
SZÁMOK ÉS MŰVELETEK

A hatványozás fogalma és tulajdonságai

CSAHÓCZI ERZSÉBET, KOVÁCS CSONGORNÉ, SZEREDI ÉVA

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Nem negatív egész kitevős hatvány fogalom bevezetése: alapozás, hatvány szorzatalakja, szorzat hatványalakja. A hatványozási azonosságok megfigyelése példákön: hangsúly az azonos alapú hatványok szorzásán-osztásán.
Időkeret	4 óra
Ajánlott korosztály	7. osztály
Modulkapcsolódási pontok	<p><i>Tágabb környezetben:</i> Biológia, fizika, kémia, informatika, technika.</p> <p><i>Szűkebb környezetben:</i> A szorzásról és osztásról tanult ismeretek, műveleti tulajdonságok, tízes- és más számrendszerek, azonosságok, algebrai kifejezések, számhalmazok, számelmélet.</p> <p><i>Ajánlott megelőző tevékenységek:</i> Szorzás, osztás az ismert számkörökben, 10 hatványaival, műveleti sorrend.</p> <p><i>Ajánlott követő tevékenységek:</i> Normálalak, mértékváltások, prímfelbontás, osztók és többszörösök kiolvasása a hatványalakból, hatványozás azonosságai, algebrai átalakítások, egyszerű exponenciális egyenletek, kitekintés a 0- és negatív kitevős hatványokra.</p>
A képességfejlesztés fókuszai	<p><i>Számolás kompetencia:</i> Új művelet bevezetése, szorzás, osztás műveleti tulajdonságainak elmélyítése. Szorzás és osztás 10 és 0,1 hatványaival.</p> <p><i>Mérés, becslés:</i> Nagyon nagy és nagyon kicsi számok összehasonlítása hatványok segítségével.</p> <p><i>Kombináció rendszerezés kompetencia:</i> egy-egy hatvány többféle alakban való felírása, különböző alakban felírt egyenlő számok megkeresése.</p> <p><i>Indukció dedukció:</i> Szabályosságok felfedezése, sejtések, „naiv indukció” a hatványozás definíciója alapján.</p> <p><i>Szövegértés kompetencia:</i> Friss elnevezések adekvát használata. Összefüggések szöveggel és algebrai nyelven.</p>

AJÁNLÁS

Frontális, egyéni és csoportmunka vegyesen (kooperatív módszerek is). A gyerekek mindhárom óra alatt (4-6 fős) csoportokban ülhetnek, az osztály összetételétől függően homogén vagy heterogén csoportokban.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Hatványtáblázatok, hatványalakban írt számokat tartalmazó szövegek (újságcikkek, ismeretterjesztő anyagok, internetes cikkek...), betű-, szám- és műveletkártyák, feladatlapok, kalkulátor.

ÉRTÉKELÉS

Az egyéni és csoportos munka megfigyelése alapján, szóbeli értékelés. Felmérő.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. A pozitív egész kitevős hatvány fogalmának bevezetése			
1.	Bemelegítő a témakörre: a gyerekek meglévő tudásának előhívása	Célunk az, hogy – mivel a hatványjelöléssel sokszor, sok helyen találkozhatnak iskolán kívül is – megtudjuk, mi az, amit már tudnak, és behívjuk ezeket a tapasztalatokat az órába.	1. feladatlap (Szemelvények), 3. tanári melléklet (Halmazcímkék)
2.	A pozitív egész kitevős hatvány fogalmának bevezetése; szorzásról tanultak ismétlése a tanult számkörökben	Kiemelt készségek: a szabály alkalmazása és a számolás – szorzás egészek, törtek és tizedes törtek körében.	1. és 2. feladatlap
3.	Hatványok összehasonlítása a definíció alapján	Definíció megértésének ellenőrzése, értő alkalmazása, számolási készség fejlesztése.	2. feladatlap, 2. tanári melléklet
4.	Házi feladat kitűzése, hatványtáblázat készítése	Számolás, definíció megértett alkalmazása.	3. feladatlap

II. Ismerkedés a hatványozás tulajdonságaival, a tanultak elmélyítése és gyakorlása			
1.	Összefüggések keresése hatványtáblázatokban, a házi feladat megbeszélése	Összefüggések keresése, indoklása, általánosítás – indukció – dedukció.	3. feladatlap
2.	Fejlesztési trükkök a hatványtáblázat felhasználásával, az azonos alapú hatványok szorzásának és osztásának felfedezéséhez	Számolási készség, tapasztalatszerzés, általánosítás, szociális együttműködő készség.	1. tanulói melléklet (Hatványtáblázat)
3.	Nyitott mondatok hatványokkal (amelyekben az előzőleg is elhangzott állításokat matematikai alakban fogalmazzuk meg)	Sok megoldással rendelkező, „nyitott végű” feladatok. Kísérletezés, próbálgatás, általánosítás.	3. feladatlap
4.	Hatvány felírása sokféle alakban	Nagyon fontos. Fizikailag, kézzel is megtapasztaltatjuk, hogy egyenlő alapú hatványok szorzásakor a tényezők darabszámai összeadódnak.	Szám- és jelkártya készlet, betűkészlet

III. Egyenlő alapú hatványok szorzása és osztása			
1.	Egyenlő alapú hatványok szorzási szabályának megfogalmazása szóban	Indukció – dedukció. Tapasztalatszerzés. Hagyjuk, hogy a gyerekek maguk fogalmazzák meg a szabályosságot, amelyet észrevettek, majd bíztassuk őket arra, hogy megindokolják azt.	4. feladatlap, 1. tanulói melléklet (Hatványtáblázat)
2.	Osztás bevezetése fordított feladatokon keresztül	Az osztási feladatok itt egyrészt a szorzás inverzeként, fordított műveleteként jelennek meg. Megjelenik az osztás törtalakban is. Fontos dolog, hogy azonos alapú hatványok esetén lássák, hogy míg szorzásnál a tényezők darabszáma összeadódik, osztásnál a tényezők darabszáma kivonódik egymásból.	4. feladatlap
3.	Összegzés: egyenlő alapú hatványok osztási szabályának megfogalmazása általánosan	Ugyanaz, mint a szorzási szabálynál. Ne erőltessük a képletet, a szabályt algebrailag is megfogalmazhatjuk, de nem kell megkövetelni	

IV. Differenciált gyakorlás			
1.	Diagnosztizáló mérés	Elsődleges cél a definíció megértésének és egyszerű esetekben az alkalmazási képességnek az ellenőrzése.	4. feladatlap, diagnosztizáló felmérő
2.	Differenciált gyakorlás	Célja a rögzítés és az elmélyítés	5. feladatlap

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. A pozitív egész kitevős hatvány fogalmának bevezetése

1. Bemelegítő a témakörre: A gyerekek meglévő tudásának előhívása

A gyerekeket négyfős csoportokba osztjuk, és minden csoport az 1. feladatlap szövegeit vizsgálja. A gyerekek elolvassák és értelmezik a szövegeket, és a bennük szereplő hatványokat. Kupaktanács módszerrel megbeszélik az olvasottakat egymás között. A tanár halmazcímkéket tesz a táblára (**3. tanári melléklet**), majd megkéri a gyerekeket, hogy a szövegben szereplő számokat írják kártyákra, és tegyék a megfelelő címke alá, vagy csak írják a táblára a megfelelő helyre.

