
SZÁMOK ÉS MŰVELETEK

Műveletek tulajdonságai

KÉSZÍTETTE: TÓTH LÁSZLÓ, SZEREDI ÉVA

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Alap és származtatott műveletek kapcsán a legfontosabb műveleti tulajdonságok rögzítése, a kommutativitás, asszociativitás általános alakban történő felírása, a disztributív tulajdonságok megjelenítése néhány példán. A műveletek hierarchiájának szemléltetése, összeadás – szorzás – hatványozás összefüggés felismerése folytatása. A műveletek közti összefüggések segítségével egyszerűbb egyenletek megoldása. Számolási feladatok a természetes számkörben, döntően a műveleti tulajdonságok alkalmazásával.
Időkeret	5 óra
Ajánlott korosztály	7. osztály
Modulkapcsolódási pontok	Hatványozás normál alak, természetes számok, alpműveletek racionális számok körében
A képességfejlesztés fókuszai	Számolási készség, függvényszemlélet fejlesztése, analogikus gondolkodás

AJÁNLÁS

A műveleti tulajdonságokat, és a műveletvégzés szabályait érdekes, meglepő eredményekre vezető feladatokon gyakoroltatja. A műveleti tulajdonságok mindegyike már régóta jól ismert a gyerekeknek, a fontos dolog ebben a fejezetben az, hogy összefoglalja, és nagyító alá veszi ezeket a tulajdonságokat, azzal a céllal, hogy az algebrát előkészítse. A modul nem tartalmaz feladatgyűjteményt, azonban a feladatlapok olyan bőséges anyagot kínálnak, amelyből lehet, de kell is válogatni. A felmérő a továbbhaladáshoz szükséges minimális szintet méri, erősebb/nagyobb óraszámú tanuló csoportokban érdemes összetettebb feladatokkal mérni ugyanezeket a képességeket.

A feladatok megoldását helyenként nem jelöltük pirossal, hanem szürke háttérben a módszertani megfontolásokkal együtt adtuk meg.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Feladatlapok.

ÉRTÉKELÉS

Felmérő írása

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. Alapműveletek			
1.	Az alapműveletek, mint egy- illetve kétváltozós hozzárendelések (Táblázatok kitöltése az alapművelet felismerésével)	Lényegkiemelés, ismeretek alkalmazása	1. feladatlap 1-3.
2.	A műveletekben szereplő számok megnevezése; összeg–különbség, szorzat–hányados egybevetése	Összefüggés-felismerés, összességlátás. Lényegkiemelés, ismeretek alkalmazása	
3.	Kapcsolatok az alapműveletek között		1. feladatlap 4
II. Az alapműveletek tulajdonságai: felcserélhetőség			
1.	Műveletek sorrendje		2. feladatlap
2.	A felcserélhetőség vizsgálata kéttagú összeadásokban, kivonásokban illetve kéttényezős szorzásokban, osztásokban	Szabálykövetés, összefüggés-felismerés	
3.	Felcserélhetőség többtagú összeadásokban, hozzáadások és elvételek egymásutánja.	Analogikus gondolkodás,	3. feladatlap 1., 2
4.	Felcserélhetőség többtényezős szorzatokban, megszorzások és elosztások egymásutánja	Kapcsolatok felismerése, analógia dedukció.	3. feladatlap 3., 4.
III. Az alapműveletek tulajdonságai: csoportosíthatóság			
1.	Csupa összeadás, csupa szorzás	Szabálykövetés, összefüggés-felismerés	4. feladatlap
2.	Összeg és különbség hozzáadása, kivonása	Analogikus gondolkodás,	
3.	Szorzás és osztás szorzattal vagy hányadossal	Kapcsolatok felismerése, analógia dedukció.	5. feladatlap

IV. További műveletek és azok tulajdonságai			
1.	Műveletek képzése változatos módon és ezek tulajdonságainak vizsgálata	Szabálykövetés, összefüggés-felismerés	6. feladatlap
2.	Összeadásból szorzás, szorzásból hatványozás és azon túl... (Az alpműveletek kiterjesztése a hatványozás felé (és azon túl), a hatványozás kommutativitásának és asszociativitásának vizsgálata)	Lényegkiemelés, ismeretek alkalmazása	
3.	A műveleti tulajdonságok kapcsán fej- és írásbeli számolás a természetes számok körében	Ismeretek alkalmazása, számolási készség fejlesztés	7. feladatlap
V. Felmérő			
1.	A felmérő feladatlap megírása		Felmérő A, B csoport

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Alapműveletek

1. Az alapműveletek, mint egy- illetve kétváltozós hozzárendelések

Az óra első részében néhány szám vizsgálatával megnézzük, hogy egy számot milyen sokféle alakban írhatunk fel. Ezek a különböző alakok mind ugyanazt a számot jelentik, de az írásmódok más és más számtulajdonságokra világítanak rá. A változatos tevékenységek a matematikai ismeretek széles skáláját mozgósítják, a kifejezések felismerésétől a nagyságrendek tudatosításán át a számelméletig, lehetőséget adva a logikus gondolkodás fejlesztésére, ismeretek elmélyítésére.

A modul célja, hogy bővítse és elmélyítse a művelet fogalmát. A művelet először, mint kétváltozós függvény jelenik meg, de ez nem más, mint az alsóból megismert szabályjáték felelevenítése, értelmezése. Átismételjük az alapműveleteket, értelmezzük a legfontosabb tulajdonságokat – kommutativitás, asszociativitás – majd egyéb műveleteken mélyítjük el a fogalmakat. Tisztázzuk a műveletek rangját, ebből adódó sorrendiségét és az ezt befolyásoló zárójelek alkalmazását. Kitérünk a zárójelfelbontás eseteire. A hatványozás, mint nem alapművelet mellett saját, önkényesen definiált műveletekkel is dolgozunk. A modul másik fő feladata a természetes számkörben végzett alapműveletek gyakorlása részben fejszámolással, részben az írásbeli számolással.

A modul tanulói melléklete, jellegéből adódóan viszonylag sok közlést tartalmaz, hiszen a fogalmaknak eljárásoknak tisztázása megkívánja ezt. Az anyag feldolgozása természetesen lehetővé teszi, hogy a tanulók maguk határozzák meg a fogalmak tartalmát, illetve a szabályokat. Fontos, hogy az utolsó alkalom adódik arra, hogy külön időt szánjunk a természetes számokkal történő műveletvégzésre. Ez azért is fontos, mert valamennyi racionális számmal történő műveletvégzés végül is a természetes számokkal történő alapműveletre vezethető vissza. Ebben a vonatkozásban a számoló és számítógépek általánossá válása ellenére is magabiztos jártasságot kell elérnünk tanulóinkkal. Ugyanakkor nem egy feladat megoldása során használhatjuk a kalkulátort, illetve a számítógépet, egyrészt ellenőrzésre, másrészt azoknál az eseteknél, amikor nem a számolás gyakorlása, hanem annak eredményéből levonható következtetések felismerése a lényeg. Szerezzenek jártasságot a tanulók az alapműveletek géppel történő elvégzésében, de egyben ragaszkodjunk a számolást megelőző becsléshez is. Ma már elvárható, hogy a zsebszámológépeken túl ismerjenek olyan programokat is, melyek összetett feladatsorok megoldására alkalmasak. A Windows kellékei közül a számológép tudományos üzemmódja közelíti ezt a lehetőséget és a normálalakot is ismeri. Az EXCEL-ben összetett hivatkozásokat és relációkat is kezelhetünk. Igazi áttörést valamilyen matematikai segédprogram jelenthet, ami értelmezi, megjeleníti és ki is számítja a kifejezéseket.

1. FELADATLAP

Az előző órákon számokkal, majd a velük végezhető műveletekkel foglalkoztunk. Most megismerjük a műveletek legfontosabb tulajdonságait. Ehhez először kicsit másképpen tekintünk rájuk, mint eddig.

Az alsó tagozatban szabályjátékokkal szemléltettük a hozzárendeléseket, sokszor egy játékgép segítségével. Általában az volt a feladat, hogy kitaláljuk mi is történhetett a bedobott számokkal, majd újabb számokat bedobva, alkalmaztuk azokon a felismert szabályt. A művelet fogalmának megértéséhez nézzünk meg néhány ilyen „gépet”.

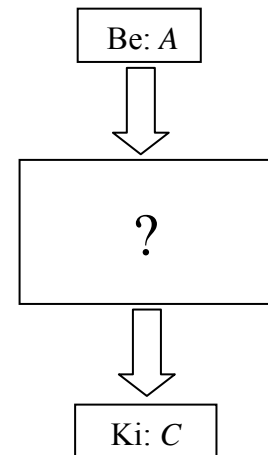
1. Az első fajta gépekbe egy-egy számot dobunk be.
A bemenő számot A -val, a kimenőt pedig C -vel jelöltük.

- a) Táblázatba foglaltunk néhány eredményt, a hiányzó helyre keress megfelelő számot!

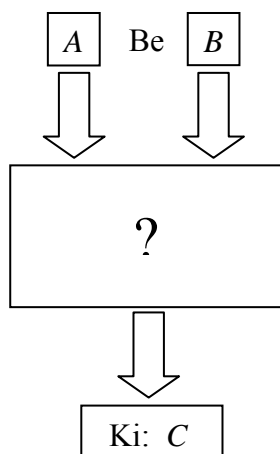
Be: A	75	123	0	1244	1	-1	A
Ki: C	77	125	2	1246	3	1	$A + 2$

Be: A	9	46	0	-101	111	1000	A
Ki: C	110	147	101	0	212	1101	$A + 101$

Be: A	4,5	8,1	9	0	-0,9	99,9	A
Ki: C	5,4	9	9,9	0,9	0	100,8	$A + 0,9$



- b) A következő gépekbe már két-két számot dobunk be. A bemenő számokat A és B , a kimenőt pedig C jelöli. Most is táblázatba foglaltunk néhány eredményt. Töltsd ki a táblázat üres részeit!



Be: A	75	123	12345	4321	A
Be: B	25	234	67890	-3087	B
Ki: C	100	357	80235	1234	$A + B$

Be: A	4,7	12,3	0,123	5,8	A
Be: B	5,2	2,34	1,234	4,2	$C - A$
Ki: C	9,9	14,64	1,357	10	C

Be: A	-25	-123	-85	-55	$C - B$
Be: B	25	234	-15	155	B
Ki: C	0	111	-100	100	C

Hasonlítsuk össze a gépek működését! Mennyiben azonos és mennyiben eltérő a működésük?

