős alakjából olvastuk ki. Itt mindig szorzat oszthatóságát vizsgáltuk.

Az összetett számokkal való oszthatóság vizsgálatakor mindkét fajta módszerre szükségünk van. Az osztó osztóit a prímtényezős felbontásból állapítjuk meg. Ebből kiderül, hogy az osztandó milyen oszthatósági feltételeknek „köteles” eleget tenni, hogy ezeknek megfelel-e, azt a szám jegyeiből döntjük el.

A tanulók önállóan, párban vagy csoportban oldják meg a 2. feladatot.

A 2. feladat megoldása után játszhatunk „füllentőst”. Minden csoport írjon három állítást összetett oszthatósági szabályokra.

Például:

I) Egy szám osztható 12-vel, ha osztható 2-vel és 6-tal. h

II) Egy szám osztható 24-gyel, ha osztható 3-mal és 8-cal. i

III) Egy szám osztható 18-call, ha osztható 2-vel és 9-cel. i

A csoportok szóvivői felolvassák az állításaikat. A többi csoport szóvivője I vagy H kártyát emel fel aszerint, hogy csoportjának mi az álláspontja. Sorsolással kiválasztjuk, hogy melyik csoportból ki mondja el az indoklást.

2. Az osztás elvégzése nélkül döntsd el, hogy az *A* szám osztható-e a megadott számokkal!
A = **636480**
2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 25, 30, 40, 90

osztó és prímtényezős felbontása		az osztandó = 636 480
2	2	osztható, mert utolsó jegye 0
3	3	osztható, mert jegyeinek összege 27
4	$2 \cdot 2$	osztható, mert 80 osztható 4-gyel
5	5	osztható, mert utolsó jegye 0
6	$2 \cdot 3$	osztható kettővel és hárommal
8	$2 \cdot 2 \cdot 2$	osztható, mert 480 osztható 8-cal
9	$3 \cdot 3$	osztható, mert jegyeinek összege 27
10	$2 \cdot 5$	osztható, mert utolsó jegye 0
12	$2 \cdot 2 \cdot 3$	osztható, mert 4-gyel is és 3-mal is osztható
15	$3 \cdot 5$	osztható, mert 5-tel és 3-mal is osztható
18	$2 \cdot 3 \cdot 3$	osztható, mert páros és 9-cel is osztható
20	$2 \cdot 2 \cdot 5$	osztható, mert 4-gyel és 5-tel is osztható
24	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$	osztható, mert 8-cal és 3-mal is osztható
25	$5 \cdot 5$	nem osztható, mert 80 nem osztható 25-tel
30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	osztható, mert 2-vel, 3-mal és 5-tel is osztható
40	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$	osztható, mert 8-cal és 5-tel is osztható
90	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$	osztható, mert 9-cel és 10-zel is osztható

3. Gyakorlás, alkalmazás

Az osztály összetétele, haladási tempója szerint homogén vagy differenciált csoportokban dolgozzuk fel a feladatgyűjtemény 1-10. feladatait.
A megbeszélés során eljuthatunk az összetett oszthatósági szabályok feltételeinek megfogalmazásához: Az osztót relatív prímek szorzatára kell bontani. Az így kapott tényezők mindegyikével való oszthatóság lesz a feltétel.

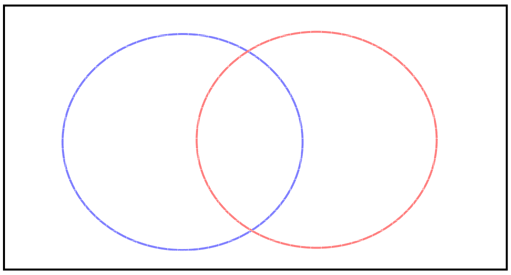
Egy szám osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal.
Egy szám osztható 15-tel, ha osztható 3-mal és 5-tel.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1.
Könnyű.
Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha egy szám osztható 6-tal és 2-vel, akkor osztható 12-vel is. hamis, pl. 6
b) Ha egy szám osztható 4-gyel és 8-cal, akkor osztható 32-vel is. hamis, pl. 8
c) Ha egy szám osztható 5-tel és 2-vel, akkor osztható 10-zel is. Igaz
d) Ha egy szám osztható 6-tal és 4-gyel, akkor osztható 24-gyel is. hamis, pl. 12

2. Minden feladathoz rajzolj ilyen halmazábrát! Az alaphalmaz a pozitív egész számok halmaza.



Írj a halmazábrák minden részébe 4-4 számot. Ahová nem lehet megfelelő számot írni, azt satírozd be!
Minden esetben add meg, hogy a közös részben elhelyezkedő számok mindegyike osztható-e a két szám szorzatával?

a) A piros körbe kerüljenek a 6-tal oszthatók, a kékbe 2-vel oszthatók.
6 többszörösei kerülnek a metszetbe, 6 nem osztható a két szám szorzatával
b) A piros körbe kerüljenek a 4-gyel oszthatók, a kékbe 8-cal oszthatók.
8 többszörösei kerülnek a metszetbe, 8 nem osztható a két szám szorzatával
c) A piros körbe kerüljenek az 5-tel oszthatók, a kékbe 2-vel oszthatók.
10 többszörösei kerülnek a metszetbe, ezek oszthatók a két szám szorzatával
d) A piros körbe kerüljenek a 6-tal oszthatók, a kékbe 4-gyel oszthatók
12 többszörösei kerülnek a metszetbe, 12 nem osztható a két szám szorzatával

3.
Könnyű.
Az osztás elvégzése nélkül válaszolj a kérdésekre!

a) Osztható-e a 222222 szám 6-tal? igen, mert 3-mal és 2-vel is osztható
b) Osztható-e a 555555 szám 15-tel? igen, mert 3-mal és 5-tel is osztható
c) Osztható-e az 1122 szám 12-vel? nem, mert 4-gyel nem osztható
d) Osztható-e a 2025 szám 45-tel? igen, mert 9-cel és 5-tel is osztható

4. Írj egy-egy számjegyet a keretekbe úgy, hogy a szorzatok többszörösei legyenek 12-nek!

a) $2 \cdot 11 \cdot \square$ 0, 3, 6, 9
b) $\square \cdot \square \cdot 7$ az egyik 3 páratlan többszöröse, a másik 4 többszöröse, vagy az egyik 6, a másik 3 páros többszöröse.
c) $\square \cdot 5 \cdot 13$ nem lehetséges
d) $3 \cdot \square \cdot 4$ bármi
e) $5 \cdot \square \cdot \square \cdot \square$ a tényezők között legyen egy hárommal osztható és egy 4-gyel osztható vagy a tényezők között legyen egy hárommal osztható és két páros.

5. Egészítsd ki a következő számokat a keretekbe írt egy-egy számjeggyel úgy, hogy oszthatók legyenek

a) 6-tal,
b) 30-cal,
c) 18-cal!

8□□ 7□3□ 325□□ 5□□2

a) páros legyen és jegyeinek összege osztható legyen 3-mal
b) nulla végű legyen, jegyeinek összege osztható legyen 3-mal
c) páros legyen, jegyeinek összege osztható legyen 3-mal

6. Egészítsétek ki a mondatokat úgy, hogy igaz állításokat kapjunk!

a) Egy szám osztható 40-nel, ha osztható 5-tel és 8-cal.
b) Egy szám osztható 35-tel, ha osztható 5-tel és 7-tel.
c) Egy szám osztható 60-nal, ha osztható 3-mal, 4-gyel és 5-tel.
d) Egy szám osztható 45-tel, ha osztható 5-tel és 9-cel.
e) Egy szám osztható 99-cel, ha osztható 9-cel és 11-gyel.

7. Milyen számokat kell írni a * **-**gal jelölt helyekre, hogy az 52*2* ötjegyű szám osztható legyen 36-tal?
4-gyel és 9-cel való oszthatóságnak kell teljesülnie:
ha 0 a vége, akkor 0 és 9 lehet a másik;
ha 4 a vége, akkor 5 lehet a másik;
ha 8 a vége, akkor 1 lehet a másik.