3. tanári melléklet – lásd e fájl végén és a modul eszközei közt is!

Pozitív egész szám

Negatív egész szám

Törtszám

Várhatóan a hatványokról nem tudják eldönteni, hogy melyik számhalmazba tartoznak, az ilyen számokat tegyék külön csoportba.

Az a) feladatban szereplő „harmadik” szóval nem kell foglalkozniuk.

1. FELADATLAP

Szövegek „érdekes” számokkal – Szemelvények

- a) Egy lift nélküli ház harmadik emeletén lakó ember napi átlagban 140 lépcsőfokot jár meg. Ez évente több, mint 50 000 lépcsőfokot jelent. 40 év leforgása alatt ez több, mint 2 000 000 lépcsőfokot jelent, ami hozzávetőleg 300 km.
- b) A Lektor magyar helyesírás-ellenőrző és szóelválasztó program közel 10^5 szónak ismeri a toldalékos alakváltozatait. Ha ehhez hozzászámítjuk az igeikötős alakokat és a szóösszetételeket, akkor elmondhatjuk, hogy $25 \cdot 10^6$, egymástól eltérő nyelvi formát kezel.
- c) Magyarországon fejenként és naponta átlagosan 150 liter ivóvizet fogyasztunk (és csaknem ugyanennyit szennyvízzé alakítunk). Az iparban kb. 4,5 milliárd m^3 vizet fogyasztunk évente. A Balaton teljes vízmennyisége 1 800 000 000 m^3 !
- d) Egy vasszög tömege körülbelül 2,8 g. Egy vasatom átmérője 0,000 000 028 cm.
- e) A kilőtt rakéta kezdősebességének nagyságától és irányától függ, hogy visszaesik-e a Földre vagy sem. Ha a kilövés sebessége 7,9 km/s (első kozmikus sebesség), akkor az űrhajó a Föld körül kering.
- f) A Mariana-árok, a Föld legmélyebb pontja, Japán közelében húzódik, a tenger mélyén. A tengerszinthez viszonyított magassága $-11\,033$ m.

A feladat végére tele lesz a tábla rendszerezett számokkal, köztük hatványalakokkal. Ez lesz a kiindulópont a hatvány fogalmának bevezetéséhez.

2. A pozitív egész kitevős hatvány fogalmának bevezetése; szorzásról tanultak ismétlése a tanult számkörökben

A tanár a táblai hatványokat felhasználva bevezeti a hatvány fogalmát a következőképpen:

A hatványozás művelete az ismételt szorzás rövidítésére szolgál. Például:

$$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$$

Az ismétlődő szorzótényező (itt a 10) a **hatvány alapja**, a szorzótényezők darabszáma (itt az 5) a **hatvány kitevője**, és ezt a hatványt **tíz az ötödiken**-nek olvassuk.

A megbeszélte meghatározás alkalmazására és gyakorlására oldjuk meg az 1. feladatlap 1. és 2. feladatait. Az 1. feladatot a gyerekekkel közösen oldjuk meg.

A közös megoldás során átismétljük a szorzásról tanultakat a racionális számkörben. Ha valahol komoly hiányosságot látunk, akkor a feladatgyűjteményben is találhatunk feladatokat a felzárkóztatáshoz. A racionális számokkal való műveleteket részletesen összefoglaljuk később, ugyanebben a fejezetben. Itt elég, ha arra szorítkozunk, hogy hogyan kell

- törtet törttel,
- tizedes törtet tizedes törttel szorozni,
- negatív tényezőket is tartalmazó szorzat előjelét meghatározni.

A 2. feladatot a gyerekek önállóan oldják meg.

1. Írd a szorzatalakot hatványalakba, a hatványalakot szorzatalakba! Számítsd ki az értékét!

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 625;$

$$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^4 = 81;$$

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^9 = 1\,000\,000\,000$$

$$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = (-1)^8 = 1$$

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$$

$$\left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \left(-\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$$

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{10000}$$

$$0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,2^3 = 0,008$$

$$1,5 \cdot 1,5 = 1,5^2 = 2,25$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

b) $3^4 = 81$

$2^6 = 64$

$10^7 = 10\,000\,000$

$(-3)^4 = 81$

$(-10)^3 = -1000$

$(-1)^9 = -1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

$0,3^2 = 0,09$

$1,1^2 = 1,21$

$(-0,5)^3 = -0,125$

2. Írd a szorzatalakot hatványalakba, a hatványalakot szorzatalakba! Számítsd ki az értékét!

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6 = 1\,000\,000$
 $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = (-1)^4 = 1$ $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = (-1)^7 = -1$
 $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$ $\left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$
 $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$ $0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,2^4 = 0,0016$
 $0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,5^3 = 0,125$ $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$

b) $10^{10} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000\,000\,000$
 $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$
 $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
 $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$
 $(-10)^4 = (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) = 10\,000$
 $2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$
 $\frac{3^4}{2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{2} = \frac{81}{2}$
 $\frac{3}{4^4} = \frac{3}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{3}{256}$
 $(-0,3)^2 = (-0,3) \cdot (-0,3) = 0,09$
 $1,5^2 = 1,5 \cdot 1,5 = 2,25$
 $(0,1)^4 = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,0001$
 $(-0,1)^4 = (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) \cdot (-0,1) = 0,0001$
 $(-0,5)^4 = (-0,5) \cdot (-0,5) \cdot (-0,5) \cdot (-0,5) = 0,0625$
 $(-1)^{20} = 1$
 $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$

Ezután a helyiértékek hatványalakjával foglalkozunk tüzetesebben. A 2. feladatlap 1. feladatában egy helyi érték táblázat fejléce látható, melyben a helyi értékeket többféleképpen is elkezdtek beírni. A feladat az, hogy folytassák a hiányzó helyek kitöltését. Hallgassunk meg javaslatokat arról, hogyan lehet az 1-nél kisebb helyiértékeket hatványok segítségével felírni. Frontális osztálymunkában beszéljük meg a kitöltést.