Bár mindkettőnél összeadással kapjuk meg a kijövő számot, az egyiket mégis **összeadó**, a másikat **hozzáadó** gépnek nevezhetnénk. A legfontosabb különbség a két gép között az, hogy az első **egy**, míg a második **két** számhoz rendelt egy harmadikat. Az első gép is összeadást végez, de mindig ugyanazzal a számmal növelte a bemenő számot. Azt is mondhatjuk, hogy mindig **hozzáadja** ugyanazt a számot a bemenő számhoz. A második gép két számot kér, majd azokat **összeadja**. A különbség tehát abban van, hogy az egyik egyváltozós, míg a másik kétváltozós hozzárendelést reprezentál.

A mindennapi életben is megkülönböztethetjük a két műveletet. Sok olyan szolgáltatás van, melynek díja két részből áll, egy **változó**ból és egy **állandó**ból. Például a telefonszámlán, mindig feltüntetnek egy előfizetői díjat. A számlánk természetesen a lebeszélte percektől függ, de ehhez mindig hozzájön az alapidj. Állapítsd meg, mennyi lehet az alapidj a következő számlákból:

	Január	Február	Március	Április
Beszélgetés díja	5300 Ft	4750 Ft	6580 Ft	550 Ft
Fizetendő	7800 Ft	7250 Ft	9080 Ft	3050 Ft

$$7800 - 5300 = 7250 - 4750 = 9080 - 6580 = 3050 - 550 = 2500$$

Hasonló a helyzet, ha Intercity vonattal utazunk. Ebben az esetben is mindig ugyanazzal az összeggel fizetünk többet az adott útra vonatkozó árnál, függetlenül attól, hogy hány km-t utazunk.

Az összeadás az egyik legrégebbi művelet, amivel elődeink megismerkedtek. Nem véletlen, hogy mi is elsőként ezzel a művelettel találkoztunk matematika órán. Nem is gondolunk rá, honnan is eredeztethető ez a művelet, olyan egyszerűnek tűnik. Pedig amikor egy természetes számhoz hozzáadunk egy másikat, akkor tulajdonképpen továbbszámlálunk annyival, amennyit hozzá kell adnunk az első taghoz. Bár ma már a tanulók sem így számolnak, de nem is olyan rég még így használták az ujjukat az összeadás elvégzésénél. Az összeadás a legegyszerűbb **alpművelet**.

2. A következő táblázatokban megtalálhatjátok az alpműveleteket. Néhol egy, máshol két bemenő adathoz rendeltünk hozzá egy kimenő adatot. Töltsétek ki a táblázat hiányzó részeit!

a)

Be: A	33	45	110,1	555	999	49,5
Ki: C	13	25	90,1	535	979	29,5

A művelet kivonás: $A - 20$

b)

Be: A	75	1000	45 617	5005	1400	A	B + C
Be: B	25	1	7 890	999	728	B	B
Ki: C	50	999	37727	4006	672	A - B	C

A művelet kivonás: $A - B$

c)

Be: A	11,1	15	4,25	10,01	6	20,1	A
Be: B	3,5	6,8	0,26	0,11	2,15	9,2	A - C
Ki: C	7,6	8,2	3,99	9,9	3,85	10,9	C

A művelet kivonás: $A - B$

d)

Be: A	43	1000	-10	123	-55	25	-9
Be: B	50	-5	7	200	25	-75	11
Ki: C	-7	1005	-17	-77	-80	100	-20

A művelet kivonás: $A - B$

e)

Be: A	33	45	101	555	999	49,5
Ki: C	66	90	202	1110	1998	99

A művelet kétszeresítés $A \cdot 2$

f)

Be: A	75	150	111	32	A
Be: B	25	8	222	123	C : A

Ki: C	1875	1200	24642	3936	C
--------------	------	------	-------	------	---

A művelet összeszorzás: $A \cdot B$

g)

Be: A	-3	-5	-111	32	-3
Be: B	4	-20	222	-123	-4
Ki: C	-12	100	-24642	-3936	12

A művelet összeszorzás: $A \cdot B$

h)

Be: A	35	-5	110	3,2	-25,5	-3
Ki: C	7	-1	22	0,64	-5,1	-0,6

A művelet osztás: $A : 5$

i)

Be: A	75	123	12345	111111	150747	A	$C \cdot B$
Be: B	25	3	15	3367	461	$A : C$	B
Ki: C	3	41	823	33	327	C	C

A művelet osztás: $A : B$

j)

Be: A	-45	3,5	-144	12,6	-28	110	-5,8
Be: B	9	7	-6	4	4	-10	11,6
Ki: C	-5	0,5	24	3,15	-7	-11	-0,5

A művelet osztás: $A : B$

A táblázatok kitöltésével sorba vettük az alpműveleteket. Az összeadás után a kivonás, szorzás és osztás következett.

Észrevehettük, hogy az összeadáshoz hasonlóan a szorzásnál, kivonásnál és az osztásnál is kétféle táblázattal találkozhatunk. Az egyiknél egy, a másiknál két bemenő adat volt. Érdekes itt is különbséget tenni a két eset közt. Például, ha vásárolunk valamilyen iparcikket, akkor a tényleges ára mellett 20% forgalmi adót is fizetnünk kell. Az így fizetendő bruttó összeget az adó nélküli, nettó ár 1,2-del történő megszorzásával kapjuk.

3. Egyes négyszögek területét is 4-gyel való **megszorzással** kapjuk.

Melyek ezek a négyszögek? **Négyzet, rombusz**

A téglalap területének kiszámítása már az oldalak **összeszorzásával** történik. Ez esetben két adathoz – a és b oldal – rendeljük hozzá a szorzatukat.

Először figyeljük meg a kétváltozós műveleteket.

2. A műveletekben szereplő számok megnevezése; összeg-különbség, szorzat-hányados egybevetése

Különbséget tettünk egyváltozós és kétváltozós esetek közt, ahogy azt az összeadásnál, illetve a szorzásnál láttuk. Fontos, hogy a következőkben lássák, mikor, melyikről beszélünk, mert más-más műveleti tulajdonságai vannak az egyiknek és a másiknak. Érdekes akár a táblára felrajzolnunk a két-bemenetes gépes szemléltetést.

TUDNIVALÓ:

Összeadás esetén **tagokról**, szorzás esetén **tényezőkről** beszélünk.

Ismételjük át az alpműveletek szereplőinek nevét!

Bár mi az első osztály óta igyekszünk pontos matematikai terminológiát használni, ezt nem mindig követelhetjük meg a tanulóktól. Most már várjuk el tőlük, hogy pontosan hivatkozzanak az egyes műveletek szereplőire. Ha nem is tekintjük kikerdezendő anyagnak a következő részt, de követeljük meg, hogy műveletekről, azok közti összefüggésekről szólva pontos terminológiát használjanak. Fontos elsajátítani, hogy az összeg vagy szorzat fogalmát ne csak a művelet eredményére, hanem magára a műveletre is vonatkoztassák.

Az összeadandó számokat külön-külön tagoknak, együtt összegnek nevezzük.

$$\begin{array}{ccccccc} 66 & & + & & 33 & = & 99 \\ & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & \\ & & \text{tagok} & & & & \text{összeg} \\ & & \text{2 tagú összeg} & & & & \\ \\ 57 & & - & & 44 & = & 13 \\ \text{kisebbitendő} & & & & \text{kivonandó} & & \text{különbség} \\ & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & \\ & & \text{tagok} & & & & \end{array}$$

Korábban tanultuk, hogy bármely összeadás kivonásként írható és fordítva, a kivonást is felírhatjuk összegként, csak a második tagot az **ellentettjével** kell helyettesíteni:

$$66 + 33 = 66 - (-33) = 99,$$

$$57 - 44 = 57 + (-44) = 13.$$

Ennek alapján indokolt kivonásnál is tagokról beszélni.

Az összeszorzendő számokat külön-külön tényezőeknek, de együtt már szorzatnak nevezzük:

$$\begin{array}{ccccccc} 13 & & \cdot & & 31 & = & 403 \\ & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & \\ & & \text{tényezők} & & & & \text{szorzat} \\ & & \text{2 tényezős szorzat} & & & & \\ \\ 57 & & : & & 3 & = & 19 \\ \text{osztandó} & & & & \text{osztó} & & \text{hányados} \\ & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & \\ & & \text{tényezők} & & & & \end{array}$$

Szorzás helyett is lehet osztást felírni és fordítva, de ebben az esetben a második tényező **reciprokát** kell venni:

$$13 \cdot 31 = 13 : \frac{1}{31} = 403 \quad \text{és} \quad 57 : 3 = 57 \cdot \frac{1}{3} = 19$$

Ennek alapján az osztásnál is indokolt lehet tényezőkről beszélni.

Fölvetődhet, hogy összeadásnál és szorzásnál is megkülönböztető névvel látjuk el a tagokat (pl. szorzandó, szorzó), de éppen a kommutativitás miatt ezek megkülönböztetése mellőzhető. Nem szabad azonban elfelejteni és adott helyen hangsúlyozzuk is, hogy az

$$a \{ + | \cdot \} b = b \{ + | \cdot \} a$$

azonosságok csak az eredmények azonosságát jelentik, a két oldalon szereplő művelet mást jelent.

3. Kapcsolatok az alpműveletek között

A négy alpművelet között többféle kapcsolatot is megfigyelhetünk:

Azt szoktuk mondani, hogy az összeadás párja a kivonás, a szorzásé pedig az osztás. A párba állítást az is indokolja, hogy az összeg hiányzó tagját kivonással, a szorzat hiányzó tényezőjét osztással kaphatjuk meg.

4. A hiányzó adat kiszámítását nyitott mondatokkal is felírhatjuk. Keressétek meg az egyenletek megoldásait! Milyen művelettel számolhatjuk ki az ismeretlent?

a) $54\,321 + A = 111\,111$

b) $5555 - B = 4444$

c) $C - 1728 = 1672$

$A = 111\,111 - 54\,321 = 56790$

$B = 5555 - 4444 = 1111$

$C = 1672 + 1728 = 3400$

d) $16 \cdot D = 3936$

e) $222 \cdot 222 : E = 66$

f) $F : 505 = 606$

$D = 3936 : 16 = 246$

$E = 222 \cdot 222 : 66 = 3367$

$F = 505 \cdot 606 = 306\,030$

Észrevehettétek, hogy a kivonás hiányzó tagját összeadással vagy kivonással kaphattátok meg, attól függően, hogy a kisebbítendőt vagy a kivonandót kellett kiszámítani.

Az osztásnál is szorzással kapjuk a hiányzó osztandót, de osztással az ismeretlen osztót.

Semmi esetre se a mérlegelv, hanem a műveletek közti összefüggés alapján keressék meg a megoldást! Egyben akár minden feladat megoldása előtt fogalmazzanak meg ehhez hasonló eljárásokat, pl.: „egy összeg hiányzó tagját úgy kaphatjuk meg, ha az összegből kivonjuk az ismert tagot...”.