8. Bizonyítsd be, hogy bármely 3-nál nagyobb prímszám két szomszédjának szorzata osztható 24-gyel!
8-cal és 3-mal való oszthatóságnak kell teljesülnie:
három egymást követő szám között egy biztosan osztható 3-mal, a három közül kettő páros, mert a középső prím páratlan, közülük az egyik 4 többszöröse, szorzatuk 8-cal osztható

9. Bizonyítsd be, hogy bármely egymást követő öt természetes szám szorzata osztható 120-szal.
8-cal és 3-mal és 5-tel való oszthatóságnak kell teljesülnie:
öt egymást követő szám közül egy biztosan osztható 3-mal, és egy 5-tel; az öt szám közül kettő biztosan páros, ezek egyike 4 többszöröse.

VII. Osztók keresése osztó párokkal és prímtényezős felbontásból; összes osztó összegyűjtése; közös osztók keresése, legnagyobb közös osztó

1. Adott szám összes osztóinak összegyűjtése osztó párokkal, prímtényezős felbontásból; a két módszer összevetése (ismétlés)

Osztó, közös osztó, legnagyobb közös osztó fogalmának és keresésének ismétlése.
Ezzel a frontálisan megbeszélendő feladattal a közös osztó és a legnagyobb közös osztó fogalmát ismételjük át.
A gyerekek a füzetükben önállóan oldják meg a feladatot, közös ellenőrzés során javítják megoldásukat.

A törtek egyszerűsítéséhez közös osztókat keresünk. Egyszerűsítsük a $\frac{126}{210}$ törtet!

Egyszerűsítünk 2-vel!
$$\frac{126}{210}=\frac{63}{105}$$
Tovább egyszerűsíthetünk 3-mal!
$$\frac{63}{105}=\frac{21}{35}$$

Tovább egyszerűsíthetünk 7-tel!

$\frac{21}{35} = \frac{3}{5}$

Erre az eredményre egy lépésben is eljuthattunk volna, ha 126-nak és 210-nek a legnagyobb közös osztójával egyszerűsítettünk volna. Tavaly osztópárokkal gyűjtöttük össze az összes osztót. Ezt a módszert ismételjük most át.

Frontálisan irányított egyéni munka. A gyerekek a füzetükben önállóan oldják meg a feladatot, közös ellenőrzés során javítják megoldásukat. A táblára felrajzolt halmazábrába írják a számokat az ellenőrzés során.

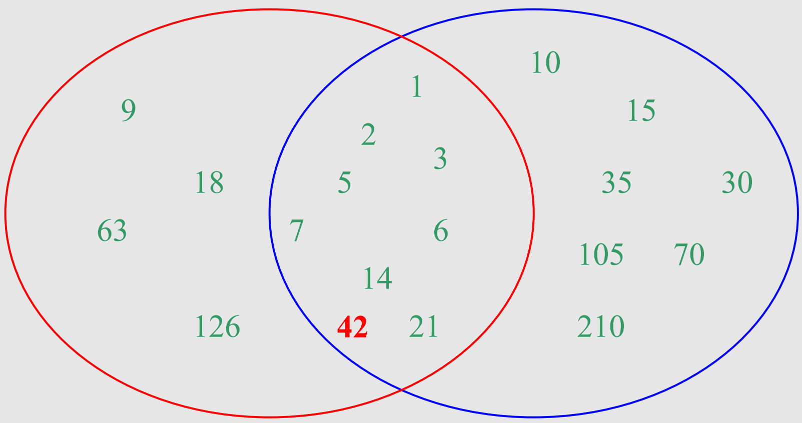
– Sorold fel mindkét szám osztóit osztópárokba állítva!
– Készíts halmazábrát!

126 osztói	210 osztói
1, 126	1, 210
2, 63	2, 105
3, **42**	3, 70
6, 21	5, **42**
7, 18	6, 35
9, 14	7, 30
	10, 21
	14, 15

Közös osztók: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 14, 21, **42**. A legnagyobb közülük a **42**.

42-vel egyszerűsítve a $\frac{126}{210} = \frac{42 \cdot 3}{42 \cdot 5} = \frac{3}{5}$.

Halmazábrával:



126 és 210 legnagyobb közös osztója 42. Röviden ezt így jegyezhetjük le:

(126; 210) = 42

Összes osztó meghatározása prímtényezős felbontásból.

Ebben a részben történik az új anyag feldolgozása. A gyerekek a pontos megfogalmazásokat, definíciókat megtalálják az összegzésben. Frontális munka.

Prímtényezős felbontásból keressük a 126 osztóit!

1 tényezős osztók: 2, 3, 7

2 tényezős osztók: $2 \cdot 3$, $2 \cdot 7$, $3 \cdot 3$, $3 \cdot 7$
3 tényezős osztók: $2 \cdot 3 \cdot 3$, $2 \cdot 3 \cdot 7$, $3 \cdot 3 \cdot 7$,
4 tényezős osztók: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$
és az 1.
Ha az osztókat most osztópárokba rendezzük, akkor látjuk, hogy

az 1 tényezős osztó párja a 3 tényezős osztó	2	párja	$3 \cdot 3 \cdot 7$	Ezek a valódi osztók.
	3	párja	$2 \cdot 3 \cdot 7$	
	7	párja	$2 \cdot 3 \cdot 3$	
a 2 tényezős osztó párja a 2 tényezős osztó	$2 \cdot 3$	párja	$3 \cdot 7$	
	$2 \cdot 7$	párja	$3 \cdot 3$	
a 4 tényezős osztó párja az 1, ami 0 tényezős osztó	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$	párja	1	Ezek nem valódi osztók.

2. Közös osztók megépítése prímtényezőkből; a legnagyobb közös osztó

6. tanári melléklet – Lásd a modul eszközei közt!
2. tanulói melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

2	2
2	2
2	2
2	2
2	2
3	3

3	3
3	3
3	3
3	3
5	5
5	5

5	5
5	5
5	5
7	7
7	7
7	7

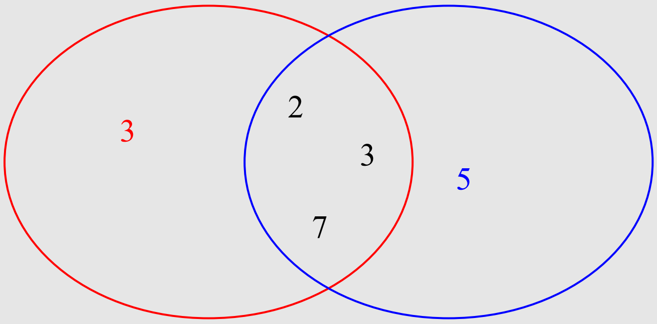
7	7
7	7
11	11
11	11
13	13
13	13

17	17
17	17
19	19
23	23
29	29
31	31

83	83
617	881
1039	1997

Közös megbeszélés.
Rakjuk ki a 126-ot csupa piros prímkártyából! Rakjuk ki a 210-et csupa kékből!
$\mathbf{126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}$
$\mathbf{210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$
Melyek azok az osztók, amelyeket csupa pirosból és csupa kékből is ki tudunk rakni? Ezek éppen a közös osztók. A legnagyobb osztót úgy kapjuk meg, ha minden közös prímet beleépítünk.

Halmazábrával:



A közös prímtényezők szorzata adja a két szám legnagyobb közös osztóját: **2 · 3 · 7 = 42**

Ezzel a feladattal a relatív prím fogalmának ismétlése a célunk. Az előző témakör tárgyalásánál már előkerülhetett a fogalom az összetett oszthatósági szabályok kapcsán. Mindenképpen térjünk vissza az összetett oszthatósági szabályokra! Azt is megtehetjük, hogy előbb ismételjük át a legnagyobb közös osztó, relatív prím fogalmakat és csak aztán térünk rá az összetett oszthatósági szabályokra.
Az 1.-3. feladatot önállóan oldják meg a gyerekek.

7. FELADATLAP

1.

a) A megadott számokból alkoss számpárokat minden lehetséges módon! Hány számpár esetén lesz a legnagyobb közös osztó 1?

15, 18, 27, 40, 63

Három ilyen páros van: (15; 40) = 1, (27; 40) = 1 és a (40; 63) = 1

Ha két szám legnagyobb közös osztója 1, akkor a két számot relatív prímszámnak nevezzük (egymáshoz képest prímszámok).
Kettőnél több szám legnagyobb közös osztója.
Kettőnél több szám esetén is beszélünk legnagyobb közös osztóról.

b) A megadott számokból alkoss olyan számhármasokat, amelyek legnagyobb közös osztója 1!