2. FELADATLAP

1. Töltsétek ki a táblázat üres mezőit!

ezer	száz	tíz	egy	tized	század	ezred	tízezred
1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$
				0,1	0,01	0,001	0,0001
10^3	10^2	10^1	10^0	$\frac{1}{10^1}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^4}$
				10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}

A szemelvények szövegeiben talált hatványokról megállapítjuk, mekkorák.

A gyerekek a helyiérték-táblázatba írják be a megfelelő helyiértékeket hatványalakban! Az így kiegészített hatványtáblázatba írják be a szöveg számait és olvassák ki azokat!

Ezt a feladatot jó képességű osztályban kihagyhatjuk, gyengébb csoportban mindenképpen foglalkozunk vele.

A 2. feladatlap többi feladataival csak akkor foglalkozunk, ha marad idő, ha nem, akkor csúsztassuk át a következő órára.

2. Írjátok be a helyiérték-táblázatba a szemelvények szövegeiben található számokat!

10^9	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^6}$	$\frac{1}{10^7}$	$\frac{1}{10^8}$	$\frac{1}{10^9}$
								4	0									
							1	4	0									
							3	0	0									
					5	0	0	0	0									
			2	0	0	0	0	0	0									
				1	0	0	0	0	0									
		2	5	0	0	0	0	0	0									
							1	5	0									
4	5	0	0	0	0	0	0	0	0									
1	8	0	0	0	0	0	0	0	0									
									2	8								
									0	0	0	0	0	0	0	0	2	8
									7	9								
					1	1	0	3	3									

3. Hatványok összehasonlítása a definíció alapján

Akkor adjuk fel, ha a gyerekek gyorsan végeznek az előző feladattal, vagy odaadhatjuk csak a gyorsabban haladóknak, ha a sebességeik között nagy a különbség a számolási feladatok megoldásában.

3. Melyik nagyobb? Tedd ki a megfelelő (<, >, =) jelet!

a)

$10^3 < 10^5$	$\left(\frac{1}{10}\right)^3 > \left(\frac{1}{10}\right)^5$	$\frac{1}{10^3} > \left(\frac{1}{10}\right)^5$
$\frac{3}{5} > \left(\frac{2}{5}\right)^3$	$-5^2 < (-5)^2$	$(-2)^3 = -2^3$
$\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \left(\frac{1}{100}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 < \frac{3^4}{2}$	$(-2)^2 > (-8)^3$

b) Melyik nagyobb és hányszor?

$2^8 > 4^3$ 4-szer	$3^5 < 9^3$ 3-szor	$8^6 > 4^8$ 4-szer
$5^6 > 25^2$ 25-ször	$49^5 = 7^{10}$	$10^6 > 20^3$ 125-ször
$2^5 > 5^2$ $\frac{32}{25}$ -ször	$2^8 < 16^3$ 16-szor	$6^4 < 3^8$ $\frac{81}{16}$ -ször

4. Csoportverseny

Ha van időnk, akkor érdemes erre a gyorsan lejátszható csoportversenyre sort keríteni. Minden (max.) négy fős csoportnak osszuk ki a **2. tanári melléklet** kártyáit!

2. tanári melléklet – lásd e fájl végén és a modul eszközei közt is!

$(-8)^2$	$(-5)^9$
$\left(\frac{4}{3}\right)^5$	$(-10)^3$
$(-1)^{23}$	$0,8^7$
$0,1^{10}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^7$

Feladatuk: a kártyákat a rajtuk szereplő számok növekedő sorrendjébe állítani. Az a csapat győz, aki elsőként rakta helyes sorrendbe a kártyákat. (A feladat megoldható a hatványok kiszámítása nélkül is.)

Minden csoport kap nyolc számkártyát, ezeket kell nagyság szerint sorba rendezni:

$(-8)^2$	$(-5)^9$	$0,1^{10}$	$(-1)^{23}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^5$	$(-10)^3$	$\left(\frac{4}{5}\right)^7$	$0,8^7$
----------	----------	------------	-------------	------------------------------	-----------	------------------------------	---------

$(-5)^9$	$<$	$(-10)^3$	$<$	$(-1)^{23}$	$<$	$0,1^{10}$	$<$	$0,8^7$	$=$	$\left(\frac{4}{5}\right)^7$	$<$	$\left(\frac{4}{3}\right)^5$	$<$	$(-8)^2$
----------	-----	-----------	-----	-------------	-----	------------	-----	---------	-----	------------------------------	-----	------------------------------	-----	----------

A tanár ellenőrzi a megoldásokat, ahol a csapat jelzi, hogy kész van. Hibás próbálkozónak csak akkor van esélye újra próbálkozni, ha elsőre minden csapat hibázott.

TUDNIVALÓ:

A hatványozás művelete az ismételt szorzás rövidítésére szolgál. Például:

$$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$$

Az ismétlődő szorzótényező (itt a **10**) a **hatvány alapja**, a szorzótényezők darabszáma (itt az **5**) a **hatvány kitevője**, és ezt a hatványt **tíz az ötödiken**-nek olvassuk.

A hatványozás felírása általánosan:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ darab szorzótényező}}$$

Itt n a tényezők darabszáma, ha n egynél nagyobb pozitív egész szám.

Az a^n az a számnak az n -edik hatványa, a **hatványalap** a , n a **hatványkitevő**.

Bármely pozitív természetes szám **0**-dik hatványa 1-gyel egyenlő:

$$a^0 = 1, \text{ ha } a \neq 0$$

4. Házi feladat kitűzése, hatványtáblázat készítése

A 3. feladatlap 1. feladatát – a hatványtáblázat készítését – idő híján adhatjuk 2. órasi házi feladatnak is.

II. Ismerkedés a hatványozás tulajdonságaival, a tanultak elmélyítése és gyakorlása

1. Összefüggések keresése hatványtáblázatokban, a házi feladat megbeszélése

A tanár kiosztja a hatványtáblázatokat. A gyerekek ellenőrzik, jól számoltak-e a házi feladatban. Megbeszélnek közösen a 2. feladatot.

