0713. MODUL

SZÁMOK ÉS MŰVELETEK

Racionális számok

KÉSZÍTETTE: TÓTH LÁSZLÓ, SZEREDI ÉVA

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A különböző számok és írásmódjuk, számkörök ismétlése, rendszerezése, speciális elemek szerepe a számkörökön belül.
Időkeret	6 óra
Ajánlott korosztály	12-13 évesek, 7. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Alapműveletek, hatványozás, műveleti tulajdonságok, algebra, számelmélet
A képességfejlesztés fókuszai	Számlálás, számolás: matematikatörténeti kitekintés kapcsán a számlálás és számolás történetének egyes fejezetei Szövegesfeladat-megoldás, problémamegoldás, metakognició: egyenlet és feladat közti kapcsolat keresése, nyitott mondatok megoldásának értelmezése Rendszerezés, kombinativitás: Nyitott mondatok megoldáshalmazai, intervallumok egymáshoz való viszonya, az egész számok és racionális számok sokféle alakja.

AJÁNLÁS

A modul (nem háttéranyag része) viszonylag kevés új ismeretet tartalmaz, inkább szintetizáló jellegű. Fő feladata a számkörök bővítésének megértetése, a matematikai szemlélet fejlesztése az egyes halmazok összehasonlítása, párhuzamba állítása. Ennek kapcsán változatos gondolkodási módszerek fejlesztésére nyílik lehetőség. Fontos tevékenység a konkrétumokból kiinduló általánosítás és ennek kapcsán bizonyos algebrai ismeretek megalapozása. A háttéranyagok jó lehetőséget adnak a tanítási órákon való differenciálásra, az órán elkezdett gondolatok szakkörön történő továbbgondolására.
A feladatok megoldását helyenként nem jelöltük pirossal, hanem szürke háttérben a módszertani megfontolásokkal együtt adtuk meg.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Feladatlapok, feladatgyűjtemény.

ÉRTÉKELÉS

A gyerekek munkájának folyamatos megfigyelése, szóbeli értékelése.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. A számok és a számírás történetének áttekintése, számok különböző írásmódja			
1.	Számok a régmúlt időkben – olvasmányok feldolgozása	Szövegértés lényegkiemelés, emlékezet	1. feladatlap
2.	Római és arab számok	Szabálykövetés, összefüggés-felismerés	2. feladatlap
3.	A helyiértékes írásmód	Összefüggés-felismerés, összességlátás	3. feladatlap
4.	Nem tízes alapú számrendszerek – háttéranyag	Analogikus gondolkodás, dedukció	4. feladatlap
5.	Ugyanannak a számnak különböző írásmódjai: összeg, szorzat, normálalak, hatvány, más számrendszer	Összefüggés-felismerés, összességlátás	5. feladatlap
6.	Műveletek különböző alakban írt számokkal, optimális alak kiválasztása	Lényegkiemelés, ismeretek alkalmazása	6. feladatlap
7.	Számok nagyság szerinti rendezése különböző alakokban		7. feladatlap
II. A természetes számok			
1.	A természetes számok fogalma	Azonosságok és különbözőségek kiemelése	8. feladatlap
2.	Mely műveletekre zárt a természetes számkör?	Változások megállapítása	
3.	Mely műveletek vezetnek ki és milyen feltételekkel a természetes számkörből?	Összefüggés-felismerés	
4.	Szöveges feladatok felírása nyitott mondatokkal, a megoldások értelmezése		
5.	Különböző sorozatok képzése természetes számokkal, a Pascal-háromszög	Számolási készség természetes számokkal	9. feladatlap
6.	A Collatz-probléma tárgyalása a természetes számok körében	Számolási készség természetes számokkal	9. feladatlap 5.
7.	Számolási gyakorlatok	Számolási készség	10. feladatlap

III. Az egész számok			
1.	Kivonással a negatív számok világába	Elemi halmazműveletek, halmazok egyesítése, különbsége	
2.	Számok ellentettje, számok abszolút értéke	Egyszerű állítások igazságának eldöntése; a nyelv logikai elemeinek helyes használata matematikai állítások értelmezésében	11. feladatlap
3.	Változatos feladatok a fogalmak elmélyítésére, a műveletek értelmezésére		12. és 13. feladatlap
4.	Alapműveletek értelmezése	Számolási készség egész számokkal	14. feladatlap 1-3
5.	Többtagú összegek, összevonás	Szabályok alkalmazása	14. feladatlap 4-8
6.	Többtényezős szorzatok, hatványozás	Számolási készség	14. feladatlap 9.10.
7.	Több műveletet tartalmazó kifejezések, műveleti sorrend, zárójelek szerepe	Számolási készség	14. feladatlap 11.

IV. A törtek			
1.	Osztással a tört számok világába	A tanult fogalmak és eljárások eszközként való használata	15. feladatlap 1.
2.	Számok reciproka, reciprok szám párok tulajdonsága	Szabályszerűségek észrevételezése, ellenpéldák a cáfolásban	15. feladatlap 2-5.
3.	Reciprok és ellentett szám párok párhuzamba állítása	Kapcsolatok felismerése, analógia	15. feladatlap 6.

V. Műveletek a racionális számkörben			
1.	A törttel való szorzás és osztás értelmezésének felelevenítése; a százalék, mint a tört lehetséges írásmódja		16. feladatlap 1,2
2.	A négy alapművelet racionális számkörben történő elvégzésére szolgáló gyakorló feladatok		16. feladatlap 3-5.
3.	A racionális számok halmaza, tulajdonságai, összevetésük az egész számokkal		17. feladatlap

VI. A racionális számok és azokon is túl			
1.	Véges és végtelen szakaszos tizedes törtek – racionális számok tizedes tört alakja		18. feladatlap
2.	Tizedes törtek – végtelenek is – nagyság szerinti rendezése		19. feladatlap
3.	Véges tizedes törtek tört alakja		
4.	Példák nem racionális számokra		20. feladatlap
5.	Racionális számok és a számegyenes intervallumai	Irracionális számok előállítása gondolati úton, változatos műveletekkel Korábbi gondolatmenetek analógiájával a számegyenes „benépesítése” valós számokkal	21. feladatlap
6.	Végtelen nem szakaszos tizedes törtek és az irracionális szám		
7.	Irracionális számok a racionális számok között – a valós számok halmaza		
8.	Példák konkrét irracionális számokra		

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. A számok és a számírás történetének áttekintése, számok különböző írásmódja

„A hinduktól jutott el hozzánk az a csodálatos számírási rendszer, amelyben minden szám felírható tíz jeggyel azáltal, hogy minden jelnek alaki- és helyiértéket tulajdonít. Ez a nagy jelentőségű és zseniális módszer olyan egyszerűnek tűnik, hogy emiatt fel sem tudjuk fogni igazán a nagyszerűségét. De éppen egyszerűsége és a műveletek nagyon könnyű elvégezhetősége helyezi ezt az aritmetikai rendszert a leghasznosabb felfedezések sorába. Hogy milyen nehéz lehetett egy ilyen módszer felfedezése, arra következtethetünk abból a tényből, hogy az ókor két legnagyobb elméjének: Arkhimédésznek és Apollóniosznak a zsenije sem jutott el a helyiértékes számírási rendszer felfedezéséig.”

Laplace

1. Számok a régmúlt időkben – olvasmányok feldolgozásai

Ennek az órának az anyaga nagyon nagy, ugyanakkor rengeteg érdekes, hasznos információt tartalmaz, nagyon alkalmas a gyerekek érdeklődésének felkeltésére, ismereteik mélyítésére. Csak kis része nélkülözhetetlenül fontos, a többit kiadhatjuk otthoni munkára is. Önállóan, vagy csoportosan vállalhatják a gyerekek az itt leírtak egy-egy részének feldolgozását. Kiselőadást tarthatnak, esetleg a csoportok plakátot készíthetnek, amit zsűrizhetünk, ….
A kulcsfontosságúnak bejelölt részeket azonban mindenképpen alaposan fel kell dolgoznunk.

Ma természetesnek vesszük, hogy a számokkal, mennyiségekkel kapcsolatban egy mindenki számára érthető írásmódot alkalmazunk, ami – ellentétben a beszélt nyelvvel – szinte valamennyi nép számára érthető. A „kétszer kettő egyenlő négy” hangalak csak mintegy 15 millió – a magyar nyelvet értő – ember számára mond valamit, de ha ugyanezt a számok nyelvén írjuk le:

$2 \cdot 2 = 4$

akkor ez szinte mindenki számára érthető lesz. Ugyanez vonatkozik például a százhuszonháromezer-négyszázötvenhat számra, melyet igen változatos hangalakkal ejtenének különböző nyelveken, de leírva

123 456

már mindenki számára ugyanazt a számot jelenti, sőt nem egy tulajdonságát is kiolvashatja belőle. Meglepő módon a nem is olyan távoli múltban ez az igen egyszerű írásmód egyáltalán nem volt ismert, miközben a korok nagy matematikusai már igen magas szintű felfedezéseket tettek a matematika világában.

Kutassák fel a tanulók a leírt számot minél változatosabb nyelveken, fedezzék fel a szám írásának logikájában a különbségeket, például a német, angol és magyar nyelvekben.

Menjünk most vissza sok-sok évezredet visszalapozva a történelem kezdeti időszakába!
Mi lehetett az első matematikára utaló tevékenysége őseinknek?

Feltétlenül a számlálás (megszámolás) műveletére tereljük a szót, megszámlálhatták a törzs tagjait, az elejtett állatokat, az égen a fényesebb csillagokat, két esemény közt eltelt napokat (pl. két telihold között), vagy a lépések számát, amivel távolságot mérhettek.

Hogyan jegyezhetők le a számok számjegyek nélkül?

Igen változatos ötletekkel állhatnak elő a tanulók. Ne korlátozzuk őket, de ragaszkodjunk hozzá, hogy rendszerüket érthetően el tudják magyarázni. Valószínűleg a számjegyek helyett valamilyen szimbólumot használnak (pont, vonal, nyíl…, és esetleg a csoportosítás eszköze is felbukkanhat, mert ezek nélkül nehéz lenne nagyobb számokat lejegyezni. Használhatják a betűket – görögöket – is. Ne feledkezzenek meg a legegyszerűbb – mindig kéznél lévő – eszközről, az ujjaikról. Próbáljanak szisztémát kitalálni, amivel 10-nél nagyobb számokat is fel tudnak mutatni. Egy-egy jól sikerült rendszert bemutatva kérjük meg a ötletadót, hogy jegyezzen le a rendszerével általunk megadott számot, vagy a gyerekek fejtsék meg mennyit is ér néhány, az ő rendszerében ábrázolt szám. Olvassák el az 1. feladatlap olvasmányait, majd válaszoljanak a kérdésekre!
Az olvasmányok feldolgozását szakértői mozaik módszerével javasoljuk.

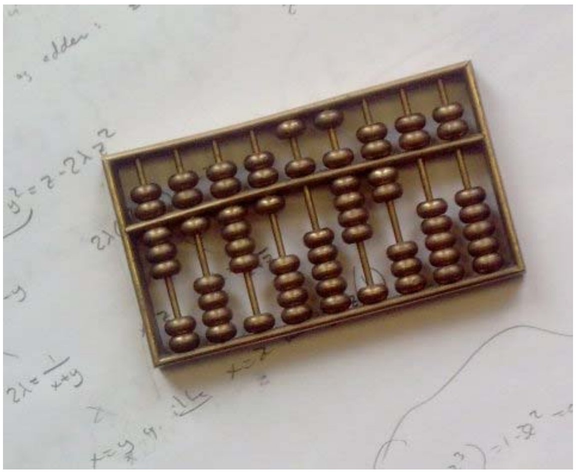
1. FELADATLAP

1. A szemelvények elolvasása után válaszoljatok a kérdésekre!

A csoport:

Az ősember – kézenfekvő módon – az ujjait használta a számoláshoz. Az ujj latin neve digitus, innen származik a számjegy angol neve a **digit**. A nagyobb számok megjelenítéséhez már köveket rakosgattak edényekbe, vagy csomókat kötöttek bõrcsíkokra. A kapott eredményeket a barlang falába, falapokra vagy csontba faragva rögzítették. A túl sok kő és csomó kezelése persze nehézkes volt, ezért kitalálták az átváltásos számábrázolást. Eleinte a hatvanas számrendszer alakult ki (Mezopotámia), a tizenkettes (angolszász népek), valamint a tízes (rómaiak).

Az alapműveletek egyik első ismert eszköze a világ szinte minden táján 3-4 ezer éve különböző formában feltűnő abakusz volt. Alapváltozatában vágatokba helyezett apró kövekből állt. A kövecske latin neve calculus. Innen származik a mai kalkulátor szó. Az abakuszt golyós számolótáblává tökéletesítve a XVI. századig, mint fő számolást segítő eszközt használták, és egyetemeken tanították a vele végzett szorzást és osztást. Az abakuszt némileg módosítva mind a mai napig használják Oroszországban, Kínában és Japánban.



a) Honnan származik a számítástechnikában alapfogalomnak számító digit és digitális elnevezés?
Az ujj latin neve digitus, innen származik a számjegy angol neve: digit. Tehát a digitális számítógép első tagja az ujjakon történő számolásból eredeztethető.

b) Mely népek milyen számrendszert alkalmaztak?
Eleinte a hatvanas számrendszer alakult ki (Mezopotámiában), a tizenkettes (angolszász népeknél), valamint a tízes (rómaiaknál).
A hatvanas számrendszer nyomai az idő és szögmérés mértékegységeinél lelhető fel. A tizenkettes részben az idő, részben bizonyos nyelvekben mutatható ki, ahol a számoknak nem 10-ig, hanem 12-ig van külön neve (például a német vagy az angol nyelvben)

c) Milyen ősi, de máig is használatos számolóeszköz segítette a számolást?
Az alapműveletek egyik első ismert eszköze a világ szinte minden táján 3-4 ezer éve különböző formában feltűnő abakusz volt. Alapváltozatában vágatokba helyezett apró kövekből állt. A kövecske latin neve calculus. Innen származik a mai kalkulátor szó.

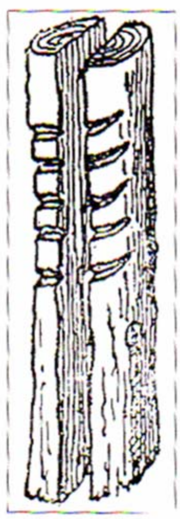
d) Hol használnak ilyen eszközöket napjainkban is?
Az abakuszt némileg módosítva mind a mai napig használják Oroszországban, Kínában és Japánban.

e) Váltsátok át a 11 óra 11 perc 11 másodpercet másodpercekre!
11:11:11 = ……… másodperc
$11 \cdot 60 \cdot 60 + 11 \cdot 60 + 11 = 40\,271$ másodperc

f) Váltsátok át a 11 111 másodpercet óra : perc : másodperc alakra!
11 111 másodperc = … : … : …
Használhattok kalkulátort! Melyik feladat volt az egyszerűbb?
11 111 s = 3:05:11, aminek a kiszámítása nem is egyszerű, de bizonyos számológépek ismerik ezt a funkciót. Ha ilyennel találkozunk, mutassuk ezt be. Az utóbbi két számítás lényegében átszámítás 60-as számrendszerből illetve 60-as számrendszerbe, amire későbbiekben is hivatkozhatunk.

B csoport:

A számfogalom kialakulása a számlálással kezdődött. Már az őskorban is könnyedén számon tartotta a juhász a juhait, pedig még húszig sem tudott számlálni! Hogyan? Egyszerűen! Reggel, amikor az akolból egyenként engedte ki a juhokat, minden juh kiengedésekor egy kavicsot dobott az ajtó melletti gödörbe. Este pedig, amikor egyesével engedte be az akolba az állatokat, minden juh beengedésekor kivett egy kavicsot a gödörből. Ha az összes megérkezett juh beengedése után is maradt még kavics a gödörben, akkor tudta, hogy hány elbitangolt juh keresésére kell indulnia, ha pedig a kavicsok hamarabb fogytak el, mint a juhok, akkor tudta, hogy mennyi az aznapi szaporulat.



A legrégibb „számírással" az úgynevezett rovásfákon találkozunk. Amikor a juhász átvette a gazdától a juhnyájat, akkor egy pálcára vésték be vonalakkal (rovásokkal), hogy hány anyajuh és hány kos van a nyájban. Majd a rováspálcát hosszában kettéhasították, az egyik fele maradt a gazdánál, a másik fele lett a juhászé. Így utólagos változtatásról, hamisításról szó sem lehetett. Természetesen egész nyáron a juhász is rováspálcákon tartotta számon az állományt, a megszülető kisbárányokat és külön rováspálcán az elhullott juhokat. Mind a mai napig őrzi ezt az eljárásmódot a nyelvünk: „Dögrovásra jutott." Ősszel azután, „számadáskor", nem volt gondja a számadó juhásznak, mert az eredeti rováspálca adatai, valamint saját rováspálcáinak adatai alapján el tudott a gazdának számolni a juhokkal, s megkaphatta a megszolgált bérét.

Hazánkban még a múlt században is sok helyütt az ivóban bevésett rovásokkal tartotta számon a csapos, hogy ki mennyit fogyasztott: „Sok van már a rovásodon!"

a) Hogyan tarthatta számon a juhász a nyáj számának változását anélkül, hogy számszerűen tudta, mennyi jószága volt?
Amikor az akolból egyenként engedte ki a juhokat, minden juh kiengedésekor egy kavicsot dobott az ajtó melletti gödörbe. Este pedig, amikor egyesével engedte be az akolba az állatokat, minden juh beengedésekor kivett egy kavicsot a gödörből. Ha az összes megérkezett juh beengedése után is maradt még kavics a gödörben, akkor tudta, hogy hány elbitangolt juh

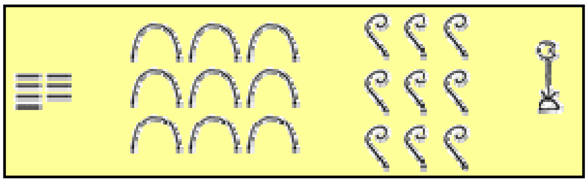
keresésére kell indulnia, ha pedig a kavicsok hamarabb fogytak el, mint a juhok, akkor tudta, hogy mennyi volt az aznapi szaporulat.

b) Mi volt a számírás legősibb, legkezdetlegesebb módja?
A legrégibb „számírással" az úgynevezett rovásfákon találkozunk. Amikor a juhász átvette a gazdától a juhnyájat, akkor egy pálcára vésték be vonalakkal (rovásokkal), hogy hány anyajuh és hány kos van a nyájban. Majd a rováspálcát hosszában kettéhasították, az egyik fele maradt a gazdánál, a másik fele lett a juhászé. Így utólagos változtatásról, hamisításról szó sem lehetett.

c) Honnan ered, mire utal a nyelvben meghonosodott „Dögrovásra jutott", illetve „Sok van már a rovásodon!" kifejezés?
A juhász külön rováspálcán tartotta számon az elhullott juhokat. Mind a mai napig őrzi ezt az eljárásmódot a nyelvünk: „Dögrovásra jutott."
Hazánkban még a múlt században is sok helyütt az ivóban bevésett rovásokkal tartotta számon a csapos, hogy ki mennyit fogyasztott: „Sok van már a rovásodon!"

d) A köznapi életben hol alkalmazzuk a rovásírásra emlékeztető írást?
Megszámláláskor gyakran húzunk kis függőleges vonalakat, amiket többnyire ötösével áthúzva összegezhetjük a számolás eredményét. Például autópályákon a forgalomszámlálásakor alkalmazzák.

C csoport:



Egyiptomban a fáraók korában is már tízes számrendszer volt használatban (minden valószínűség szerint azért, mert a két kezünkön összesen tíz ujjunk van), és a hieroglifákon alapuló számírás egymillióig volt kidolgozva. Az egyiptomi feliratokon az 1-es számjegy írásjele a pálca, s kilencig a megfelelő számú függőleges, vagy vízszintes pálcával jelölték a számot. A 10-es számjegy jele a halom (egyesek szerint: cipó), amiből egymás mellé akár kilencet is lehet írni. A 100-as hieroglifikus jele a kígyó (zsinór), az l000-es jele a lótuszvirág, a 10 000-es jele a nádkéve (ujj), a 100 000-es jele az ebihal (menyhal), és az 1 000 000 jele egy feltartott kezű emberalak. A számokat az összeadási elvnek megfelelően kell az egyiptomi feliratokon olvasni: helyiérték nélkül, jobbról balra következnek a mind kisebb és kisebb egységek, amelyek értékeit összegezve kapjuk a számot. Érdekes, hogy már az egyiptomiak is használták a törtszámokat, de csak egységszámlálójú törtekkel (úgynevezett törzstörtekkel) dolgoztak. Az egyiptomi számolómesterek mind a négy alapműveletet elvégezték, de a szorzást és az osztást az összeadásra igyekeztek visszavezetni.
A képen lévő szám: 1997

a) Melyik országban alkalmazták a tízes számrendszert elsőként és mekkora számokat tudtak lejegyezni?
Egyiptomban már tízes számrendszer volt használatban (minden valószínűség szerint azért, mert a két kezünkön tíz jav ujjunk van), és a hieroglifikus számírás egymillióig volt kidolgozva.

b) Soroljátok fel néhány példával, hogyan jelölték az egyiptomiak 10 hatványait! Alkalmazták-e a helyiértékes írásmódot?
Az 1-es számjegy a pálca, a 10-es jele a halom (egyesek szerint: cipó), a 100-as jele a kígyó (zsinór), az l000-esé a lótuszvirág, a 10 000-esé a nádkéve (ujj), a 100 000-es jele az ebihal (menyhal) és az 1 000 000 jele egy feltartott kezű emberalak. A számokat az összeadási elvnek

megfelelően kell az egyiptomi feliratokon olvasni: helyiérték nélkül, jobbról balra következnek a mind kisebb és kisebb egységek, amelyek értékeit összegezve kapjuk a számot.

c) Csak az egészekkel tudtak számolni az egyiptomiak?
Használták a törtszámokat, de csak egységszámlálójú törtekkel ½ , ¼ ... dolgoztak.

d) Írd le óegyiptomi módra a 432 számot!
2 pálca, 3 halom és 4 kígyó jelet tetszőleges sorrendben leírva, megkapjuk a kérdezett számot.

e) Add össze az első 4 törzstörtet!