Például: (15, 40, 63) = 1; (15, 27, 40) = 1

2. Keresd meg 80, 128 és 200 legnagyobb közös osztóját!

$200 = 2^3 \cdot 5^2$
$128 = 2^7$
$80 = 2^4 \cdot 5$

A megbeszélés során kérdezzünk rá a közös osztókra! Például:
Közös osztó-e a 2, a 2^2, a 2^3, a 2^4 stb. A közös osztónak hány különböző prímtényezője lehet?
Jelekkel: $(200; 128; 80) = 2^3 = 8$

3. Az előző három szám közül válasszatok ki kettőt-kettőt az összes lehetséges módon! Határozzátok meg páronként a közös osztókat, majd keressétek meg a legnagyobb közös osztókat! Ezután keressétek meg a legnagyobb közös osztók legnagyobb közös osztóját! Mit tapasztaltok? A három szám legnagyobb közös osztóját kapjuk.

4. A következő négy szám közül válasszatok ki hármat úgy, hogy relatív prímek legyenek!
33, 65, 255, 266
$33 = 3 \cdot 11$

$65 = 5 \cdot 11$
$255 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
$266 = 2 \cdot 7 \cdot 19$
Bármelyik hármat kiválasztva relatív prímeket kapunk.
Jelekkel: (33; 65; 266) = 1, stb.

5. Melyik állítás igaz?
a) Ha egy szám osztható 4-gyel és 12-vel, akkor osztható 48-cal is. hamis, ellenpélda 12
b) Ha egy szám osztható 9-cel és 6-tal, akkor osztható 54-gyel is. hamis, ellenpélda 18
c) Ha egy szám osztható 4-gyel és 5-tel, akkor osztható 20-szal is. igaz (4; 5) = 1
d) Ha egy szám osztható 6-tal és 4-gyel, akkor osztható 24-gyel is. hamis, ellenpélda 12

3. A tanultak alkalmazása

A feldolgozásra szánt feladatok egyszerű példák a tanultak alkalmazására.

6. Minden lehetséges módon alkossatok törteket! A számlálót a piros számok közül válasszátok, a nevezőt a kékek közül! A legkisebbet és a legnagyobbat írd fel a legegyszerűbb alakban!

18, 25, 40 15, 30, 80, 100

Az így alkotható törtek száma 12. A legkisebb: $\frac{8}{100} = \frac{9}{50}$, a legnagyobb: $\frac{40}{15} = \frac{8}{3}$.

7. Péterék egy 3,75 m x 2 m-es teraszt négyzet alakú burkolólapokkal akarnak lefedni. Mekkora legyen egy burkolólap oldala, ha nem tudnak szétvágni csempét, ugyanis nincs csempevágójuk? Mekkora lehet a legnagyobb méretű lap?
25 cm x 25 cm-es lehet a legnagyobb méretű, mert (375; 400) = 25.

ÖSSZEGZÉS

Prímtényezős felbontásból kerestük a 126 osztóit!
1 tényezős osztók: 2, 3, 7
2 tényezős osztók: $2 \cdot 3$, $2 \cdot 7$, $3 \cdot 3$, $3 \cdot 7$
3 tényezős osztók: $2 \cdot 3 \cdot 3$, $2 \cdot 3 \cdot 7$, $3 \cdot 3 \cdot 7$
4 tényezős osztók: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$
és az 1.
Az osztókat osztópárokba rendeztük.Azt tapasztaltuk, hogy

az 1 tényezős osztó párja a 3 tényezős osztó

a 2 tényezős osztó párja a 2 tényezős osztó

2	párja	$3 \cdot 3 \cdot 7$
3	párja	$2 \cdot 3 \cdot 7$
7	párja	$2 \cdot 3 \cdot 3$
$2 \cdot 3$	párja	$3 \cdot 7$
$2 \cdot 7$	párja	$3 \cdot 3$

Ezek a valódi osztók.

a 4 tényezős osztó párja az 1, ami 0 tényezős osztó

$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$	párja	1

Ezek nem valódi osztók.

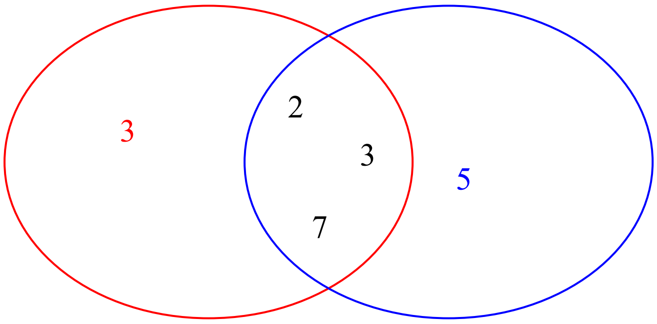
Kiraktuk a 126-ot csupa piros prímkártyából! Kiraktuk a 210-et csupa kékből!

$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Azok az osztók, amelyeket csupa pirosból és csupa kékből is ki tudtunk rakni, éppen a közös osztók. A legnagyobb osztót úgy kapjuk meg, ha minden közös prímet beleépítünk.

Halmazábrával:



A közös prímtényezők szorzata adja a két szám legnagyobb közös osztóját: **$2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$**

Több szám közös osztói az adott számok mindegyikének osztói. A legnagyobb közös osztó többszöröse a közös osztók mindegyikének. A legnagyobb közös osztót a számok közös prímtényezőinek szorzataként kapjuk meg. Ha a számok prímtényezős szorzat alakjában nincs közös prímtényező, akkor azokat relatív (viszonylagos) prímeknek nevezzük. Ezek legnagyobb közös osztója az 1.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Bontsd prímtényezők szorzatára a számokat és add meg a legnagyobb közös osztójukat!

a) $(12; 54) = 2 \cdot 3 = 6$	$12 = 2^2 \cdot 3$	$54 = 2 \cdot 3^2$	
b) $(90; 108) = 2 \cdot 3^2 = 18$	$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$	$108 = 2^2 \cdot 3^3$	
c) $(300; 126) = 2 \cdot 3 = 6$	$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$	$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$	
d) $(210; 150; 240) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$	$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$	$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

2. Egyszerűsítsd a törteket!

a) $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

b) $\frac{45}{150} = \frac{3}{10}$

c) $\frac{9}{61} =$ nem lehet, relatív prímek

d) $\frac{120}{512} = \frac{15}{64}$

3. Közös nevezőre hozás után végezd el a kijelölt műveleteket!

Ha ügyesen egyszerűsít, fejben ki tudja számítani.

a) $\frac{7}{12} + \frac{9}{36} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$ **b)** $\frac{11}{60} + \frac{6}{180} = \frac{13}{60}$ **c)** $\frac{128}{512} + \frac{4}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

4. A születésnapi ünnepség végére maradt még 60 süti, 24 darab alma, és 18 doboz 2 dl-es gyümölcslé. Az ünnepelt egyenlően szét tudta osztani a még ott lévő barátai között a maradékot. Hány barátja lehetett még ott?
6 vagy 3 vagy 2 barátja lehetett még ott. (A szövegből az 1 nem adódik.)

5. Mekkora lehet az a szám, amelynek prímtényezős felbontásában a 20-nál kisebb prímszámok mindegyike szerepel? Tippelj, számolj!
A b) a helyes tipp. Pontosan 9 699 690 a prímek szorzata.
a) valahány ezer **b)** valahány millió **c)** valahány billió

VIII. Közös többszörösök keresése, legkisebb közös többszörös

1. Többszörös, közös többszörös, a legkisebb közös többszörös keresése a 6. osztályban tanult módszerekkel (ismétlés)

A gyerekek 4-5 fős heterogén csoportban dolgoznak. Minden csoport az 1. számú, a tanár által megadott jelű feladaton dolgozik. Csomagolópapírra leírják a megoldásukat úgy, hogy a többi csoport könnyen megértse a megoldást, amit a csoport, egy a tanár által kiválasztott, tagja ismertet az osztállyal. A d) feladatot a gyorsabban haladó csoportoknak adjuk fel. Amelyik csoport elkészült a feladatával, a többiek számára kijelölt feladatokon gondolkodhat. Ha nehéznek találjuk a d) feladatot, adjunk mást helyette.

8. FELADATLAP

1. a) Három hajó együtt van New York kikötőjében. A kapitányok nagyon jó barátok és azt tervezgetik, hogy mikor sörözgethetnek újra együtt. Bob hajója 3 hetenként fordul, Tomé 4 hetenként, Józsié 5 hetente. Most május 4-e van. Találkoznak-e még ebben az évben?
3, 4 és 5 legkisebb közös többszöröse 60. 60 hét, azaz 15 hónap múlva találkoznak újra. Ebben az évben már nem kerül sor a találkozásra.