3. Nyitott mondatok hatványokkal

3. Oldd meg a nyitott mondatokat a pozitív egész számok körében!

$$2^a = 4^b$$

a	2	4	6	8
b	1	2	3	4

$$2^x = 3^y$$

nincs megoldás

x				
y				

$$2^s = 8^t$$

s	3	6	9	30
t	1	2	3	10

$$3^c = 9^d$$

c	2	8	12	20
d	1	4	6	10

$$4^r = 8^m$$

r	3	6	9	12
m	2	4	6	8

$$5^k = 10^n$$

nincs megoldás

k				
n				

4. Hatvány felírása sokféle alakban

A feldolgozáshoz szükséges:

Szám- és jelkártyakészlet (alsós) – kereskedelmi forgalomban kapható

Betűkészlet (alsós) – kereskedelmi forgalomban kapható

Frontálisan kezdünk, a táblára jó szellősen kirakjuk kártyákon a következő szorzást:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Megkérjük a gyerekeket, rakják ki ugyanezt minél több különböző alakban. Használhatnak zárójelkártyákat, szorzás- és osztás műveletkártyákat és kitevőkártyákat. A táblán újabb és újabb alakokat raknak fel a gyerekek. Megkérdezzük a gyerekeket, hogy más feladatot kapnánk-e, ha a kettesek helyett csupa hármast tennénk ki, ha csupa 5-öst...

Ezután csoportmunkában folytassuk.

Adják meg az a^9 -t minél többféleképpen alap-, kitevő-, szorzó-, osztó és zárójelkártyák segítségével. A kirakott hatványalakokat csomagolópapírra írják a gyerekek.

Például: $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

Tegyünk ebbe zárőjeleket és a zárőjelben lévő szorzatokat rakjuk ki hatványalakban! Utána írjuk is fel a kapott alakot! Például: $a^9 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a^5 \cdot a^4$

Amelyik csoport a legtöbbet gyűjtötte, annak a papírját kitesszük a táblára, akinek a papírján még van újabb alak felírva, az felírja a táblára is.

A tevékenység végén megbeszéljük az észrevételeiket.

Házi feladatnak adjuk fel a 4. feladatlap 1. feladatát!

III. Egyenlő alapú hatványok szorzása és osztása

1. Egyenlő alapú hatványok szorzási szabályának megfogalmazása szóban

Ezeknek a gyakorlatoknak a célja a definíció gyakorlása, elmélyítése. Az azonosságok megfogalmazása általánosan a következő év feladata.

A csoportok együtt gondolkodhatnak, minden gyerek kitölti a saját feladatlapját. A tanár figyeli a csoportok munkáját, szükség esetén segít a csoportoknak vagy átvált frontális munkára.

Várható, hogy a gyerekek egy részében megfogalmazódik a hatványok szorzásának szabálya, akkor beszéljünk róla, de mi ne kezdeményezzük. Számon kérni pedig semmiképpen sem szabad!

Az órát a házi feladat megbeszélésével – a 4. feladatlap 1. feladatával – kezdjük. A gyerekek egyénileg megoldják a feladatot, amit utána közösen megbeszélünk.

Ezután összegezzük a tapasztalatokat.

A feladatokhoz használhatják a hatványtáblázatot (**1. tanulói melléklet**).

4. FELADATLAP

1. Hány szorzással jutsz célba? Minden lépésben ugyanazzal a számmal szoroztunk.

a) Hány kettes tényező hiányzik?

$$1 \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \dots \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} = 64 \quad 1\text{db} \qquad 1 \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \dots \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} = 128 \quad 2\text{db}$$

$$1 \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \dots \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} = 256 \quad 3\text{db} \qquad 1 \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \dots \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} = 512 \quad 4\text{db}$$

b) Hány tényező hiányzik? Használhatod a hatványtáblázatot!

$$1 \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \dots \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} = 4096 \quad 7\text{db}$$

$$1 \cdot \boxed{4} \cdot \boxed{4} \cdot \boxed{4} \cdot \dots \cdot \boxed{4} \cdot \boxed{4} = 4096 \quad 1\text{db}$$

$$1 \cdot \boxed{8} \cdot \dots \cdot \boxed{8} \cdot \boxed{8} = 4096 \quad 1\text{db}$$

A gyerekek egyénileg megoldják a 2. feladatot, amit utána közösen megbeszélünk.

Ezután összegezzük a tapasztalatokat.

2. Milyen számokat jelölnek a betűk?

$$10^2 \cdot 10^3 = 10^a \qquad a = 5 \qquad 10^9 \cdot 10^3 \cdot 10^5 = 10^b \qquad b = 17$$

$$10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^5 \cdot 10^{10} = 10^c \qquad c = 20 \qquad 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^5 = 10^d \qquad d = 11$$

$$10^e \cdot 10^e = 10^{10} \qquad e = 5 \qquad 10^f \cdot 10^g = 10^{10} \qquad f = \quad ; g =$$

felcserélhető (1;9) | (2;8) | (3;7) | (4;6)

$$10^h \cdot 10^h \cdot 10^h = 10^{12} \qquad h = 4 \qquad 10^i \cdot 10^j \cdot 10^k = 10^{12} \qquad i = \quad ; j = \quad ; k =$$

felcserélhető

(1;2;9) | (1;3;8) | (1;4;7) | (1;5;6) | (2;3;7) | (2;4;6) | (3;4;5)

ÖSSZEGZÉS:

Azonos alapú hatványok szorzásakor a kitevők összegződnek, mert a kitevők a tényezők darabszámát adják meg.

Azonos alapú hatványok szorzata olyan hatvány, amelynek az alapja ugyanaz, a kitevője pedig a tényezők kitevőinek összege. Például:

$$10^3 \cdot 10^2 \cdot 10^5 \cdot 10^{10} = 10^{(3+2+5+10)} = 10^{20}$$

$$a^3 \cdot a^2 \cdot a^5 \cdot a^{10} = a^{(3+2+5+10)} = a^{20}$$

$$2^k \cdot 2^m = 2^{k+m}$$

$$a^k \cdot a^m = a^{k+m}$$

2. Osztás bevezetése fordított feladatokon keresztül

Ugyanúgy, ahogy az előző feladatoknál, a hatványok szorzásánál már leírtuk, ezeknek a gyakorlatoknak is a definíció gyakorlása, elmélyítése a célja. Az azonosságok megfogalmazása általánosan a következő év feladata.

A csoportok együtt gondolkodhatnak, minden gyerek kitölti a saját feladatlapját. A tanár figyeli a csoportok munkáját, szükség esetén segít a csoportoknak vagy átvált frontális munkára.

Várható, hogy a gyerekek egy részében megfogalmazódik a hatványok osztásának szabálya, akkor beszéljünk róla, de mi ne kezdeményezzük. Számon kérni pedig semmiképpen sem szabad.