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{77}{60}$$

Az egyiptomiak nem tudták lejegyezni eredményt, csak az összegalakot használták. Nekünk nem nehéz összegezni ezeket a törteket, de a törtek egységtörtekre bontása már nehéz feladat. Az egyiptomiak elképesztő eredményeket értek el ezen a téren. A legnagyobb nevezőjű törzstörtet a $^4/_{17}$ felbontásánál használták: $^4/_{17} = {}^1/_5 + {}^1/_{29} + {}^1/_{1233} + {}^1/_{3039345}$

f) Hogyan lehetne egy törtet, például a $\frac{7}{10}$-et törzstörtek összegére bontani?

$$\frac{7}{10}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\ldots$$

Az ilyen jellegű feladatok megoldása nem olyan egyszerű, ezért tanári segítségre is szükség lehet. Ne adjuk meg azonban azonnal a megoldást, inkább próbáljuk őket rávezetni a megoldásra. (Szakköri tevékenységhez ajánlható feladat.)

2. A római és az arab számok

A számírás történetének fontos fejezetét jelentik a római számok. Nehezen kezelhető voltuk miatt ma már elhanyagolható a szerepük, de sok helyen felbukkannak, sőt bizonyos esetekben szinte csak ezeket használjuk. A 2. feladatlap kérdései segítségével feleleveníthetik, kiegészíthetik ismereteiket ezekről a számokról.
Elvárható, hogy a tanulók legalább 50-ig ki tudják olvasni a római számokat, de megismerve a felhasznált jeleket próbálkozhatnak nagyobb számokkal, például évszámok kiolvasásával.
Hasznos lehet a római számokkal történő „küszködés" a helyiértékes írásmód előkészítésére is, hogy megértsék annak számtalan előnyét.
Kiegészítő anyagként olvassák el és oldják meg a 2. feladatlap feladatait, vagy azok egy részét!

2. FELADATLAP

Hosszú út vezetett Babilóniától Egyiptomon át a ma megszokott számírásig. Az egyik legelterjedtebb és máig is használt írásmódot a rómaiaktól örököltük. Szinte hihetetlen, hogy Európában egészen a XIII. századig kizárólag ebben a formában jegyezték le a számokat. Ami még meghökkentőbb ilyen számokkal kellett műveleteket végezniük.

1. Hol találkozhatunk ma római számokkal?
Dátumok évszámainál (feliratokon), kerületek, évszázadok, könyvek tagolásánál.

2. Milyen szimbólumokat használunk római számírásnál?
I = 1, V = 5 , X = 10, L = 50 , C = 100 , D = 500 , M = 1000

3. Beszélhetünk-e helyiértékes írásmódról?
Helyiértékekről nem, de a tízes számrendszer nyomai fellelhetőek.

Kitérhetünk a római számírás fejlettebb változataira, ahol különböző eszközökkel már nagyobb számok is lejegyezhetők, kezdetleges formában a helyiértékes írásmód is megjelenik, de a legfontosabb tennivalónk mégis annak érzékeltetése, hogy mennyivel hasznosabb a helyiértékes írásmód.

Maga a számolás külön tudomány volt ezekkel a számokkal. Erről mi magunk is meggyőződhetünk, ha összevetjük a számolást a mai és a római számokkal.

4. Írjunk fel néhány számot római számmal! Próbáljunk meg ebben a formában műveleteket (például összeadást, szorzást) elvégezni!

38 + 49 = 87	XXXVIII + IL = LXXXVII
111 · 44 = 4884	CXI · XLIV = MMMMDCCCLCCCIV

Mi okozza a nehézséget? A helyiértékek hiánya, a számok lejegyzésének körülményessége.

A helyiértékes írásmóddal igen egyszerű a számolás, míg a római számok esetén a leírt alak alig ad segítséget a számoláshoz. (Az már az óra kereteit meghaladó téma, hogy hogyan tudtak mégis meglepően nagy számokkal nagy pontosságú eredményekre jutni.)

5. Egyértelmű-e a számok átírása római számmá?
Próbáld meg a 498-at átírni római számmá!

Az átírás különböző szabályok szerint történhet, ennek megfelelően többféle formában is helyes eredményt kaphatnak:
Például: 498 = CDXCVIII = LDVLIII = XDVIII = VDIII

A számokat nem lehet átírni római számokká egyértelműen. A lehetséges rövidítéseket, például a kivonás elvét csak később kezdték alkalmazni. Az EXCEL programmal kipróbálhatjuk, hogy ugyanahhoz a számhoz hányféle római szám tartozik. (Lásd az Excel Római (szám; forma) függvényét!)
A program mutatja, hogy a 999 öt különböző módon is átírható római számmá.

999	CMXCIX	LMVLIV	XMIX	VMIV	IM

Érdemes felfedezni, hogy a római számból történő visszaírás már egyértelmű.
Természetesen nem célunk az átírás ilyen mélységű tárgyalása, sokkal inkább azt érzékeltetjük mennyi előnyt jelent a helyiértékes írásmód. Emellett kreatívabb tanulók maguk is változatos számírási módokat találhatnak ki és igazolhatják azok helyességét.

6. Mutassuk meg, hogy az alábbi felsorolásban szereplő római számok mindegyike 999-t jelöl!

999

CMXCIX LMVLIV XMIX VMIV IM

Ennek a feladatnak a megoldásával bőven elegendő példát kapnak a tanulók a római számok értelmezéséből. Egyben azt is megértik, hogy a római forma átírása már egyértelmű.

Arab számok-e az arab számok?

Az európai kultúrkörben, de lényegében világszerte használt számjegyeket arab számoknak nevezzük, pedig ezek a számok hindu eredetűek. A XIII. század környékén arab közvetítéssel jutottak el Európába. Míg Indiában már a Honfoglalás kora előtt használták a tízes számrendszert és a mai számjegyeket, Európában még több mint 500 évig a római számok voltak az uralkodók. Érdekes, hogy ma pont az arabok nem használják az „arab számokat”.
Nézzük meg milyenek is az igazi arab számok. Nehezítésül egy kicsit összekevertük a számjegyeket, próbáljatok rendet teremteni köztük!
Próbáljuk meg kitalálni, melyik számjegy mennyit érhet! Természetesen lehet tippelni is!

٢	١	٠	٧	٤	٩	٦	٣	٨	٥
٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Természetesen a számjegyek értékének kitalálásához tippelni is kell, de azért logikát is találhatunk benne. Az 1, 2, 3 sorrendje gyanítható, a 7-es, 8-as is szomszédoknak tűnnek. Ha szerencsénk van a 9-es az, aminek látszik… Akik helyesen találták ki a sorrendet, azokat akkor is jutalmazhatjuk, ha most éppen a szerencse is melléjük szegődött.

Adhatunk a gyerekeknek internetes gyűjtőmunkát más kultúrák számírásáról. Különösen az ázsiai, közel-keleti, vagy afrikai népek használnak egyéni írásjeleket. Esetleg pénzérméket, vagy azok képeit is bemutathatják.
Utánajárhatnak, hogy ezeknél a népeknél a számjegyeken kívül van-e más eltérés is a számok lejegyzésénél.

3. A helyiértékes írásmód

A számírás helyiértékes írásmódja annyira kézenfekvő, hogy nem is tudatosítjuk a nagyszerűségét. A módszer pontos megismerése sok szempontból fontos a tanulók számára későbbi tanulmányaik megalapozásához. A 3. feladatlap 3 – 18 feladatainak megoldásával ismételjék át, illetve egészítsék ki az ezzel kapcsolatos ismereteiket, melyek közül a legfontosabbakat a feladatlap elején összefoglaltunk.

3. FELADATLAP

1. Mi a hasonlóság és mi a különbség az ókori egyiptomi és a mai szám-írásmód között?
Az egyiptomiak már használták a tízes csoportosítást, azaz a tízes számrendszert, de az alaki értékek használata helyett a helyiértékek megsokszorozásával jelölték a számokat.
Ha például az egyest E-vel, a tízest T-vel, a százast S-sel jelölnénk, akkor 234 helyett a „SSTTTEEEE” alakot használnánk.

2. Mit értünk azon, hogy a többjegyű számok egyes számjegyeinek alaki és helyiértéke is van?
Minden egyes számjegy értékét az alakja mellett a számban elfoglalt helye is befolyásolja.

3. Hányféle alaki értékű számjegyet használunk? Miért a 9 a legnagyobb alaki értékű számjegy? (Miért nincs szükség 10-es számjegyre? Hogyan ábrázoljuk a 10-et?)
10-félét: 0, 1, 2, 3, 4,... 9, (0)
Tehát a nullát az elején és a végén is mondhatjuk, csak nehogy kimaradjon!
A tíz leírásához már nem kell újabb számjegy, hiszen azt a tízes helyiértékre írt 1-es számjegy fejezi ki.

4.
a) Soroljuk fel a 2 416 053 számban előforduló alaki értékeket (számjegyeket) növekvő sorrendben! 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
Ennek a banális feladatnak a lényege, hogy mindenki számára tisztázódjon, mit is értünk a számok alaki értékén.

b) Soroljuk fel a számban szereplő helyiértékeket növekvő sorrendben!
1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000

5.

a) Soroljuk fel a 31,015 számban előforduló alaki értékeket (számjegyeket) növekvő sorrendben! 0, 1, 3, 5

b) Soroljuk fel a számban szereplő helyiértékeket növekvő sorrendben! $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, 1, 10

6. Írd fel a helyiértékeket 10 hatványaiként!

10 hatványai, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3,...és 10 hatványainak a reciprokai, $\frac{1}{10^3}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^1}$, 10^0, 10^1,...

Az egynél kisebb helyiértékeket negatív kitevővel is felírhatjuk:
10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1
Azaz tízesek szorzásával, vagy osztásával felírható számok. A tényezők számát a kitevő adja meg (0 esetén a hatvány értéke 1, a negatív kitevő pedig azt mutatja meg, hogy hányszor kell tízzel osztani).

7. Van-e legnagyobb ezek között a számok között?
Legnagyobb nincs, hiszen a kitevő természetes szám és azok közt nincs legnagyobb.

8. Van-e legkisebb ebben a számhalmazban? Melyik a legkisebb?
Ha nem használunk negatív egész kitevőt, akkor az 1 lesz a legkisebb hatvány, azaz a legkisebb helyiérték. Természetesen a tizedes törtek kapcsán a helyiértékek sorát az 1-nél kisebbek közt folytatjuk, ezek is végtelen sokan vannak, és bár mindegyik nagyobb nullánál, nincsen közöttük legkisebb.
Akár itt is bevezethetjük, vagy megerősíthetjük a negatív egész kitevős hatvány fogalmát.

9. Miért a 10 hatványait használjuk helyiértékeknek?
Lényegében önkényes a választás, ősi hindu és egyiptomi eredetű és alapja a kéz ujjainak számából adódhat.

10. Használhatnánk-e más alapszámot?
Igen. Matematikai szempontból indokolt lehet egy 12-es számrendszer, aminek megvitatását a nem tízes számrendszerek kapcsán felvethetjük. Akár a későbbiekben, akár most is jelezhetjük, hogy az elektronikus számítógépek működése a 2-es számrendszeren alapul (két számjegy – áramkör kétféle állapota) a 16-os pedig a bitek csoportosításából adódik.

11. Melyik helyiértéken szerepelnek az egyes számjegyek a mintául választott 2 416 053 számban?
2 416 053:
0 – százas, 1 – tízezres, 2 – milliós, 3 – egyes, 4 – százezres, 5 – tízes, 6 – ezres

12. Előfordulhat-e egy számjegy többször is?
Természetesem bármelyik számjegy tetszőlegesen sokszor fordulhat elő egy szám leírásakor.

13. Előfordulhat-e egy helyiérték többször is?
Az írásmódból következően egyetlen helyiérték sem fordulhat elő több helyen.

14. Melyik számjegy éri a legtöbbet a számban, miért?
A 2-es, mert ő szerepel a szám bal szélén, tehát ennek a legnagyobb a helyiértéke. Így az őt követő szám mindenképpen kevesebbet ér nála, még akkor is, ha alaki értéke nagyobb.

15. Hogyan kapjuk meg egy-egy szám tényleges –más szóval-valódi értékét?
Minden számjegy az alaki és helyiértékének a szorzatát éri.

16. Mennyit érnek az egyes számjegyek külön-külön és mennyit együtt?
A 2 kétmilliót, a 4 négyszázezret, az 1 tízezret,..., a 3 hármat ér.
Együtt ezeknek a szorzatoknak az összegét éri a szám.

17. Írjuk le a számot helyiérték szerint bontott összegalakban!
$2\,416\,053 = \underline{2}\cdot 10^6 + \underline{4}\cdot 10^5 + \underline{1}\cdot 10^4 + \underline{6}\cdot 10^3 + \underline{0}\cdot 10^2 + \underline{5}\cdot 10^1\ \underline{3}\cdot 10^0$

$31{,}015 = \underline{3}\cdot 10^1 + \underline{1}\cdot 10^0 + \underline{0}\cdot 10^{-1} + \underline{1}\cdot 10^{-2} + \underline{5}\cdot 10^{-3}.$

Emeljük ki az alaki értékeket színessel vagy aláhúzással. A helyiértékeket hatvány alakban is írhatjuk.

18. Írjuk le a következő számokat is helyiérték szerint bontott összeg alakban! Használjuk a hatvány jelölést!

$1234 = 1\cdot 1000 + 2\cdot 100 + 3\cdot 10 + 4\cdot 1 = 1\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 4\cdot 1$

$10\,203\,040 = 10\,000\,000 + 2\cdot 100\,000 + 3\cdot 1\,000 + 4\cdot 10 = 10^7 + 2\cdot 10^5 + 3\cdot 10^3 + 4\cdot 10$

$10\,110\,001 = 10\,000\,000 + 100\,000 + 10\,000 + 1 = 10^7 + 10^5 + 10^4 + 1$

$$236{,}11 = 2\cdot 100 + 3\cdot 10 + 6\cdot 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} = 2\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 6\cdot 1 + 10^{-1} + 10^{-2}$$

$$0{,}025 = 2\cdot\frac{1}{100} + 5\cdot\frac{1}{1000} = 2\cdot 10^{-2} + 5\cdot 10^{-3}$$

4. Nem tízes alapú számrendszerek – háttéranyag

Ennek a témának a tárgyalása régóta vita a matematika tanításában. Ha elfogadjuk, hogy a nem tízes számrendszerek elsősorban nem további megtanítandó (tanulandó) tananyag, hanem a törzsanyag elmélyítését szolgálja, akkor igen hasznos kiegészítésül szolgálhat. Többek közt a számelméleti kérdések, a polinomok és persze a helyiértékes írásmód lényegét alapozhatjuk meg általuk. A 2-es számrendszer különösen a számítástechnika elterjedésével kapott gyakorlati szerepet. Hogy milyen szinten tanítsuk ezt a témakört, azt minden tanár az osztálya képességeinek, óraszámának ismeretében döntheti el.
Láttuk, hogy a tízes számrendszer helyiértékeit a 10 hatványai alkotják. Azt is tudjuk, hogy nem szükségszerű, hogy a 10 legyen az alapszám. Ha mást választunk, annak két következménye lesz:

1. A helyiértékek ennek az új alapnak a hatványai lesznek.
2. A felhasználható számjegyek száma megváltozik.

Például az 5-ös számrendszerben a helyiértékek (jobbról balra) 1, 5, 25, 125... lesznek. Ez esetben már 5-ös számjegyre sem lesz szükség, hiszen az 5-t 1 db ötös és 0 db egyes segítségével írhatjuk le.

A számrendszereknek, különösen a kettes, nyolcas és tizenhatos számrendszernek kitüntetett szerepe van az informatikában. Mivel kettes számrendszerben csak kétféle (0 és 1) számjegyeket használhatunk, a számítógépek számára ez az írásmód sokkal könnyebben kezelhető, mint a tízes számrendszer. Szerencsére a számítások során a gép végzi mind a tízesből kettesbe, mind a kettesből tízesbe történő átszámítást.

A 31-et például kettes számrendszerben 11111_2 alakban írhatjuk. Könnyen ellenőrizhetjük az eredményünket, hiszen elég összeadnunk a helyiértékeket, azaz kettő hatványait:

$11111_2 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

Más számrendszerekből történő átszámításnál is a helyiértékes írásmódról tanultakat alkalmazzuk, csak a helyiértékek más alapszám hatványai lesznek:

$1234_5 = 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 125 + 50 + 15 + 4 = 194$

Más számrendszerekbe történő átszámításnál a „leltározásnak” megfelelő eljárással számolunk. Az átszámítandó számot az új alappal elosztjuk, a maradékot feljegyezzük. Az osztás során kapott hányadost, mint osztandót ismét elosztjuk az új alappal és az eljárást addig folytatjuk, míg a hányados 0 nem lesz. Ekkor a feljegyzett maradékokat fordított sorrendben egymás után írva kapjuk a nem tízes számrendszerbeli alakot. Például, ha 148-at akarjuk 5-ös számrendszerbe átírni, akkor a következő számításokat végezzük:

148 : 5 = 29
$\underline{3}$ ↓
29 : 5 = 5
$\underline{4}$ ↓
5 : 5 = 1
$\underline{0}$ ↓
1 : 5 = 0
$\underline{1}$ Tehát a 148 = 1043_5

Ne feledjük el a 0 maradékot is beírni a számba!

A 4. feladatlapban szereplő feladatokkal gazdagíthatják a nem tízes számrendszerekről szerzett ismereteiket. A WINDOWS zsebszámológépe, a DERIVE vagy az EXCEL program is tud nem tízes alapú számrendszerekkel dolgozni.

4. FELADATLAP

1. Milyen számjegyek használhatók a tízestől eltérő alapú számrendszerekben?
Az alapszámnál kisebb számjegyek, tehát pontosan annyiféle számjegy, amennyi a számrendszer alapszáma.

2. Írjuk le helyiérték szerint bontott összeg alakban az ötös számrendszerben leírt 2434 számot!
$2434_5 = 2 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0$
Tehát ez esetben is az alaki és a helyiértékek szorzatainak összegeként jelent meg a szám. Fontos tisztáznunk, hogy a kétezer-négyszázharmincnégy elnevezés helytelen, még akkor is, ha hozzátesszük, hogy az ötösben. Hiszen azzal, hogy ötös számrendszerre tértünk át, éppen az ezresek, százasok, stb. veszítették el értelmüket.

3. Mennyit ér tízes számrendszerben a 2434_5 szám?
$2434_5 = 250 + 100 + 15 + 4 = 369$

4. Hasonlítsuk össze a szám párokat, és tegyük ki a megfelelő relációjelet anélkül, hogy átszámítanánk tízes számrendszerbe!
(Hasonlítsátok össze a jegyek számát, az alaki és a helyiértékeket!
Figyeld meg a legnagyobb helyiértéken szereplő szám értékét!
Hasonlítsd össze a számrendszer alapszámait és a számjegyeket!)

a) $3\,333_4$ ... $4\,444_5$

b) $111\,111_2$ ... 111_9

c) 111_4 ... $101\,010_2$

Az a) esetben két négyjegyű szám szerepel, de a másodiknál nagyobbak az alaki és a helyiértékek is, tehát ez a nagyobb.
A b) esetben a 2-es számrendszerbeli szám legnagyobb helyiértéke 32, azaz a szám biztosan kisebb, mint 64, mert az már hétjegyű lenne. A másik szám ugyancsak háromjegyű, de a legnagyobb helyiérték 81 (9^2) így ez lesz a nagyobb.
A c) feladatban az 1-es számjegyek ugyanazon a helyiértéken szerepelnek, hiszen a 2 hatványai közt ott vannak minden második helyen a 4 hatványai.

5. Írd át kettes számrendszerbe a 100-at!
Nem tízes számrendszerbe kétféle úton juthatunk. Az egyik a jól ismert osztásos algoritmus, ami lényegében már az alsóból megismert „leltározásnak” a matematikai megfelelője. Bár nem egyszerűbb, de szemléletesebb, ha ehelyett felírjuk a megfelelő számrendszer helyiértékeit és megpróbáljuk összerakni belőlük az átszámítandó számot.
$100 = 1 \cdot 64 + 36$
$36 = 1 \cdot 32 + 4$
$4 = 0 \cdot 16 + 4$
$4 = 0 \cdot 8 + 4$
$4 = 1 \cdot 4 + 0$, tehát a 100-at 1-1 db 64-es, 32-es és 4-es segítségével írhatjuk fel:
$100 = 1100100_2$
Természetesen dolgozhatunk a leltározásnál megismert módszerrel, azaz az alapszámmal történő osztogatással, majd a maradékok lejegyzésével is:

100 : 2 = 50	m: 0
50 : 2 = 25	m: 0
25 : 2 = 12	m: 1
12 : 2 = 6	m: 0
6 : 2 = 3	m: 0
3 : 2 = 1	m: 1
1 : 2 = 0	m: 1, a maradékok fordított sorrend szerint: 1100100_2

6. Melyik számrendszerben lehet a 100 alakja 400?
A legegyszerűbb megoldás a hiányos másodfokú egyenlet megoldása lehet:
$4x^2 = 100$, amiből adódik a megoldás: $x = 5$, természetesen másfajta próbálkozások is számba jöhetnek.