Előfordulhat, hogy a gyerekek már kimondják, hogy a három szám relatív prím, ezért a legkisebb közös többszörösük a három szám szorzata.

b) Egy kocsi első kerekének kerülete 180 cm, a hátsóé 210 cm. Mekkora a legrövidebb szakasz, amit befut a jármű, ha mind a két kereke pontosan egész számú fordulatot tesz meg? Miért kopik el az autók első kereke gyorsabban, mint a hátsó?
1260 a két szám legkisebb közös többszöröse. 12,6 m megtétele után tesz meg mindkét kerék egész számú fordulatot. Az első 7-et, a hátsó 6-ot. Az első kerék ugyanazon az úton többször fordul, ezért kopik gyorsabban.
Másik megoldás: amíg a hátsó kerék egyet fordul, az első kerék egy teljes fordulatot, azaz 180 cm-t és még 30 cm-t tesz meg. 210 cm-t, hét teljes fordulattal tesz meg. A hét teljes fordulat alatt megtett útja éppen 1260 cm.

E feladat megoldásának megbeszélése során beszélhetünk arról, hogy e két számnak végtelen sok közös többszöröse van, de a legkisebbet most nem a két szám szorzataként kapjuk meg. Gyakoribb, hogy a gyerekek a két szám többszöröseit sorban felírják, egészen addig, amíg az első közös többszöröst meg nem kapják. Erre a feladatra érdemes visszatérni, ha már prímtényezős felbontásból is meg tudjuk keresni a közös többszöröst, tapasztalják meg, hogy mennyivel gyorsabb ebben az esetben ez a módszer.

c) Egy országutat fasor szegélyez. A fák 15 méterenként állnak. Az út másik oldalán villanyoszlopok sorakoznak, 40 méteres közökben. A közeli falu utolsó házánál az út két oldalán egymással szemben áll egy oszlop és egy fa. Milyen távolságonként ismétlődik meg ez a találkozás?
A közös többszörösöket kell megadni, amelyek a legkisebb közös többszörös többszörösei. 120 a legkisebb közös többszörös, ezért 120 méterenként ismétlődik meg ez a találkozás.

E feladat megbeszélése során térjünk ki arra, hogy a legkisebb közös többszörös osztója az összes közös többszörösnek.

d) Kada és bátyja, Regő, ugyanabba az iskolába járnak. Kada élete első évzáróján, a bátyja ballagásán vehetett részt. Az ünnepség végén együtt mentek haza. Kada azt találgatta, hány gyerek lehetett az udvaron. Regő szerint háromszáznál többen voltak, de 400-nál biztosan kevesebben, mert nincs 400 tanulója az iskolának. Kada ekkor elmondta, hogy ő mit figyelt meg a sorakozási próba alatt. Pista bácsi hatosával, hetesével és nyolcasával is sorakoztatta őket, de mindig teljesek voltak a sorok. Regő kicsit gondolkodott, majd pontosan megmondta hányan voltak. Hogyan?
Az udvaron sorakozó gyerekek száma 6,7 és 8 olyan közös többszöröse, amely 300 és 400 közé esik. Ez a 336, így 336 gyerek sorakozott az udvaron.

A feladatok egyik célja a szövegértés gyakoroltatása, másrészt a már meglévő 6. osztályos ismeretek előhívása. A megoldások ismertetése során a többszörös, közös többszörös, legkisebb közös többszörös fogalmak biztosan előkerülnek. Ezeket, ha szükséges pontosítjuk, de a legkisebb közös többszörös meghatározását ne a tanár mondja ki!

A négyféle feladat között milyen kapcsolatot láttok?
Mindegyikben közös többszörösöket kellett keresni. Volt, ahol a legkisebbet.

2. Többszörös, közös többszörös, legkisebb közös többszörös előállítása prímtényezők szorzatából adott feltételeknek megfelelően

Az óra ezen részében célunk: a többszörösök, közös többszörösök előállítása prímtényezőkből adott feltételeknek megfelelően. A "legtakarékosabb megoldás" kifejezés használata a legkisebb közös többszörösnek szemléletes megfogalmazására.
A demonstrációs prímkártyákat használjuk az óra következő részében. A gyerekek által kért prímkártyákat feltesszük a táblára.
6. tanári melléklet – Lásd a modul eszközei közt!
2. tanulói melléklet – Lásd a modul végén és az eszközei közt!

2	2
2	2
2	2
2	2
2	2
3	3

3	3
3	3
3	3
3	3
5	5
5	5

5	5
5	5
5	5
7	7
7	7
7	7

7	7
7	7
11	11
11	11
13	13
13	13

17	17
17	17
19	19
23	23
29	29
31	31

83	83
617	881
1039	1997

2. Prímtéglákból kell építeni számokat a feltételeknek megfelelően! Te döntheted el, hogy milyen prímkártyákat kérsz.

– A szám 45 többszöröse legyen!

A gyerekek többféle megoldását kirakjuk, egészen addig, amíg mindenki számára nyilvánvaló, hogy bármilyen szorzat jó, amiben a $\boxed{3}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{5}$ szorzat benne van.

A sok lehetőség közül ez a „legtakarékosabb”.

– A szám 45-nek és 63-nak is többszöröse legyen!

Fontos, hogy a gyerekek többféle megoldását kirakjuk itt is, egészen addig, amíg mindenki számára nyilvánvaló, hogy bármilyen szorzat jó, amiben a $\boxed{3}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{5}$ és a $\boxed{3}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{7}$ szorzat egyaránt megtalálható. Akár úgy is ezeket összeépítjük így:

$\boxed{3}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{5}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{7}$

Persze ennél takarékosabb megoldás is van:

$\boxed{3}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{5}\cdot\boxed{7}$

– A szám 45-nek és 63-nak is többszöröse legyen és még nullára is végződjön!

A legtakarékosabb megoldás: $\boxed{2}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{5}\cdot\boxed{7}$

– A szám 45-nek és 63-nak is többszöröse legyen és ráadásul két nullára is végződjön!

A legtakarékosabb megoldás: $\boxed{2}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{5}\cdot\boxed{5}\cdot\boxed{7}$

Ezzel a feladattal három szám közös többszöröseinek, legkisebb közös többszörösének prímtéglákból való megépítése a cél.

3. Megadok 3 számot prímszámokból felépítve. Építs prímszámokból olyanokat, amelyek mind a háromnak többszörösei!

Próbáljátok megfogalmazni, hogyan kell felépíteni a legtakarékosabb megoldást!

Ezeket a prímkártyákat feltesszük a táblára.

a)

$\boxed{2}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{3}$ $\boxed{3}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{7}$ $\boxed{2}\cdot\boxed{7}\cdot\boxed{7}$

$\boxed{2}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{7}\cdot\boxed{7} = 2^2\cdot 3^2\cdot 7^2$

b)

$\boxed{2}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{3}$ $\boxed{5}\cdot\boxed{5}\cdot\boxed{5}$ $\boxed{11}\cdot\boxed{7}\cdot\boxed{7}$

$\boxed{2}\cdot\boxed{2}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{5}\cdot\boxed{5}\cdot\boxed{5}\cdot\boxed{7}\cdot\boxed{7}\cdot\boxed{11} = 2^2\cdot 3\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11$

c)

$\boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{3}$ $\boxed{3} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{3}$ $\boxed{2} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{3}$

$\boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{3} = 2^2 \cdot 3^3$

d)

$\boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{3}$ $\boxed{5} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{7}$ $\boxed{2} \cdot \boxed{7} \cdot \boxed{11} \cdot \boxed{7}$

$\boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{7} \cdot \boxed{7} \cdot \boxed{11} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$

e)

$\boxed{2^2 \cdot 3^3}$ $\boxed{3^2 \cdot 2^3 \cdot 7}$ $\boxed{2^5 \cdot 3^5 \cdot 13}$ $\boxed{5 \cdot 2^4 \cdot 11 \cdot 3^8 \cdot 7}$

$2^5 \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

A tanár figyeli a csoportok munkáját. A gyerekek megfogalmazásai közül kiválasztják a legpontosabbat, legtömörebbet. Az első négy feladatot hatvány alakban is célszerű leírni! Szükség esetén újabb feladatokat tűz ki, abból a típusból a fentiek közül, amelyik nem megy a gyerekeknek.
A további feladatokat a a definíció kimondása után célszerű megoldani, részben azzal a céllal, hogy világosan lássák a gyerekek az lnko és a lkkt közötti különbséget.