3. Keresd meg a hiányzó kitevőket!

a)

$$\boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot 2^5 \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} = 2^{10}$$

$$2^3 \cdot 2^8 = 2^{11}$$

$$\boxed{5} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{5} \cdot 5^1 \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{5} \cdot 5^3 \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{5} = 5^{15}$$

$$3^3 \cdot 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^5 = 3^{11}$$

b) Írd be a hiányzó hatványokat!

$$\begin{array}{c} \cdot 4^2 \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \\ 4^3 \quad 4^5 \\ \curvearrowleft \quad \curvearrowright \\ : 4^2 \end{array}$$

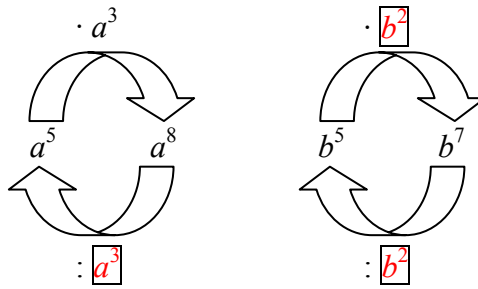
$$\begin{array}{c} \cdot 3^1 \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \\ 3^5 \quad 3^6 \\ \curvearrowleft \quad \curvearrowright \\ : \boxed{3^1} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \cdot \boxed{2^3} \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \\ 2^1 \quad 2^4 \\ \curvearrowleft \quad \curvearrowright \\ : 2^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \cdot 3^4 \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \\ 3^3 \quad 3^7 \\ \curvearrowleft \quad \curvearrowright \\ : \boxed{3^4} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \cdot \boxed{7^5} \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \\ 7^2 \quad 7^7 \\ \curvearrowleft \quad \curvearrowright \\ : \boxed{7^5} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \cdot \boxed{5^3} \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \\ 5^4 \quad 5^9 \\ \curvearrowleft \quad \curvearrowright \\ : \boxed{5^3} \end{array}$$



c) Írd fel hatványalakban!

$$(10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) : (10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10) =$$

$$= \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{10^7}{10^4} = 10^7 : 10^4 = 10^3$$

$$(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) : (5 \cdot 5) = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{5^4}{5^2} = 5^2$$

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{2^6}{2^3} = 2^6 : 2^3 = 2^3$$

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{3^{11}}{3^4} = 3^{11} : 3^4 = 3^7$$

d) Írd fel egyetlen hatványként!

$$10^5 : 10^2 = 10^3$$

$$6^9 : 6^2 = 6^7$$

$$9^{11} : 9^5 = 9^6$$

$$3^7 : 3^6 = 3^1$$

$$5^{10} : 5^5 = 5^5$$

$$2^{12} : 2^4 : 2^3 = 2^5$$

$$3^{15} : 3^{12} = 3^3$$

$$7^8 : 7^4 : 7^2 = 7^2$$

$$20^5 : 20^2 = 20^3$$

$$11^8 : 11^4 : 11^1 = 11^3$$

$$a^8 : a^4 = a^4$$

$$b^{12} : b^3 = b^9$$

3. Összegzés: egyenlő alapú hatványok osztási szabályának megfogalmazása általánosan

ÖSSZEGZÉS:

Azonos alapú hatványok osztásakor az osztó kitevőjét kivonjuk az osztandó kitevőjéből. Azonos alapú hatványok hányadosa olyan hatvány, amelynek az alapja ugyanaz, a kitevője pedig a tényezők kitevőinek a különbsége. Például:

$$10^8 : 10^2 = 10^{(8-2)} = 10^6$$

$$a^8 : a^5 = a^{(8-5)} = a^3$$

$$\{ \text{ugyanaz törtes alakban is: } \frac{a^8}{a^5} = a^{(8-5)} = a^3 \}$$

$$2^k : 2^m = 2^{k-m}$$

$$a^k : a^m = a^{k-m}$$

IV. Differenciált gyakorlás

1. Diagnosztizáló mérés

A 4. feladatlapot egy gyors diagnosztizáló mérésnek is használhatjuk. Megoldása a hatványozás definíciójának és a szorzás-osztás műveleti tulajdonságainak ismeretét kívánja.

Ezzel a feladattal ellenőrizheted, mennyire érted a hatványozást.
Írd fel az eredményt egyetlen hatványként!

$$5^2 \cdot 5^3 = 5^5$$

$$7 \cdot 7^4 \cdot 7^3 = 7^8$$

$$10^5 : 10 = 10^4$$

$$10^8 : 10^2 = 10^6$$

$$4^3 \cdot 4^8 : 4^5 = 4^6$$

$$10^{12} : 10^7 \cdot 10^4 = 10^9$$

$$8^6 \cdot 8^6 = 8^{12}$$

$$3^9 : 3^4 = 3^5$$

$$2^4 \cdot 2^8 : 2^5 = 2^7$$

$$11^5 : 11^2 : 11^2 = 11$$

2. Differenciált gyakorlás

5. FELADATLAP

Vegyes gyakorló feladatok

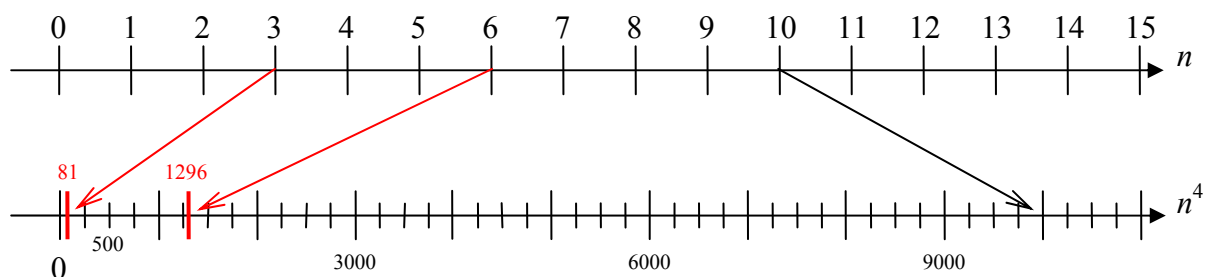
1. Minden embernek két szülője van. A szülőknek is két szülőjük van, ez $2 \cdot 2$ nagyszülőt jelent. A nagyszülők szülei még kétszerennyien vannak. Ez $2^2 = 4$ nagyszülőt, $2^3 = 8$ dédszülőt... a 10 lépésben $2^{10} = 1024$ őst jelent. 100 év alatt átlagosan több, mint 3 leszármazott generáció keletkezik. Ez 1000 év alatt több, mint 30 generációt jelent. Ennek alapján ki tudod találni, hogy 1000 évvel ezelőtt hány ősd élt.

30 generációval ezelőtt okoskodásunk szerint $2^{30} = 1\,073\,741\,824$, ami sokkal több, mint ahány ember akkoriban a földön élt. Ha kicsit engedjük gondolkozni a gyerekeket, hamarosan bizonyára rájönnek, hogy ennek az ellentmondásnak a megoldása az, hogy őseink között sok-sok megegyező személy van.