7. Modellezzük a számológép működését! Számítsuk át a tagokat (tényezőket) 2-es számrendszerbe, végezzük el a két szám összeadását, összeszorzását. Az eredményeket számítsuk vissza tízesbe és ellenőrizzük!

$$\begin{array}{rr} & 25 = 1\,1\,0\,0\,1_2 \\ + & \underline{26 = 1\,1\,0\,1\,0_2} \\ & 51 = 1\,1\,0\,0\,1\,1_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 25 & \cdot & 26 & = & 650 \\ 1\,1\,0\,0\,1_2 & \cdot & 1\,1\,0\,1\,0_2 & = & 1\,010\,001\,010_2 \end{array}$$

A nem tízes számrendszer kapcsán számtalanféle feladat megoldása kínálkozik, az átszámítások, nagyság szerinti rendezések, műveletvégzések mellett például az oszthatósági szabályok általánosítását is kipróbálhatjuk, de ezek már meghaladják az idő és a tanterv adta kereteket. Számelméleti órákon azonban érdemes a jól ismert szabályokat (számvégződés, számjegyek összege) más számrendszerekre kipróbálni, hiszen ezzel erősíthetjük meg a tanult szabályok helyességét.

5. Ugyanannak a számnak különböző írásmódjai: összeg, szorzat, normálalak, hatvány, más számrendszer

Nagyon fontos rész, semmiképpen se hagyjuk ki! Az algebra tanulásában sokat segít, ha már a számok körében megszokják, hogy egy egy számnak sok különféle alakja van, amelyek egymással szükség szerint kicserélhetők, amelyekből szabadon válogathatunk.
Emellett ebben a részben sok fontos fogalmat gyakorolunk, mélyítünk.
A következőkben néhány szám vizsgálatával megnézzük, hogy egy számot milyen sokféle alakban írhatunk fel. Ezek a különböző alakok mind ugyanazt a számot jelentik, de az írásmódok más és más számtulajdonságokra világítanak rá. A változatos tevékenységek a matematikai ismeretek széles skáláját mozgósítják, a kifejezések felismerésétől a nagyságrendek tudatosításán át a számelméletig, lehetőséget adva a logikus gondolkodás fejlesztésére, ismeretek elmélyítésére.

5. FELADATLAP

1. A következő néhány számot írjátok le számjegyekkel!
Százhuszonnégyezer, kétezer-egy, hatezer-ötszáz, hétmillió-háromszázötvenhétezer, hétmillió-háromszázötvenhét, ezerhuszonnégy, hatszázmilliárd.
124 000 , 2001, 6500, 7 357 000, 7 000 357, 1024, 600 000 000 000

a) Hogyan jegyezted le a számokat?
Helyiértékes írásmóddal.

b) Hány jegyű számokat kaptál?

c) Hány nullára végződnek a számok?
A számok leírásához kézenfekvő módon a tízes számrendszer szerinti alakot használjuk. A számjegyek és a számvégi nullák meghatározása a későbbi kérdések megválaszolásához segít.

d) Lehetett volna kevesebb jellel is leírni valamelyik számot?
Néhány esetben a számok kevesebb jellel is leírhatók. Például a 2001 római számmal MMI, tehát csak 3 karakter, az 1024-nél rövidebb alak a hatványjelölés: 2^{10}. A legtöbbet a 600 milliárd normálalakjával lehet rövidíteni: $6 \cdot 10^{11}$.
Látható tehát, hogy nem feltétlenül a helyiértékes írásmód adja a legrövidebb leírási módot. Használjuk ezt ki a következő feladatban.

e) A fenti számokat más alakban is felírtuk. Írd mindegyik mellé az előző számok közül a megfelelőt!

kifejezés	**szám**
7 000 000 + 350 + 7	7 000 357
$2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16$	1024
$2^5 \cdot 5^3 \cdot 31$	124 000
$7 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3$	7 357 000
$6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$	600 000 000 000
$6{,}5 \cdot 10^3$	6500
11111010001_2	2001

Nemcsak a megfelelő számok beírása a feladat, hanem mindegyikhez indoklást is kérjünk. Érdemes néhány észrevételt tenni:
A $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16$ szorzat kizárólag 2 hatványból áll. Egyedül az 1024 ilyen tulajdonságú szám. Tovább bontva szorzatként (vagy alkalmazva az azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosságot) a $2 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{10}$ alakhoz jutva igazolhatjuk sejtésünket.
A $11\,111\,010\,001_2$ kettes számrendszerbeli szám 11 jegyű, tehát a legnagyobb helyiértéke $2^{10} = 1024$. Ilyen nagyságrendű szám csak a 2001. Ellenőrizzük a megfelelő helyiértékek összeadásával.
A $2^5 \cdot 5^3 \cdot 31$ szorzat eredménye 3 nullára, $(2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 31$, a $6 \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 5)$ pedig 11 nullára végződik.

f) A kifejezések közül melyik összeg, melyik szorzat?
Összegek: 7 000 000 + 350 + 7; $7 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3$;
Szorzatok: $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16$; $2^5 \cdot 5^3 \cdot 31$; $6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$; $6{,}5 \cdot 10^3$

A csak összeadásból illetve szorzásból álló kifejezéseknél egyértelműen összeg, illetve szorzat a válasz. A prímtényezős felbontást hatványok **szorzatának**, a helyiértékes írásmódot pedig szorzatok **összegének** tekintjük. A szorzatok közül azokat nevezzük prímtényezős felbontásnak, melyekben kizárólag prímtényezők szerepelnek. A normálalak is szorzat, melynek tényezőire fogalmazzuk meg a vonatkozó szabályt!

g) Írd fel az 1024 számot minél többféle alakban – tízes számrendszerbeli helyiértékes bontásban, normálalakban, prímtényezős alakban, stb.
$10^3 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$, $1{,}024 \cdot 10^3$, 2^{10}

h) Melyik szorzat tekinthető normálalaknak?
$1{,}024 \cdot 10^3$

6. Műveletek különböző alakban írt számokkal, optimális alak kiválasztása

6. FELADATLAP

1. Ugyanazt a két számot megadtuk többféle alakban is.
A két számról kérdéseket írtunk. Melyik állításra melyik alak alapján könnyű válaszolni?

$A = 6{,}4 \cdot 10^3 = 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 = 2^8 \cdot 5^3$ és $B = 1{,}6 \cdot 10^3 = 10^3 + 6 \cdot 10^2 = 2^6 \cdot 5^3$

a) Melyik nagyobb? A vagy B? Ebben az esetben mindegyik alak segít. Az A nagyobb.

b) $A \cdot B = ?$ A prímtényezős szorzatalak alapján a legkönnyebb válaszolni: $2^{14} \cdot 5^6$

c) $A : B = ?$ A prímtényezős szorzatalak és (ebben az esetben) a normálalak alapján könnyű válaszolni: $(6{,}4 \cdot 10^3) : (1{,}6 \cdot 10^3) = 4$ vagy $(2^8 \cdot 5^3) : (2^6 \cdot 5^3) = 2^2 = 4$

d) Hány százas szerepel A-ban? Az összegalak segít: 4.

e) $A + B = ?$ A normálalakot vagy az összeg alakot célszerű választani:
$(6{,}4 \cdot 10^3) + (1{,}6 \cdot 10^3) = (6{,}4 + 1{,}6) \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^3 = 8\,000$ vagy 7 ezres + 10 százas = 8 ezres

f) $(A + B)$ osztható-e 25-tel? Ebben az esetben mindegyik alakból könnyen kiolvasható, hogy a szám osztható 100-zal, ezért 25-tel is.

A feladattal célunk rámutatni arra, hogy a számok különböző alakjaiból a szám milyen tulajdonságai olvashatók ki könnyen, illetve melyik alakjával célszerű számolni különböző kérdések megválaszolásakor. Egyúttal egyszerű műveleteket is végzünk a különböző alakban írt számokkal. A további érdekes problémákból tanulóink képességei szerint válogassunk. Láttuk, hogy ugyanaz a szám többféle formában is felírható, és hogy a különböző alakok más-más kérdések megválaszolásában segíthetnek. A normálalak különösen sok mindenre használható. Lássunk erre néhány példát!

A téli éjszakák ragyogó csillagáról, a Szíriuszról az olvashatjuk, hogy mintegy 9 fényévnyi távolságra van. Hány km-re lehet ez az égitest, ha tudjuk, hogy a fény 1 másodperc alatt 300 000 km-t tesz meg és 1 fényév az a távolság, amit a fény 1 év alatt megtesz?

Az eredményt a következő szorzat adja:

$$60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 9 \cdot 300\,000 \text{ (km)}$$

Mit jelentenek az egyes tényezők?

A szorzat kiszámításához érdemes fejszámolással és normál alakkal dolgozni:
$60 \cdot 60 = 3\,600 = 3{,}6 \cdot 10^3$
$24 \cdot 365 \approx 25 \cdot 4 \cdot 90 = 9\,000 = 9 \cdot 10^3$
$9 \cdot 300\,000 = 2\,700\,000 = 2{,}7 \cdot 10^6$

A szorzat normál alakokkal tehát:
$3{,}6 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 10^3 \cdot 2{,}7 \cdot 10^6 = 3{,}6 \cdot 9 \cdot 2{,}7 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^6 \approx 3 \cdot 27 \cdot 10^{3+3+6} = 81 \cdot 10^{12} = 8{,}1 \cdot 10^{13}$

(Ha pontosan számoltunk volna $8{,}5 \cdot 10^{13}$ km-t kaptunk volna.)
Érdemes végigkövetni a számolást, mert találkozhatunk benne számítást könnyítő eljárással ($24 \cdot 365 \approx 25 \cdot 4 \cdot 90$), a kerekítés szabályának kijátszásával ($3{,}6 \approx 3$), hogy a korábbi felfelé kerekítést ezzel korrigáljuk. A lényeg, hogy végül is kalkulátor nélkül is megkaphattuk az elfogadható pontosságú eredményt (sőt a legtöbb kalkulátor nem is tudna a kapott 14 jegyű számmal megbirkózni).

2. A következő feladatok eredményét az adatok normál alakra történt átszámítása után kerekítéssel határozzátok meg!

a) A Földtől legtávolabbra jutott ember alkotta eszközt, a Voyager-1 űrszondát 1977. szeptember 5-én bocsátották fel.

Hány km-re jutott el, ha 1 óra alatt 61 690 km-t tesz meg?
Hányszor van távolabb, mint a Nap, ha központi csillagunk 150 millió km-re van tőlünk?
Az eltelt napok száma (2006 szeptemberében) 29 (év) · 365, a keresett szorzat tehát:
$29 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 61\,690 = 15\,671\,727\,600$ km.
Normál alakkal és kerekítve:
$3 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 10^4 = 144 \cdot 10^8 = 1{,}44 \cdot 10^{10}$ km $\approx 1{,}5 \cdot 10^{10}$ km = 15 milliárd km.
A Föld–Nap távolság 150 millió km, azaz $1{,}5 \cdot 10^8$ km, ezért a keresett hányados: $(1{,}5 \cdot 10^{10}) : (1{,}5 \cdot 10^8) = 10^2 = 100$. Vagyis az űrszonda 100-szor van messzebb, mint a Nap (50-szer tehette volna meg a Föld–Nap távolságot oda-vissza).

b) A mai ismereteink szerint a Világegyetem 900 milliárd galaxisból áll, és egy ilyen galaxisban (mint amilyen a mi Tejútrendszerünk is) átlagosan 200 milliárd csillag van.
Hány csillag van az égen?
$9 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^8 \approx 2 \cdot 10^{17}$ = 200 billiárd csillag van az égen.
Ezeknek csak egy töredékét, alig 3000-t láthatunk szabad szemmel.
– Hányadrésze ez az összes csillagnak?
$(18 \cdot 10^{16}) : (3 \cdot 10^3) = 6 \cdot 10^{13} = 60 \cdot 10^{12}$ = 60 billiomod részét látjuk csak a csillagoknak.

c) Mennyi a Föld és a Hold össztömege, ha a Föld tömege:
5 970 000 000 000 000 000 000 tonna,
míg a Holdé 74 000 000 000 000 000 000 t?
Normál alakban és kerekítve a $6 \cdot 10^{21}$ és a számokat kellene összeadni. Vigyázni kell, mert itt nem segít igazán a normál alak, hiszen a 6 és a 7,4 nem azonos nagyságrendekhez tartoznak.

5 970 000 000 000 000 000 000	=	5970 trillió
74 000 000 000 000 000 000	=	74 trillió
		6044 trillió tonna

Normálalakkal: $5{,}97 \cdot 10^{21} + 7{,}4 \cdot 10^{19} = 5970 \cdot 10^{18} + 74 \cdot 10^{18} = (5970 + 74) \cdot 10^{18}$ = 6044 trillió

7. Számok nagyság szerinti rendezése különböző alakokban

7. FELADATLAP

Vizsgáljuk meg, hogy mely formában adott számokat könnyű nagyság szerint összehasonlítani, rendezni?

1. Állítsd növekvő sorrendbe a következő számokat:

MD,	CCX,	XCV,	CXCV,	XXXVIII,	CXXVI.
1500;	210;	95;	195;	38;	126

A helyes sorrend: XXXVIII, XCV, CXXVI, CXCV, CCX, MD.

Még a római számokat magabiztosan ismerők számára sem egyszerű a feladat. Természetesen a megoldáshoz elvezető legbiztosabb út, ha átírjuk helyiértékes alakra a számokat. A feladat elsősorban a helyiértékes írásmód előnyét illusztrálja a rendezés terén is.

2. Az *A*-val vagy a *B*-vel jelölt szám a nagyobb?
A = 47264738465325347568 vagy *B* = 921374657483746746

A = 47 264 738 465 325 347 568 vagy
B = 921 374 657 483 746 746 (utóbbi kicsit nagyobb betűközzel írandó, így nem látszik, hogy kevesebb számjegyből áll)
A legcélszerűbb megoldás a számjegyek összeszámolása. A *B* szám ritkított leírása miatt ránézésre nem látható, hogy kevesebb számjegyből áll. Ha alkalmazzuk a számjegyek hármas csoportosítását, akkor ki is olvashatjuk a számokat. (47 trillió… és 921 milliárd…) Felületes rátekintésre, különösen eltérő betűméret vagy betűköz esetén azonban tévedhetünk (ennél a feladatnál az a lényeg, hogy megértsük a normálalakban történt lejegyzés előnyét a nagyságrend megállapításánál).

a) Írjuk át *A*-t és *B*-t normálalakba két értékes jegyre kerekítve, majd hasonlítsuk össze a normálalakban lejegyzett számokat!
Kerekítve, majd normálalakba írva a számokat könnyen összehasonlíthatjuk őket:
$A \approx 4{,}7 \cdot 10^{19}$
$B \approx 9{,}2 \cdot 10^{17}$
amire nyilván teljesül az $A > B$ reláció.

b) Hányszorosa megközelítőleg a nagyobb szám a kisebbnek?
Ha *A*-t $470 \cdot 10^{17}$-alakban írjuk, míg *B*-t továbbra is $9{,}2 \cdot 10^{17}$–nek kerekítjük akkor látható, hogy az arány körülbelül $470 : 9{,}2 = 50$-szeres.

3. Állítsd növekvő sorrendbe a normálalakban megadott számokat!
$3{,}17 \cdot 10^9$; $9{,}7 \cdot 10^7$; $7 \cdot 10^{13}$; $3{,}16 \cdot 10^{10}$; $3{,}097 \cdot 10^9$
Először a kitevők szerint rendezünk, ha ezek közt azonosak vannak, akkor az első tényezőt vetjük össze.
$$9{,}7 \cdot 10^7 < 3{,}097 \cdot 10^9 < 3{,}17 \cdot 10^9 < 3{,}16 \cdot 10^{10} < 7 \cdot 10^{13}$$

4. Állítsd növekvő sorrendbe a következő számokat!
$725 \cdot 10^8$; $79{,}7 \cdot 10^7$; $127 \cdot 10^6$; $0{,}16 \cdot 10^9$; $1111 \cdot 10^6$
A feladat kitűzését az indokolja, hogy az előző megoldását ne alkalmazzák mechanikusan! Az itt felsorolt számok ugyanis nem normálalakban vannak megadva, tehát az előzőhöz képest némi korrekcióra szorulnak.
$725 \cdot 10^8 = 7{,}25 \cdot 10^{10}$, $79{,}7 \cdot 10^7 = 7{,}97 \cdot 10^8$, $127 \cdot 10^6 = 1{,}27 \cdot 10^8$, $0{,}16 \cdot 10^9 = 1{,}6 \cdot 10^8$,
Először $1111 \cdot 10^6 = 1{,}111 \cdot 10^9$ ennek megfelelően a nagyság szerinti rendezés eredménye:
$1{,}27 \cdot 10^8 < 1{,}6 \cdot 10^8 < 7{,}97 \cdot 10^8 < 1{,}111 \cdot 10^9 < 7{,}25 \cdot 10^{10}$

II. A természetes számok

1. A természetes számok fogalma

A modulnak ebben az órájában néhány kérdés megválaszolásával felidézzük a természetes számokról tanultakat, mely számok alkotják ezt a számhalmazt, mely műveletekre zárt és mely műveletek mely esetben vezetnek ki a halmazból. Nyitott mondatok és szöveges feladatok megoldásait keressük a természetes számok körében, szöveges feladatokat az adatok módosításával tesszük megoldhatóvá a természetes számok körében.

8. FELADATLAP

1. Mely számok tartoznak a természetes számok közé?
pozitív egészek és a nulla

2. Van-e a természetes számok közt legkisebb, legnagyobb? Hány 100-nál, 1000-nél kisebb természetes szám van? Hány természetes szám van a 100 és az 1000 között? Hány 4-jegyű természetes szám van?
Legkisebb a nulla, legnagyobb nincs. Az $n < 100$ egyenlőtlenségnek 100, az $n < 1000$ egyenlőtlenségnek 1000, az $n < N$ egyenlőtlenségnek N megoldása van a természetes számok körében. A $100 < n < 1000$ egyenlőtlenségnek 899 megoldása van. Az $N_1 < n < N_2$ egyenlőtlenségnek $N_2 - N_1 - 1$ megoldása van.

2. Mely műveletekre zárt a természetes számkör?

3.
a) Milyen természetes számot írhatunk a betűk helyére, hogy a művelet eredménye biztosan természetes szám legyen? *a*: bármilyen természetes szám, *b*: 50-nél nem nagyobb szám, *c*: tetszőleges természetes szám, *d*: 50 osztója.
b) Hányféle értéket adhatunk *a*-nak, *b*-nek, *c*-nek és *d*-nek, hogy a feltétel teljesüljön?

$50 + a$, $50 - b$, $50 \cdot c$, $50 : d$

a és *c*: végtelen sokféle lehet, *b*: 51-féle (!), *d*: véges (1, 2, 5, 10, 25, 50, azaz 6-féle)

4. Milyen természetes számot írjunk az *a, b, c, d* helyére, hogy a művelet eredménye ne természetes szám legyen?
a) $6 + a$, $6 - b$, $6 \cdot c$, $6 : d$
Nincs ilyen *a* szám , $b > 6$, nincs ilyen *c* szám, *d* ne legyen a 6 osztója

b) $N + a$, $N - b$, $N \cdot c$, $N : d$
(N valamilyen természetes számot jelöl.)
nincs ilyen *a* szám , $b > N$, nincs ilyen *c* szám, *d* ne legyen N osztója

A következő feladatot csoportmunkában végezzék el!

5. A következő feladatok mindegyikéhez válasszátok ki a hozzáillő nyitott mondatot, majd keressétek meg azok megoldását! Keress megoldást az egyenletekhez! Gondold meg, hogy a kapott megoldás elfogadható-e a szöveges feladat megoldásaként! Indokolj!

a) Egy három kocsiból álló villamoson összesen 120-an utaztak, az első kocsiban 65-en, a másodikban 75-en. Hány utas volt a harmadik kocsiban?

b) Egy hordóban 120 liter bor volt, melyből először 65, majd 75 litert fejtettek át egy-egy kisebb hordóba. Hány liter bor maradt az eredeti hordóban?

c) A Holdon a napsütötte talaj hőmérséklete 120 fok volt. A naplemente után 1 órával 65 fokkal csökkent a hőmérséklet, újabb egy óra elteltével további 75 fokkal. Hány fokos lett a Hold felszíne ezen a helyen 2 órával a naplemente után?

d) Az Alföldnek 120 m tengerszint feletti magasságban lévő pontjából fúrást végeznek. Első nap 65, második nap további 75 m-t haladtak lefelé. Milyen magasságban állt ekkor a fúró feje?

$120 - 65 - 75 = x$; $120 + (-65) + (-75) = x$
$x = 120 - (65 + 75)$; $65 + 75 + x = 120$

A négy nyitott mondat ugyan ekvivalens, de mégsem ugyanazt fejezik ki. Egy feladathoz több nyitott mondatot is társíthatunk, a lényeg az, hogy valamennyi megoldásaként adódó –20 értelmezhető-e? Az első két feladat tartalmából adódóan nem, hiszen egy villamoson nem utazhat –20 utas és a hordóban sem maradhat –20 liter bor, de mind a –20°C, mint a tengerszinthez viszonyított –20 m értelmezhető.

6. Változtassátok meg az előző feladat szövegében szereplő adatokat úgy, hogy mindegyiknek legyen megoldása!
Például, ha a szöveges feladatokban szereplő első adat nem kisebb 140-nél, akkor mindegyik feladatnak lesz megoldása.

3. Mely műveletek vezetnek ki és milyen feltételekkel a természetes számkörből?

7. Írjátok fel a feladatokat nyitott mondatokkal! Keressetek megoldást! Indokoljátok meg, miért nem lehet természetes számmal igazzá tenni egyiket sem!