ÖSSZEGZÉS

Két vagy több számnak végtelen sok közös többszöröse van. A közös többszörösök közül a legkisebbet a számok legkisebb közös többszörösének nevezzük.
A legkisebb közös többszörös prímtényezői között az összes olyan prímtényező szerepel, amely az egyes számokban előfordul.

A legkisebb többszörös az összes közös többszörösnek osztója.
A legkisebb közös többszörös prímtényezői között az összes olyan prímtényező szerepel, amely az egyes számokban előfordul.
Ha a prímtényezők szorzatát hatványalakban írjuk fel, akkor a legkisebb közös többszöröst úgy kaphatjuk meg, hogy minden előforduló prímtényezőből kiválasztjuk a legnagyobb kitevőjűt, és ezeket összeszorozzuk.
Jelekkel: $[24; 20] = 120$ vagy $[2^2 \cdot 3 ; 2 \cdot 3^2 \cdot 7] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

4. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

a) Ha egy szám többszöröse 6-nak is és 9-nek is, akkor biztosan többszöröse 54-nek is.
hamis, pl. 18

b) Ha egy szám többszöröse 14-nek is és 4-nek is, akkor biztosan többszöröse 18-nak is.
hamis, pl. 28

c) Ha egy szám többszöröse 14-nek is és 4-nek is, akkor biztosan többszöröse 14·4-nek is.
hamis, pl. 28

d) Ha egy szám osztója 6-nak is és 9-nek is, akkor biztosan osztója 54-nek is.
igaz, mert 54 mindkét szám többszöröse

e) Ha egy szám osztója 14-nek is és 4-nek is, akkor biztosan osztója 18-nak is.
hamis, 4 nem osztója 18-nak

f) Ha egy szám osztója 14-nek is és 4-nek is, akkor biztosan osztója 14·4-nek is.
igaz, a többszörösnek osztója minkét szám összes osztója

5.

a) Tegyél be számokat a nyitott mondatokba úgy, hogy az így kapott állítás igaz legyen!
b) Tegyél be számokat a nyitott mondatokba úgy, hogy az így kapott állítás hamis legyen!

Ha egy szám többszöröse A-nak is és B-nek is, akkor többszöröse $A + B$-nek is.

a) Pl. 36 többszöröse 3-nak és 6-nak is. $A = 3$; $B = 6$; $A + B = 9$, 36 többszöröse 9-nek is.
b) Pl. 12 többszöröse 3-nak és 4-nek is. $A = 3$; $B = 4$; $A + B = 7$, 12 nem többszöröse 7-nek.

Ha egy szám többszöröse A-nak is és B-nek is, akkor többszöröse $A \cdot B$-nek is.

a) Pl. 36 többszöröse 3-nak és 6-nak is. $A = 3$; $B = 6$; $A \cdot B = 18$, 36 többszöröse 18-nak.
b) Pl. 36 többszöröse 9-nek és 6-nak is. $A = 9$; $B = 6$; $A \cdot B = 54$, 36 nem többszöröse 54-nek.

Ha egy szám osztója A-nak is és B-nek is, akkor osztója $A + B$-nek is.

a) Pl. 3 osztója 6-nak és 9-nek is. $A = 9$; $B = 6$; $A + B = 15$
b) Az állítás mindig igaz, lehetetlen A és B számot találni.

Ha egy szám osztója A-nak is és B-nek is, akkor osztója $A \cdot B$-nek is.

a) Pl. 3 többszörösei $A = 9$; $B = 6$; $A \cdot B = 54$
b) Az állítás mindig igaz, lehetetlen A és B számot találni.

A nyitott mondatok legyenek a táblára is leírva, hogy módunk lehessen A és B helyére konkrét számokat beírni.
Differenciált csoportmunkára és házi feladatra a Feladatgyűjtemény feladataiból válogathatunk.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1.

Könnyű feladat.

Egy villamos-végállomásról egyszerre indítanak reggel 6 órától két különböző útvonalon közlekedő járatot. Az egyik útvonalon 12 percenként, a másik 15 percenként indulnak a villamosok. 6 óra után mikor fog ismét egyszerre indulni két villamos a végállomásról?

A 12 percenkénti járat villamosai 6 óra után 12, 24, 36, 48, 60, 72… perc múlva indulnak.
A 15 percenkénti járat villamosai 6 óra után 15, 30, 45, 60, 75… perc múlva indulnak.
Mindkét járat egyszerre indul 60, 120, 180… perc múlva. Legkorábban 7 órakor indul egyszerre a két járat.

2.

Könnyű feladat.

Panniék a nyári szünetben sokat kártyáznak. Olyan kártyával játszanak, amelyikkel 2, 3, 4 ,5, 8 gyerek is játszhat egyszerre, az osztás után nem marad ki egy lap sem.
Legalább hány lapos a kártyacsomag?

120 lapos

3.

Könnyű feladat.

Feri, Marci és Zsombor a sportpályán edzenek. Egyszerre indulnak a start vonaltól. Megállapodnak, hogy addig futnak megállás nélkül körbe-körbe, amíg mindhárman egyszerre érnek a starthoz.
Feri 3 perc alatt, Marci 7 perc alatt, Zsombor 5 perc alatt fut le egy kört.

a) Hány percig futnak egyfolytában?
b) Melyikük hány kört tesz meg ezalatt?

A három szám relatív prím, szorzatuk a legkisebb közös többszörös: 105. 1 és $\frac{3}{4}$ órát futnak megállás nélkül.

4.

Könnyű feladat.

Helyezd el a számokat a halmazábrák megfelelő helyére!

5312, 8520, 9699, 1527, 398, 4522, 79, 1302

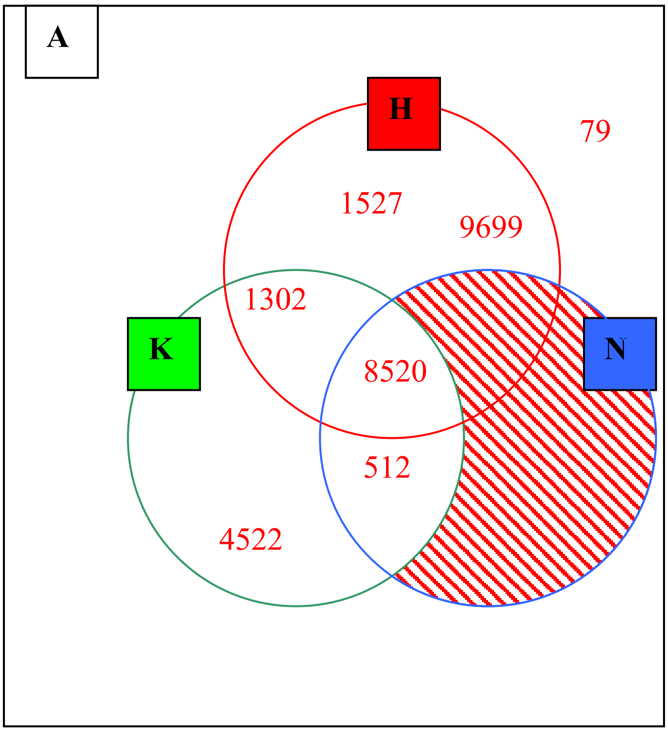
Tudsz-e az üresen maradó részekbe számokat írni?

A = {Az adott számok halmaza}

K = {2 többszörösei}

H = {3 többszörösei}

N = {4 többszörösei}



Az üresen maradó részbe nem tudunk semmilyen számot írni, mert nincs olyan szám, amely 4-nek többszöröse, de 2-nek nem. Üres részhalmaz.

5.

Könnyű feladat.

Határozd meg a következő két-két szám legkisebb közös többszörösét!

a) 17, 19 **b)** 170, 340 **c)** 340, 510 **d)** 600, 900 **e)** 36, 50

a) 3617 b) 340 c) 1020 d) 1800 e) 900

6.

Könnyű feladat.