2. Milyen számokat írhatunk az n helyébe, hogy igaz legyen

$$600 < n^4 < 6000?$$

Írjunk az n helyébe 10-et: $10^4 = 10000$. Ez jóval nagyobb, mint 6000, tehát a 10 túl nagy.



Írjunk az n helyébe kisebbet, például 6-ot: $6^4 = 1296$. Ebben az esetben igaz az egyenlőtlenség, mert $600 < 1296 < 6000$. Jelöld az előbbi nyíldiagramon! Írjunk az n helyébe még kisebb számot, például 3-at: $3^4 = 81$. Ez már túl kicsi. Ezt is jelöld a fenti nyíldiagramon! Ezek szerint az n helyébe elég a 3 és a 10 közötti számok közül válogatnunk.

Próbálgass tovább!

n lehet 6, 7 és 8

3. Ebbe a pohárba egy olyan sejtet tettünk, amelyik percenként kettéosztódik. Az új sejtek ugyanakkorák, mint a régiek, és ezek is percenként kettéosztódnak. (Először 1 percnyi élet után osztódnak ketté.)

a) Hány perc múlva lesz 64 sejt a pohárban?

$64 = 2^6$, tehát 6 perc múlva.

b) Hány perc múlva lesz 128 sejt a pohárban?

$128 = 2^7$, tehát 7 perc múlva.

c) Hány perc múlva lesz 256 sejt a pohárban?

$256 = 2^8$, tehát 8 perc múlva.

d) Hány perc múlva lesz körülbelül 1000 sejt a pohárban?

$1000 \approx 2^{10}$, tehát körülbelül 10 perc múlva.

e) Hány perc múlva lesz körülbelül 10^6 sejt a pohárban?

$10^6 \approx 2^{20}$, körülbelül 20 perc múlva.

f) Hányadik percben lesz körülbelül 10^9 sejt a pohárban?

$2^{29} < 10^9 < 2^{30}$, tehát 30 perc múlva.

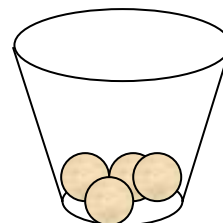
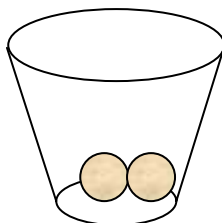
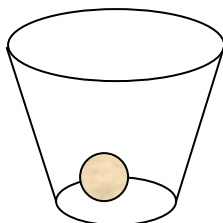
g) A pohár 1 óra alatt telt meg. Tudod-e, hány perc múlva volt félig a pohár? 59 perc múlva. Mikor volt negyedrészig; mikor harmadrészig a pohár? 58 perc múlva; az 58. és 59. perc közt

h) Három pohárba tettünk ugyanilyen sejtecskéket:

az elsőbe 1-et,

a másodikba 2-t,

a harmadikba 4-et.



A harmadik pohár 1 óra alatt telt meg. Mennyi idő alatt telt meg a második pohár? 61 perc. És mennyi idő alatt az első pohár? 62 perc.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Egy városban 4 kerület van. Minden kerületben van 4 utca. Minden utcában 4 ház. Mindegyik házban 4 emelet, minden emeleten 4 lakás van. Minden lakásban négyen laknak. Hányan laknak a városban?

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^6 = 4096$$

2. Írd le a szorzatokat hatványalak segítségével rövidebben!

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^6$$

$$(-15) \cdot (-15) \cdot (-15) \cdot (-15) = (-15)^4$$

$$0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,7^9$$

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8$$

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 2^4 \cdot 3^3$$

$$(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-5)^4 \cdot (-3)^2$$

$$x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot x \cdot y \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y = x^6 \cdot y^5$$

$$(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^5$$

$$k \cdot n \cdot n \cdot m \cdot n \cdot k \cdot k = m^1 \cdot n^3 \cdot k^3$$

3. Írd fel szorzat alakban a következő hatványokat!

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

$$(-4)^6 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$$

$$11^5 = 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$$

$$3^1 = 3$$

$$17^4 = 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17$$

$$0,32^6 = 0,32 \cdot 0,32 \cdot 0,32 \cdot 0,32 \cdot 0,32 \cdot 0,32$$

$$1,2^2 = 1,2 \cdot 1,2$$

$$33^3 = 33 \cdot 33 \cdot 33$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$$

4. Írd fel hatványalakban, majd számítsd ki!

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

$$(-5) \cdot (-5) = (-5)^2 = 25$$

$$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^3 = -8$$

$$0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0^5 = 0$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1^8 = 1$$

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6 = 1\,000\,000$$

$$0,1 \cdot 0,1 = 0,1^2 = 0,01$$

$$0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,1^5 = 0,00001$$

5. Melyik a nagyobb?

a)

$$(-1)^4 \text{ vagy } (-1)^5$$

$$(-1)^4 > (-1)^5$$

$$2^3 \text{ vagy } 3^2$$

$$2^3 < 3^2$$

$$5^2 \text{ vagy } 2^5$$

$$5^2 > 2^5$$

$$10^6 \text{ vagy } 10^7$$

$$10^6 < 10^7$$

$$0,1^3 \text{ vagy } 0,1^2$$

$$0,1^3 < 0,1^2$$

$$5^0 \text{ vagy } 0,5^2$$

$$5^0 > 0,5^2$$

b)

$$10^6 \text{ vagy } 756\,827$$

$$10^6 > 756\,827$$

$$9 \cdot 10^7 \text{ vagy } 934 \cdot 10^4$$

$$9 \cdot 10^7 > 934 \cdot 10^4$$

$$9 \cdot 32 \cdot 10^6 \text{ vagy } 87 \cdot 10^5$$

$$9 \cdot 32 \cdot 10^6 > 87 \cdot 10^5$$

$$6 \cdot 10^8 \text{ vagy } 60 \cdot 10^7$$

$$6 \cdot 10^8 = 60 \cdot 10^7$$

6. Igaz legyen!

a) $10\,000 < 3^n < 30\,000$

Itt gyűjtsd a számokat!

n : ...9

b) 2^b négyjegyű szám

b : ...10, 11, 12, 13

c) 5^c ötjegyű szám

c : ...6, 7

d) $3^8 \leq 2^a \cdot 3^a \leq 2^{16}$

a : ...5, 6

7. Írd át a műveletekben szereplő számokat hatványalakba! Végezd el a műveleteket! Ha ügyes vagy, minden eredményt kiolvashatsz a hatványtáblázatból.