Pontosan azokat az eseteket vesszük sorra, amikor egy nyitott mondatnak nincs megoldása a természetes számok körében.

a) Melyik számot kell hozzáadni a 10-hez, hogy 2-t kapjunk?
$10 + a = 2$ $a = -8$ (negatív egész)

b) Melyik számmal kell megszorozni a 10-et, hogy 2-t kapjunk?
$10 \cdot b = 2$ $b = 0{,}2$ vagy $\frac{1}{5}$ (tört szám)

c) Melyik számot kell megszoroznunk önmagával, hogy –1-et kapjunk?
$c \cdot c = -1$, (nem valós)

A megoldás komplex számokhoz vezetne, de ezúttal elég annyit felfedeztetnünk, hogy a szorzás tulajdonságából adódóan c nem lehet sem pozitív, sem negatív (sem 0), tehát a számegyenesen nincs ilyen szám. Azt óvatosan hozzátehetjük, hogy a számkör bővítésével ilyen számokra is sor kerülhet.

d) Melyik számot kell megszoroznunk önmagával, hogy az eredmény 10 legyen?
$d \cdot d = 10$ (irracionális)

$d \approx 3{,}16$. Természetesen a gyökvonásról itt sem beszélünk, a 3,16-hoz próbálgatással jussanak, és hangsúlyozzuk, hogy ez csak közelítő érték, amit számolással érdemes ellenőrizni. Ha valaki kíváncsi a pontos értékre, annak egyrészt örüljünk, másrészt intsük türelemre, rövidesen kitekintünk erre a műveletre is.

4. Szöveges feladatok felírása nyitott mondatokkal, a megoldások értelmezése

8. Válasszátok ki a 4 nyitott mondat közül azt, amelyik megfelel a szöveges feladatnak, majd keressétek meg a megoldását is! Értelmezhetőek-e a kapott megoldások a szöveges feladok megoldásaként?

$F + 2 \cdot F + 4 \cdot F = 25$ $F + (F - 2) + (F + 2) = 25$

$F + (F + 2) + (F + 4) = 25$ $F + (F - 2) + (F - 4) = 25$

a) Egy 25-ös létszámú osztályt három nyelvi csoportra osztottak. Angolt 2-vel, németet 4-gyel kevesebben tanulják, mint a franciát. Hányan tanulják az egyes nyelveket, ha mindenki pontosan egy nyelvet tanul?

$$F + (F - 2) + (F - 4) = 25$$
$$3F - 6 = 25$$
$$3F = 31$$

Tehát nincs megoldás, mert a gyerekek száma nem lehet tört

b) 25 füzetet úgy kell elhelyezni három fiókban, hogy az alsóban kettővel, a középsőben néggyel több legyen, mint a legfelsőben. Hány füzet legyen az egyes fiókokban?

$$F + (F + 2) + (F + 4) = 25$$
$$3F + 6 = 25$$
$$3F = 19$$

Tehát nincs megoldás, mert a füzetek száma nem lehet tört

c) Egy 25 km-es távot 3 részletben futottunk végig. A második órában kétszer, a harmadikban pedig négyszer annyit futottunk, mint az elsőben. Mekkora távot teljesítettünk az első, a második, illetve a harmadik órában?

$$F + 2 \cdot F + 4 \cdot F = 25$$
$$7F = 25$$
$$F = \frac{25}{7} \text{ (km)}$$

d) Egy 25 hektáros erdőben háromféle fa van. A tölgyes területe két hektárral nagyobb, a bükkösé pedig két hektárral kisebb, mint a fenyvesé. Mekkora az egyes fafajtákra jutó terület?

$$F + (F - 2) + (F - 4) = 25$$
$$3F = 25$$
$$F = \frac{25}{3} \text{ (ha)}$$

9. Változtassátok meg az előző feladatban szereplő szövegek mindegyikében szereplő 25-ös számot olyanra, hogy mindegyiknek legyen megoldása! 21 vagy 42

Ezúttal az egyenletek nem ekvivalensek, de így is egy feladathoz több is rendelhető. A lényeg most is annak észrevétele, hogy a tanulók, vagy a füzetek száma nem lehet tört, míg távolság vagy terület esetén értelmezhető a törtszám, mint megoldás. A 25 helyére kerülő szám az egyenletek megoldása szerint 3 és 7 közös többszöröse kell, hogy legyen, tehát 21 vagy 42 elfogadható és kipróbálandó érték.

10. A következő feladatoknál gondoljátok meg, lehet-e a fák száma, illetve egy telek oldalának hossza tört szám?

a) Hány sorba helyezzünk el 100 fát egy négyzet alakú telken, ha minden sorban és oszlopban ugyanannyi fát akarunk elhelyezni? A fákat 10 · 10-es sorokba lehet rendezni.

A megoldáshoz a gyökvonás vezet el, de erre legfeljebb utalunk (mint korábban a hatványozás inverz művelete kapcsán). Valójában keressük azt a nem negatív egész számot, ami önmagával megszorozva 100-at ad, és ennek megtalálása a tanulóknak sem okoz gondot.

b) Hány sor legyen, ha 50 fát szeretnénk ültetni az előző feltételek szerint? Az egész számok körében nincs megoldása a feladatnak.

Az 50 fa esete becsapós, valószínűleg többen feleannyi sorral illetve oszloppal oldanák meg a feladatot, ami csak akkor gond, ha ellenőrzéssel nem veszik észre, hogy ez a megoldás nem jó. Miután próbálgatással rájönnek, hogy az egész számok körében nincs megoldása a feladatnak, összevetjük a következő feladattal. Mindkét esetben olyan számot keresünk, mely önmagával megszorozva 50-et ad.

c) Mekkora egy 50 m^2-es telek egy oldalának a hossza? Az egész számok körében nincs megoldása a feladatnak.

Négyzet esetén többféle módon is megközelíthetik a megoldást. Az egyik leglátványosabb, ha Cabri geometria programmal négyzetet szerkesztenek, kiíratva oldalát és területét, majd egyik csúcsát megragadva addig mozgatjuk azt, míg területe 50 egységnyi nem lesz. Ekkor leolvassuk az oldal hosszát, ami értelemszerűen 7-nél valamivel nagyobb lesz. Feladatunk ezúttal még nem az, hogy rávilágítsunk a szám irracionális voltára, hanem csak annyi, hogy létezik a feladatnak megfelelő szám. Azt azonban már most is hangsúlyozni kell, hogy a kapott érték nem pontos, tehát közelítő érték. Felkészültebb tanulók közt persze lehet, hogy lesz, aki azonnal előveszi a zsebszámológépét és gyököt vonva az 50-ből pontosabb értéket ad. Engedjük meg, hogy bemutassa eredményét, de tisztázzuk, hogy az ő eredménye sem a pontos érték.

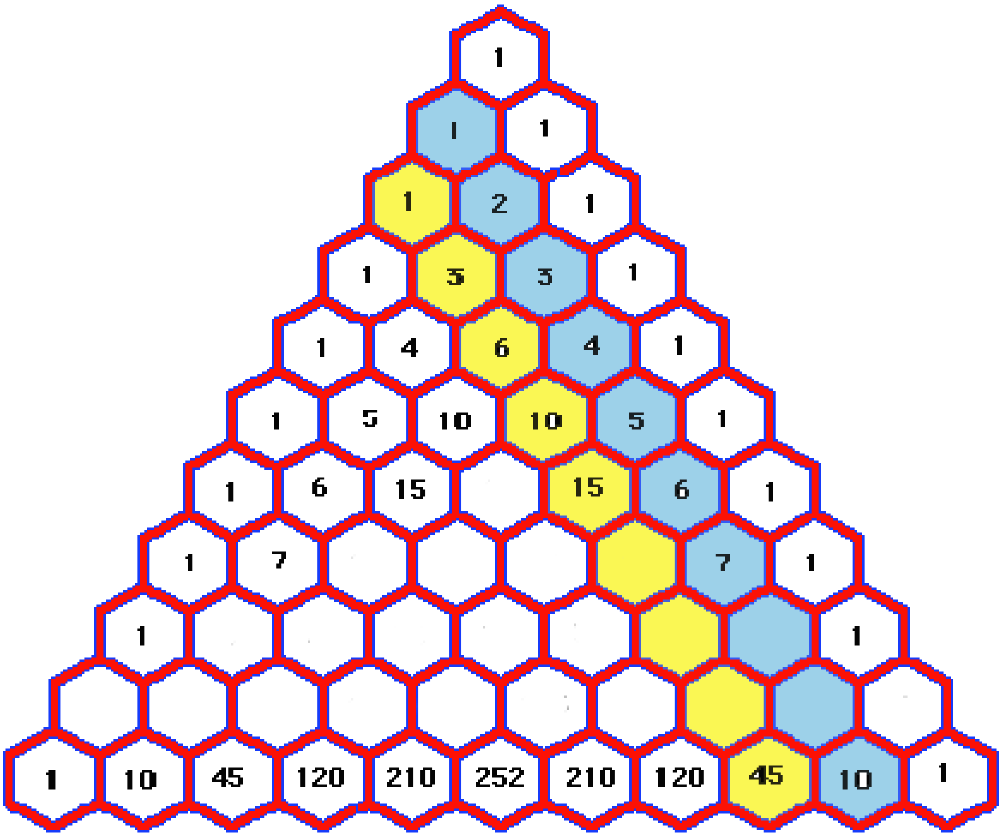
5. Különböző sorozatok képzése természetes számokkal, a Pascal-háromszög

Az alapműveletek gyakorlását a természetes számokkal kezdjük játékos, érdekes feladatok kapcsán, nemcsak a műveletvégzés gyakorlása, de egyéb kitekintések érdekében is. Használjuk ki a feladatok adta lehetőségeket csoport munkák szervezésére is!

9. FELADATLAP

Az alapműveletek gyakorlását a természetes számokkal kezdjük. Elsősorban sorozatok kapcsán nyílik alkalmatok számolni, de egyben gondolkodni is. Lehet fejben is számolni, írásban is, de keressetek lehetőségeket, amelyekkel megkönnyítitek a számolást.

1. Az itt látható Pascal-háromszögben könnyen felismerhető szabály szerint helyezkednek el a számok. Megtalálhatjátok benne a természetes számok sorozatát is. Írjátok be a hiányzó számokat a sejtekbe és ellenőrizzétek az utolsó sorral, hogy jól dolgoztatok-e! Adjátok össze az egy sorban lévő számokat! Hogy még mennyiféle érdekesség van benne, elrejtve annak felfedezése rátok vár.



A továbbiakban is természetes számokból képezünk különböző sorozatokat. Megvizsgáljuk a sorozatban szereplő számok tulajdonságait, megpróbáljuk felírni azokat valamilyen szabállyal.

2. Számoljatok fejben 13-tól 5-ösével, a kétjegyű számok körében! Mi lesz az utolsó tag?
13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63, 68, 73, 78, 83, 88, 93, 98
Lesz-e a sorozat tagjai közt:
a) törtszám;
b) negatív szám;
c) 5-nek többszöröse;
d) 10-nek hatványa;
a)-d): a sorozat képzési szabálya és a műveleti tulajdonságok miatt nem.
e) 8-cal osztható szám; Nem kizárt, a 88 ilyen, és persze lennének továbbiak is a 3-, 4- stb. jegyű tagok között.
f) 6-nak hatványa? Nem lesz, mert a 6 hatványai 6-ra végződnek, míg a sorozat tagjai 3-ra illetve 8-ra.
g) Mire végződik a legnagyobb háromjegyű, négyjegyű szám? A 10 hatványt megelőző számvégződések mindig 8-asok lesznek.

3. Fejben számoljatok, de írásban jegyezzétek le a tagokat! Folytassátok a sorozatot az utolsó tag duplázásával! Legyen a kiindulási szám:
a) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384...

b) 125, 250, 500, 1000, 2000, 4000, 8000, 16000, 32000, 64000, 128000, 256000...

c) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536, 3072, 6144, 12288, 24576...

d) 120, 240, 480, 960, 1920, 3840, 7680, 15360, 30720, 61440, 122880, 245760...

e) Van-e olyan szám, amelyik több sorozatban is előfordul?

Figyeljük meg a sorozat tagjainak számvégződését! A d) sorozat minden tagja 1 nullára végződik, a b) sorozat tagjai az első 3-at leszámítva 3 nullára. A másik két sorozatnak nem lesz nullára végződő tagja. Mivel a c) sorozat tagjai 3-nak többszörösei, míg az a) sorozat egyik tagja sem tartalmazhat 3-as prímtényezőt, ezért nem lesz olyan szám, ami több sorozatban előfordul. Legalább olyan fontos felismerni, hogy milyen kapcsolat van az első kettő és a második két sorozat tagjai közt, hiszen szembetűnő, hogy a b) sorozatban az a) sorozat tagjainak ezerszeresei, a d) sorozatban pedig a c) sorozat tagjainak tízszeresei jelennek meg.

f) Hányszorosa bármely tag a kettővel, hárommal előtte lévőnek?

4- illetve 8-szorosa, hiszen ismételt duplázásokkal kaptuk.

g) Hogyan lehet könnyen 2 hatványaival szorozni, osztani fejben?

Ismételt duplázásokkal, felezésekkel. Esetleg kitérhetünk az egyiptomiak szorzási módszerére.

4. Indulj ki a 33-ból! A következő tag legyen az előző 100-szorosa! Nevezd meg a sorozat első 6 tagját! Milyen írásmóddal lehetne könnyen és kevés számjegy felhasználásával az első 10 tagot leírni?

33, 3300, 330 000, 33 000 000, 3 300 000 000, 330 000 000 000, azaz
$3{,}3 \cdot 10^1$, $3{,}3 \cdot 10^3$, $3{,}3 \cdot 10^5$, $3{,}3 \cdot 10^7$, $3{,}3 \cdot 10^9$, $3{,}3 \cdot 10^{11}$, tehát a normálalak nyújtja a legegyszerűbb írásmódot.

6. A Collatz-probléma tárgyalása a természetes számok körében

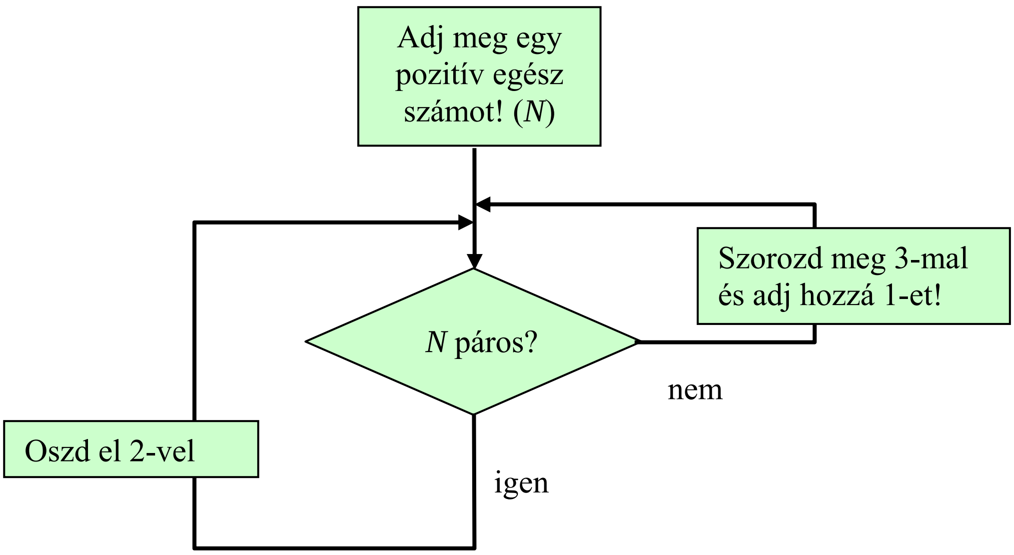
5. A következő feladatban több sorozatot is elindítunk, de mindegyikre ugyanazt a szabályt alkalmaztuk. Fedezd fel a szabályt, majd folytasd a sorozatokat!

a) 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1… 4, 2, 1, 4, 2, 1…

b) 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40… 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

c) 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53… 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

d) 128, 64, 32, 16… 8, 4, 2, 1



Alkalmazzátok a folyamatábrán feltüntetett eljárást a 28, 29, 30,… kezdőszámokkal és folytassátok a sorozatot! Mit figyelhettek meg?

Matematikusok feltételezik, hogy bármely pozitív egésztől indulva előbb-utóbb eljutunk az 1-hez. Aki egy szép hosszú sorozatra kíváncsi, próbálkozzon a 27, 31, 41, 47, 54, 55, 62, 63 kezdőszámok valamelyikével, de nem árt, ha tud programot írni hozzá, vagy legalábbis zsebszámológéppel is segíti munkáját.

A példák egy számtalan érdekességet felvonultató rekurziós sorozatot mutatnak meg. A szabály felismerése talán nem olyan egyszerű. Amit elsőre is megfigyelhetnek a tanulók, az az, hogy itt többféle szabály is megmutatkozik, hiszen a számok egy része feleződik, míg másik részükkel valami más történik. Ha alaposabban szemügyre veszik a számokat, hamar felfedezik, hogy a páros tagok feleződnek. A páratlan tagok pedig ugyanazon eljárással mindig párossá alakulnak. A szabály: szorozd meg 3-mal, majd adj hozzá 1-et. Maga a sorozat is innen kapta a nevét ($3N$+1), de emlegetik Collatz-problémaként is. A lényege kiderül a további példákból, miszerint bármely pozitív egésszel indított sorozat előbb-utóbb eléri az 1-et (ahonnan 4, 2, 1, 4, 2, 1-ként ismétlődik) Érdemes a sorozattal eljátszani, mert a fejszámoláson túl sok érdekességet fedezhetnek fel a tanulók:

– Olyan sorozat, melynek mindig „vége” van, amennyiben 1-hez érve állandó ciklusba kerülünk.
– Páratlan számot mindig páros követ, tehát a $3N + 1$ eljárás után mindig felezés következik.
– Kettő hatványból indulva állandó felezéssel jutunk az 1-hez.
– Az 1-ig szinte megjósolhatatlan hosszúságú sorozatok vezetnek, kivéve természetesen a 2 hatványaival indított sorozatok.
– Egymás melletti számok sokszor azonos hosszúságú sorozatot indítanak, de ezek eltérő utakat járhatnak be.

Ha a tanulók elégséges informatikai ismeretekkel rendelkeznek, például a feltételes utasítások terén, akkor akár Excelben is készíthetnek programot, mely elkészíti a sorozatot. Ez esetben érdemes lejegyezni hány lépés alatt jutottunk el egy számtól az 1-ig, vagy hogy melyik volt a sorozat során elért maximális szám.

Tanulságos, és egyben versenyfeladatnak is jó, ha a 28, 29, 30 számtól indítjuk a sorozatot (akár fejszámoltatással, akár le is jegyezhetik a tagokat). Valamennyi sorozatnak 19 tagja lesz.

28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1
30, 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

A sorozatokat írjuk fel a táblára egy sorba legalább addig, amíg különböznek a tagok. Érdemes megfigyelni a két alsó sorozat viselkedését, hiszen többször kerülnek egymás közelébe, de azután elválnak egymástól és csak a 40-től közös az útjuk. Hasonló érdekességek sokkal nagyobb számoknál még feltűnőbbek.

A 27 az első kellemetlen szám, mert hosszas fel-le ugrálás után csak 112. tagként kerül elő az 1 és eközben maximális értékként 9232-ig jut el a sorozat. Ilyen rázós kezdőszámok még a 31, 41, 47, 54, 55, 62, 63… Ami izgalmassá teheti a problémát, hogy még nem bizonyított az állítás, miszerint minden kezdőszám előbb-utóbb eljut az 1-hez.

Ugyanezen az órán lehetőség van további figurális számok felfedezésére is. Az ábrák alapján írják fel a sorozatok néhány tagját. Folytatható a sorozat különbségi sorozatok segítségével is, hiszen azok mind számtani sorozatok lesznek. Elszántabbaknak megmutathatjuk a sorozatot generáló képletet is, melybe a természetes számokat helyettesítve megkapjuk a sorozat tagjait. Ez is jó alkalmat ad a számolási készség fejlesztésére, a helyettesítési érték fogalmát is mélyíthetjük általa.

7. Számolási gyakorlatok

10. FELADATLAP

A következő feladatokkal a fejszámolást és írásbeli számolást gyakorolhatjátok.

1. Ezeket a feladatokat fejben próbáljátok kiszámolni!

a) $10 – 9 + 8 – 7 + 6 – 5 + 4 – 3 + 2 – 1 = 5$ (különbségeket zárójelezhetjük)
b) $100 – 99 + 98 – 97 + 96 – ... – 3 + 2 – 1 = 50$ (különbségeket zárójelezhetjük)
c) $(10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) : (5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) = 240$ (egyszerűsítés után)
d) $1000 – 25 \cdot 8 + 37 \cdot (45 – 15 \cdot 3) = 800$ (zárójeles kifejezés értéke 0)

2. Ezeket a feladatokat írásban számítsd ki!
(sajátos eredményeket adó feladatok, könnyű ellenőrizni és motiváló is lehet)

a) 18 693 + 222 222 + 6 178 839 + 1 234 567 =	7 654 321
b) 654 321 + 456 790 + 123 456 =	1 234 567
c) 3 688 214 – 2 453 647 =	1 234 567
d) 9 526 969 – 1 872 648 =	8 654 321
e) 1 279 463 – 723 908 =	555 555
f) 617 · 40 =	24 680
g) 367 · 37 =	13 579
h) 402 859 · 19 =	7 654 321
i) 9721·127 =	1 234 567
j) 172 205 : 31=	5555
k) 96 252 : 78=	1234
l) 298 845 : 29 =	10 305

Az eddigi feladatokban természetes számok szerepeltek. Foglaljuk össze a legfontosabb ismereteket ezekről a számokról:

ÖSSZEGZÉS:

A természetes számokhoz dolgok megszámlálásával juthatunk el.
Megállapodás szerint a 0-t is természetes számnak tekintjük.
A természetes számok jele: **N**
Bármely két természetes számot összeadva, vagy összeszorozva mindig természetes számot kapunk.