Határozd meg a következő három-három szám legkisebb közös többszörösét!

a) 2, 3, 5 **b)** 2, 4, 5 **c)** 2, 5, 10 **d)** 8, 9, 72 **e)** 4, 5, 12 **f)** 15, 18, 30

a) 30 b) 20 c) 20 d) 72 e) 60 f) 180

7. Határozd meg a következő két-két szám legkisebb közös többszörösét!

a) $[2^2 \cdot 5; 3^2 \cdot 7] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

b) $[2^2 \cdot 3; 2 \cdot 3^2] = 2^2 \cdot 3^2$

c) $[2^2 \cdot 3; 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

d) $[2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^3; 3^4 \cdot 7^4 \cdot 11] = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 11$

8. A következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis?
Két vagy több pozitív egész szám legkisebb közös többszöröse
a) kisebb mindegyik számnál, hamis
b) nagyobb mindegyik számnál, hamis
c) kisebb a legnagyobb számnál, hamis
d) nagyobb a legkisebb számnál, igaz
e) nagyobb a számok szorzatánál, hamis
f) a számok szorzata a legnagyobb közös többszörös. hamis, nincs legnagyobb közös többszörös

9.
Könnyű feladat.
Két szám legkisebb közös többszöröse $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. A két szám relatív prím.
Mi lehet ez a két szám?
1; $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ vagy
2; $3 \cdot 5 \cdot 7$ vagy
3; $2 \cdot 5 \cdot 7$ vagy
5; $2 \cdot 3 \cdot 7$ vagy
7; $2 \cdot 3 \cdot 5$ vagy
$2 \cdot 3$; $5 \cdot 7$ vagy
$2 \cdot 5$; $3 \cdot 7$ vagy
$2 \cdot 7$; $3 \cdot 5$.

10. Melyik szám az első tíz pozitív természetes szám legkisebb közös többszöröse? Becsülj! Számolj! 2520

11. Két szám legkisebb közös többszöröse $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, legnagyobb közös osztója $2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Az egyik szám $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.
Mennyi a másik szám?
$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$

12. Három természetes szám legkisebb közös többszöröse 1001.
Melyik lehet ez a három szám?
$7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$, a három szám 7, 11, 13

13. Bizonyítsd be, ha egy háromjegyű számot kétszer egymásután írok, az így kapott hatjegyű szám mindig osztható 7-tel, 11-gyel és 13-mal!
Egy háromjegyű számot kétszer egymásután írva, egy olyan hatjegyű számot kapunk, amely a háromjegyű számnak 1001-szerese. 1001-nek osztója 7, 11 és 13 is, így minden többszörösének is az.

IX. Gyakorlás

A TOTÓ-val összefoglaljuk, gyakoroljuk a tanultakat, előkészítjük a felmérőt.
Az osztály igényeihez alkalmazkodó formában dolgozzuk fel. Hívjuk fel a gyerekek figyelmét arra, hogy előfordulhat több jó válsz is!

TOTÓ

1	2	X	Megoldás
1. Hány osztója van a 60-nak?			
12	11	végtelen sok	1
2. Hány többszöröse van a 60-nak?			
10	legfeljebb 100	végtelen sok	X
3. Melyik az a szám, amelynek valódi osztói pontosan az alábbi számok? 3, 5, 9, 15			
75	90	45	X
4. Melyik állítás igaz az alábbi számra? $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$			
Osztható 56-tal.	A 405-nek többszöröse.	Négyzet-szám.	1
5. Keresd meg a 160 összes osztóját! Melyik számig kell keresned?			
159-ig.	80-ig.	12-ig	X
6. Az apa egy lépése 80 cm, a fiúé 50 cm. Induláskor egyszerre lépnek ki. Ha kézen fogva haladnak, hány méterenként lépnek megint egyszerre?			
130 cm-ként.	4 méterenként.	6 méterenként.	2
7. Mennyi 72,108 és 156 legnagyobb közös osztója?			
2^2	$2^3 \cdot 3$	$2 \cdot 3 \cdot 13$	2
8. Mennyi 72,108 és 156 legkisebb közös többszöröse?			
$2^5 \cdot 3^5 \cdot 13$	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$	X
9. Hány állítás igaz az alábbiak közül? a) Két szám legkisebb közös többszörösében mindazok a prímszámok szerepelnek, amelyek mindkét szám felbontásában megtalálhatóak. igaz b) Két vagy több szám legnagyobb közös osztójában a közös prímtényezők az előforduló legnagyobb hatványon szerepelnek. hamis c) Ha két szám legnagyobb közös osztója 1, akkor nem lehet közös prímtényezőjük. igaz d) Ha egy számnak van két olyan osztója, amelyeknek nincs közös prímtényezőjük, akkor a szám ezeknek a számoknak a szorzatával osztható. igaz			
2	3	4	2
10. Hány páros az alábbi számok közül? $431 \cdot 13$ $(5553+2707) \cdot (836-177)$ 4^7 7^4 $3^{10}-1$ $3 \cdot 7 \cdot 42^9$ 3^5+6^4 47^3+12^5 $2^{10}-1$			
3	4	5	2
11. Hány állítás igaz? a) A 437 háromszorosa osztható 6-tal. b) Az 5412 kilencszerese osztható 27-tel. c) A 8172 hétszerese osztható 56-tal.			
1	2	3	1
12. A műveletek elvégzése nélkül döntsd el, melyik állítás igaz! $\frac{7 \cdot 48}{2 \cdot 487}$ $\frac{7+12}{7 \cdot 12}$ $\frac{3^2 \cdot 5^3}{45}$ $\frac{72}{9 \cdot (836-177)}$ $\frac{9^2 \cdot 11 \cdot 10^9}{5 \cdot 33}$ $\frac{9+111}{3}$			
Mindegyik tört egyszerűsíthető.	Csak a második nem egyszerűsíthető	Három egyszerű-síthető, a többi nem.	2
13. Az 50**A**0**B**005 hétjegyű számban nem ismerjük az **A**-val és a **B**-vel helyettesített számjegyeket. Hány olyan számot kaphatunk, a hiányzó jegyek pótlásával, amelyek 5-tel oszthatók?			
100	10	20	1

X. Mérés, értékelés

A felmérő megíratása győződjünk meg arról, hogy értik-e a gyerekek a feladatok utasításait. Különösen a 2. feladatra igaz ez (A és B csoportnál egyaránt).

FELMÉRŐ Név:________________________

7. évfolyam, Számelmélet

A CSOPORT (MEGOLDÁS)

1.

a) Sorold fel a számok összes osztóját!

37 osztói: 1, 37

84 osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84

114 osztói: 1, 2, 3, 6, 19, 57, 38, 114

Minden hiányzó osztó fél pont levonás. Rossz szám beírása, fél pont levonás. A módszert, amellyel a megoldáshoz eljut, nem pontozzuk.

10 pont

b) Karikázd be az osztók közül a prímszámokat!

Minden hiányzó prím fél pont levonás. Rossz szám beírása, fél pont levonás.

5 pont

2.

a) Osztható-e? Igennel és nemmel válaszolj!

	3-mal	4-gyel	8-cal	12-vel
14442	igen	B nem	nem	D nem
6441	igen	nem	nem	nem
15307572	A igen	igen	C nem	igen

Minden rossz válasz fél pont levonás.

10 pont

b) A színezett részbe írt válaszaidat indokold is a megfelelő oszthatósági szabály leírásával!

A: A szám jegyeinek összege 30, ami osztható 3-mal, így a szám is osztható azzal.

B: A szám utolsó két jegyét összeolvasva kapott kétjegyű szám 48, ami osztható 4-gyel.

C: A szám utolsó három jegyét összeolvasva kapott szám 572, ami nem osztható 8-cal, így a szám sem az.

D: A szám 3-mal osztható, de 4-gyel nem, ezért nem osztható 12-vel sem.

Minden rossz válasz 2 pont levonás.

10 pont

3.

a) Add meg a 42, 20, 28 számok prímtényezős felbontását!

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

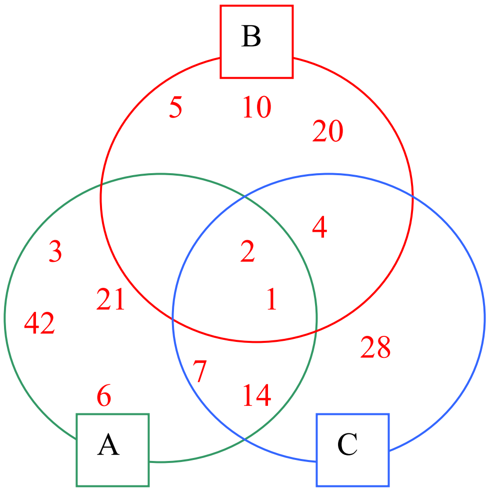
$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$

Rossz megoldásonként 2 pont levonás.