II. Az alpműveletek tulajdonságai: felcserélhetőség

1. Műveletek sorrendje

Olvasásnál megszoktuk, hogy balról jobbra haladva követjük a leírt szöveget. Számolásnál nem minden esetben tehetjük ezt meg. Számítsd ki zsebszámológéppel a következő művelet sor eredményét!

$$100 - 4 \cdot 3^2 =$$

Ha a műveleteket balról jobbra végeznénk, akkor:

$$100 - 4 = 96$$

$$96 \cdot 3 = 288$$

$$288^2 = 82\,944\text{-et kapnánk eredményül.}$$

Nekünk azonban pont fordított sorrendben kellett haladnunk:

$$3^2 = 9$$

$$4 \cdot 9 = 36$$

$$100 - 36 = 64.$$

Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy a műveletek elvégzésének sorrendjét nem az egymáshoz viszonyított helyzetük, hanem a rangjuk határozza meg.

TUDNIVALÓ:

A műveletek sorrendje:

Ha van zárójel, akkor először a zárójelben levő műveleteket végezzük el, mégpedig a magasabb rangú műveletet előbb, mint az alacsonyabb rangúakat.

A legalacsonyabb rangú műveletek az összeadás és a kivonás. Ezeket követi a szorzás és az osztás. A legmagasabb rangú művelet a hatványozás.

Tehát a hatványozás megelőzi a szorzást és az osztást, azok pedig megelőzik a kivonást és az összeadást.

Ha egy műveletsorban több azonos rangú művelet van, akkor már valóban balról jobbra haladhat a műveletek elvégzése.

2. FELADATLAP

1. Az alábbi műveletsor elvégzésénél mely esetekben lehet balról jobbra haladva a helyes eredményhez eljutni? Ahol nem, ott zárójelek elhelyezésével erősítsd meg a megfelelő sorrendet úgy, hogy az eredmény ne változzon!

a) $34 + 95 - 55 - 78 + 94 = 90$

Csak összeadás és kivonás szerepel, tehát a sorrend lehet balról jobbra.

b) $45 : 9 \cdot 4 + 15 - 20 = 15$

Bár a szorzás, osztás magasabb rendű művelet, de ezt a műveletsort pont ezekkel indítottuk, tehát itt is haladhatunk balról jobbra.

c) $250 \cdot 4 - 600 : 100 + 333 = 1327$

Itt már nem lehet sorban balról jobbra haladni, az osztás megelőzi a kivonást és az összeadást:
 $250 \cdot 4 - 600 : 100 + 333 = (250 \cdot 4) - (600 : 100) + 333$

d) $550 + 45 \cdot 20 = 1450$

Természetesen előbb a szorzás majd az összeadás következik:
 $550 + 45 \cdot 20 = 550 + (45 \cdot 20)$

2. Számítsuk ki a következő műveletsorok eredményét! Ellenőrizd a zsebszámológépeddel!

a) $15 + 24 \cdot 5 - 8 \cdot 15 = 15 + 120 - 120 = 15$

b) $111 - 999 : 3^3 = 111 - 999 : 27 = 111 - 37 = 74$

c) $125 \cdot 2^4 - 32 \cdot 5^2 = 125 \cdot 16 - 32 \cdot 25 = 2000 - 800 = 1200$

d) $24 - 2^4 + 4 \cdot 2 = 24 - 16 + 8 = 16$

e) $10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4 = 1000 + 200 + 30 + 4 = 1234$

f) $10^3 - 2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 - 4 = 1000 - 200 - 30 - 4 = 766$

Érdeemes a megoldást több lépésben levezetni, hogy ezzel is tudatosítsák a tanulók a helyes sorrendet. Csak az eredmény közlése és ellenőrzése kevés lenne.

Elképzelhető, hogy a zárójeles műveletsor további zárójeleket is tartalmaz. Ilyenkor bentről kifelé haladva számítjuk ki az eredményt.

A következő feladatsor megoldásával nyomon követhetitek a helyes sorrendet:

$$15 \cdot (100 : (37 - 12) + 2) + (100 - 33 \cdot 3) =$$

$$15 \cdot (100 : 25 + 2) + (100 - 33 \cdot 3) =$$

$$15 \cdot (4 + 2) + (100 - 33 \cdot 3) =$$

$$15 \cdot 6 + (100 - 33 \cdot 3) =$$

$$15 \cdot 6 + (100 - 99) =$$

$$15 \cdot 6 + 1 =$$

$$90 + 1 = 91$$

A fentihez hasonló feladatsorral indíthatjuk az órának ezt a részét, majd a megoldás során indokoljuk meg, miért választottuk az adott műveletet.

Több, egymásba ágyazott zárójel esetén szokás eltérő alakú zárójelpárokat alkalmazni, hogy könnyebben megtalálhassuk mindegyiknek a párját. Például:

$$15 - \{ 25 \cdot [32 + 5 \cdot (17 - 3) - 77 : 11] \} \cdot 4 =$$

$$15 - (25 \cdot (32 + 5 \cdot (17 - 3) - 77 : 11)) \cdot 4$$

Az ilyen kifejezéseknél is elegendő egyféle zárójelpár használata. A legtöbb matematikai program nem is fogadja el, vagy másképpen értelmezi a kapcsos { } illetve a szögletes [] zárójelpárokat.

Számítógép használatánál különösen fontos, hogy megfelelően használjuk a zárójeleket. Ha egy műveletsort helytelenül írunk be, akkor a legtöbb program jelzi a hiba helyét, sőt lehetnek olyanok is, amelyek maguktól pótolják a zárójel hiányzó párját.

3. Hol van a hiba a következő feladatokban?

a) $5 \cdot (12 + (35 - 27)) : 4$

Az egyik zárójelnek nincs párja. A zárójelek páratlan száma miatt ez azonnal kiderül.

b) $25 \cdot \{ [75 + 25 \cdot (28 - 12) + 56 : (17 - 9)] : 4 \}$

Itt a hiba az egymásba ágyazott zárójelpárok hibásak: { [...] } ha nem tennék különbséget a zárójelek közt, akkor nem lenne hibás, így értelmezhetetlen

c) $36 - (15 (\cdot 5 + 35 - 27))$

A zárójelben szorzással kezdődik a kifejezés, ami értelmezhetetlen. Esetleg az előtte álló zárójellel felcserélve kaphatunk értelmezhető kifejezést.

4. A következő feladatsorok kiszámításánál a zárójeleket is vegyék figyelembe:

a) $231 - 77 : 7 + 4$

b) $(231 - 77) : 7 + 4$

c) $231 - 77 : (7 + 4)$

d) $(231 - 77) : (7 + 4)$

a) $231 - 77 : 7 + 4 = 231 - 11 + 4 = 224$

b) $(231 - 77) : 7 + 4 = 154 : 7 + 4 = 26$

c) $231 - 77 : (7 + 4) = 231 - 77 : 11 = 224$

d) $(231 - 77) : (7 + 4) = 154 : 11 = 14$

(az a) és c) eredmények egyezése véletlen!)

Ha a $\frac{231-77}{7+4}$ kifejezést számítógéppel szeretnénk kiszámítani, melyik kifejezés adná a helyes eredményt?

Csak a d) ad helyes eredményt, hiszen a számlálóban és a nevezőben kell előbb elvégezni a műveleteket.

A legtöbb számítógépes program nem ismeri az osztásnak megfelelő „:” jelet. Helyette többnyire a „/” jelet használják, és ilyenkor az osztás művelete törtként jelenik meg. Például a

$25 + 12 : 4$ helyett $25 + 12/4$ -et írunk, és a kijelzőn $25 + \frac{12}{4}$ jelenik meg. Természetesen a

kiszámításkor megkapjuk a várt $25 + 3 = 28$ eredményt, hiszen ezek a programok is betartják a kötelező sorrendet.

Vannak esetek, amikor a zárójelet nem tesszük ki, mégis úgy tűnik, mintha jelen volna.

A $\frac{18+42}{21-6}$ kifejezésben nem látunk zárójelet, az osztás (törtvonal) magasabb rendű művelet, mint az összeadás vagy a kivonás, mégis az összeadással és a kivonással kezdünk. Így az eredmény:

$$\frac{60}{15} = 4 \text{ lesz.}$$

Ha azonban a számítógépbe zárójel nélkül íránk be a műveletsort így: $18 + 42 / 21 - 6$, akkor a

$18 + \frac{42}{21} - 6$ kifejezés jelenne meg, aminek eredménye nyilván nem azonos az előzővel.

Hasonló esettel találkozhatunk hatványozásnál is, ha a kitevőben összeg vagy különbség van:

$$5^{9-7} \neq 5^9 - 7, \text{ hanem} \\ 5^{9-7} = 5^2 = 25$$

Ezek a példák azt mutatják, hogy a törtek számlálójában, nevezőjében (vagy a későbbiekben, a hatvány kitevőjében) levő műveleteket akkor is előbb végezzük el, ha azok nincsenek zárójelbe téve.

Ügyeljünk arra, hogy ezeket a „láthatatlan” zárójeleket be kell írni, ha számítógéppel ilyen feladatokat oldatunk meg. Például a $\frac{2^{3+4}-5}{6 \cdot 7-1}$ kifejezést a következőképpen kell beírni:

$$(2^{(3+4)}-5)/(6 \cdot 7-1)$$

(a számítógépek a hatványozáshoz többnyire a ^ jelet használják)

Mivel egyre több olyan számítógépes alkalmazás van, amibe műveletsorok is beírhatók, ezért érdemes ezt az esetet külön is megvizsgálni. Sok hibalehetőséget rejt magában, de valamennyi kiszámításával és értékelésével megtalálhatjuk a helyes írásmódot.

5. Írd le a szöveggel megadott feladatokat műveletsorral, majd számold ki!

- | | |
|--|------------------------------|
| a) 63 és 27 összegének a 10-szerese. | $(63 + 27) \cdot 10 = 900$ |
| b) A 45 és 9 hányadosának a 7-szerese. | $(45 : 9) \cdot 7 = 35$ |
| c) 64 és 36 szorzatának 200-zal megnövelt értéke. | $64 \cdot 36 + 200 = 2504$ |
| d) A 100-nak és a 12 és 8 összegének a hányadosa | $100 : (12 + 8) = 20$ |
| e) 350 és 25 hányadosánál 10-zel kisebb szám | $350 : 25 - 10 = 4$ |
| f) A 8 és a 6 összegének és különbségének a szorzata | $(8 + 6) \cdot (8 - 6) = 28$ |

Mely esetekben kellett zárójelet használnod, és miért?

2. A felcserélhetőség vizsgálata kéttagú összeadásokban, kivonásokban illetve kéttényezős szorzásokban, osztásokban

Miért fontos nevükben is megkülönböztetnünk a kivonásban és az osztásban szereplő számokat?