a) $16 \cdot 16 = 2^4 \cdot 2^4 = 2^8 = 256$

$$8 \cdot 32 = 2^3 \cdot 2^5 = 2^8 = 256$$

$$4 \cdot 16 = 2^2 \cdot 2^4 = 2^6 = 64$$

$$32 \cdot 32 = 2^5 \cdot 2^5 = 2^{10} = 1024$$

$$\text{b) } 16 \cdot 2048 = 2^{15} = 32\,768$$

$$4096 : 512 = 2^3 = 8$$

$$128 \cdot 256 = 2^{15} = 32\,768$$

$$81 \cdot 177\,147 = 3^{15} = 14\,348\,907$$

$$59\,049 : 243 = 3^5 = 243$$

$$729 \cdot 243 = 3^{11} = 177\,147$$

$$59\,049 : 19\,683 = 3^1 = 3$$

$$6561 \cdot 2187 = 3^{15} = 14\,348\,907$$

$$1\,594\,323 : 177\,147 = 3^2 = 9$$

$$625 \cdot 15\,625 = 5^{10} = 9\,765\,625$$

$$7776 : 216 = 6^2 = 36$$

$$16\,807 \cdot 343 = 7^8 = 5\,764\,801$$

$$390\,625 : 78\,125 = 5^1 = 5$$

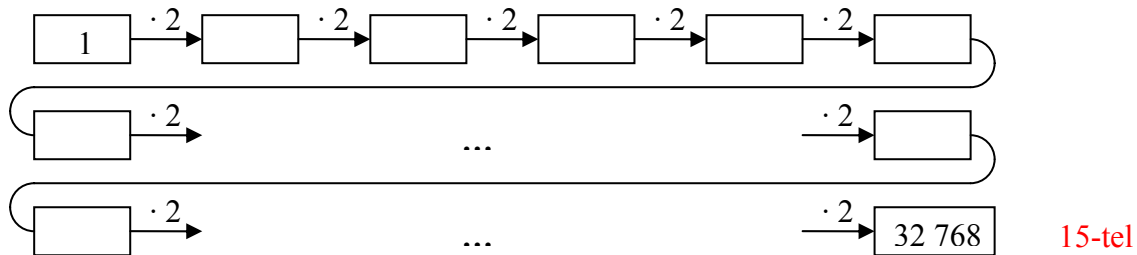
$$16\,807 \cdot 117\,649 = 7^{11} = 1\,977\,326\,743$$

8. Figyeld meg a szabályszerűséget, és pótold a hiányzó részeket! Hány szorzással jutsz el az 1-től a végeredményig?

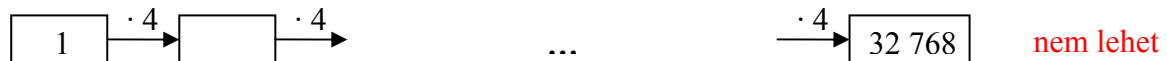
a)



b)



c)



9. Keres a megadott három hatvánnyal egyenlőket! Próbáld megoldani a feladatot minél kevesebb számolással!

$$9^2$$

$$3^6$$

$$2^4$$

$$2 \cdot 2^3 = 2^4$$

$$3^3 \cdot 3^3 = 3^6$$

$$4 \cdot 2^2 = 2^4$$

$$3^{11} : 3^5 = 3^6$$

$$9^5 : 9^3 = 9^2$$

$$4^2 = 2^4$$

$$9^3 = 3^6$$

$$3^5 : 3 = 9^2$$

$$9^3 : 3^2 = 9^2$$

$$3^2 \cdot 9^2 = 3^6$$

$$15^6 : 5^6 = 3^6$$

$$12^4 : 3^4 = 4^4$$

$$8^2 : 4 = 2^4$$

$$3^4 = 9^2$$

10. Találd ki a hiányzó kitevőket!

$$5^{11} \cdot 5^3 = 5^a$$

$$a = 14$$

$$7^2 \cdot 7^3 \cdot 7^5 = 7^b$$

$$b = 10$$

$$6^{11} : 6^3 = 6^a$$

$$a = 8$$

$$7^2 \cdot 7^3 : 7^5 = 7^b$$

$$b = 0$$

$$10 \cdot 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^5 = 10^c$$

$$c = 10$$

$$11^3 \cdot 11^d \cdot 11^5 = 11^{13}$$

$$d = 5$$

$$10 \cdot 10^9 : 10^2 \cdot 10^5 = 10^c$$

$$c = 13$$

$$11^3 \cdot 11^d : 11^5 = 11^{13}$$

$$d = 15$$

$$2^x \cdot 2^x = 2^{16}$$

$$x = 8$$

$$3^x \cdot 3^y = 3^{12}$$

$$\text{több megoldás van: } x + y = 12$$

$2^{20} : 2^x = 2^{12}$

$x = 8$

$3^x : 3^y = 3^2$

több megoldás van: $x - y = 2$

$6^f \cdot 6^f \cdot 6^f = 6^{12}$

$f = 4$

$7^x \cdot 7^y \cdot 7^z = 7^{10}$

több megoldás van: $x + y + z = 10$

$6^{15} : 6^f : 6^2 = 6^{12}$

$f = 1$

$7^x \cdot 7^y : 7^y = 7^{10}$

 $x = 10$; y tetszőleges egész szám

11. Írd be a hiányzó adatokat!

$2^6 = 4^3$

$3^6 = 9^3$

$2^9 = 8^3$

$3^6 = 27^2$

$3^{\square} = 6^2$ nincs mo.

$4^3 = 8^2$

$4^{\square} = 8^3$ nincs mo.

$3^9 = 27^3$

$9^{\square} = 27^3$ nincs mo.

$3^3 = 27^2$

$5^4 = 25^2$

$5^6 = 125^2$

$2^8 = \boxed{4}^4$

$2^{12} = \boxed{16}^4$

$2^{12} = \boxed{8}^4$

$2^{12} = \boxed{4}^6$

$2^{12} = \boxed{64}^2$

$3^8 = \boxed{9}^4$

$3^8 = \boxed{81}^2$

$\boxed{9}^3 = 27^2$

A 2., 3. és 12. esetben nincs megoldás a pozitív egész számok körében.