A kivonás és osztás elvégezhetőségéhez bővítenünk kell a természetes számok halmazát!

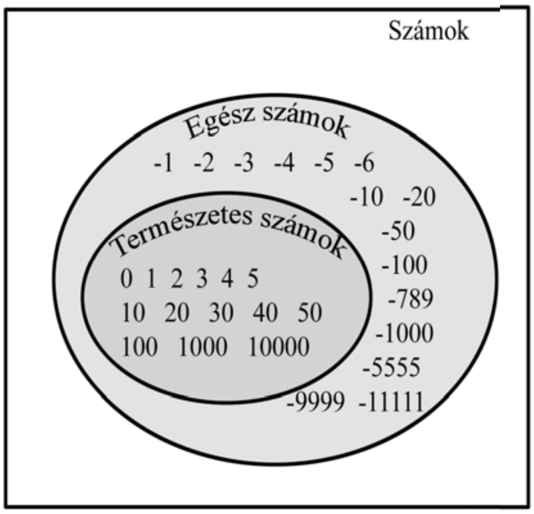
III. Az egész számok

A természetes számok halmazából kilépve az egész számok körében folytatjuk a számolást. Itt már fontos feleleveníteni olyan szabályokat, melyek a negatív számok megjelenésével kerültek bevezetésre. Nagyon fontos időt szánni a többtagú összegek összevonására, ennek egyenletmegoldásnál nagy szerepe lesz. Ugyancsak elmélyítendő a szorzatok kiszámítása, döntően az előjel megállapítása, amit a hatványozással is mélyíthetünk. Alkalmazzuk a szabályok megfogalmazásánál, a „hogyan számoltál…” kérdések megválaszolásánál az **ellentett** és az **abszolút érték** fogalmakat!

1. Kivonással a negatív számok világába

Láttuk, hogy a kivonással kijutunk a természetes számok köréből. Hogy ne kelljen korlátokat szabni ennek a műveletnek, kibővítjük a természetes számok halmazát a negatív egész számokkal.
A pozitív és negatív számokat előjelük segítségével különböztethetjük meg. Az előjelet csak negatív számoknál kell kitenni, de pozitív számok esetén is használhatjuk, különösen, ha hangsúlyozni kívánjuk pozitív előjelét. Gyakran halljuk, olvassuk ezt téli időszakokban, amikor a hőmérsékletet előjeles számmal adják meg. Nyárra ez feleslegessé válik.

A negatív számok meglehetősen későn kaptak szerepet a matematikusok közt. Csak a középkor vége felé, a XII–XV. században kezdték használni ezeket, mint hiányt jelentő számokat. Az 1500-as évek legnagyobb matematikusai Cardano, Stifel nem létező (fiktív), vagy abszurd számoknak nevezték, de 100 évvel később még Descartes (ejtsd: Dékár) is a hamis jelzővel illette a negatív számokat. Érdekes, hogy ezer évvel korábban az indiai matematikusok már használták a negatív számokat, és minden műveletet elvégeztek velük. Európában egy ideig „p” és „n” betűkkel különböztették meg a pozitív és negatív számokat, a + és – előjelek is csak az 1500-as években terjedtek el.



Milyen területeken használják napjainkban a negatív számokat? Sorolj fel néhányat, és azt is tedd hozzá, milyen nagyságúak ezek a számok!
Például:
Hőmérséklet: ennek van alsó határa, –273° , ami érdeklődést és értetlenséget válthat ki.
Tengerszinthez viszonyított magasság: a Mariana-ároké –11 033 m (ezt tenger borítja), a Holt-tengernek pedig a felszíne van –397 m-en.
Egy ország költségvetése: amely negatív érték esetén azt jelenti, hogy az ország abban az évben többet költött, mint amennyit megtermelt.
Kereshetnek aktuális értékeket.

Milyen mennyiségek nem vehetnek fel negatív értékeket?
Például egy halmaz elemeinek száma, vagy a tömeg, de mindenképpen említsük meg a hosszúságot (abszolút érték kapcsán különösen fontos), a területet vagy a térfogatot!

A tananyag elsősorban az előző években megszerzett ismeretek felelevenítését, elmélyítését szolgálja, de új szempont, hogy a természetes számok vizsgálatához hasonlóan azt is vizsgáljuk, mely műveletekre zárt, illetve mely művelet vezet ki a halmazból.

2. Számok ellentettje, számok abszolút értéke

11. FELADATLAP

Elevenítsünk fel két korábban tanult fogalmat!

1. Figyeljétek meg a következő szám párokat: (5 ; –5), (20 ; –20), (–11 ; 11), (a ; $-a$)
a) Milyen művelettel kaphatod meg az első számból a másodikat? –1-gyel való szorzással.
b) Milyen művelettel kaphatod meg a másodikból az elsőt? –1-gyel való szorzással.
c) Mennyi lesz ezeknek a szám pároknak az összege? 0

d) Van-e párja a 0-nak? Mi lesz a párja? A 0 párja a 0.
e) Hogyan nevezzük ezeket a szám párokat? Ellentett szám párok.
f) Mi lesz bármely szám ellentettjének az ellentettje? Igazold az előzőek alapján!
Maga, a szám.

Az a), b) kérdésre más válasz is lehet jó, például észrevehetik, hogy a szám ellentettjét úgy is megkaphatjuk, ha kivonjuk belőle a szám kétszeresét. Felfedezhetik a tanulóink, hogy a számegyenesen a 0-ra való tükrözéssel is megkaphatják egy szám ellentettjét. Az is helyes, ha azt mondják, hogy a szám elé tett negatív előjel is az ellentettjéhez vezet. Az f) kérdésre a fentiekből bármelyiket alkalmazhatjuk bizonyításként.

2. Milyen közös tulajdonsága van a 25 – 15 és a 15 – 25 kivonások eredményének?
25 – 15 = +10,
15 – 25 = –10
A két eredmény csak az előjelében tér el.
A két eredmény a számegyenesen egyenlő távolságra helyezkedik el a nullától.

TUDNIVALÓ:

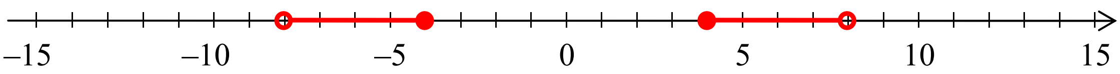
Két számot egymás ellentettjének nevezzük, ha csak előjelükben térnek el egymástól.
Egy szám ellentettjét –1-gyel való szorzással is megkaphatjuk.
A számegyenesen a 0-tól egyenlő távolságra található számok egymás ellentettjei.
Ellentett számok összege 0.

3. Mely számok találhatók a számegyenesen a 0-tól 25, 12, 1, 0, illetve –1 egységnyire?
25 egységre: 25 és –25; 12 egységre: 12 és –12; 1 egységre: 1 és –1;0 egységre: csak a 0; –1 egységre: ilyen szám nincs, mert a távolság nem lehet negatív szám

4. Sorold fel azokat az egész számokat, melyek 5 egységnél közelebb vannak a 0-hoz!
-4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4

5. Hány olyan egész szám van, amelynek távolsága legfeljebb 10 egység a 0-tól?
21 ilyen szám van: ±10; ±9; ... ; ±1; 0.

6. Színezd ki a számegyenesen azokat a számokat, melyek a 0-tól legalább 4, de kevesebb, mint 8 egységre vannak!



7. Fogalmazd át a 3-6 feladatok szövegét úgy, hogy az abszolút érték fogalmát is felhasználod!
Mely számok abszolút értéke: 25, 12, 1, 0 illetve –1?
Sorold fel azokat az egész számokat, melyek abszolút értéke kisebb, mint 5!
Hány olyan egész szám van, amelynek abszolút értéke legfeljebb (nem nagyobb, mint) 10?
Színezd ki a számegyenesen azokat a számokat, melyek abszolút értéke legalább 4, de kisebb, mint 8!

8. Írj fel nyitott mondatokat, melyek megoldásait (vagy azok számát) a 3 - 6. feladatok adják:
$|x| = 25$, $|x| = 12$, $|x| = 1$, $|x| = 0$, $|x| = -1$,
$|x| < 5$
$|x| \le 10$
$4 \le |x| < 8$

TUDNIVALÓ:

Egy szám abszolút értékén a számegyenesen a nullától való távolságát értjük.
Egy szám abszolút értéke negatív szám esetén a szám ellentettje, egyébként önmaga.
Egy szám vagy kifejezés (x) abszolút értékének jele: $|x|$

3. Változatos feladatok a fogalmak elmélyítésére, a műveletek értelmezésére

12. FELADATLAP

1. Az abszolút érték és az elletett fogalmak ismeretében válaszolj a kérdésekre!

a) Hány olyan szám van, aminek az ellentettje 100? 1, *a* –100
b) Hány olyan szám van, aminek az abszolút értéke 100? 2, *a* 100 és *a* –100
c) Hány olyan szám van, aminek az ellentettje –100? 1, *a* 100
d) Hány olyan szám van, aminek az abszolút értéke –100? nincs
e) Mely számok nagyobbak az ellentettjüknél? a pozitívak
f) Mely számok kisebbek az abszolút értéküknél? a negatívak
g) Melyik szám nagyobb 12-vel az ellentettjénél? 6
h) Melyik szám kisebb 8-cal az abszolút értékénél? –4

2. Mi lehetett a szám, ha:

a) hozzáadtam az abszolút értékét, így 0-t kaptam, bármely negatív szám
b) hozzáadtam az ellentettjét, így 0-t kaptam, bármely szám
c) kivontam az ellentettjét , így nullát kaptam, csak a 0
d) hozzáadtam az abszolút értékét és az ellentettjét, így 0-t kaptam. csak a 0

3. Mely egész számokra igazak a következő állítások?

a) $|x| = x$ — $x \geq 0$
b) $x + (-x) = 10$ — Ø
c) $x + |x| = 10$ — $x = 5$
d) $x - 2 \cdot x = -x$ — azonosság
e) $x > |x|$ — Ø
f) $|x| < 5$ — $-5 < x < 5$
g) $|x| < -5$ — Ø
h) $-x > x$ — $x < 0$

4. Igaz vagy hamis? Hasonlítsátok össze a természetes számok, a negatív egészek és az egész számok halmazát a következő állítások alapján! Az utolsó sorhoz keressetek olyan állítást, amire teljesülnek a feltételek!

	Pozitív egészek	Negatív egészek	Egész számok
Végtelen sok eleme van.	I	I	I
Van legnagyobb eleme.	H	I	H
Bármely eleménél van kisebb eleme.	H	I	I
Bármely elemének abszolút értéke is benne van.	I	H	I
Bármely elemének ellentettje is benne van.	H	H	I
Bármely két elemének összege is benne van.	I	I	I
Bármely két elemének szorzata is benne van.	I	H	I
Bármely két elemének hányadosa is benne van.	H	H	H
Minden eleme természetes szám	I	H	H
Például: Bármely két elemének szorzata pozitív. Nincs két olyan eleme, amelynek összege 0.	I	I	H

ÖSSZEGZÉS:

A természetes számok halmazát a negatív egész számokkal kiegészítve az egész számok halmazához jutunk. Az egész számok halmazának jele: **Z**
Az egész számok összege, szorzata és különbsége is mindig egész számot eredményez.

Az egész számokra érvényes műveleti szabályok gyakorlására az óra további részében és házi feladatként a 13. feladatlap feladataiból lehet válogatni.

13. FELADATLAP

1. Fejben számoljatok! Hogyan kapjátok meg a különbséget?

12 – 15 = –3 100 – 101 = –1 499 – 1000 = –501
1 – 1 000 000 = –999 999 666 – 777 = –111 1234 – 5678 = –4 444

Mindenképpen fogalmazzák meg, hogy a nagyobb számból vonták ki a kisebbet, és ennek a számnak vették az ellentettjét. Gyakori hiba, hogy írásbeli kivonásnál akkor is felülre írják a kisebbítendőt, ha az kisebb. Ebben az esetben többnyire rosszul számolnak.

2. Keressük meg a nyitott mondatok megoldását!

a) $20 - a = -5$ $5 - b = -20$ $100 - c = -100$ $0 - d = -1234$
$a = 25$ $b = 25$ $c = 200$ $d = 1234$

Fontos észrevenni, hogy rendre pozitív számokat vontunk ki a kisebbítendőből (különben nem kaphattunk volna negatív számot). A kivonandó a kisebbítendő és a maradék különbségéből adódik. Nem probléma, ha néhány tanuló két lépésben jut el a megoldásig, tehát először nulláig, majd onnan tovább. Ez hasznosabb, mintha formálisan összeadja az egyenletben szereplő két szám abszolút értékét.

b) $a - 20 = -5$ $b - 5 = -2$ $c - 379 = -379$ $d - 50 = -100$
$a = 15$ $b = 3$ $c = 0$ $d = -50$

A megoldás itt se formálisan, mechanikusan történjen. A –5 különbség azt jelenti, hogy a 20-at nála 5-tel kisebb számból vontuk ki stb.… Ez esetben az utolsó egyenlet is kezelhetőbb: az 50-et nála 100-zal kisebb számból vontuk ki, melyik az 50-nél 100-zal kisebb szám?

3. Írjunk fel négy kivonást, melyeknek eredménye –20! Az elsőnek pozitív szám legyen a kisebbítendője a másodiknak negatív! A harmadiknál a kisebbítendő, a negyediknél a kivonandó legyen nulla!

16 – 36 = –20 –16 – 4 = –20 0 – 20 = –20 –20 – 0 = –20

A feladat az előzőben felismertek (ismételtek) elmélyítését szolgálja. Emellett a kivonás szereplőinek neveit is erősítjük.

4. Van-e legnagyobb illetve legkisebb egész szám? Se legnagyobb, se legkisebb nincs.

5. Melyik a legkisebb pozitív egész? +1.

6. Melyik a legnagyobb negatív egész? –1

7. Mindegyik feladathoz használjatok számegyenest!

a) Jelöljétek be a számegyenesen a –6-nál nagyobb negatív egészeket! Hány számot találtatok?
–5, –4, –3, –2, –1, tehát 5 db

b) Jelöljétek be a számegyenesen a 4-nél kisebb pozitív egészeket! Hány számot találtatok?
3, 2, 1

c) Jelöljétek be a számegyenesen a –4-nél nagyobb egészeket! Hány ilyen szám van?
–3, ––2, –1, 0, 1… végtelen

d) Jelöljétek be a számegyenesen az 5-nél kisebb egészeket! Hány ilyen szám van?
4, 3, 2, 1, 0, –1, –2…végtelen

e) Karikázzátok be a számegyenesen pirossal a –7-nél nagyobb egészeket, kékkel a 3-nál kisebb egészeket! Mely számokat karikáztátok be mindkét színnel?
–6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2

f) Karikázzátok be a –3-nál nem kisebb egészeket pirossal, a 3-nál nem nagyobb egészeket kékkel! Hány számot karikáztál be mindkét színnel?
–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 tehát 7 db számot

8. Mely egész számok teszik igazzá a következő állításokat?

$0 < a < 5$	$-3 < b < 2$	$-10 \le c < -7$
a = 1, 2, 3, 4	b = –2, –1, 0, 1	c = –10, –9, –8, ;
$-503 < d \le -499$	$-1 \le e \le 1$	$-3 > f > 13$
d = –502, –501, –500, –499;	e = –1, 0, 1	$f = \emptyset$

9. Hány megoldása van az egyenlőtlenségeknek az egész számok körében?

$-20 < a < 20$	$-100 \le b \le 100$	$-500 \le c < 0$
39	201	500
$-45 \le d < -55$	$-10^9 < e < 10^9$	
100	$2 \cdot 10^9 - 1 = 1\,999\,999\,999$	

4. Alapműveletek értelmezése

A természetes számok halmazából kilépve az egész számok körében folytatjuk a számolást. Itt már fontos feleleveníteni olyan szabályokat, melyek a negatív számok megjelenésével kerültek bevezetésre. Nagyon fontos időt szánni a többtagú összegek összevonására, ennek az egyenletmegoldásnál nagy szerepe lesz. Ugyancsak elmélyítendő a szorzatok kiszámítása, döntően az előjel megállapítása, amit a hatványozással is mélyíthetünk. Alkalmazzuk a szabályok megfogalmazásánál, a „hogyan számoltál?…” kérdések megválaszolásánál az ellentett és az abszolút érték fogalmakat!

A természetes számok körében nem kellett szabályokat megfogalmazni a műveletek értelmezésére, elvégzésére. Ha a negatív számokat is bevonjuk, akkor az alapműveletek részben új értelmet nyernek. Emlékezzetek az első csodálkozásra, amikor kiderült, hogy hozzáadással is csökkenhet és elvétellel is növekedhet egy mennyiség, gondoljunk csak az adósságra és vagyoni helyzetünkre! Az összeadás és kivonás műveleténél új szabályokat fogalmaztunk meg, amelyek a negatív számok hozzáadását, kivonását tették lehetővé. A szorzás új értelmet nyert, hiszen a negatív egésszel történő szorzás már nem írható fel összeadásként. A hatványozás is új problémákat vetett fel akár az alap, akár a kitevő helyére került negatív egész szám.

14. FELADATLAP

1. Töltsétek ki a táblázatokat! Indokoljátok meg, mely feltételek mellett kerülnek bizonyos cellákba azonos számok!

a)

a	b	$a + b$	$\lvert a + b\rvert$	$\lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	$\lvert a\rvert + b$	$a + \lvert b\rvert$	$-\lvert a\rvert + b$
–5	+8	3	3	13	13	3	3
–9	+2	–7	7	11	11	–7	–7
–10	–4	–14	14	14	6	–6	–14
+2	–8	–6	6	10	–6	10	–10

b)

a	b	$a - b$	$b - a$	$\lvert a - b\rvert$	$\lvert b - a\rvert$	$\lvert a\rvert - \lvert b\rvert$	$\lvert b\rvert - \lvert a\rvert$	$\lvert a\rvert - b$
–5	+8	–13	13	13	13	–3	3	–3
–9	+2	–11	11	11	11	7	–7	7
–10	–4	– 6	6	6	6	6	– 6	14
+2	–8	10	–10	10	10	–6	6	10

c)

a	b	$a \cdot b$	$\lvert a \cdot b\rvert$	$\lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	$\lvert a\rvert \cdot b$	$a \cdot \lvert b\rvert$
–5	+8	–40	40	40	40	–40
–9	+2	–18	18	18	18	–18
–10	– 4	40	40	40	–40	–40
+2	–8	–16	16	16	–16	16

2. Végezd el a következő műveleteket!
(Használjátok ki, hogy a feladatokban azonos abszolút értékű számok szerepelnek, így egyrészt fejben számolhattok, másrészt az eredményeket megfelelő módosítással felhasználhatjátok a későbbi feladatokban! A műveletek elvégzésekor fogalmazzátok meg az alkalmazandó szabályt!)

a) $+65 + (+13) = +78$
$-65 + (+13) = -52$

$+65 + (-13) = +52$
$-65 + (-13) = -78$

b) $+65 - (+13) = +52$
$-65 - (+13) = -78$

$+65 - (-13) = +78$
$-65 - (-13) = -52$

c) $+65 \cdot (+13) = 845$
$(-65) \cdot (+13) = -845$

$+65 \cdot (-13) = -845$
$(-65) \cdot (-13) = 845$

d) $+65 : (+13) = +5$
$(-65) : (+13) = -5$

$+65 : (-13) = -5$
$(-65) : (-13) = +5$

e) $+65 : 0 =$ nincs értelmezve
$(-65) : 0 =$ nincs értelmezve

$0 : 13 = 0$
$0 : 0 =$ nincs értelmezve

3. Oldd meg a nyitott mondatokat!
(A nyitott mondatok igazzá tételénél alkalmazzátok az előbb használt szabályokat!)

$+9 + a = +5$; $a = -4$	$-9 + b = -7$; $b = +2$	$-2 + c = -8$; $c = -6$	$+15 + d = -15$; $d = -30$	$-77 + e = 0$ $e = +77$
$f - (+9) = -3$; $f = +6$	$g - (+7) = -9$; $g = -2$	$-5 - h = -20$; $h = +15$	$+3 - i = +8$; $i = -5$	$-11 - j = +11$ $j = -22$
$(+25) \cdot k = -75$; $k = -3$	$(-11) \cdot m = +77$; $m = -7$	$n \cdot (-6) = -48$; $n = +8$	$(-33) \cdot p = 0$; $p = 0$	$q \cdot q = -9$ nincs megoldás

$-60 : s = -6$; $s = 10$	$-49 : t = +7$; $t = -7$	$u : (-3) = -6$; $u = +18$	$v : (+5) = -5$; $v = -25$	$x : (-9) = 0$; $x = 0$	$(-5) : y = 0$ nincs megoldás

5. Többtagú összegek, összevonás

Egy feladat megoldása során több műveletet tartalmazó műveletsorral is találkozhatunk. A következő számkifejezések ilyenek.

4. Végezd el az összevonásokat!
(Csoportosítsd előjel szerint a számokat, majd a kapott két különböző előjelű összeggel számolj tovább!)

$33 + (-7) + (-11) + 20 + (-41) = -6$
$(-48) + (-50) + 26 + (-66) + (-100) = -238$
$(-28) + 21 + 70 + (-9) + 58 = 112$
$123 + 248 + (-73) + 301 + (-473) = 126$

5. Végezd el az összevonásokat!
(Ha figyelmesen megnézitek a tagokat, akkor kiderül, hogy lehetőség van a számolás megkönnyítésére.)

$100 + (-55) + 30 + 25 + (-101) = -1$
$(-20) + 30 + 40 + (-50) + 60 = 60$
$(-45) + 30 \;\; (-70) + (-25) + 40 = -70$
$333 + 444 + 555 + (-777) + (-500) = 55$

6. Írd át az kivonásokat összeadássá! Utána számolj az összeadásnál ismételtek szerint!