Az összeadás és szorzás műveleténél a bemenő adatok sorrendjét felcserélve azt tapasztalhatjuk, hogy eredmény nem változik.

Például $3 + 2 = 2 + 3$ vagy $5 \cdot 6 = 6 \cdot 5$

Általánosságban:

TUDNIVALÓ:

$$a + b = b + a, \quad \text{és} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

A kommutativitás (és az asszociativitás) tulajdonságát ebben a korban nyugodtan lejegyezhetjük általános alakban. Rövidesen az algebrai kifejezések kapcsán egyébként is találkozunk azonosságokkal.

Az összeadásnak és a szorzásnak ezt a közös tulajdonságát felcserélhetőségnek nevezzük. Nézzük meg, hogy teljesül-e a felcserélhetőség tulajdonsága a másik két alapműveletre is? Először a kivonás tagjait cseréltük fel:

$$35 - 24 = \mathbf{11} \quad \text{és} \quad 24 - 35 = \mathbf{-11},$$

vagy

$$2000 - 999 = \mathbf{1001} \quad \text{és} \quad 999 - 2000 = \mathbf{-1001}$$

Látható, hogy erre a műveletre nem teljesül a felcserélhetőség tulajdonsága. Mit mondhatunk a két eredményről? Figyeljük meg az összegüket!

Mint korábban láttuk, a tagok felcserélésével a különbségnek csak az előjele változik meg. A két eredmény egymás ellentettje, így összegük 0.

Nézzük meg, mi történik, ha az osztásban szereplő számok sorrendjét cseréjük fel!

$$18 : 9 = \mathbf{2} \quad \text{és} \quad 9 : 18 = \mathbf{0,5}$$

vagy

$$25 : 10 = \mathbf{2,5} \quad \text{és} \quad 10 : 25 = \mathbf{0,4}$$

Az osztásnál szereplő számok sem cserélhetők fel. Vizsgáljuk meg most is a két eredményt, ezúttal a szorzatuk kiszámolásával!

A két hányados szorzata 1-et ad eredményül, tehát reciprok értékek, ahogy ezt a racionális számok kapcsán láttuk.

3. Felcserélhetőség többtagú összeadásokban, hozzáadások és elvételek egymásutánja

3. FELADATLAP

Ha egy művelet sor több hozzáadás és elvétel egymásutánjából áll, akkor a műveletvégzés sorrendje felcserélhető.

1.

a) Írjuk le művelet sorral a következőket:

Egy léghajó 2000 m magas hegyről indult. Az első órában 1500 m-t emelkedett, majd 800 m-t süllyedt, ezután újabb 1300 m-es süllyedés következett, majd 1000 m emelkedés. Milyen magasan volt ezek után a léghajó?

$$2000 + 1500 - 800 - 1300 + 1000 = 2400 \text{ (m)}$$

b) Tekintsünk minden emelkedést egy hozzáadásnak, a süllyedést pedig elvételnak.

Felcserélhetők-e ezek a műveletek? Vegyük például előre az emelkedéseket!

$$2000 + 1500 + 1000 - 800 - 1300 = 2400 \text{ (m)}$$

c) Megváltoztathatjuk-e az első tagot, azaz az indulás magasságát? Mi fejez ki a következő műveletsor?

$$1000 - 800 + 1500 - 1300 + 2000 = 2400 \text{ (m)}$$

1000 m-ről indultunk, először 800 m-t süllyedtünk, majd 1500 m-t emelkedtünk.

d) Milyen számot nem írhatunk az első helyre, figyelembe véve a járművünket?

Negatívát, hiszen az tengerszint alatti magasságot jelentene, bár mélyföldön értelmezhető, vagy a 0 m-es magasságot is önkényesen választhatjuk.

Látható, hogy mindegyik esetben ugyanaz a magasság lesz a végeredmény.

Eltekinthetünk a léghajótól és felírhatjuk a számokat növekvő sorrendben úgy, hogy vigyék magukkal az előttük lévő műveleti jeleket is:

$$- 800 + 1000 - 1300 + 1500 + 2000 = 2400$$

Ha kizárólag összeadás és kivonás szerepel egy műveletsorban, akkor a számok felcserélhetők, de csak úgy, hogy viszik magukkal az előttük lévő műveleti jelet. Első tagként egy 0-t írhatunk, hogy ne műveleti jellel kezdjük a kifejezést:

$$0 - 800 + 1000 - 1300 + 1500 + 2000 = 2400$$

Meggyőződhetünk erről pénzügyek lejegyzésénél is, ha a hozzáadással bevételt, kivonással kifizetést tüntetünk fel. A következő bevételek és kifizetések a sorrendtől függetlenül ugyanahhoz a végeredményhez vezetnek. Próbáljátok meg többféle sorrendben felírni a számokat! Olyanokkal kezdjétek, melyek során nem kerültök adósságra!

Az 5. és 7. feladatokat érdemes csoportban, a többféle sorrendet a csoporttagok között megosztva megoldani. Több tapasztalatot szerezhetnek, rövidebb idő alatt.

2. Írjátok le a számokat többféle sorrendben és hasonlítsátok össze az eredményeket! Keressetek olyan sorrendeket, melyek megkönnyítik a számolást!

(12 000 - 12 000 + 3 000 + 2 000 - 5 000) + 15 000 - 8 000 = 7 000 és természetesen a többi eredmény is ennyi lesz.

4. Felcserélhetőség többtényezős szorzatokban, megszorítások és elosztások egymásutánja

Nemcsak az előző két művelet szereplőinek sorrendje cserélhető fel.

3. Figyeljétek meg a következő két műveletsort! Mely műveletek szerepelnek benne? Hogyan fogalmaznátok át az előzőekben alkalmazott szabályt?

$$240 : 10 \cdot 6 : 12 \cdot 3 : 9 = 4$$

$$240 : 12 \cdot 3 \cdot 6 : 9 : 10 = 4$$

4. A következő kártyákat is írjátok le különböző sorrendben, majd számoljátok ki az eredményeket. Milyen számot kell a kártyák elé írni, hogy ne műveleti jellel kezdődjön a feladatsor? Próbáljátok olyan megoldásokat keresni, hogy a számítások során a természetes számok körében maradjatok!

(1 · 360 : 9 : 40) · 60 : 30 · 15 = 30 és természetesen a többi eredmény is ennyi lesz.

III. Az alapműveletek tulajdonságai, csoportosíthatóság

1. Csupa összeadás, csupa szorzás

4. FELADATLAP

Vizsgáljuk meg a többtagú összeadásnak és szorzásnak egy másik tulajdonságát is!

1. Írjátok le a szöveghez illeszkedő műveletsort! Használjatok zárójeleket!

a) Jancsi 6000 Ft-ot gyűjtött kerékpárra. Szülei 12 000 Ft-tal, nagyszülei 7 500 Ft-tal egészítették ki, amit karácsonyra egy összegben ajándékoztak Jancsinak. Mennyi pénzzel rendelkezett így Jancsi?

b) Jancsi 6 000 Ft-ot gyűjtött az év során, amihez szülei további 12 000 Ft-ot tettek hozzá. Az így összegyűjtött pénzt a nagyszülők 7 500 Ft-tal egészítették ki. Mennyi pénze lett így Jancsinak?

a) $6\,000 + (12\,000 + 7\,500) = 25\,500$ illetve

b) $(6\,000 + 12\,000) + 7\,500 = 25\,500$.

A két feladat eredménye természetesen ugyanaz a szám, de ha a szöveghez hűek akarunk lenni, akkor zárójellel jelezniük kell a sorrendet is:

A zárójelekkel megváltoztattuk a műveletvégzés sorrendjét, úgy ahogy az a valóságban is történhetett.

c) Mi a szerepe a zárójelnek? Megváltoztattátok-e a **számok** sorrendjét? Megváltoztattátok-e a **műveletek** sorrendjét?

A két műveletsort így is felírhattátok:

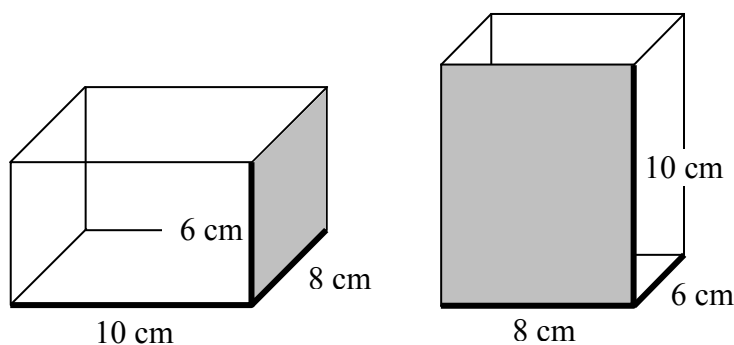
$$6\,000 + (12\,000 + 7\,500) \text{ és } (6\,000 + 12\,000) + 7\,500$$

d) Számítsátok ki a két összeget!

e) Változtassátok meg az összeadásokat szorzásokra! Egyenlő lesz-e a két szorzat értéke?

Igen, $5,4 \cdot 10^{11}$

Könnyen beláthatjuk, hogy a szorzás is hasonló tulajdonsággal rendelkezik.



2. A fenti egybevágó téglalapok térfogatát sokféleképpen felírhatjuk. Összeszorozhatjuk az élek hosszát növekvő sorrendben egymás mellé írva így: $(6 \cdot 8) \cdot 10$, vagy így: $6 \cdot (8 \cdot 10)$.

a) Számítsátok ki a két szorzatot! Fogalmazzátok meg a tapasztaltakat! **480**

b) Írjunk összeadást a szorzások helyett! Egyenlő lesz-e a kapott két összeg értéke? **Igen: 24.**

Tapasztalatainkat a következőképpen általánosíthatjuk:

TUDNIVALÓ:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{és} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Az összeadásnak és a szorzásnak ezt a tulajdonságát csoportosíthatóságnak nevezzük.

3. Írj az előző összefüggésekben az összeadás helyett kivonást, a szorzás helyett osztást!
Döntsd el néhány konkrét szám beírásával, hogy ezek a műveletek csoportosíthatóak-e!
Fontos, hogy ne csak rávágják, de ki is próbálják a műveleti tulajdonságot. Itt most annak alkalmazása a lényeg, nem annak felismerése, hogy a kivonás, vagy az osztás nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

2. Összeg, különbség hozzáadása, kivonása

Vizsgálódjunk tovább, mikor szabad zárójelet betenni egy műveletbe, vagy elhagyni belőle?

4. Figyeld meg melyik művelet eredménye, hogyan változik meg a zárójel elhagyásával!

a) $100 + (33 + 20) = 153$

$100 + 33 + 20 = 153$

b) $444 + (120 - 20) = 544$

$444 + 120 - 20 = 544$

Írj a műveletsorokhoz megfelelő szöveges feladatot!