6 pont

b) Sorold fel a számok összes osztóját!
Töltsd ki a halmazábrát!



A = {42 osztói}

B = {20 osztói}

C = {28 osztói}

Minden hiányzó osztó fél pont levonás. Rossz szám beírása, fél pont levonás. A módszert, amellyel a megoldáshoz eljut, nem pontozzuk.

15 pont

c) Add meg a 42, 20, 28 számok legnagyobb közös osztóját! 2

2 pont

d) Add meg a törtek legegyszerűbb alakját!

$$\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$$
$$\frac{20}{28}=\frac{5}{7}$$
$$\frac{28}{84}=\frac{1}{3}$$

Jó, de bővített alak 1 pont levonás. Rossz alakonként 2 pont levonás.

6 pont

e) Határozd meg a három szám legkisebb közös többszörösét!
$[42; 20; 28] = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 420$

5 pont

f) Végezd el a műveletet! A legegyszerűbb alakban add meg az eredményt!

$$\frac{5}{20}+\frac{16}{28}-\frac{6}{42}=\frac{1}{4}+\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=\frac{1}{4}+\frac{3}{7}=\frac{7}{28}+\frac{12}{28}=\frac{19}{28}$$

Minden tag helyes bővítése vagy egyszerűsítése 2-2 pont. A helyes összeg 2 pont, ha rossz, 1 pont levonás. Legegyszerűbb alak 2 pont (akkor is, ha az összeg hibás).

10 pont

4. Egy konyha 320 cm x 420 cm-es. Olyan lapokat kell vásárolni, amelyekkel széltében és hosszában is maradék nélkül lehet a konyhát kikövezni.
Ezek közül a lapok közül válogathatunk.

A) 20 cm x 13 cm
B) 12 cm x 16 cm
C) 20 cm x 20 cm

a) Melyiket választhatjuk? Válaszodat indokold meg!
Az A)-t nem választhatjuk, mert sem a 320-nak, sem a 420-nak nem osztója a 13.
A B)-t választhatjuk, mert 320 20-szorosa a 16-nak., 420 pedig 35-szöröse a 12-nek.
A C)-t választhatjuk, mert 320 és 420 is többszöröse a 20-nak.

Rossz indoklásonként 2 pont levonás.

6 pont

b) Mennyit kell venni a választott lapból? Válaszodat indokold meg!

A B) választás esetén 20 db 16 cm-es lapot tudunk kirakni egy sorba, és 35 db 12 cm széles sor van.

Összesen $20 \cdot 35$ db = 700 darab csempe kell.

A C) választás esetén 16 db 20 cm-es csempe fér el egy sorban és 21 ilyen sor van.

Összesen $16 \cdot 21$ db = 336 darab csempe kell.

Rossz indoklásonként 1 pont levonás. Rossz válaszonként 2 pont levonás.

6 pont

Összesen: 91 pont

FELMÉRŐ Név:______________________

7. évfolyam, Számelmélet

A CSOPORT

1.

a) Sorold fel a számok összes osztóját!

37 osztói:

84 osztói:

114 osztói:

b) Karikázd be az osztók közül a prímszámokat!

2.

a) Osztható-e? Igennel és nemmel válaszolj!

	3-mal	4-gyel	8-cal	12-vel
14442		B		D
6441				
15307572	A		C	

b) A színezett részbe írt válaszaidat indokold is a megfelelő oszthatósági szabály leírásával!

A: ………………………………………………………………………………………………

B: ………………………………………………………………………………………………

C: ………………………………………………………………………………………………

D: ………………………………………………………………………………………………

3.

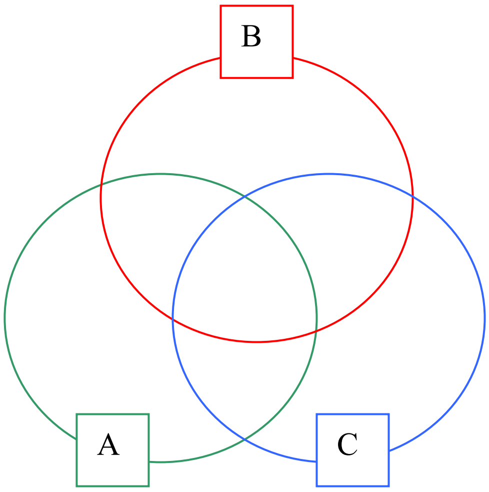
a) Add meg a 42, 20, 28 számok prímtényezős felbontását!

42 =

20 =

28 =

b) Sorold fel a számok összes osztóját!
Töltsd ki a halmazábrát!



A = {42 osztói}

B = {20 osztói}

C = {28 osztói}

c) Add meg a 42, 20, 28 számok legnagyobb közös osztóját!

d) Add meg a törtek legegyszerűbb alakját!

$\frac{20}{42} =$

$\frac{20}{28} =$

$\frac{28}{84} =$

e) Határozd meg a három szám legkisebb közös többszörösét!

[42; 20; 28] =

f) Végezd el a műveletet! A legegyszerűbb alakban add meg az eredményt!

$\frac{5}{20} + \frac{16}{28} - \frac{6}{42} =$

4. Egy konyha 320 cm x 420 cm-es. Olyan lapokat kell vásárolni, amelyekkel széltében és hosszában is maradék nélkül lehet a konyhát kikövezni.
Ezek közül a lapok közül válogathatunk.

A) 20 cm x 13 cm
B) 12 cm x 16 cm
C) 20 cm x 20 cm

a) Melyiket választhatjuk? Válaszodat indokold meg!
b) Mennyit kell venni a választott lapból? Válaszodat indokold meg!

FELMÉRŐ Név:______________________

7. évfolyam, Számelmélet

B CSOPORT (MEGOLDÁS)

1.

a) Sorold fel a számok összes osztóját!

41 osztói: 1, $\boxed{41}$

90 osztói: 1, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, 4, $\boxed{5}$, 6, 9 ,10, 15, 18, 30, 45, 90

102 osztói: 1, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, 6, $\boxed{17}$, 34, 51, 102

Minden hiányzó osztó fél pont levonás. Rossz szám beírása, fél pont levonás. A módszert, amellyel a megoldáshoz eljut, nem pontozzuk.

10 pont

b) Karikázd be az osztók közül a prímszámokat!

Minden hiányzó prím fél pont levonás. Rossz szám beírása, fél pont levonás.

5 pont

2.

a) Osztható-e? Igennel és nemmel válaszolj!

	3-mal	4-gyel	8-cal	12-vel
23442	igen	B nem	nem	D nem
5445	igen	nem	nem	nem
24308652	A igen	igen	C nem	igen

Minden rossz válasz fél pont levonás.

10 pont

b) A színezett részbe írt válaszaidat indokold is a megfelelő oszthatósági szabály leírásával!

A: A szám jegyeinek összege 30, ami osztható 3-mal, így a szám is osztható azzal.

B: A szám utolsó két jegyét összeolvasva kapott kétjegyű szám 48, ami osztható 4-gyel.

C: A szám utolsó három jegyét összeolvasva kapott szám 572, ami nem osztható 8-cal, így a szám sem az.

D: A szám 3-mal osztható, de 4-gyel nem, ezért nem osztható 12-vel sem.

Minden rossz válasz 2 pont levonás.

10 pont

3.

a) Add meg a 30, 45, 63 számok prímtényezős felbontását!

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$

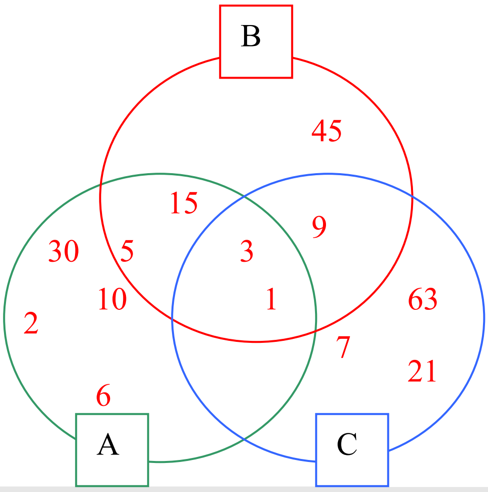
$63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$

Hibátlan megoldás 6 pont. Rossz megoldásonként 2 pont levonás.

6 pont

b) Sorold fel a számok összes osztóját!

Töltsd ki a halmazábrát!