$25 - (-12) - (-8) + 13 = 25 + 12 + 8 + 13 = 58$
$(-10) + 18 - (-7) = -10 + 18 + 7 = 15$
$100 - (-30) + 25 + 5 - 20 = 100 + 30 + 25 + 5 + (-20) = 140$
$-8 - 5 - (-11) + 9 + (-11) = -8 + (-5) + 11 + 9 + (-11) = -4$

7. Írd át a műveletsort, hogy csak pozitív számok szerepeljenek benne! Ezután lépésről lépésre számolj!

$3 + (-5) - (-7) - 2 = 3 - 5 + 7 - 2 = 3$
$-9 + (-6) - (-7) + 3 + (-2) - (-10) = 0 - 9 - 6 + 7 + 3 - 2 + 10 = 3$

8. Oldd meg az egyenleteket! A megoldás előtt végezd el a lehetséges műveleteket!

$(-35) + (-40) + x = 0$	$x = 75$
$75 + (-30) + x = 100$	$x = 55$
$(-56) + 46 + (-20) + x = -76$	$x = -46$
$100 + (-55) + 30 + 25 + (-101) + x = 0$	$x = 1$

6. Többtényezős szorzatok, hatványozás

9. Végezd el a szorzásokat!
(Előbb állapítsd meg a szorzat előjelét, utána számold ki az abszolút értékét!)

$4 \cdot 5 \cdot (-3) \cdot 10 = -600$ $(-5) \cdot (-3) \cdot (-10) \cdot 4 = -600$

$(-2) \cdot (-4) \cdot (-25) \cdot (-7) = 1400$ $(-4) \cdot 7 \cdot 2 \cdot (-25) = 1400$

10. Végezd el a szorzásokat! Határozd meg a szorzatok előjelét többféleképpen!
(Összeszámolhatjuk a negatív tényezőket, figyelembe véve a negatív alaphoz tartozó kitevőket.)

$(-2)^3 \cdot 3^2 = -72$ $(-2)^4 \cdot (-5)^2 = 400$

$(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 \cdot (-5)^9 = 10^9$ $(-1)^{111} \cdot (-111)^1 = 111$

7. Több műveletet tartalmazó kifejezések, műveleti sorrend, zárójelek szerepe

11. Végezd el a műveleteket! (Ügyelj a sorrendre!)

$(-10) + (-3) \cdot (-5)^2 = -10 + (-75) = -85$

$\{(-10) + (-3)\} \cdot (-5)^2 = (-13) \cdot 25 = -325$

$(-10) + \{(-3) \cdot (-5)\}^2 = -10 + 15^2 = 215$

$\{-10 + (-3) \cdot (-5)\}^2 = (-10 + 15)^2 = 25$

IV. A törtek

1. Osztással a tört számok világába

Az osztás több szempontból is különleges szerepet tölt be az alapműveletek körében. Ez a művelet nemcsak a természetes, de az egész számok köréből is kivezet. Az alábbi osztások közül válasszuk ki azokat, melyek hányadosa nem egész szám:

12345 : 5 =	54321 : 4 =	3333 : 10 =
77777 : 7 =	120 : 61 =	1234 : 4321 =

Az eddig megszerzett számelméleti ismeretek alapján oldják meg a feladatot! 5 és 10 többszöröseit könnyen felismerik, a 4 többszörösei páros számok, a csupa egyforma számjegyből álló számok oszthatók a számjeggyel, egy számnak a felénél nagyobb számok közt csak önmaga lehet osztója.

Ha nem akarunk az egész számok köréből kilépni, akkor maradékos osztást is végezhetünk. A maradék lehetővé teszi, hogy „kijátsszuk” az osztás, egész számok köréből történő kilépését.

Ez tette lehetővé, hogy az osztással már alsó tagozatban is foglalkozzunk, de ennek az volt az ára, hogy az eredmény – a hányados – mellett megjelent a maradék. Az oszthatóságra, maradékokra a matematika egy külön fejezete, a számelméletet szól.
Ha meg kívánunk szabadulni a maradékoktól, akkor az osztás elvégzéséhez az egészeket ki kell egészítenünk a tört számokkal.
Bármely osztás eredményét felírhatjuk tört alakban úgy, hogy az osztandót a számlálóba, az osztót a nevezőbe írjuk. Az így kapott törtet persze egyszerűsíthetjük is.

15. FELADATLAP

1. Írjátok fel törtként a hányadosokat, majd egyszerűsítsetek, ha lehet:

$32:10=\frac{32}{10}=\frac{16}{5}$ $50:15=\frac{50}{15}=\frac{10}{3}$ $63:14=\frac{63}{14}=\frac{9}{2}$

$60:7=\frac{60}{7}$ $45:9=\frac{45}{9}=\frac{5}{1}=5$ $100:99=\frac{100}{99}$

Láthatjátok, hogy minden osztáshoz tartozik egy tört alak, még ahhoz is, amelyiknek eredménye egész szám.
A két egész szám hányadosával előálló számokat racionális számoknak nevezzük.
A hányadost megkaphatjuk tizedes tört alakban is, ha az írásbeli osztást folytatjuk az egész rész után. A legtöbb számológép vagy matematikai program is tizedes törtként adja meg a hányadost.
A kivonáshoz hasonlóan az osztásnál sem cserélhetők fel a műveletben szereplő számok. Nézzük meg, hogyan változik a hányados, ha felcseréljük az osztandót és az osztót!

2. Számok reciproka, reciprok szám párok tulajdonsága

2. Végezd el az osztásokat! A hányadosokat tizedes törttel add meg! Majd szorozd össze a két hányadost!

8 : 5 = 1,6 5 : 8 = 0,625 1,6 · 0,625 = 1

Ha jól számoltál, akkor eredményül 1-et kaptál.
Még szembetűnőbben mutatkozik ez meg, ha az osztások eredményét törtként írjuk le:
$8:5=\frac{8}{5}$ $5:8=\frac{5}{8}$ $\frac{8}{5}\cdot\frac{5}{8}=\frac{40}{40}=1$

TUDNIVALÓ:

Két számot reciprok számoknak nevezünk, ha szorzatuk 1.

3. Írd a számok mellé a reciprokukat!

a) $\frac{4}{5}\leftrightarrow\frac{5}{4}$ $\frac{7}{15}\leftrightarrow\frac{15}{7}$ $\frac{99}{20}\leftrightarrow\frac{20}{99}$ $\frac{17}{25}\leftrightarrow\frac{25}{17}\leftrightarrow\frac{17}{25}$

b) Hogyan kaphattuk meg ezeknek a számoknak a reciprokát? Mit tükröz az utolsó példa? Fogalmazd meg!
Egy tört alakban írt szám reciprokát a számláló és a nevező felcserélésével kaphatjuk, amiből következik, hogy ha egy szám reciprokának vesszük a reciprokát, akkor visszakapjuk az eredeti számot.

c) Ezeknek a számoknak a reciprokát is számold ki!

$1,3 \leftrightarrow \frac{10}{13}$ $3\frac{4}{5} \leftrightarrow \frac{5}{19}$ $0,4 \leftrightarrow \frac{5}{2}$ $2,5 \leftrightarrow \frac{2}{5}$ $5 \leftrightarrow \frac{1}{5}$ $123 \leftrightarrow \frac{1}{123}$

Mennyiben nehezebb ez a feladat az előzőnél, hogyan hidalható át a nehézség?
Találtál-e az adott számok közt olyanokat melyek egymás reciprokai? Hogyan írható fel könnyen egy egész szám reciproka?
A számok nem tört alakban szerepelnek, így az előző formában nem kapható közvetlenül meg a reciprok. Előtte tehát tört alakra hozzuk a tizedes törteket. Az egész számokat 1 nevezőjű törtekként írhatjuk fel. A megoldásokból (is) látszik, hogy a 0,4 és a 2,5 egymás reciproka.

4. Van-e reciproka a 0-nak? Indokoljátok a választ!
Mivel egy számnak és reciprokának szorzata 1, ezért nullának nem lehet párja. Ha 0 az egyik tényező, akkor a szorzat nem lehet 1. Másrészt a 0 reciproka formailag $^1/_0$ lenne, ami nem értelmezhető.

5. Van-e olyan szám, ami megegyezik a reciprokával?
Az $a \cdot a = 1$ egyenletnek két megoldása van, az 1 és a –1. Mindkettő egyenlő a reciprokával.

3. Reciprok és ellentett szám párok párhuzamba állítása

6. Az ellentettről és a reciprokról tanultakkal egészítsd ki a táblázat hiányos mondatait!

Ha két szám egymás ellentettje, akkor összegük 0.	Ha két szám egymás reciproka, akkor szorzatuk 1.
Ha két szám összege 0, akkor a két szám egymás ellentettje.	Ha két szám szorzata 1, akkor a két szám egymás reciproka.
Az egyetlen szám, amely egyenlő az ellentettjével, a 0.	Az egyetlen pozitív szám, amely egyenlő a reciprokával, az 1.
Ellentett számok csak előjelükben különböznek, abszolút értékük megegyezik.	Egy szám reciprokát a számláló és nevező felcserélésével kaphatjuk meg.
Egy szám ellentettjének az ellentettje maga a szám.	Egy szám reciprokának a reciproka a maga szám.
Ha egy számot a-val jelölünk, akkor az ellentettje –a. Az a bármilyen szám lehet.	Ha egy számot a-val jelölünk, akkor az a reciproka: $\frac{1}{a}$. Az a nem lehet nulla.
Egy szám ellentettjét (–1)-gyel való szorzással kapjuk. (Megkaphatjuk úgy is, hogy kivonjuk a számból a kétszeresét.)	Egy szám reciprokát a (–1)-edik hatványa adja. (Pozitív szám esetén megkaphatjuk úgy is, hogy elosztjuk a számot a négyzetével.)

Az ellentett és a reciprok szám párok tulajdonságainak párhuzamba állítása nagyon fontos tevékenység. Nemcsak az ismeretek elmélyítését segíti, de előkészíti a matematikai struktúrák megalapozását is az additív és multiplikatív inverz elem képzésével a neutrális elem szerepének bemutatásával.

V. Műveletek a racionális számkörben

1. A törttel való szorzás és osztás értelmezésének felelevenítése; a százalék, mint a tört lehetséges írásmódja

A racionális számok körében mindegyik alapművelet elvégezhető. Egyes a műveletek azonban új értelmet nyerhetnek. Már a negatív számmal való szorzás sem volt visszavezethető azonos tagok összegére és ugyanez a helyzet fennáll a törttel való szorzásnál is.
Például:

$\frac{2}{3}\cdot 4=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=???$

Törttel való szorzás nem értelmezhető összeadásként, mert a tagok **száma** nem lehet tört. Ezért új értelmezést adtunk a törttel való szorzásnak:

$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$ jelentése: $\frac{2}{3}$-nak a $\frac{3}{4}$ része.

TUDNIVALÓ:

Bármely szám törttel adott részét a törttel való szorzással kapjuk meg.

Például:

5-nek a $\frac{3}{4}$ része: $5\cdot\frac{3}{4}=\frac{5\cdot 3}{4}=\frac{15}{4}$

3,5-nek a $\frac{4}{7}$ része: $3,5\cdot\frac{4}{7}=\frac{3,5\cdot 4}{7}=\frac{14}{7}=2$

$\frac{3}{8}$-nak a $\frac{2}{9}$ része: $\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{8}^{4}}\cdot\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{9}^{3}}=\frac{1}{12}$

A valahányad részt sokszor százalékban adjuk meg. A százalék, a 100 nevezőjű törtnek másfajta jelölése. Például:

$\frac{35}{100}=35\%$ $\frac{125}{100}=125\%$ $\frac{500}{100}=500\%$ $\frac{3,5}{100}=3,5\%$

Nem csak 100-as nevezőjű törtek írhatók százalék alakba:

$\frac{33}{50}=\frac{66}{100}=66\%$ $\frac{12}{20}=\frac{60}{100}=60\%$ $\frac{12}{60}=\frac{2}{10}=\frac{20}{100}=20\%$

$\frac{240}{300}=\frac{80}{100}=80\%$

A fenti törteket egyszerűsítéssel vagy bővítéssel alakítottuk századokká.

$\frac{7}{8}=$ $\frac{5}{6}=$ $\frac{4}{11}=$ $\frac{20}{150}=$

A fenti törteket nem tudjuk századokká alakítani egyszerűsítéssel vagy bővítéssel. Ilyenkor osztással tizedes törtté alakítjuk a törtet, és – esetleg kerekítés után – ebből kapjuk a százalék alakot:

$\frac{7}{8}=7:8=0,875=87,5\%$ $\frac{5}{6}=5:6=0,8\dot{3}\approx 83\%$

$\frac{4}{11}=$ $\frac{20}{150}=$

Osztás után írjátok át a fenti két törtet százalékokká! 36%; 13%

Nemcsak a törtek írhatók át százalékra, hanem fordítva, a százalékok is törtekké:

$75\%=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$ $120\%=\frac{120}{100}=\frac{6}{5}$ $123\%=\frac{123}{100}$ $12,5\%=\frac{12,5}{100}=\left(\frac{25}{200}\right)=\frac{5}{40}$

16. FELADATLAP

1. Írjátok át törtté a következő százalékban megadott számokat! Lehetőség szerint egyszerűsítsetek!

$16\%=\frac{4}{25}$ $45\%=\frac{9}{20}$ $80\%=\frac{4}{5}$ $225\%=\frac{9}{4}$ $600\%=6$ $1111\%=\frac{1111}{100}$

A törttel való osztásnak is új értelmet adhatunk.

Ha 5-nek a $\frac{3}{4}$ része $\frac{5\cdot 3}{4}=\frac{15}{4}$, akkor az a szám aminek a $\frac{3}{4}$ része $\frac{15}{4}$ az 5,

amit a $\frac{15}{4}:\frac{3}{4}=\frac{15}{4}\cdot\frac{4}{3}=5$ osztással kapunk meg.

TUDNIVALÓ:

Egy szám vagy mennyiség tört részéből az egész mennyiséget osztással kapjuk meg.

Például:

Melyik szám $\frac{8}{9}$ része a $\frac{16}{3}$?

Válasz: $\frac{16}{3}:\frac{8}{9}=\frac{16}{3}\cdot\frac{9}{8}=6$, tehát a 6-nak $\frac{8}{9}$ része a $\frac{16}{3}$.

2. Figyeljetek a kérdésre! Írjátok fel a megfelelő művelettel, majd számítsátok ki!

Mennyi 15-nek a $\frac{2}{3}$ része; $\frac{4}{5}$ része; $\frac{2}{9}$ része; 30 %-a?

Melyik számnak a $\frac{2}{3}$ része; $\frac{4}{5}$ része; $\frac{2}{9}$ része; 30 %-a a 15 ?

$15\cdot\frac{2}{3}=10;$ $15\cdot\frac{4}{5}=12;$ $15\cdot\frac{2}{9}=\frac{10}{3};$ $15\cdot\frac{30}{100}=\frac{45}{10}$

$15:\frac{2}{3}=\frac{45}{2}=22,5;$ $15:\frac{4}{5}=18\frac{3}{4};$ $15:\frac{2}{9}=67,5;$ $15:\frac{30}{100}=50.$

2. A négy alapművelet racionális számkörben történő elvégzésére szolgáló gyakorló feladatok

3. Tegyétek próbára tudásotokat az itt szereplő műveletek elvégzésével!

$A = 0{,}2$ $B = 2{,}5$ $C = \frac{2}{3}$ $D = 1\frac{1}{6}$

$A + B = 2{,}7$	$C + D = \frac{11}{6}$	$A + C = \frac{13}{15}$	$B + D = \frac{11}{3}$	$(A + B) \cdot A = 0{,}54$
$A - B = -2{,}3$	$C - D = -\frac{1}{2}$	$A - C = -\frac{7}{15}$	$B - D = \frac{4}{3}$	$(B - A) : B = 0{,}92$
$B - A = 2{,}3$	$D - C = \frac{1}{2}$	$C - A = \frac{7}{15}$	$D - B = -\frac{4}{3}$	$(C + D) \cdot C = \frac{11}{9}$
$A \cdot B = 0{,}5$	$C \cdot D = \frac{7}{9}$	$A \cdot C = \frac{2}{15}$	$B \cdot D = \frac{35}{12}$	$(D - C) : D = \frac{3}{7}$
$A : B = 0{,}08$	$C : D = \frac{4}{7}$	$A : C = \frac{3}{10}$	$B : D = \frac{15}{7}$	$A \cdot A - C \cdot C = -\frac{91}{225}$
$B : A = 12{,}5$	$D : C = \frac{7}{4}$	$C : A = \frac{10}{3}$	$D : B = \frac{7}{15}$	$A \cdot B \cdot C : D = \frac{2}{7}$

Érdemes ezt vagy valami hasonló feladatsort elvégeztetni a tanulóinkkal, tesztelve a számolási készségüket. Bár hetedikre már valamennyi esettel megismerkedtek, de gyakorlott tanárok tudják, hogy – különösen év elején – meglepően hiányosak lehetnek az ismereteik. Érdemes tehát egy teszttel szembesíteni őket, és ennek alapján gyakoroltatni az alapműveleteket a következő feladatokkal, vagy bármilyen más feladatgyűjteményből összeállított példákkal. Bármennyire is szeretnénk korszerű matematikát tanítani, ne felejtsük el, hogy tanulóinknak még a számtalan segédeszköz mellett is meg kell tanulniuk számolni!

A következő feladatsorokkal fejleszthetitek tudásotokat.

4. Alapműveletek tizedes törtekkel:

a) $3{,}45 + 56{,}8 + 111 + 0{,}243 = 171{,}493$
$1001{,}333 + 109{,}077 + 333{,}1001 = 1443{,}5101$
$5{,}13 + (-3{,}2) + 4{,}87 + (-6{,}8) = 0$
$-0{,}1 + 0{,}02 + (-0{,}003) + 0{,}0004 = -0{,}0826$

b) $54{,}79 - 17{,}9 = 36{,}89$
$70 - 0{,}25 = 69{,}75$
$100 - 100{,}01 = -0{,}01$

$23{,}8 - 7{,}26 = 16{,}54$
$50{,}1 - 1{,}22 = 48{,}88$
$0{,}15 - 10{,}14 = -9{,}99$

c) $34{,}25 \cdot 1{,}6 = 54{,}8$
$(-10{,}01) \cdot 10{,}1 = -101{,}101$
$2{,}345 \cdot 0{,}165 \cdot 0 = 0$

$342{,}5 \cdot 0{,}16 = 54{,}8$
$(-0{,}25) \cdot (-0{,}32) = 0{,}08$
$0{,}25 \cdot 3{,}45 \cdot 400 = 345$

d) 35,7 : 3 = 11,9
(–2,64) : 24 = – 0,11
0,121 : 4,4 = 0,0275

77,7 : 15 = 5,18
(–12) : (–0,4) = – 30
71,1 : 0,36= 197,5

5. Alapműveletek törtekkel, vegyes számokkal. Számolás közben idézzétek fel a műveletekről tanultakat! Ne feledkezzetek meg az egyszerűsítésekről!

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{4}=\frac{13}{8}$; $\frac{9}{7}+\frac{4}{5}=\frac{73}{35}$; $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{7}{10}=\frac{37}{20}$;

$\frac{4}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{4}=\frac{191}{60}$; $5\frac{2}{5}+\frac{4}{5}=6\frac{1}{5}$; $3\frac{5}{6}+2\frac{1}{3}=6\frac{1}{6}$

b) $\frac{13}{8}-\frac{5}{8}=1$; $1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$; $\frac{5}{9}-\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$; $\frac{3}{8}-\frac{1}{7}=\frac{13}{56}$;

$2\frac{4}{5}-\frac{1}{2}=2\frac{3}{10}$; $3\frac{1}{3}-\frac{5}{6}=2\frac{1}{2}$; $2\frac{5}{8}-1\frac{3}{4}=\frac{7}{8}$

c) $\frac{2}{7}\cdot 3=\frac{6}{7}$; $\frac{5}{8}\cdot 7=\frac{35}{8}$; $\frac{3}{5}\cdot 5=3$; $2\frac{1}{3}\cdot 9=21$;

$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$; $\frac{8}{15}\cdot\frac{5}{4}=\frac{2}{3}$; $\frac{55}{16}\cdot\frac{15}{22}\cdot\frac{24}{25}=\frac{9}{4}$; $5\frac{5}{8}\cdot 1\frac{1}{15}=6$

d) $\frac{6}{11}:3=\frac{2}{11}$; $\frac{5}{8}:2=\frac{5}{16}$; $1\frac{3}{5}:8=\frac{1}{5}$; $6\frac{1}{4}:15=\frac{5}{12}$;

$\frac{4}{9}:\frac{3}{5}=\frac{20}{27}$; $\frac{12}{7}:\frac{9}{14}=\frac{8}{3}$; $\frac{9}{4}:1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$; $1\frac{19}{21}:3\frac{4}{7}=\frac{8}{15}$

3. A racionális számok halmaza, tulajdonságai, összevetésük az egész számokkal

TUDNIVALÓ:

Az egész és tört számok halmazának egyesítésével kapott halmaz a racionális számok halmaza. A racionális számok halmazának jele: **Q**.
A racionális számok köréből egyik alapművelet sem vezet ki.
A természetes számokból a négy alapművelet – véges sok – alkalmazásával kapott szám mindig racionális.
A racionális számok mindig felírhatók két egész szám hányadosaként.

17. FELADATLAP

1. Hasonlítsuk össze az egész és a racionális számok néhány tulajdonságát! Néhány egyszerűnek tűnő kérdés meglepő válaszokat rejt!

a) Melyik a legkisebb pozitív egész szám? Az 1.

b) Melyik a legkisebb pozitív törtszám? Nincs ilyen.