Bár az eredmények nem változtak, de itt is hangsúlyoznunk kell, a két kifejezés nem ugyanazt jelenti! Ezzel könnyebben megérttethetjük, hogy a következő feladatokban miért változott meg az eredmény.

Láttuk, hogy összeg és különbség hozzáadásánál a zárójel elhagyható.

TUDNIVALÓ:

$$a + (b + c) = a + b + c \quad \text{és} \quad a + (b - c) = a + b - c$$

5. Számítsd ki a feladatsorokat! Írj a műveletsorokhoz megfelelő szöveges feladatot!

a) $500 - (350 + 100) = 50$

$500 - 350 + 100 = 250$

b) $36 - (15 - 10) = 31$

$36 - 15 - 10 = 11$

Érdeemes megfigyelni a kétféle eredmény közti különbséget, hiszen abban rejlik az eltérés magyarázata. Ne elégedjünk meg azzal, hogy kimondjuk, megváltozott az eredmény, nem hagyható el a zárójel.

6. Összeg vagy különbség kivonásánál a zárójel elhagyása megváltoztatta az eredményt. Változtasd meg valamelyik műveleti jelet úgy, hogy a zárójel elhagyása után ne változzon az eredmény!

a) $500 - (350 + 100) = 50$

$500 - 350 \boxed{-} 100 = 50$

b) $1000 - (600 - 150) = 550$

$1000 - 600 \boxed{+} 150 = 550$

Fogalmazzatok meg az összegek és különbségek kivonásának módját az alábbi szabályok alapján:

TUDNIVALÓ:

$$a - (b + c) = a - b - c \quad \text{és} \quad a - (b - c) = a - b + c$$

Ha összeget kell elvonnunk, akkor annak minden tagját el kell venni.

Ha különbséget veszünk el, akkor a zárójel elhagyása után a kivonandó – ami a zárójelben szerepelt – hozzáadandóvá válik.

3. Szorzás és osztás szorzattal, vagy hányadossal

A következő feladatok hasonlítanak az előzőkre, csak az összeadást szorzásra, a kivonást pedig osztásra cseréljük. Persze a számokat is megváltoztattuk úgy, hogy könnyű legyen a műveleteket elvégezni.

5. FELADATLAP

1. Figyeld meg melyik művelet eredménye, hogyan változik meg a zárójel elhagyásával!

$$\text{a) } 100 \cdot (3 \cdot 20) = 6000 \qquad 100 \cdot 3 \cdot 20 = 6000$$

$$\text{b) } 4 \cdot (120 : 20) = 24 \qquad 4 \cdot 120 : 20 = 24$$

Írj a műveletsorokhoz megfelelő szöveges feladatot!

Bár az eredmények nem változtak, de itt is hangsúlyoznunk kell, a két kifejezés nem ugyanazt jelenti! Ezzel könnyebben megértethetjük, hogy a következő feladatokban miért változott meg az eredmény.

Láttuk, hogy szorzattal, vagy hányadossal való szorzásnál a zárójel elhagyható.

TUDNIVALÓ:

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c \quad \text{és} \quad a \cdot (b : c) = a \cdot b : c$$

2. Számítsd ki a feladatsorokat! Írj a műveletsorokhoz megfelelő szöveges feladatot!

$$\text{a) } 500 : (5 \cdot 10) = 10 \qquad 500 : 5 \cdot 10 = 100$$

$$\text{b) } 36 : (12 : 3) = 9 \qquad 36 : 12 : 3 = 1$$

Érdeemes megfigyelni a kétféle eredmény közti különbséget, hiszen abban rejlik az eltérés magyarázata. Ne elégedjünk meg azzal, hogy kimondjuk, megváltozott az eredmény, nem hagyható el a zárójel.

3. Ha szorzattal vagy hányadossal osztunk, akkor a zárójel elhagyása megváltoztatja az eredményt.

Változtasd meg valamelyik műveleti jelet úgy, hogy a zárójel elhagyása után ne változzon az eredmény!

$$\text{a) } 500 : (5 \cdot 10) = 10 \qquad 500 : 5 \boxed{\cdot} 10 = 10$$

$$\text{b) } 36 : (12 : 3) = 9 \qquad 36 : 12 \boxed{\cdot} 3 = 9$$

Fogalmazzátok meg azt, amit a feladatokban szorzattal, illetve hányadossal való osztásról megfigyelhettek. Az alábbi szabályok segíthetnek:

TUDNIVALÓ:

$$a : (b \cdot c) = a : b : c \quad \text{és} \quad a : (b : c) = a : b \cdot c$$

Ha szorzattal kell osztanunk, akkor annak minden tényezőjével osztani kell.

Ha hányadossal osztunk, akkor a zárójel felbontása után az osztó – ami a zárójelben szerepelt – szorzóvá válik.

A következő feladatokban szorzatok, illetve hányadosok hozzáadása, elvétele történik:

4. Megváltoztatja-e az eredményt a zárójel elhagyása? Sejtésedet számolással ellenőrizd, majd magyarázd meg a tapasztaltakat!

$$\text{a) } 250 + (16 \cdot 5) = 330 \qquad 250 + 16 \cdot 5 = 330$$

$$\text{b) } 500 - (25 \cdot 8) = 300 \qquad 500 - 25 \cdot 8 = 300$$

$$\text{c) } 50 + (60 : 4) = 65 \qquad 50 + 60 : 4 = 65$$

$$\text{d) } 100 - (75 : 3) = 75 \qquad 100 - 75 : 3 = 75$$

Látható, hogy szorzat vagy hányados hozzáadásánál, kivonásánál elhagyható a zárójel, mert a műveletek sorrendje miatt mindenképpen ezekkel kellett kezdeni a számolást.

TUDNIVALÓ:

$$a + (b \cdot c) = a + b \cdot c \quad \text{és} \quad a - (b \cdot c) = a - b \cdot c$$

$$a + (b : c) = a + b : c \quad \text{és} \quad a - (b : c) = a - b : c$$

5. Megváltozik-e az eredmény, ha összeget vagy különbséget szorzunk, vagy osztunk és elhagyjuk a zárójelet?

$$\text{a) } (240 + 15) \cdot 6 = 1530 \qquad 240 + 15 \cdot 6 = 330$$

$$\text{b) } (525 - 75) \cdot 4 = 1800 \qquad 525 - 75 \cdot 4 = 225$$

$$\text{c) } (444 + 44) : 4 = 122 \qquad 444 + 44 : 4 = 455$$

$$\text{d) } (1250 - 350) : 50 = 18 \qquad 1250 - 350 : 50 = 1243$$

Összeg vagy különbség szorzásánál, osztásánál a zárójel elhagyása megváltoztatja az eredményt.

Ezeknél az eseteknél minden tagot meg kell szoroznunk, vagy el kell osztanunk, tehát:

$$(240 + 15) \cdot 6 = 240 \cdot 6 + 15 \cdot 6$$

$$(525 - 75) \cdot 4 = 525 \cdot 4 - 75 \cdot 4$$

$$(444 + 44) : 4 = 444 : 4 + 44 : 4$$

$$(1250 - 350) : 50 = 1250 : 50 - 350 : 50$$

TUDNIVALÓ:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{és} \quad (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

$$(a + b) : c = a : c + b : c \quad \text{és} \quad (a - b) : c = a : c - b : c$$

A tagonkénti szorzás, osztás felveti a disztributív tulajdonság bevezetését. Bár konkrét példákön könnyen bemutatható – például az üveg ára üresen 60 Ft, a benne lévő üdítő 150 Ft,

mennyit fizetünk 15 üveg üdítőért összesen – nem szükséges a fogalom bevezetése. A zárójel felbontásának ez az esete is előkerül rövidesen, az algebrai átalakításoknál, tehát minél több konkrét példa vizsgálata indokolt.

6. Melyik a nagyobb? Számolás nélkül állapítsd meg, majd indokolj!

- a) $(145 + 227) \cdot 528 > 145 + 227 \cdot 528$
 b) $(824 + 444) \cdot 15 > 824 + 444 \cdot 15$
 c) $23 + 65 \cdot 45 + 99 < (23 + 65) \cdot (45 + 99)$
 d) $347 \cdot (768 - 521) > 347 \cdot 768 - 521$
 e) $475 \cdot (144 - 142) = 475 \cdot 144 - 475 \cdot 142$

IV. További műveletek és azok tulajdonságai

1. Műveletek képzése változatos módon és ezek tulajdonságainak vizsgálata

Nemcsak az alpműveletekkel lehet két számhoz valamilyen számot hozzárendelni. A következő szabályok maguk is egy-egy műveletnek tekinthetők:

6. FELADATLAP

1. Nézzük meg a következő táblázatokat!

Mi lehet a hozzárendelés szabálya, mit csinál a gép, ha A -t és B -t bedobva C -t adja ki? Fejezd be a táblázat kitöltését! Segítségül megadtuk a szabályokat, de nem a táblázatok sorrendjében.

$$\boxed{C = 2 \cdot A + B}; \quad \boxed{C = (A + 1) \cdot (B + 1)}; \quad \boxed{C = (AB) : 2}; \quad \boxed{C = A^2 + B};$$

$$\boxed{C \text{ értéke: } A \text{ és } B \text{ közül a nagyobb}}; \quad \boxed{C: A \text{ és } B \text{ számjegyei összegének a szorzata}}.$$

a) C értéke : A és B közül a nagyobb

A	3	11	3	345	111	0
B	5	2	7	354	10999	Bármely nem negatív szám
C	5	11	7	354	10999	0

b) $C = 2 \cdot A + B$

A	5	2	5	10	0	40
B	8	0	1	10	4	20
C	18	4	11	30	4	100

c) $C = (AB) : 2$

A	4	2	10	0	1	5
B	5	25	20	37	20	10
C	10	25	100	0	10	25

$$d) C = (A + 1) \cdot (B + 1)$$

A	4	9	0	3	5	8
B	9	9	5	10	3	5
C	50	100	6	44	24	54

$$e) C = A^2 + B$$

A	2	1	10	5	5	100
B	5	11	0	1	25	1 000
C	9	12	100	26	50	11 000

$$f) C : A \text{ és } B \text{ számjegyei összegének a szorzata}$$

A	100	9	111	13	123	20
B	200	70	101	45	456	Bármely szám, ha jegyeinek összege 5
C	2	63	6	36	90	10

2. Keress a műveletek között olyanokat, melyekben A és B felcserélésével ugyanazt az eredményt kapod!

- $C = (A \cdot B) : 2$
- $C = (A + 1) \cdot (B + 1)$
- $C : A$ és B számjegyei összegének a szorzata
- $C = 2 \cdot A + B$
- $C : A$ és B közül a nagyobb
- $C = A^2 + B$

A szabályok közül kommutatív az a), b), c) és az e).