A = {30 osztói}

B = {45 osztói}

C = {63 osztói}

Minden hiányzó osztó fél pont levonás.
Rossz szám beírása, fél pont levonás.
A módszert, amellyel a megoldáshoz eljut, nem pontozzuk.

15 pont

c) Add meg a 30, 45, 63 számok legnagyobb közös osztóját! 3

2 pont

d) Add meg a törtek legegyszerűbb alakját!

$\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$

$\frac{45}{63} = \frac{5}{7}$

$\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$

Jó, de bővített alak 1 pont levonás. Rossz alakonként 2 pont levonás.

6 pont

e) Határozd meg a három szám legkisebb közös többszörösét!

$[30; 45; 63] = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 630$

5 pont

f) Végezd el a műveletet! A legegyszerűbb alakban add meg az eredményt, ha lehet!

$\frac{6}{30} + \frac{7}{63} - \frac{3}{45} = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} = \frac{3}{15} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} = \frac{2}{15} + \frac{1}{9} = \frac{6}{45} + \frac{5}{45} = \frac{11}{45}$

Minden tag helyes bővítése vagy egyszerűsítése 2-2 pont. A helyes összeg 2 pont, ha rossz, 1 pont levonás. Legegyszerűbb alak 2 pont (akkor is, ha az összeg hibás).

10 pont

4. Egy konyha 420 cm x 320 cm-es. Olyan lapokat kell vásárolni, amelyekkel széltében és hosszában is maradék nélkül lehet a konyhát kikövezni.
Ezek közül a lapok közül válogathatunk.

A) 10 cm x 13 cm
B) 20 cm x 12 cm
C) 20 cm x 20 cm

a) Melyiket választhatjuk? Válaszodat indokold meg!

Az A)-t nem választhatjuk, mert sem a 320-nak, sem a 420-nak nem osztója a 13.
A B)-t választhatjuk, mert 420 35-szöröse a 12-nek, 320 pedig 16-szorosa a 20-nak.
A C)-t választhatjuk, mert 320 és 420 is többszöröse a 20-nak.

Rossz indoklásonként 2 pont levonás.

6 pont

b) Mennyit kell venni a választott lapból? Válaszodat indokold meg!

A B) választás esetén 16 db 20 cm-es lapot tudunk kirakni egy sorba, és 35 db 12 cm széles sor van.

Összesen 16 · 35 db = 560 darab csempe kell.

A C) választás esetén 16 db 20 cm-es csempe fér el egy sorban és 21 ilyen sor van.

Összesen 16 · 21 db = 336 darab csempe kell.

Rossz indoklásonként 1 pont levonás. Rossz válaszonként 2 pont levonás.

6 pont

Összesen: 91 pont

FELMÉRŐ

Név:_______________________

7. évfolyam, Számelmélet

B CSOPORT

1.

a) Sorold fel a számok összes osztóját!

41 osztói:

90 osztói:

102 osztói:

b) Karikázd be az osztók közül a prímszámokat!

2.

a) Osztható-e? Igennel és nemmel válaszolj!

	3-mal	4-gyel	8-cal	12-vel
23442		B		D
5445				
24308652	A		C	

b) A színezett részbe írt válaszaidat indokold is a megfelelő oszthatósági szabály leírásával!

A: ……………………………………………………………………………………………

B: ……………………………………………………………………………………………

C: ……………………………………………………………………………………………

D: ……………………………………………………………………………………………

3.

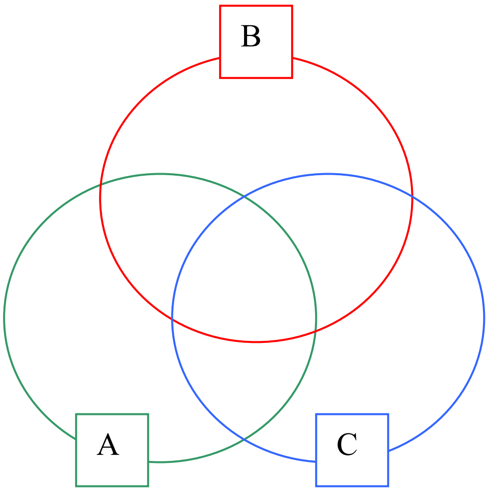
a) Add meg a 30, 45, 63 számok prímtényezős felbontását!

30 =

45 =

63 =

b) Sorold fel a számok összes osztóját!
Töltsd ki a halmazábrát!



A = {30 osztói}

B = {45 osztói}

C = {63 osztói}

c) Add meg a 30, 45, 63 számok legnagyobb közös osztóját!

d) Add meg a törtek legegyszerűbb alakját!

$\frac{30}{45} =$

$\frac{45}{63} =$

$\frac{45}{60} =$

e) Határozd meg a három szám legkisebb közös többszörösét!

[30; 45; 63] =

f) Végezd el a műveletet! A legegyszerűbb alakban add meg az eredményt, ha lehet!

$\frac{6}{30} + \frac{7}{63} - \frac{3}{45} =$

4. Egy konyha 420 cm x 320 cm-es. Olyan lapokat kell vásárolni, amelyekkel széltében és hosszában is maradék nélkül lehet a konyhát kikövezni.
Ezek közül a lapok közül válogathatunk.

A) 10 cm x 13 cm
B) 20 cm x 12 cm
C) 20 cm x 20 cm

a) Melyiket választhatjuk? Válaszodat indokold meg!
b) Mennyit kell venni a választott lapból? Válaszodat indokold meg!

0741 – 1. tanulói és tanári melléklet

Írásvetítő fóliára nyomva ebben a méretben osztályonként 1 db.

Prímszámok táblázata: 2-1187-ig.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197
199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379
383	389	397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569	571
577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751	757	761
769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977
983	991	997	1009	1013	1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069
1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151	1153	1163	1171	1181	1187

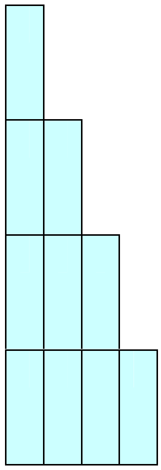
0741 – 2. tanulói melléklet (66 db prímkártya)
Kartonlapra nyomva, ebben a méretben, tanulónként 1 db (osztályonként 32 db). A kártyákat a fekete vonalak mentén ki kell vágni.

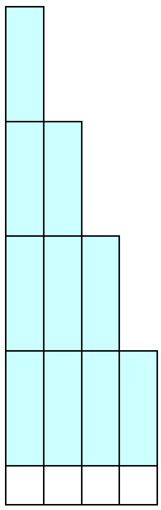
2	2	5	5	13	13
2	2	5	5	13	13
2	2	5	5	17	17
2	2	5	5	17	17
2	2	7	7	19	19

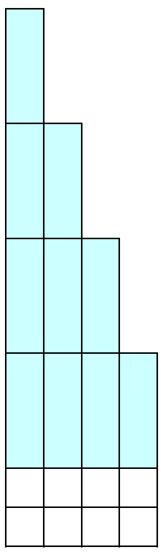
3	3	7	7	23	23
3	3	7	7	29	29
3	3	7	7	31	31
3	3	7	7	83	83
3	3	11	11	617	881
5	5	11	11	1039	1997

0741 – 3. tanári melléklet

Osztályonként 1 példányban írásvetítő fóliára nyomtatva ebben a méretben..







0741 – 4/a. tanári melléklet
Osztályonként 1 példányban írásvetítő fóliára nyomtatva ebben a méretben.

A

51	52	53	54	55
61	62	63	64	65
71	72	73	74	75
81	82	83	84	85
91	92	93	94	95

0741 – 4/b. tanári melléklet
Osztályonként 1 példányban írásvetítő fóliára nyomtatva ebben a méretben..

B

1598	**1599**	**1600**	**1601**	**1602**
1698	**1699**	**1700**	**1701**	**1702**
1798	**1799**	**1800**	**1801**	**1802**
1898	**1899**	**1900**	**1901**	**1902**
1998	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**

0741 – 5. tanári melléklet
Írásvetítő fóliára nyomva ebben a méretben osztályonként 1 db.

összeadandók								az összeg kilences maradéka	a tagok kilences maradéka
		3	1	4	5	6	9		1
				6	5	1	3		6
			4	6	1	3	9		5
			5	3	1	7	7		5
		1	1	6	9	8	1		8
	+			4	2	6	5		8
összeg		5	4	1	6	4	4	6	a maradékok összegének kilences maradéka: 6