Próbáljanak keresni, akár tört, akár tizedes tört alakban, majd mutassák meg, hogy lehet kisebbet előállítani, akár a nevező növelésével, akár a tizedesvessző utáni nullák számának növelésével. Mindkét eljárás tetszőlegesen sokáig végezhető.

c) Hány egész szám van az 1 és az 1000 között? Melyik a legkisebb és a legnagyobb? Nyílt intervallumként 998 egész van közöttük, a legkisebb a 2, a legnagyobb a 999.

d) Hány törtszám van az 1 és a 2 között? Melyik a legkisebb és a legnagyobb?
Hogy végtelen sok van, azt már korábbi próbálkozásaik is igazolják, de ismét eljátszhatnak azzal, hogy hasztalan keresik a legkisebbet illetve a legnagyobbat. A tevékenység a tört és tizedes tört fogalmainak elmélyítését is szolgálja.

e) 1-nél nagyobb vagy 1-nél kisebb pozitív racionális számból van-e több?
Természetesen ugyanannyi, azaz végtelen sok van, ami egyrészt meglepő is lehet, ha a tanulók a számegyenesre gondolnak, hiszen az egyik halmaz egy egységnyi szakaszt, míg a másik egy félegyenest „fed le”, de érdemes kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel igazolni az állítást: minden 1-nél kisebb racionális számhoz egyértelműen tartozik egy 1-nél nagyobb racionális szám és fordítva, hiszen a számláló és nevező cseréje pontosan ezt a hozzárendelést végzi el.

2. A táblázat kiegészítésével végezzétek el a két számhalmaz összehasonlítását!

Egész számok	Racionális számok
Jele: **Z**	Jele: **Q**
Egész számok köréből az osztás művelete kivezet.	Racionális számok köréből egyik alapművelet sem vezet ki.
Bármely két különböző egész szám között véges sok egész szám található.	Bármely két különböző racionális szám között végtelen sok racionális szám található.
Két nem szomszédos egész szám között van legkisebb és legnagyobb egész szám.	Két különböző racionális szám között nincs legkisebb illetve legnagyobb racionális szám.
Az egymást követő egész számok egységnyi távolságra helyezkednek el a számegyenesen, így beszélhetünk szomszédos egészekről.	A racionális számoknak nem adhatók meg a közvetlen szomszédjai, nincs hozzájuk legközelebb eső racionális szám.

3. Igaz vagy hamis?
a) Minden racionális szám egész szám. Hamis, hiszen a törtek is racionális számok.
b) Minden természetes szám racionális szám. Igaz, mert a természetes számok a racionális számok részhalmazát képezik.
c) Van olyan racionális szám, amely természetes szám. Igaz, mert a pozitív egészek és a 0 is racionális számok, és ezek alkotják a természetes számokat.
d) Van olyan egész szám, amely nem racionális szám. Hamis, minden egész szám felírható törtként úgy, hogy a nevezőbe egy 1-est írunk.
e) Bármely két különböző racionális szám közt található további racionális szám. Igaz, elég a két szám összegének felére, azaz a számtani közepére hivatkozni.
f) Két racionális szám különbsége nem lehet kisebb, mint 0,0000001. Hamis, az állítás azt próbálja kiprovokálni, hogy van olyan határ, amelynél közelebb már nem lehetnek egymáshoz a racionális számok. Ellenpélda: 0,000 000 001 és 0,000 000 001 1.
g) Az 1 és a 1 000 000 között több egész szám van, mint racionális szám a 0 és az 1 között. Hamis, hiszen az előbbiek száma véges, az utóbbiaké végtelen.

VI. A racionális számok és azokon is túl

1. Véges és végtelen szakaszos tizedes törtek – racionális számok tizedes tört alakja

A racionális számokat tizedes törtként is felírhatjuk. Nézzük meg, hogy milyen lehet ez a tizedes tört!
Mivel minden racionális szám felírható két egész szám hányadosaként, a tizedes tört alakot ennek a két számnak az osztásával kapjuk. Például:

$\frac{2}{5} = 2:5 = 0,4$ $\frac{3}{8} = 3:8 = 0,375$ $\frac{79}{80} = 79:80 = 0,9875$

A törtek tizedes tört alakja véges, mert egy véges sok osztás után 0 maradékot kaptunk.
Ismerünk azonban más eseteket is. Az $\frac{1}{3}$ a legegyszerűbb példa arra, hogy egy racionális szám tizedes tört alakja másképpen is viselkedhet:
$\frac{1}{3} = 1:3 = 0,33333...$ ami soha nem ér véget, hiszen minden osztás után megjelenik ugyanaz a maradék.
Az ilyen végtelen tizedes törtek jelölésénél az ismétlődő számjegy fölé pontot teszünk:

$\frac{2}{3} = 2:3 = 0,6666... = 0,\dot{6}$ $\frac{5}{12} = 5:12 = 0,41666... = 0,41\dot{6}$

Az első tört az ismétlődő számmal kezdődött. Ilyen esetekben **tiszta szakaszost tizedes tört**ről beszélünk. A második törtnek van nem ismétlődő része – 0,41 –, majd ezt követi a szakasz. Az ilyen számokat ***vegyes* szakaszos tizedes tört**eknek nevezzük. A szakasz állhat 1 vagy több jegyből:

$\frac{4}{9} = 4:9 = 0,4444... = 0,\dot{4}$ $\frac{5}{11} = 5:11 = 0,454545... = 0,\dot{4}\dot{5}$

Ügyeljünk arra, hogy utóbbi szám nem azonos a $0,4\dot{5}$ számmal hiszen ez vegyes szakaszos tizedes tört, melynél 1 számjegyből áll a szakasz. Utóbbi szám a $\frac{41}{90}$ tizedes tört alakja.

Felvetődik a kérdés, hogy miért lesznek az osztás során kapott végtelen tizedes törtek szakaszosak?

18. FELADATLAP

1. Végezzétek el a következő osztásokat! Figyeljétek meg hány jegyből áll a szakasz! Alkalmazzátok a megfelelő jelölést!

a) 40 : 9 = 4,444... 50 : 9 = 5,555... 1 jegyből
b) 60 : 11 = 5,4545... 70 : 11 = 6,3636... 2 jegyből
c) 80 : 7 = 11,428571... 90 : 7 = 12,857142… 6 jegyből

Észrevehetitek, hogy **a szakasz hosszát az osztó határozza** meg. 9-cel osztva például, mindig egyjegyű szakaszt kaptunk. Azt sem nehéz kitalálni, melyik szám adja az ismétlődő szakaszt.
9-cel osztva mindig a maradék jelenik meg a végtelen szakaszos tizedes törtben. Adódhat, hogy a 7/9 = 0,7777..., 8/9 = 0,8888.... mintájára a 9/9-et 0,999...-re alakítják a tanulók. Ez esetben megint a körülményektől függően elemezhetjük a végtelen sok 9-esre végződő tizedes törtek esetét.

Ha 11-gyel osztunk, akkor mindig két jegyből álló szakaszt kapunk. Osszatok el további számokat 11-gyel, és figyeljétek meg, milyen számok alkotják a szakaszt! Mennyi a szakaszt alkotó számjegyek összege? Mi lesz az első számjegy?

Érdemes önálló munkával felfedeztetni és megfogalmaztatni a tapasztaltakat. A tizenegyedek kétjegyű szakaszt produkálnak, melyben a számjegyek összege 9, és az első jegy mindig 1-gyel kisebb, mint a maradék.

7-tel osztva úgy tűnhet, sosem ér véget az osztás, de ha meggondoljuk, hogy a maradék csak 7-féle lehet (1, 2, 3, 4, 5, 6 és 0), akkor a 6. osztás után vagy véges tizedes törtet kapunk, vagy egy korábbi maradéknak kell megjelennie. Tehát a szakasz nem lehet hosszabb, mint 7 – 1 = 6 jegy.

Itt kell a tanulóknak felismerni, hogy a szakasz nem állhat több jegyből, mint az osztó értéke a maradékok lehetséges értékei miatt. Hiba forrása lehet azonban, hogy a hányadosban ismételten megjelenő számjegynél már a szakasz végére gondolnak, holott csak a maradéknál jelentkező ismétlődés jelentheti a szakasz kezdetét. Érdemes esetleg számítógéppel az 1/17-et megvizsgálni, amelynek tört részében 0,058823... hamar megjelenik a két 8-as, de a szakasz csak a 16. jegy után ér véget. A 17 a 7, 19, 23 és 29-hez hasonlóan hozza a maximális hosszúságú szakaszt, és különböző osztandókkal vizsgálva itt is felfedezhető, hogy a szakasz jegyeinek sorrendjében nincs eltérés, csak a kezdőszámban. A felfedezéshez természetesen nagy pontosságra dolgozó program szükséges.

1:7 =	0,**142857** 142857…
2:7=	0,2857**14 2857**14…
3:7=	0,42857**1 42857**1…
4:7=	0,57**1428 57**1428…
5:7=	0,7**14285 7**14285…
6:7=	0,857**142 857**142…

Érdemes megfigyelni, mi lesz a szakasz, ha 7-tel osztunk. Látható, hogy valóban mindegyik osztás 6 jegyű szakaszt eredményezett. Figyeld meg a szakaszban szereplő számok sorrendjét! Mit veszel észre?

Nem a 7-es az egyetlen osztó, amelyik így viselkedik. Keressetek számoló- vagy számítógéppel olyan osztókat, amelyeknél a szakasz hossza eggyel rövidebb, mint az osztó helyén lévő szám! Ha sokjegynyi pontossággal működő programotok van, akkor ugyanezt vehetitek észre 17-tel, 19-cel, 23-mal vagy 29-cel osztva. Tévedés lenne ebből arra következtetni, hogy minden prím esetében ez a helyzet, hiszen például a 13-mal történő osztásnál csak 6 jegyből áll a szakasz. Megállapítható, hogy az osztásnál kapott végtelen szakaszos tizedes törtben a szakasz jegyeinek száma mindig kevesebb, mint az osztó helyén lévő szám.

2. Tizedes törtek – végtelenek is – nagyság szerinti rendezése

19. FELADATLAP

1. Végezzétek el az osztást a szakasz felismeréséig, majd jelöljétek megfelelően a kapott végtelen tizedes törtet!

$5555{,}5 : 45 = 123{,}45555... = 123{,}4\dot{5}$ $617{,}25 : 5 = 123{,}45$

$1111 : 9 = 123{,}444... = 123{,}\dot{4}$ $1358 : 11 = 123{,}\dot{4}\dot{5}$

2. Állítsuk a 1. feladatban kapott négy hányadost nagyság szerint növekvő sorrendbe!

A számok egész része megegyezik, tehát elég csak a tört részeket összehasonlítanunk. Segít, ha ezúttal több (4) jegyet is leírunk belőlük:
Összehasonlításkor balról jobbra haladva hasonlítjuk össze a számjegyeket, tehát a helyes sorrend: 123,4444... < 123,4500 < 123,4545... < 123,4555...

A tizedes törtek ilyen módon történő nagyság szerinti rendezése nagyon fontos. Azért pont ezek a számok kerültek ide, hogy az apró eltérések alapján elmélyítsék a helyiértékes írásmódú számok rendezését. Ezt a célt szolgálja a 3. feladat is.

3. Írjuk át tizedes törtté a következő törteket!

a) A feladat megoldását nagyban könnyíti, hogy a nevezőben 10 hatványai szerepelnek.

$\frac{3}{10} = 0,3$ $\frac{49}{100} = 0,49$ $\frac{123}{1000} = 0,123$ $\frac{21}{1000} = 0,021$ $\frac{67}{10} = 6,7$

b) A következő törtekből bővítéssel olyan törtekhez juthatunk, melyeknek nevezői szintén 10 hatványai. Miért? Figyeld meg a nevezők prímtényezős felbontását!

$\frac{4}{5} = 0,8$ $\frac{13}{25} = 0,52$ $\frac{3}{4} = 0,75$ $\frac{7}{50} = 0,14$ $\frac{9}{20} = 0,45$

Észre kell venni, hogy a nevező prímtényezős felbontásában legfeljebb 2 és 5 szerepel. Mivel a 10 hatványaiban is csak ezek a számok szerepelnek, méghozzá egyenlő számban, ezért a bővítés a kevesebb tényező kiegészítésével történik.

c) Miért nem lehet a következő törteket bővíteni az előző mintájára? Ismét a nevező prímtényezős felbontása adja meg a választ. Milyen módon alakíthatod át a törtet tizedes törtté?

$\frac{2}{3} = 0,666...$ $\frac{5}{9} = 0,555...$ $\frac{9}{11} = 0,8181...$ $\frac{11}{12} = 0,91666...$ $\frac{13}{15} = 0,8666...$

A probléma, hogy a nevezőben nemcsak 2 és 5 szerepel, hanem valami más szám is, így már nem lehet a nevezőt 10 hatványra hozni. Marad a számláló osztása a nevezővel, ami ez esetben végtelen tizedes törtet eredményez.

ÖSSZEFOGLALÁS:

Ha egy tört nevezőjében 10 valamelyik hatványa szerepel, akkor a számlálóban elhelyezett tizedesvesszővel közvetlenül átírhatjuk tizedes törtté:

$$\frac{123}{100} = 1,23$$

$$\frac{45}{1000} = 0,045$$

Ha a tört nevezőjének prímtényezős felbontásában legfeljebb 2-es és 5-ös tényezők vannak, akkor bővítéssel 10 hatványává alakítjuk. Ezután az előzőek szerint történhet az átalakítás:

$$\frac{33}{20} = \frac{33 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{165}{100} = 1,65$$

$$\frac{111}{250} = \frac{111 \cdot 4}{250 \cdot 4} = \frac{444}{1000} = 0,444$$

Keressünk összefüggést a törtrész hossza és a nevező prímtényezős felbontásában szereplő kitevők közt!

Ha eszközt használva több példát is látnak, akkor bizonyára felfedezik, hogy a szakasz vagy az előtag hossza a nevezőben előforduló legnagyobb olyan kitevővel egyezik meg, amit a 2 vagy az 5 hordoz. Ezért érdemes 64-del, vagy akár 1024-del próbálkozva sarkítani a szabályt.

Ezeknek a szabályoknak a felfedezése lehetőleg ne a tanulói könyv alapján, hanem ügyes rávezető kérdésekkel és feladatokkal történjen! Tananyagként való szerepeltetése legfeljebb azt a célt szolgálja, hogy később megtalálják a tanulók és hivatkozhassanak rá. Semmiképpen sem megtanulandó anyag, sokkal inkább a felfedezés, szabályszerűségek felismerésének célját szolgálja.

Ha a nevező prímtényezős felbontásában nemcsak 2-es és 5-ös prímtényezők vannak, akkor nem lehet 10-hatványú nevezőre bővíteni. Ekkor – osztással – végtelen tizedes törtet kapunk. Ha a nevező prímtényezős felbontásában se 2-es se 5-ös nem szerepel, akkor tiszta szakaszos tizedes törtet kapunk, amely a szakasszal kezdődik. Ha szerepel 2-es vagy 5-ös, akkor vegyes szakaszos tizedes tört lesz az eredmény, amelyben van nem ismétlődő rész is.

$\frac{15}{11} = 15 : 11 = 1{,}363636... = 1{,}\dot{3}\dot{6}$

$\frac{68}{55} = 68 : 55 = 1{,}\mathbf{2}363636... = 1{,}2\dot{3}\dot{6}$

$\frac{309}{275} = 309 : 275 = 1{,}\mathbf{12}363636... = 1{,}12\dot{3}\dot{6}$

Keress összefüggést a nem ismétlődő rész hossza és a nevező prímtényezős felbontásában szereplő kitevők közt!

Ezúttal is megfigyelhető, hogy a nem ismétlődő rész hosszát a 2 vagy az 5 kitevője közül a nagyobb határozza meg.

4. Írjátok át a $\frac{2}{9}$, $\frac{11}{50}$, $\frac{21}{100}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{19}{90}$, $\frac{7}{33}$, $\frac{53}{250}$ törteket tizedes törtté, majd rendezzétek azokat növekvő sorrendbe!

$\frac{2}{9} = 0{,}222...$ $\frac{11}{50} = 0{,}22$ $\frac{21}{100} = 0{,}21$

$\frac{1}{5} = 0{,}2$ $\frac{19}{90} = 0{,}2111...$ $\frac{7}{33} = 0{,}2121...$ $\frac{53}{250} = 0{,}212$

Ennek megfelelően a tizedes törtek nagyság szerinti sorrendje:
$0{,}2 < 0{,}21 < 0{,}2111\ldots < 0{,}212 < 0{,}212121\ldots < 0{,}22 < 0{,}222\ldots$
Érdemes felvetni – és gyorsan elutasítani – a közös nevezőre hozással történő rendezést, hiszen a nevezők legkisebb közös többszöröse 49 500 lenne. Itt hangsúlyozzuk, hogy a számok törtalakja általában kevésbé alkalmas a nagyságuk összehasonlítására, mint a tizedes törtalak. Az ilyen feladatokban a tizedes tört alakban való felírás célravezetőbb.

5. Döntsétek el a következő törtek közül melyeknek lesz véges tizedes tört alakja!

$\frac{11}{4}; \frac{4}{11}; \frac{77}{1000}; \frac{5}{6}; \frac{5}{21}; \frac{21}{5}; \frac{17}{32}; \frac{111}{200}; \frac{13}{24}; \frac{15}{24}; \frac{1001}{1024}$

Próbáljátok megállapítani a törtrészben szereplő jegyek számát!

Elég a nevezőről megállapítani, tartalmaz-e 2 és 5 mellett más prímtényezőt is. Ha ezt megtalálják, akkor a prímtényezős felbontástól is eltekinthetünk.

6. Igaz vagy hamis? (Az állítások tovább nem egyszerűsíthető törtekre vonatkoznak.)

a) Ha egy tört nevezője 2 hatványa, akkor tizedes tört alakja véges.

Igaz, méghozzá annyi jegyből fog állni amennyi a 2 kitevője

b) Ha egy tört nevezője 10 hatványa, akkor tizedes tört alakja véges.

Igaz, mint az előzőnél

c) Ha egy tört nevezője páros, akkor tizedes tört alakja véges.

A páros nevező csak annyit jelent, hogy a nevező prímtényezős felbontásában van kettes. Emellett azonban bármi szerepelhet, ami elrontja a végességet, pl. már a hatodok is végtelen tizedes törtek.

d) Ha egy tört nevezője páratlan, akkor tizedes tört alakja végtelen.

Hamis, mert 5 hatványai páratlanok és véges tizedes törtet eredményeznek.

e) Ha egy tört nevezője 1-nél nagyobb és 1-re, 3-ra, 7-re vagy 9-re végződik, akkor tizedes tört alakja végtelen.

Igaz, mert ezekben az esetekben, nem is lehet a prímtényezős felbontásában 2 és 5, tehát ráadásul tiszta szakaszos tizedes törtek lesznek. (Kivéve, ha a nevező 1.)

f) Ha egy tört véges tizedes törtté írható, akkor reciprokának tizedes tört alakja is véges.

Hamis, mert a reciprok esetén a számláló kerül a nevezőbe. Pl: ¾

g) Ha egy tört nevezője páros, vagy 5-re végződik, és tizedes tört alakja végtelen, akkor a tizedes törtben lesz nem ismétlődő rész is.

Ez a megállapítás arról szól, hogy a nevező prímtényezős felbontásában szerepel 2 vagy 5, így a tizedes tört vegyes szakaszos lesz.

h) Ha egy tört nevezője legalább kétjegyű és abban csak egyforma számjegyek találhatók, akkor annak tizedes tört alakja nem lehet véges.

A feltétel inkább számelméleti problémát vet fel, az ilyen típusú számok prímtényezős felbontás mindenképpen tartalmaz 2 és 5 mellett más számot is, pl. 11, vagy 111 vagy 1111..., bár ezek összetettek, de hoznak új prímeket.

i) Ha egy tört tizedes tört alakja véges, akkor annak négyzete is 3., 4. stb. hatványa is véges tizedes törtet ad. (Próbáld bebizonyítani véleményed!)

Ha véges, akkor a nevezőben legfeljebb 2 és 5 szerepel, de négyzetre emeléssel nem kapunk újabb prímtényezőket. Kézenfekvőbb azonban arra hivatkozni, hogy a szorzás művelete két véges tizedes törtből nem eredményezhet végtelent.

7. Számítógépes programmal, sok jegy pontossággal, írjátok át tizedes tört alakba az $\frac{1}{49}$; $\frac{1}{499}$; $\frac{1}{4999}$ törteket! Milyen érdekességet veszel észre a törtrészben?

$$\frac{1}{49} \approx 0{,}020408163264...$$

$$\frac{1}{499} \approx 0{,}0020040080160320641282 56...125025005$$

$$\frac{1}{4999} \approx 0{,}00020004000800160032006401280256051210242048...$$

Tehát a tört részben 2 hatványai jelennek meg, legalábbis egy ideig, méghozzá annyi jegyre, ahány jegyű a nevező. Ha megtalálják a tanulók a szakasz végét, akkor ott pedig az 5 hatványait láthatják.

TUDNIVALÓ:

A racionális számok tizedes tört alakja véges vagy végtelen szakaszos tizedes tört.

3. Véges tizedes törtek tört alakja

Az előzőekben törteket hoztunk tizedes tört alakra, most végezzük el ennek a feladatnak a fordítottját!
Az 1-nél kisebb számok esetén a tört rész kerül a számlálóba és a legkisebb helyérték a nevezőbe:

$$0{,}7=\frac{7}{10} \qquad 0{,}37=\frac{37}{100} \qquad 0{,}00123=\frac{123}{100000}$$

Ha a tizedes tört egynél nagyobb, akkor a számlálóba a tizedes tört kerül, de tizedesvessző nélkül:

$$5{,}67=\frac{567}{100} \qquad 333{,}3=\frac{3333}{10} \qquad 10{,}01=\frac{1001}{100}$$

Mivel ez az anyag már ötödikben is előkerült a tanulók lehetőleg könyv és egyéb segítség nélkül, önállóan oldják meg a feladatokat.