A feladat egyrészt a művelet fogalmának általánosítását célozza, másrészt lehetővé teszi a kommutativitás fogalmának elmélyítését.

Néhány további műveletet találtunk ki. A műveleti jeleket önkényesen választottuk:

$A \downarrow B$ jelentse a két szám közül a nem nagyobbat,

$A \blacksquare B$ jelentse a két szám átlagát, azaz összegük felét,

$A \odot B$ jelentse az elsőnél 1-gyel nagyobb és a másodiknál 1-gyel kisebb szám szorzatát,

$A \nabla B$ jelentse A és B összegének és különbségének a szorzatát.

3. Számítsuk ki a következő műveletek eredményét:

$$16 \downarrow 10 = 10; \quad 5 \downarrow 5 = 5; \quad (6 \downarrow 2) \downarrow 10 = 2; \quad 6 \downarrow (2 \downarrow 10) =$$

2

$$16 \blacksquare 10 = 13; \quad 5 \blacksquare 5 = 5; \quad (6 \blacksquare 2) \blacksquare 10 = 7; \quad 6 \blacksquare (2 \blacksquare 10) = 6$$

$$16 \odot 10 = 153; \quad 5 \odot 5 = 24; \quad (4 \odot 3) \odot 2 = 11; \quad 4 \odot (3 \odot 2) =$$

15

$$16 \nabla 10 = 156; \quad 5 \nabla 5 = 0; \quad (4 \nabla 2) \nabla 1 = 143; \quad 4 \nabla (2 \nabla 1) =$$

7

Látható, hogy ezekben a műveletekben is alkalmazható zárójel. Ha kiszámoltad a műveleteket, megállapíthatod melyik felcserélhető, melyik csoportosítható.

Az $A \downarrow B$ és a $A \square B$ kommutatív, de csak a $A \downarrow B$ művelet asszociatív. A másik kettő se nem kommutatív, se nem asszociatív. Fontos, hogy legalább egy példán lássák, a kommutativitás és az asszociativitás nem feltételezi egymást, ahogy a számtani közép példáján láttuk. Tudatosítanunk kell a tanulóknak, hogy ezek a műveletek önkényesek, és ilyen műveleti jelekkel nem találkoznak szakirodalomban.

4. Állíts elő műveletsort az előző feladatban szereplő műveletekből. Alkalmazz zárójeleket is! Számold a zárójel elhagyásával is!

Biztassuk a tanulókat, hogy ezekből a műveletekből vagy általuk kitaláltakból újabb műveletsorokat állítsanak össze, számoljanak ki. A feladatok mind a kreativitást, mind a számolási készség fejlesztését, mind a művelet, műveleti tulajdonság fogalmának mélyítését szolgálhatja.

2. Összeadásból szorzás, szorzásból hatványozás és azon túl... (Az alpműveletek kiterjesztése a hatványozás felé (és azon túl), a hatványozás kommutativitásának és asszociativitásának vizsgálata)

A négyzetre emelés műveletével a négyzet területének kiszámításakor ismerkedtünk meg. Ez is egy adathoz rendel hozzá egy másikat, oly módon, hogy a bemenő adatot önmagával szorozzuk. Bármelyik számot megszorozhatjuk önmagával, egészet, törtet vagy negatív számot, bár utóbbi már nem lehet egy négyzet oldalának mérőszáma.

Van-e olyan művelet, amely a négyzet területéből adja meg az oldal hosszát? Rövidesen találkozhattok ilyennel is.

Az azonos tényezőjű szorzatok helyett egy új műveletet vezetünk be, a hatványozást. Hasonlóan jártunk el, mint amikor az azonos tagú összegek helyett a szorzást vezettük be.

$$9 + 9 + 9 = 9 \cdot 3$$

$$9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$$

Ha a műveleteket táblázatba foglaljuk, akkor a hatványozás már a 3. szintre kerül. Egyelőre még a párja, a gyökvonás hiányzik, de rövidesen megismerkedhettek vele.

^	√
·	÷
+	-

A hatványozás már nem alpművelet. Vizsgáljuk meg néhány tulajdonságát! Teljesül-e rá a felcserélhetőség tulajdonsága? Elég egy-két próbálkozás, hogy belássuk, erre a műveletre már nem teljesül,

$$a^b \neq b^a$$

5. Állapítsátok meg melyik hatvány a nagyobb?

$$2^7 > 7^2; \quad 3^5 > 5^3; \quad 4^8 > 8^4$$

Azt tapasztaljuk, hogy az alap és a kitevő felcserélése esetén általában a nagyobb kitevőhöz tartozik a nagyobb hatványérték. Számítógéppel további példákat is kereshettek, például:

$$13^{15} > 15^{13}$$

$$13^{15} \approx 5 \cdot 10^{16} \text{ és } 15^{13} \approx 2 \cdot 10^{15}$$

Ez a szabály azonban nem minden esetben igaz.

6. Keressetek olyan hatványokat, melyeknél az alap és a kitevő felcserélésével a nagyobb kitevőjű hatvány értéke lesz a kisebb.

Pozitív egész számok esetén csak a $2^3 < 3^2$, valamint az $n^1 > 1^n$ esetek szolgáltatnak ellenpéldát.

Nem kell sokat próbálkozni, hogy megtaláljátok azt az egyet, ahol az alap és a kitevő felcserélésével nem változik meg a hatványérték.

Az egyetlen példa a $2^4 = 4^2$

Érvényes-e a csoportosíthatóság a hatványozásra? Ha igen, akkor a következő két hatványnak egyenlőnek kellene lennie:

$$(2^3)^4 \text{ és } 2^{(3^4)}$$

Számoljuk ki:

$$2^3 = 8, \text{ tehát az első kifejezés: } 8^4 = 4096.$$

A jobb oldalon először a kitevőt kell kiszámítani: $3^4 = 81$, majd következne 2^{81} kiszámítása. Ez bizony már a számítógépet is próbára tevő feladat, mert a hatvány értéke:

$$2^{81} = 2\,417\,851\,639\,229\,258\,349\,412\,352$$

Elég meggyőző példa arra, hogy a hatványozás nem rendelkezik a csoportosíthatóság tulajdonságával.

Példánk azt is mutatja, hogy a hatvány hatványozásával – amennyiben a kitevőben kezdjük a műveletet – igen nagy számokhoz jutunk el. Például a következő hatvány

$$9^{9^9}$$

kiszámítása szinte megoldhatatlan feladat, mert az eredményt leíró szám **369 693 100 számjegyből áll!**

7. Próbáljuk meg kitalálni, mire végződik ez a gigantikus szám!

9 hatványainak számvégződése: 9, 1, 9, 1, ..., mivel 9^9 kitevője páratlan, ezért az eredeti alap kitevője is az, tehát az egyes helyi értékre 9 kerül.

Bár a tanulók könnyen rávágják a helyes eredményt, de indoklásuk nem feltétlenül helyes.

Megkérdezhetjük, mire végződik a 9^{8^7} .

Lehet-e további műveleteket kitalálni? Természetesen, csak a fantáziánk szabhat határokat. Emlékezték a magasabb rendű műveleteket hogyan származtattuk?

– Ismételt összeadásból kaptuk a szorzást: $9 + 9 + 9 = 9 \cdot 3$

– Az ismételt szorzásból pedig hatványozást: $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$

Ennek mintájára akár az ismételt hatványozásra is bevezethetünk új műveletet. Mi legyen a műveleti jel. A nagy számok megszállottjai erre is gondoltak és a következő rövidítést vezették be:

$$9^{9^9} = 9^{^3}$$

Az ilyen műveletek olyan számokhoz vezetnek, melyek messze meghaladják a világmindenségben előforduló összes atom számát. És ez a mintegy 400 millió jegyű szám semmiség ahhoz képest, amit a műveletben szereplő számok felcserélésével kapnánk. A $3^{^9}$

leírásához szükséges számjegyek kiszámítása is reménytelen feladat, pedig csak néhány 3-as számjegyet ültettünk egymás nyakába.

$$3^{3^{3^{3^{3^{3^3}}}}}$$

Ennek a játéknak a tárgyalását az indokolja, hogy a tanulók szinte önkéntelenül alkalmazzák az analógiát, mint gondolkodási műveletet. Számtalanszor tapasztaltam, hogy ők maguk fedezik fel ezt a műveletet, bár a következményekkel nem számolnak. Ha már megtették ezt a felfedezést, akkor mutassuk is be a következményét, még akkor is, ha öncélúnak tűnik ez a továbblépés. Másrészt sok tanulót (és felnőttet) vonzanak a hatalmas számok. Itt egy egyszerű művelettel juthatnak akkora számok világába, melyek elképzelhetetlen nagyságrendűek, túlhaladnak minden materiális mérhető mennyiséget, mégis végesnek tekintendők. Ha a végtelenről beszélünk, megmutathatjuk, hogy ezek a számok is végesek, a végtelen egy más kategória.

3. A műveleti tulajdonságok kapcsán fej- és írásbeli számolás a természetes számok körében

7. FELADATLAP

FEJSZÁMOLÁS

1. Példák összeadásra:

Az összeadás mely tulajdonságai segíthetik az eredmény kiszámítását?

- a) $234 + 432 = 666$
- b) $432 + 234 = 666$
- c) $532 + 134 = 666$
- d) $350 + 199 + 450 + 201 = (350 + 450) + (199 + 201) = 1200$
- e) $300 + 30\ 000 + 3 + 300\ 000 + 30 + 3\ 000\ 000 + 3\ 000 + 6\ 666\ 666 = 9\ 999\ 999$
- f) $10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 = 4 \cdot 100 + 50 = 450$
- g) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 97 + 98 + 99 = 1 + 99 + 2 + 98 + \dots = 100 \cdot 49 + 50 = 4950$

2. Példák kivonásra:

- a) $10\ 001 - 7 = 9994$
- b) $23\ 675 - 680 = 22\ 995$
- c) $11\ 111 - 11\ 011 = 100$
- d) $123\ 456 - 100\ 000 - 20\ 000 - 3\ 000 - 400 - 50 = 6$
- e) $123\ 456 - (100\ 000 - 20\ 000 - 3\ 000 - 400 - 50) = 46\ 906$

3. Példák szorzásra!

Mely műveleti tulajdonságok segíthettek a szorzások elvégzésénél?