12. Melyik nagyobb? Tedd közéjük a $<$, $>$ vagy $=$ jelet!

$2^{12} < 4^8$

$3^{12} < 9^8$

$2^{15} < 8^6$

$6^8 < 3^{16}$

$8^8 < 3^{16}$

$4^5 > 10^3$

$2^{10} > 10^3$

$2^{20} > 10^6$

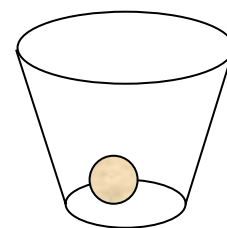
$4^{10} > 10^6$

$5^9 = 125^3$

13. Figyelmesen olvasd el a feladatot, és válaszolj a kérdésekre!

Ebbe a pohárba egy olyan sejtet tettünk, amelyik percenként 4 részre osztódik. Az új sejtek ugyanakkorák, mint a régiek, és ezek is percenként 4 részre osztódnak. (Először 1 percnyi élet után osztódnak 4 részre.) Ez a pohár 35 perc alatt telik meg.

- 34 perc múlva a pohár mekkora részében lesznek sejtek? **negyedében**
- Mikor lesz negyedrészig a pohár? **34 perc után**
- Mikor lesz tizenhatod részig a pohár? **33 perc után**
- Hány perc múlva lesz 64 sejt a pohárban? **3 perc múlva**
- Hány perc múlva lesz 256 sejt a pohárban? **4 perc múlva**
- Igaz-e, hogy 5 perc múlva 1000-nél több sejt van a pohárban? **igaz**
- Igaz-e, hogy 10 perc múlva 3000-nél kevesebb sejt van a pohárban? **nem igaz**
- Igaz-e, hogy 10 perc múlva 1 milliónál több sejt van a pohárban? **igaz**



14. Hány részre osztódik percenként az a sejt, amelyikből 4 perc alatt 4096 sejt keletkezik osztódással? Próbálgass!

Lehet-e, hogy percenként 5 részre osztódik? **nem**

Lehet-e, hogy percenként 10 részre osztódik? **nem**

8 részre osztódik a sejt percenként.

0711 – 1. tanulói melléklet, Hatványtáblázat

n	2^n	3^n	5^n
1	2	3	5
2	4	9	25
3	8	27	125
4	16	81	625
5	32	243	3 125
6	64	729	15 625
7	128	2 187	78 125
8	256	6 561	390 625
9	512	19 683	1 953 125
10	1 024	59 049	9 765 625
11	2 048	177 147	48 828 125
12	4 096	531 441	244 140 625
13	8 192	1 594 323	1 220 703 125
14	16 384	4 782 969	6 103 515 625
15	32 768	14 348 907	30 517 578 125
16	65 536	43 046 721	152 587 890 625
17	131 072	129 140 163	762 939 453 125
18	262 144	387 420 489	3 814 697 265 625
19	524 288	1 162 261 467	19 073 486 328 125
20	1 048 576	3 486 784 401	95 367 431 640 625
21	2 097 152	10 460 353 203	476 837 158 203 125
22	4 194 304	31 381 059 609	2 384 185 791 015 625
23	8 388 608	94 143 178 827	11 920 928 955 078 125
24	16 777 216	282 429 536 481	59 604 644 775 390 625
25	33 554 432	847 288 609 443	298 023 223 876 953 125
26	67 108 864	2 541 865 828 329	1 490 116 119 384 765 625
27	134 217 728	7 625 597 484 987	7 450 580 596 923 828 125
28	268 435 456	22 876 792 454 961	37 252 902 984 619 140 625
29	536 870 912	68 630 377 364 883	186 264 514 923 095 703 125
30	1 073 741 824	205 891 132 094 649	931 322 574 615 478 515 625

4	6	7
$4^0 = 1$	$6^0 = 1$	$7^0 = 1$
$4^1 = 4$	$6^1 = 6$	$7^1 = 7$
$4^2 = 16$	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$
$4^3 = 64$	$6^3 = 216$	$7^3 = 343$
$4^4 = 256$	$6^4 = 1 296$	$7^4 = 2 401$
$4^5 = 1 024$	$6^5 = 7 776$	$7^5 = 16 807$
$4^6 = 4 096$	$6^6 = 46 656$	$7^6 = 117 649$
$4^7 = 16 384$	$6^7 = 279 936$	$7^7 = 823 543$
$4^8 = 65 536$	$6^8 = 1 679 616$	$7^8 = 5 764 801$
$4^9 = 262 144$	$6^9 = 10 077 696$	$7^9 = 40 353 607$
$4^{10} = 1 048 576$	$6^{10} = 60 466 176$	$7^{10} = 282 475 249$
$4^{11} = 4 194 304$	$6^{11} = 362 797 056$	$7^{11} = 1 977 326 743$
$4^{12} = 16 777 216$	$6^{12} = 2 176 782 336$	$7^{12} = 13 841 287 201$
$4^{13} = 67 108 864$	$6^{13} = 13 060 694 016$	$7^{13} = 96 889 010 407$
8	9	10
$8^0 = 1$	$9^0 = 1$	$10^0 = 1$
$8^1 = 8$	$9^1 = 9$	$10^1 = 10$
$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$
$8^3 = 512$	$9^3 = 729$	$10^3 = 1 000$
$8^4 = 4 096$	$9^4 = 6 561$	$10^4 = 10 000$
$8^5 = 32 768$	$9^5 = 59 049$	$10^5 = 100 000$
$8^6 = 262 144$	$9^6 = 531 441$	$10^6 = 1 000 000$
$8^7 = 2 097 152$	$9^7 = 4 782 969$	$10^7 = 10 000 000$
$8^8 = 16 777 216$	$9^8 = 43 046 721$	$10^8 = 100 000 000$
$8^9 = 134 217 728$	$9^9 = 387 420 489$	$10^9 = 1 000 000 000$
$8^{10} = 1 073 741 824$	$9^{10} = 3 486 784 401$	$10^{10} = 10 000 000 000$
$8^{11} = 8 589 934 592$	$9^{11} = 31 381 059 609$	$10^{11} = 100 000 000 000$
$8^{12} = 68 719 476 736$	$9^{12} = 282 429 536 481$	$10^{12} = 1 000 000 000 000$
$8^{13} = 549 755 829 888$	$9^{13} = 2 541 865 828 329$	$10^{13} = 10 000 000 000 000$

0711 – 2. tanári melléklet (8 db kártya)

Osztályonként 8 készlet (csoportonként 1 készlet) ebben a méretben kartonpapírra nyomva. Ki kell vágni a fekete vonalak mentén.

$(-8)^2$	$(-5)^9$
$\left(\frac{4}{3}\right)^5$	$(-10)^3$
$(-1)^{23}$	$0,8^7$
$0,1^{10}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^7$

0711 – 3. tanári melléklet, Halmazcímkék (3 db)

Osztályonként 1 készlet kartonlapra nyomva legalább kétszer ekkora méretben (jól látható legyen a tábláról). A fekete vonalak mentén szétvágandó.

Pozitív egész szám

Negatív egész szám

Törtszám