Írjátok át a következő tizedes törteket törtalakba, majd végezzétek el a lehetséges egyszerűsítéseket:

0,1; 0,12; 0,123; 0,1234; 0,12345; 1,2345; 12,345; 123,45!

$$\frac{1}{10};\frac{12}{100}=\frac{3}{25};\frac{123}{1000};\frac{1234}{10000}=\frac{617}{500};\frac{12345}{100000}=\frac{2469}{20000};\frac{12345}{10000}=\frac{2469}{2000};\frac{12345}{1000}=\frac{2469}{200};\frac{12345}{100}=\frac{2469}{20};$$

A számok a didaktikai sorrend elvének megfelelően íródtak, az előző szinte vonzza a következőt. Végigjárva átismétlik és be is gyakorolják a korábban tanultakat.

4. Példák nem racionális számokra

Bár az alapműveletek nem vezetnek ki a racionális számok köréből, ez nem jelenti azt, hogy nincsenek nem racionális számok. Később megismerkedünk olyan műveletekkel, melyek a racionális számok köréből is kivezetnek. Az így kapott számokat irracionális számoknak nevezzük. Bebizonyítható, hogy az irracionális számok nem írhatók fel egész számok hányadosaként és tizedes tört alakjuk végtelen és nem szakaszos.
Ilyen irracionális szám a görög π (pi) betűvel jelölt szám, melynek közelítő értéke: **3,14**1592653.... Ez a szám játszik szerepet a kör kerületének és területének kiszámításában.
Ugyancsak irracionális számmal adható meg annak a négyzetnek az oldala, melynek területe 2 területegység. Ez a hosszúság megközelítőleg: **1,414**213562... Ezeket a számokat a gyakorlatban a megvastagított kerekített értékükkel szokták helyettesíteni.
Mi magunk is tudunk irracionális számokat „gyártani”, ha valamilyen szabályossággal végtelen, nem szakaszos tizedes törtet állítunk elő. Ilyenek például:

0,10110111011110111110...
0,123456789101112131415...
0,2481632641282565121024...

Fogalmazd meg, milyen szabályszerűséggel állítottuk elő a fenti irracionális számokat! Igaz-e, hogy ezek végtelen tizedes törtek? Igaz-e, hogy nem szakaszosak?
Az irracionális számokkal kiegészítő anyagként találkozhattok ennek a fejezetnek a végén.

20. FELADATLAP

1. Írjatok konkrét példát racionális számokkal a következő esetekre! Ha nem találtok megoldást indokoljátok meg, miért nincs!

a) Két tört összege egész. $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=2$

b) Két különböző tört különbsége egész. 11,24 – 7,24 = 4 (azonosak a tört részek).

c) Két különböző tört szorzata egész. 1,25 · 0,8 = 1 (pl. reciprokok vagy reciprokok többszörösei)

d) Két azonos tört szorzata egész. Racionális számok közt nem lehet (irracionálisnál igen, pl. négyzetgyök kettő).

e) Két különböző tört hányadosa egész. 4,5 : 0,5 = 9

f) Két negatív egész szám összege természetes szám. Nem lehet, mert az összeg negatív lesz.

g) Két negatív egész különbsége természetes szám. –15 – (–20) = +5

h) Két negatív szám szorzata negatív. Nem lehet.

i) Két nem pozitív szám szorzata nem negatív. Lehet, ha valamelyik nem pozitív nulla, akkor a szorzat is nulla azaz nem negatív.

j) Két pozitív szám szorzata kisebb bármelyiküknél. Kisebbek 1-nél: 0,2 · 0,3.

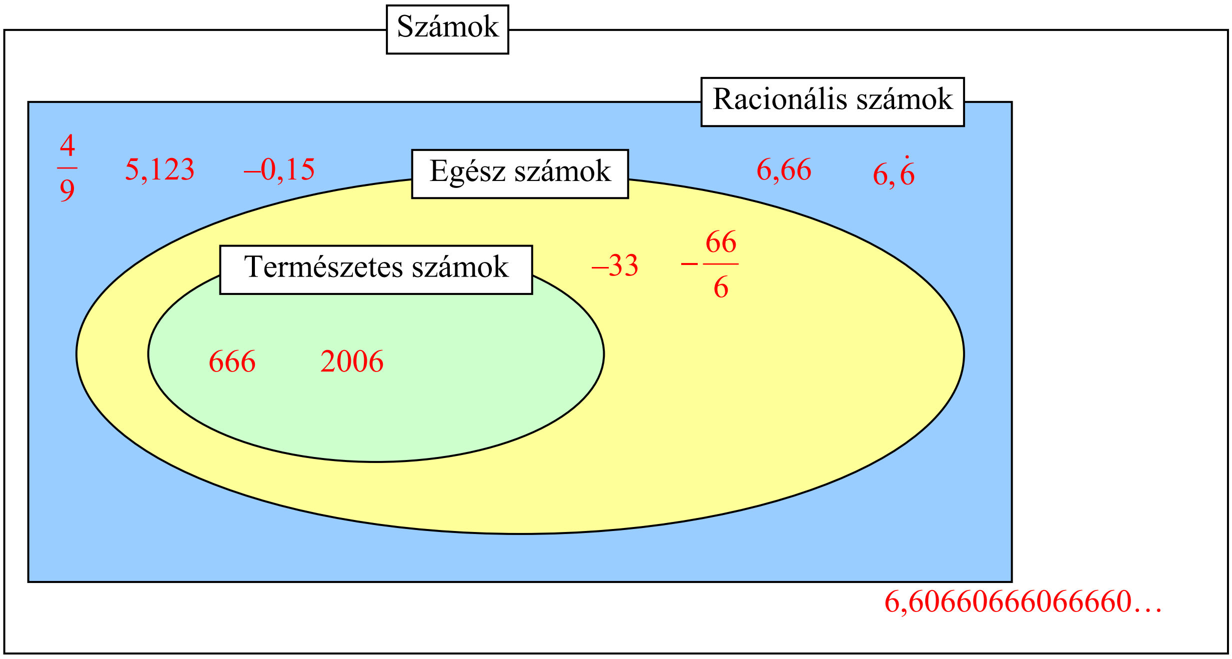
k) Egy egész és egy tört szorzata egész. 0,4 · 200

l) Egy egész és egy tört összege egész. Nem lehet.

2. Helyezzétek el a következő számokat a halmazábrában!

$\frac{4}{9}$; -33; $5{,}123$; 2006; $-0{,}15$

666; $6{,}66$; $-\frac{66}{6}$; $6{,}\dot{6}$; $6{,}60660666066660...$



a) Milyen számok kerülnek a halmazábra kék részébe?
A kék részbe azok a tört számok kerültek, amelyek nem egészek. (A racionális és az egész számok különbséghalmaza.)

b) Milyen számok kerülnek a halmazábra sárga részébe?
A sárga részbe a negatív egészek kerültek. (Az egészek és a természetes számok különbséghalmaza.)

c) A halmazábra melyik színű részébe kerülhet két zöld szám összege, illetve szorzata?
Két zöld, azaz természetes szám összege és szorzata is természetes, tehát a zöld részben marad.

d) A halmazábra mely részébe kerülhet két sárga szám összege, illetve szorzata?
Két sárga, azaz negatív egész szám összege negatív egész, tehát sárga, szorzata pozitív egész, tehát zöld lesz.

e) Hova kerülhet két sárga szám hányadosa?
Két negatív egész szám hányadosa pozitív, tehát kikerül a sárgából, de lehet zöld, például –6 és –3 hányadosa, vagy kék: –7 és –4 hányadosa.

f) Van-e olyan szám a felsoroltak közt, amelyik a halmazábra fehér részébe került? Miért?
A 6,60660666066660... végtelen és nem szakaszos tizedes törtet jelez. Így ez a szám a fehér részbe kerül.

Persze ezt nem könnyű észrevenni a tanulóknak, ha ez az első találkozásuk nem racionális számmal.

g) Lehet-e két kék szám összege, különbsége, szorzata, hányadosa zöld szám?
Két törtszám összege, különbsége, szorzata és hányadosa is lehet természetes szám, például:

$2{,}3 + 4{,}7 = 7$ $5{,}13 - 2{,}13 = 3$ $1{,}25 \cdot 1{,}6 = 2$ $3{,}6 : 0{,}9 = 4$

Keressenek a tanulók példákat törtalakú számokkal is!

5. Racionális számok és a számegyenes intervallumai

Ez az órarészlet csak külön órakeretben, vagy szakköri anyagként dolgozható fel. A legfontosabb ismeretek a racionális számokról szóló fejezet végén (V. 3. pont) találhatóak meg.

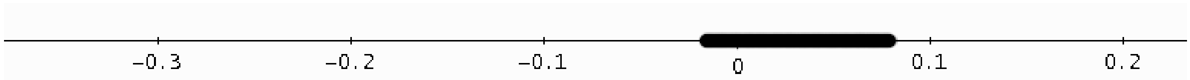
21. FELADATLAP

Hány racionális szám van?

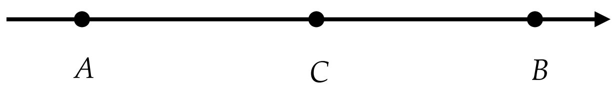
A racionális számok alapjait megismerve olyan irányba indulunk, hogy képünk lehessen az irracionális számokról. Ez a rész a két számhalmaz rokon tulajdonságait veszi célba

Tudjuk, hogy a racionális számok száma végtelen, hiszen magukban foglalják az ugyancsak végtelen sok számot tartalmazó egészek halmazát. Míg azonban a számegyenes bármekkora – véges – részét lefedve véges számú egész számot takarnánk le, addig racionális szám a számegyenes legrövidebb szakaszán is végtelen sok van.
A fekete csík által lefedett egészek száma véges, mert láthatóan kevesebb, mint 200.

Ezzel a fekete csíkkal mind a negatív, mind a pozitív számok közül végtelen sokat fedtünk le.



Legyen A és B a számegyenesen két különböző racionális szám. Mutassuk meg, hogy van közöttük is racionális szám!



1. Legyen a *C* az *AB* szakasz felezőpontja.

Igaz-e, hogy *C*-hez tartozó szám racionális?

Mivel *C* az *A* és a *B* számtani közepe, ezért értékét úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk a két számot, majd elosztjuk 2-vel. Mivel ezek a műveletek nem vezetnek ki a racionális számok köréből, ezért *C* is racionális szám lesz. Hasonló eljárással kaphatunk racionális számokat *A* és *C*, illetve *C* és *B* között, méghozzá tetszőlegesen sokat.

2. Keressünk racionális számot a következő számok között:

a) $\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{100}$ és $\frac{1}{99}$

c) $0,001$ és $0,002$

d) $1,111$ és $1,1111$.

Egyik lehetőség, hogy kiszámítjuk a szám párok számtani közepét, például:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right):2=\frac{5}{6}:2=\frac{5}{12}$$

vagy
(0,001 + 0,002) : 2 = 0,003 : 2 = 0,0015.
Másik út, hogy a törteket közös nevezőre hozzuk, majd tetszőlegesen nagy nevezőre bővítjük azokat. Ezután könnyedén illeszthetünk közéjük törteket:

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{20}{60} \quad \textit{és} \quad \frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{30}{60}$$

$$\frac{20}{60}<\frac{21}{60}<\frac{22}{60}<\frac{23}{60}<\ \ldots\ \frac{29}{60}<\frac{30}{60}$$

Tizedes törteknél még egyszerűbb a dolgunk, hiszen elég a kisebbik szám tört részéhez az első eltérő számjegytől tetszőleges számokat hozzáírni:
0,001 < **0,001** 1 < **0,001** 2 < **0,001** 23 < **0,001** 234 < … < **0,002**, illetve
0,111 < **0,1110** 1 < **0,1110** 2 < 0,**1110** 21 < **0,1110** 211< … < **0,1111**

3. Keressetek 3-3 számot, amelyek igazzá teszik a következő egyenlőtlenségeket!

Ezek a feladatok nem csak a számegyenes feltöltését, a racionális számok sűrűségét igazolják, de igen alkalmasak azok nagyság szerinti rendezésének mélyítésére is.

a) –0.01 < a < 0,01 –0,001; 0; +0,001

b) $\frac{1}{5}<b<\frac{2}{5}$ $\frac{11}{50}$; $\frac{12}{50}$ ...

c) $\frac{1}{5}<c<\frac{1}{4}$ $\frac{41}{200}$; $\frac{42}{200}$ ... közös nevezőre hozunk, majd bővítünk, vagy tizedes törtté is alakíthatunk.

d) $0,3<d<\frac{1}{3}$ mivel az $\frac{1}{3}=0,33333\ldots$ ezért 0,31-gyel kezdődő törtek mind jók.

e) 0,123 < e < 0,1234 0,1230… után bármi írható

f) $0,\dot{3}<f<0,34$ 0,334… után bármi írható

g) $0,\dot{1}2\dot{1}<g<0,\dot{1}\dot{2}$ 0,12113…után bármi írható

6. Végtelen nem szakaszos tizedes törtek és az irracionális szám

Mivel racionális számokat a számegyenes bármely részén találunk, és bármelyik kettő közt végtelen további található, felvetődik a kérdés, hogy a racionális számokhoz tartozó pontok kitöltik-e a számegyenest, vagy maradnak olyan pontok, amelyek nem racionális számokhoz tartoznak.

Tudnunk kell, hogy ez igen komoly fejtörést okozó kérdés nemcsak a tanulók számára, hiszen szemléletünk szerint a mindenhol jelenlévő racionális számok látszólag kizárják más számok létezésének lehetőségét.

A kérdés megválaszolásához térjünk vissza a racionális számok tizedes tört alakjához.
Tudjuk, hogy minden racionális szám felírható két egész szám hányadosaként, ebből adódóan a tizedes tört alakjuk vagy véges, vagy végtelen, de utóbbi esetben is szakaszos tizedes tört.
Adódik a következő kérdés:

Vannak-e végtelen, nem szakaszos tizedes törtek?

Mivel olyan művelet nem ismert a tanulóink előtt, ami kivezetne a racionális számok köréből, ezért az egyetlen járható út, hogy **csinálunk** ilyeneket, méghozzá tizedes törtekből, megfelelő, a szakaszt „tönkretevő" trükkökkel.

Bár eddig ilyenekkel nem találkoztunk, hiszen az alapműveletek nem szolgáltatnak erre lehetőséget, de ettől még előállíthatunk ilyeneket:

4. Folytassátok a tört részt egy benne fellelhető szabály szerint további számjegyekkel!

a) 0,101101110111101111110...
111111 0 1111111 0 11111111 0…minden 0 után eggyel több 1 következik

b) 0,1234678910111121314... 15 16 17 18 19 20…

c) 0,2357111317... 19 23 29 31… prímek sorozata

d) 0,1123581321... 34, 55, 89,… Fibonacci-sorozat tagjai

e) 0,0204080160320640128025 6...(!) 0512 1024 2048… 2 hatványai, minden újabb kettő hatvány között egy 0-val. Korábban találkoztunk olyan racionális számmal is, melynek tizedes tört alakja ugyanígy kezdődik: $^1/_{4999}$...

f) Meg lehet-e mondani bármely törtrészről a felismert szabály alapján, hogy mi lesz a 20., 50., 100. tag?
Egyértelműen megadható akármelyik tag, bár esetenként nem könnyű kiszámolni.

g) Kialakulhatnak-e ezekben a végtelen tizedes törtekben a racionális számokra jellemző ismétlődő szakaszok? Nem

A tanulók gyakran összetévesztik a szabályosságot a szakaszossággal. Fontos tisztázni, hogy éppen a tört részben lévő szabályosság kizárja a szakasz kialakulását.

A végtelen nem szakaszos tizedes törtek nem racionális számok. A fenti módon előállított számokat **irracionális számoknak** nevezzük.
Az irracionális számok nem írhatók fel két egész szám hányadosaként.

Az irracionális számok ilyen bevezetésével indirekt módon jutunk a legfontosabb tulajdonságukhoz, miszerint nem írhatók fel a/b alakban. A bizonyítást azonban elvégezhetjük, hiszen azt már tudják, hogy miért lesz egy racionális szám tizedes tört alakja szakaszos.

5. Készítsünk végtelen tizedes törteket! Mit gondoltok, az adott szabály racionális vagy irracionális számot eredményez-e? Minek alapján tudjátok eldönteni?

A kérdés megválaszolásához azt kell eldönteni, hogy az adott szabály lehetővé teszi-e szakasz kialakulását, vagy ellenkezőleg, éppen, hogy megakadályozza azt.

a) Írjátok a törtrészbe az 5 többszöröseit!
0,5101520253035... nem lesz szakasz, tehát irracionális

b) Írjátok a törtrészbe az egymást követő pozitív egészek 5-ös maradékát!
0,123401234012340… racionális, mert szakaszos lesz a tört: $\frac{12340}{99999}$

c) Írjátok a tört részbe az egymást követő pozitív egészek négyzetét!
0,14916253649… nem lesz szakasz, tehát irracionális. Ugyan a számvégződések szakaszt képeznek, de a köztük lévő számok nem.

d) Írjátok a tört részbe az egymást követő pozitív egészek négyzetének utolsó számjegyét!
0,1496569410 1496569410 1496569410… racionális $\frac{1496569410}{9999999999}=\frac{166285490}{1111111111}$

e) Vegyétek az $\frac{1}{8}$ tizedes tört alakját, majd írjátok a törtrész végére a 2. feladat b.) pontjában szereplő számot!

0,125 1234678910111213114... Ez a példa azt mutatja, hogyan alakítható egy véges tizedes tört irracionális számmá. Már itt rávilágíthatunk, hogy ezt végtelen sokféleképpen megtehetjük.

f) Vegyétek az $\frac{1}{3}$ tizedes tört alakját és adjátok hozzá az 2. feladat a.) feladatban szereplő számot!

$$\begin{array}{r} 0{,}33333333333333333333\ldots \\ +0{,}10110111011110111110\ldots \\ \hline 0{,}43443444344444344443\ldots \end{array}$$

Első példa arra, hogy irracionális számmal alapműveletet végzünk. Szemléletes példáját adja, hogy racionális és irracionális szám összege irracionális. Azt is kiolvashatjuk belőle, hogy két irracionális szám különbsége lehet racionális.

7. Irracionális számok a racionális számok között – a valós számok halmaza

Most, hogy láttunk néhány irracionális számot, feltehetjük a kérdést:

Hány irracionális szám van?

Láttuk, hogy bármely két racionális szám között végtelen sok racionális szám van. Van-e bármely két racionális szám között irracionális szám is?
Láttuk, hogy két racionális szám közé könnyen beilleszthetünk további racionális számokat. Azt is láttuk, hogy egy racionális szám tizedes tört alakjának megfelelő módosításával hozzá tetszőlegesen közel álló irracionális számokhoz juthatunk.

8. Példák konkrét irracionális számokra

6. Keressetek irracionális számokat, amelyek igazzá teszik az egyenlőtlenségeket:

a) $0{,}5 < a < 0{,}6$

Keresünk 0,5 és 0,6 között racionális számot, pl. 0,51, majd a végére írjuk egy irracionális szám tört részét: 0,51 10110111011110… Természetesen végtelen tizedes törtet is választhatunk, majd abból kiindulva juthatunk irracionális számhoz:
0,55555555… + 0,121121112111121111112… = 0,676676667666676666667

b) $0{,}6 < b < \frac{2}{3}$

Az előzőhöz hasonlóan a 0,61-ből kiindulva juthatunk számtalan módon számtalan irracionális számhoz.

c) $0{,}\dot{6} < c < 0{,}7$

Itt a 0,67-ből induljunk ki és egészítsük ki irracionális törtrésszel.

7. Láttuk, hogy bármely két racionális szám között van irracionális. Elmondható ez vajon fordítva is, azaz bármely két irracionális szám között is van irracionális és racionális szám? Próbáld a tizedes törtekkel megismert lehetőségek felhasználásával igazolni elképzelésed!

A következő gondolatmenettel játszhatunk el, de csak akkor, ha a tanulók érettsége ezt megengedi, és kellő önállósággal alkalmazzák a tanultakat:
A két irracionális szám végtelen, nem szakaszos tizedes tört legyen $A < B$. Attól függően, mennyire közel vannak egymáshoz, egy vagy több jegyükben megegyeznek, de egy adott helyértéken a B-nél nagyobb jegy szerepel. Ettől a ponttól kezdve A jegyeit elhagyjuk, úgy, hogy a visszamaradó szám nagyobb legyen A-nál, de kisebb legyen B-nél.
A = **0,123 234 345** 456 567… B = **0,123 234 345** 567 678…
A keresett szám **0,123 234 345** **46** A és B között van és racionális, hiszen véges.

A racionális és irracionális számokat együtt **valós számoknak** nevezzük. A valós számok teljesen kitöltik a számegyenest, azaz a számegyenes minden pontja megfelel egy valós számnak. A valós számok halmazát **R** betűvel jelöljük.

Az iracionális számok szerepe nemcsak a számegyenes „kitöltésében” áll. Számtalan valós problémának csak az irracionális számok körében van megoldása. Ezek közül íme kettő:
–Ha egy négyzet terüle van megadva, akkor az oldala általában irracionális szám. Például, ha a területe 2 (cm^2), akkor az oldala 1,414213562... (cm) kezdetű irracionáls szám. Pontosan **négyzetgyök kettő**-nek nevezzük és $\sqrt{2}$ -vel jelöljük.

–Bármely kör kerületének hosszát elosztva az átmérő hosszával egy 3.141592653... kezdetű irracionális számot kapnánk, melyet a görög pi (π) betűvel jelölünk. Ezeken a példákon kívül is számtalan feladat vezetne irracionális számokhoz, de ezeket gyakorlati megfontolásból a mindennapi életben racionális számmá kerekítjük.