- a) $3412 \cdot 2 = 6824$
- b) $2 \cdot 3412 = 6824$
- c) $225 \cdot 2 \cdot 2 = 900$
- d) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 475 = 3800$
- e) $4 \cdot 800 \cdot 25 \cdot 50 = 4\ 000\ 000$
- f) $450 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 5000 \cdot 2 = 0$
- g) $55 \cdot 8 = 440$
- h) $175 \cdot 16 = 2800$
- i) $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 = 256$
- j) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 10\ 000$

- a) és b): a szorzás kommutativitása
- c) és d): duplázások kétszer, illetve háromszor
- e) és j): csoportosítás

f): 0 az egyik tényező

g), h), i): duplázások, mivel 2 hatványaival szorzunk

4. Példák osztásra:

a) $144 : 4 = 36$

b) $4400 : 16 = 275$

c) $100\,000 : 8 = 12\,500$

d) $56 : 7 = 8$

e) $5600 : 7 = 800$

f) $560 : 70 = 8$

g) $56 : 70 = 0,8$

a, b, c: felezésekkel (is) számolhatunk, hiszen 2 hatványával osztunk

e, f, g: a d eredményéből kiindulva a hányados változásait használjuk ki.

5. Számítsd ki! (Ügyelj a sorrendre!)

a) $10 - 9 + 8 - 7 + 6 - 5 + 4 - 3 + 2 - 1 = (10 - 9) + (8 - 7) + (6 - 5) + (4 - 3) + (2 - 1) = 5$

b) $100 - 99 + 98 - 97 + 96 - \dots - 3 + 2 - 1 = 50$

c) $(10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) : (5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10 = 240$

d) $1000 - 25 \cdot 8 + 37 \cdot (45 - 15 \cdot 3) = 1000 - 200 + 0 = 800$

ÍRÁSBELI MŰVELETEK

Az írásbeli műveletek gyakorlásának egyhangúságát és a könnyebb ellenőrzést is segítik a sajátos eredmények. Ha túl vagyunk a gyakorláson, azt is megkérdezhetjük, hogy sikerült ilyen eredményekre vezető feladatokat készíteni.

6. A tanult módon jegyezd le a számokat és végezd el a műveleteket!

a) $18\,693 + 222\,222 + 6\,178\,839 + 1\,234\,567 = 7\,654\,321$

b) $654\,321 + 456\,790 + 123\,456 = 1\,234\,567$

c) $3\,688\,214 - 2\,453\,647 = 1\,234\,567$

d) $9\,526\,969 - 1\,872\,648 = 7\,654\,321$

e) $1\,279\,463 - 723\,908 = 555\,555$

f) $617 \cdot 40 = 24\,680$

g) $367 \cdot 37 = 13\,579$

h) $402\,859 \cdot 19 = 7\,654\,321$

i) $9721 \cdot 127 = 1\,234\,567$

j) $172\,205 : 31 = 5\,555$

k) $96\,252 : 78 = 1\,234$

l) $298\,845 : 29 = 10\,305$

7. Ha ügyesen számolsz, mindegyik eredményben találhatsz érdekességet.

a) $11826^2 = 139\,854\,276$

$30384^2 = 923\,187\,456$

b) $32043^2 = 1\,026\,753\,849$

$99066^2 = 9\,814\,072\,356$

Figyeld meg, hány jegyű az eredmény és milyen számjegyek szerepelnek benne!

Az első két szám négyzete 9 jegyű és ezekben a számokban minden számjegy előfordul 1–9-ig.

A második két szám négyzete 10 jegyű és ezekben a számokban minden számjegy előfordul.

c) $10^2 + 100^2 = 10\ 100$

d) $88^2 + 33^2 = 8833$

e) $12^2 + 33^2 = 1233$

Ha észrevetted az összegek és a tagok közti kapcsolatot, akkor jósold meg a következő feladat eredményét, majd zsebszámológéppel ellenőrizd a sejtésedet!

A két hatvány összegét kivételes módon úgy kaphatjuk, ha az alapokat egymás mellé írjuk.

f) $588^2 + 2353^2 = 5\ 882\ 353$

Ez is egy kivételes eset, érdekességként mutatható be.

Hogyan igazolhatnád könnyen, hogy ez a szabály nem érvényes minden esetre? (Ellenkezőleg, kivételes ritkaságnak számít).

Mi lenne az eredmény, ha felcserélnéd a tagokat?

Ha felcserélnénk a két tagot, az összeg nem változna, de ha a szabály általános lenne, akkor más eredményt kellene kapni.

g) Ha jól számolsz, hasonló érdekességet tapasztalsz!

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$$

$$3^3 + 7^3 + 1^3 = 371$$

$$4^3 + 0^3 + 7^3 = 407$$

V. Felmérő

A felmérő feladatlap megírása

A felmérő a továbbhaladáshoz szükséges ismereteket méri. Erősebb/több órában tanuló csoportban összetettebb feladatokkal is érdemes mérni a gyerekek tudását.

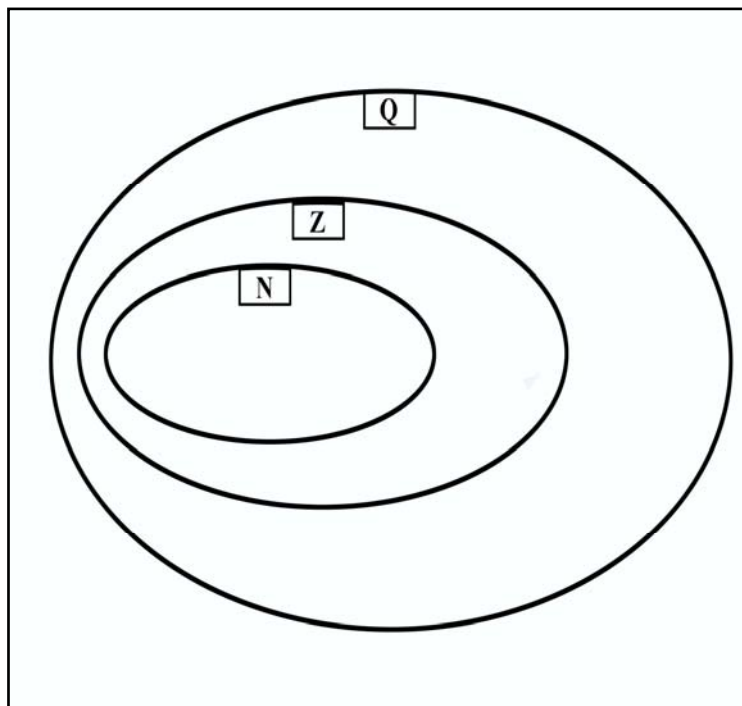
FELMÉRŐ

Név: _____

7. évfolyam, Számok és műveletek

A CSOPORT

1. Helyezd el a következő számokat a halmazábrába!



$$\frac{2}{3}; -23; 0; 300\%; 12,34;$$

$$\frac{-12}{4}; 0,00001; 1\frac{2}{9}; 55\%$$

N: Természetes számok**Z:** Egész számok**Q:** Racionális számok

2. Töltsd ki a táblázat üres helyeit!

Betűkkel	Számmal	Normál alakban	Helyi értékes összegalakban	Szoratként, legalább két tényezővel
Ötezer-ötszáz				
		$2,04 \cdot 10^3$		
			$3 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4$	
				$25 \cdot 8 \cdot 15$

3. A megfelelő számmal, vagy számokkal válaszolj!

- a) Melyik szám ellentettje a -20 ?
- b) Melyik szám abszolút értéke a $4,5$?
- c) Melyik szám ellentettjének az ellentettje a 100 ?
- d) Melyik szám abszolút értéke a -15 ?
- e) Melyik számnak nincs reciproka?

4. Írd át tizedes törtté a törteket! A végtelen tizedes törtet jelöld a megismert módon!

$$\frac{12}{5} =$$

$$\frac{9}{11} =$$

5.

- a) Mennyi a 200 -nak a 40% -a?
- b) Melyik számnak a 40% -a a 20 ?

6. Végezd el a műveleteket!

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} =$$

$$0,099 - 0,99 =$$

$$1\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{9} =$$

$$0,18 : 1,2 =$$

7. Végezd el a műveleteket! Ügyelj a sorrendre!

$$50 - 2 \cdot 3^2 =$$

$$(50 - 2) \cdot 3^2 =$$

$$50 - (2 \cdot 3)^2 =$$

$$(50 - 2 \cdot 3)^2 =$$

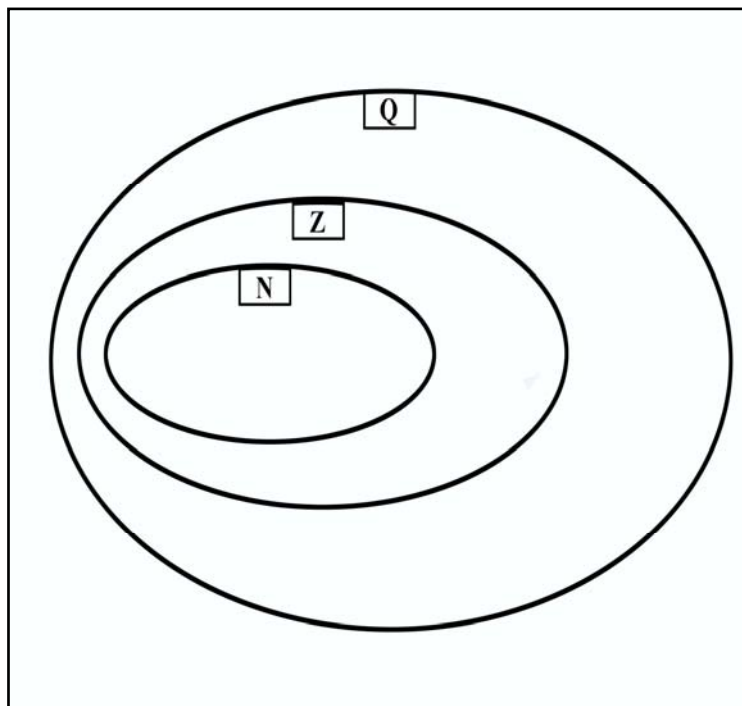
FELMÉRŐ

Név: _____

7. évfolyam, Számok és műveletek

B CSOPORT

1. Helyezd el a következő számokat a halmazábrába!


 $-18; 200\%; 3\frac{2}{3}; 21,15; 0;$
 $\frac{24}{8}; 16\%; \frac{4}{5}; -0,0002$

N: Természetes számok

Z: Egész számok

Q: Racionális számok

2. Töltsd ki a táblázat üres helyeit!

Betűkkel	Számmal	Normál alakban	Helyi értékes összegalakban	Szorzatként, legalább két tényezővel
Nyolcszáznégy				
		$6,05 \cdot 10^4$		
			$2 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^1$	
				$16 \cdot 30 \cdot 125$

3. A megfelelő számmal, vagy számokkal válaszolj!

- a) Melyik szám ellentettje a 25?
- b) Melyik szám abszolút értéke a 0,123?
- c) Melyik szám ellentettjének az ellentettje a -3 ?
- d) Melyik szám kisebb, mint az abszolút értéke?
- e) Melyik számnak a reciproka a 2,5?

4. Írd át tizedes törtté a törteket! A végtelen tizedes törtet jelöld a megismert módon!

$$\frac{15}{12} =$$

$$\frac{7}{99} =$$

5.

- a) Mennyi a 30-nak a 60%-a?
- b) Melyik számnak a 30%-a a 60?

6. Végezd el a műveleteket!

$$\frac{2}{5} + \frac{5}{8} =$$

$$0,19 - 1,9 =$$

$$3\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{16} =$$

$$0,3 : 2,4 =$$

7. Végezd el a műveleteket! Ügyelj a sorrendre!

$$(-50) + 2 \cdot 3^2 =$$

$$(-50) + (2 \cdot 3)^2 =$$

$$[(-50) + 2] \cdot 3^2 =$$

$$[(-50) + 2 \cdot 3]^2 =$$

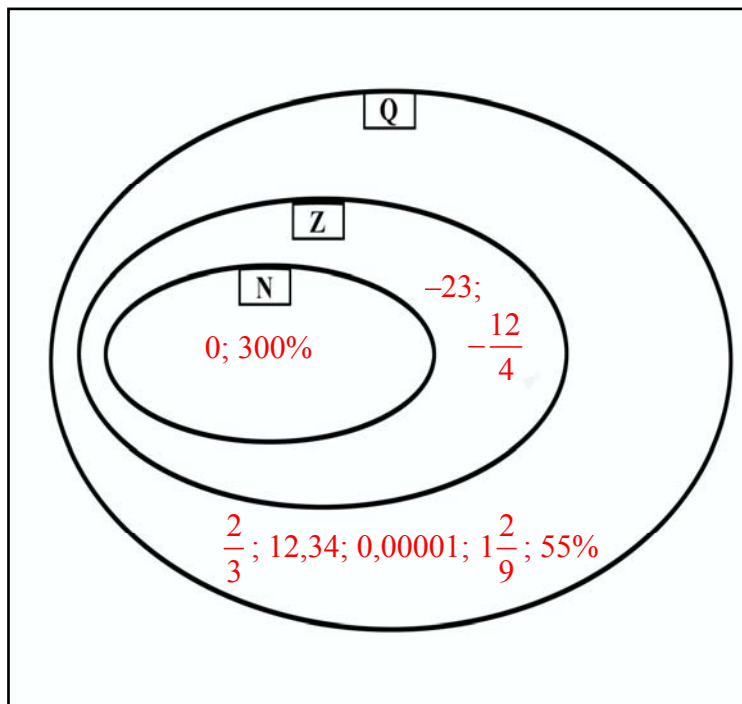
FELMÉRŐ (MEGOLDÁSOK)

Név: _____

7. évfolyam, Számok és műveletek

A CSOPORT

1. Helyezd el a következő számokat a halmazábrába!



$$\frac{2}{3}; -23; 0; 300\%; 12,34;$$

$$-\frac{12}{4}; 0,00001; 1\frac{2}{9}; 55\%$$

N: Természetes számok

Z: Egész számok

Q: Racionális számok

9 pont

2. Töltsd ki a táblázat üres helyeit!

Betűkkel	Számmal	Normál alakban	Helyi értékes összegalakban	Szoratként, legalább két tényezővel
Ötezer-ötszáz	5500	$5,5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 0^3 + 5 \cdot 10^2$	Pl.: $5 \cdot 11 \cdot 100$
Kétezer-negyven	2040	$2,04 \cdot 10^3$	$2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0 \cdot 10^1$	Pl.: $5 \cdot 8 \cdot 51$
Háromszázhatvanezer	360 000	$3,6 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4$	Pl.: $25 \cdot 400 \cdot 36$
Hárromezer	3000	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$25 \cdot 8 \cdot 15$

16 pont

3. A megfelelő számmal, vagy számokkal válaszolj!

- a) Melyik szám ellentettje a -20 ? 20
- b) Melyik szám abszolút értéke a $4,5$? 4,5 ; $-4,5$
- c) Melyik szám ellentettjének az ellentettje a 100 ? 100
- d) Melyik szám abszolút értéke a -15 ? Nincs ilyen szám.
- e) Melyik számnak nincs reciproka? Nulla.

Kérdésenként a helyes válasz 2 pont: **10 pont**

4. Írd át tizedes törtté a törtet! A végtelen tizedes törtet jelöld a megismert módon!

$$\frac{12}{5} = 2,4;$$

$$\frac{9}{11} = 0,818181\dots = 0,8\dot{1}$$

Az első tört átírásáért 2 pont, a másodikért 3 pont: **5 pont**

5.

- a) Mennyi a 200-nak a 40%-a? 80
A jó eredmény 2 pont, minden jó kiszámítási mód 2 pont: **4 pont**
- b) Melyik számnak a 40%-a a 20? 50-nek
A jó eredmény 3 pont, minden jó kiszámítási mód 3 pont: **6 pont**

6. Végezd el a műveleteket!

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$$

$$0,099 - 0,99 = -(0,990 - 0,099) = -0,891$$

$$1\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9} = 1$$

$$0,18 : 1,2 = 1,8 : 12 = 0,15$$

Minden jó eredmény 3 pont: **12 pont**

7. Végezd el a műveleteket! Ügyelj a sorrendre!

$$50 - 2 \cdot 3^2 = 50 - 18 = 32$$

$$(50 - 2) \cdot 3^2 = 48 \cdot 9 = 432$$

$$50 - (2 \cdot 3)^2 = 50 - 6^2 = 14$$

$$(50 - 2 \cdot 3)^2 = 44^2 = 1936$$

Mindegyik számításban a jó műveleti sorrend 2 pont, és minden jó eredmény 2 pont: **16 pont**

Elérhető: **78 pont**

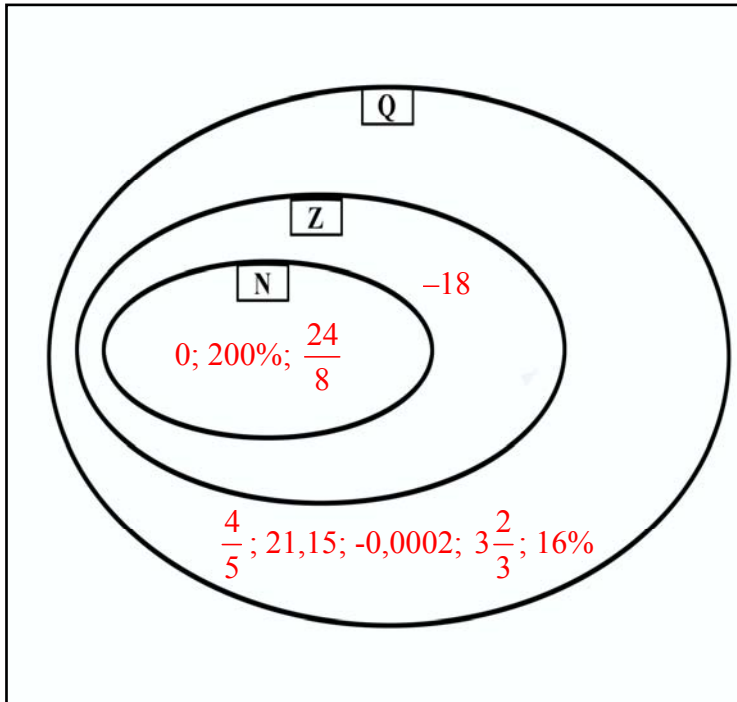
FELMÉRŐ (MEGOLDÁSOK)

Név: _____

7. évfolyam, Számok és műveletek

B CSOPORT

1. Helyezd el a következő számokat a halmazábrába!


 $-18; 200\%; 3\frac{2}{3}; 21,15; 0;$
 $\frac{24}{8}; 16\%; \frac{4}{5}; -0,0002$

N: Természetes számok

Z: Egész számok

Q: Racionális számok

9 pont

2. Töltsd ki a táblázat üres helyeit!

Betűkkel	Számmal	Normál alakban	Helyi értékes összegalakban	Szorzatként, legalább két tényezővel
Nyolcszáznégy	804	$8,04 \cdot 10^2$	$8 \cdot 10^2 + 4$	Pl.: $67 \cdot 3 \cdot 4$
Hatvanezer-ötszáz	60 500	$6,05 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^2$	Pl.: $121 \cdot 4 \cdot 125$
Húszezer-hatvan	20 060	$2,006 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^1$	Pl.: $2 \cdot 1003 \cdot 10$
Hatvanezer	60 000	$6 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^4$	$16 \cdot 30 \cdot 125$

16 pont

3. A megfelelő számmal, vagy számokkal válaszolj!

- a) Melyik szám ellentettje a 25? -25
- b) Melyik szám abszolút értéke a 0,123? 0,123 és -0,123
- c) Melyik szám ellentettjének az ellentettje a -3? -3
- d) Melyik szám kisebb, mint az abszolút értéke? Minden negatív szám
- e) Melyik számnak a reciproka a 2,5? $\frac{2}{5}$

Kérdésenként a helyes válasz 2 pont: **10 pont**

4. Írd át tizedes törtté a törteket! A végtelen tizedes törtet jelöld a megismert módon!

$$\frac{15}{12} = 1,25$$

$$\frac{7}{99} = 0,0707\dots = 0,0\dot{7}$$

Az első tört átírásáért 2 pont, a másodikért 3 pont: **5 pont**

5.

- a) Mennyi a 30-nak a 60%-a? 18
A jó eredmény 2 pont, minden jó kiszámítási mód 2 pont: **4 pont**
- b) Melyik számnak a 30%-a a 60? 200
A jó eredmény 3 pont, minden jó kiszámítási mód 3 pont: **6 pont**

6. Végezd el a műveleteket!

$$\frac{2}{5} + \frac{5}{8} = \frac{16}{40} + \frac{25}{40} = \frac{41}{40}$$

$$0,19 - 1,9 = -(1,90 - 0,19) = -1,71$$

$$3\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{16} = \frac{16}{5} \cdot \frac{5}{16} = 1$$

$$0,3 : 2,4 = 3 : 24 = 0,125$$

Minden jó eredmény 3 pont: **12 pont**

7. Végezd el a műveleteket! Ügyelj a sorrendre!

$$(-50) + 2 \cdot 3^2 = -50 + 18 = -32$$

$$(-50) + (2 \cdot 3)^2 = -50 + 36 = -14$$

$$[(-50) + 2] \cdot 3^2 = -48 \cdot 9 = -432$$

$$[(-50) + 2 \cdot 3]^2 = (-44)^2 = 1936$$

Mindegyik számításban a jó műveleti sorrend 2 pont, és minden jó eredmény 2 pont: **16 pont**

Elérhető: **78 pont**