
ARÁNY, ARÁNYOSSÁG, STATISZTIKA

Bevezetés a statisztikába

KÉSZÍTETTE: BENCZÉDY-LACZKA KRISZTINA, MALMOS KATALIN

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Statisztikai alapfogalmak előkészítése. Adathalmazok jellemzése diagramokkal: kördiagram (szög, tört, százalékszámítás); oszlopdiagram (területszámítás); vonaldiagram (derékszögű koordináta-rendszer). Az adathalmaz átlaga, módusza (leggyakrabban előforduló eleme).
Időkeret	2 óra
Ajánlott korosztály	6. osztály
Modulkapcsolódási pontok	6. osztályos Számok és műveletek: Törtek témakör, 6. osztály Arány, arányosság, statisztika témakör 1. 2. 3. modul.
A képességfejlesztés fókuszai	<i>Rendszerezés, kombinativitás:</i> Valószínűségi játékok kísérleti jegyzőkönyveinek vizsgálata, grafikus ábrázolása. <i>Deduktív következtetés, induktív következtetés:</i> Adathalmazok jellemzése. Valószínűségi játékok, kísérletek lejegyzése, jegyzőkönyvek vizsgálata.

AJÁNLÁS:

Egyéni munka, csoport munka vegyes használata. A csoportmunkák során a tanulók többnyire négyes csoportokban dolgoznak, de fontos, hogy egyéni feladattal is kipróbálhassák magukat. Nagyon fontos a csoportokon belül kialakuló vita, a gondolkodás szabadsága, a másik véleményének figyelembe vétele, egymás tisztelete, a játékok során a játékszabályok betartása. Az egyén szerepe fontosságának megtapasztalása a közösségben. A tanulói tapasztalatcsere hangsúlyozása mellett ugyanilyen fontosnak kell lennie a frontális tanári munkának, amelynek során a tanulók megerősítést kapnak a továbbhaladásuk szempontjából legfontosabb ismeretekben, tisztázódnak a meg nem értett anyagrészek.

TÁMOGATÓ RENDSZER:

Feladatlapok, feladatgyűjtemény, táblázatok, grafikonok, valószínűségi játékok.

ÉRTÉKELÉS:

Az egyéni- és csoporteredmények szóbeli értékelése, a hiányosságok pótlására, hibák javíttatására is kiterjedően. Egyéni- és csoporteredmények pozitív értékelése. Ösztönözzük arra, hogy a tanulók egymás munkáját is értékeljék, megbecsüljék.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. Valószínűségi játékok kísérleti jegyzőkönyveinek vizsgálata			
1.	Ne nullázd le magad!	Megfigyelőképesség.	1. feladatlap
2.	Lóverseny – bevezető játék	Megfigyelőképesség, logikus gondolkodás.	1. tanári melléklet
3.	Lóverseny alapján jegyzőkönyv készítése	Megfigyelőképesség, logikus gondolkodás.	2. feladatlap, számítógépes program
4.	Statisztikai fogalmak előkészítése	Megfigyelőképesség, rendszerezés.	
II. Adathalmazok vizsgálata			
1.	Mi a 3 szám összege?	Megfigyelőképesség, rendszerezés.	3. feladatlap
2.	Pénzdobálás	Megfigyelőképesség, rendszerezés.	4. feladatlap
3.	Gyakorló feladatlap kitöltése	Induktív, deduktív következtetés, kombinatív gondolkodás.	5. feladatlap

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Valószínűségi játékok kísérleti jegyzőkönyveinek vizsgálata

1. Ne nullázd le magad!

A tanulók párban játszanak. Először hívjunk ki két tanulót, hogy bemutassák az osztálynak a játékot! A próbajáték jegyzőkönyvét a tanár felírja a táblára.

A játék a következő:

1. FELADATLAP

1. Ne nullázd le magad!

Dobjatok fel egy kockát!

- A játék kezdetekor az 1. játékosnak 2 pontja, a 2. játékosnak 1 pontja van.
- Ha a kockadobás eredménye legfeljebb 4, akkor az 1. játékos ad 1 pontot a 2. játékosnak.
- Ha a kockadobás eredménye 5 vagy 6, akkor a 2. játékos ad 1 pontot az 1.-nek.

A játék addig folytatódik, amíg valamelyik játékosnak el nem fogy a pontja. Akinek elfogynak a pontjai, az veszít.

Dobásszám	1. játékos	2. játékos
0.	2 pont	1 pont
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		

Dobásszám	1. játékos	2. játékos
0.	2 pont	1 pont
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		
6.		
7.		

A próbajáték után a tanulók párosával lejátsszák a játékot kétszer úgy, hogy a második játékban szerepet cserélnek.

A játék eredménye például így alakulhat:

Dobásszám	1. játékos	2. játékos
0.	2 pont	1 pont
1.	1	2
2.	2	1
3.	1	2
4.	0	3
5.		
6.		
7.		

A játékok befejezése után beszéljük meg a következő kérdéseket!

- Elképzeltető-e, hogy a játék sohasem fejeződik be?
- Melyik játékos nyer többször?
- Átlagosan hányadik dobásig tart a játék?

A tanár összegyűjti, hogy a játékok során hányadik dobásig tartott a játék. Az összegyűjtött adatok alapján az osztály közösen átlagot számol.

A párok a saját játékaik alapján szintén kiszámolják, hogy átlagosan meddig tartottak.

- Ha a játékban választhatnál, hányadik játékosként kezdenél? Miért?

2. Lóverseny – bevezető játék

A játék előtt ismételjük át a tanulókkal a gyakoriság és relatív gyakoriság fogalmát.

Először a játékot az osztály közösen játssza.

A tanulók 12 versenypálya közül választhatják ki, hogy melyikről akarnak elindulni lovukkal.

Egy pályáról több lovas is indulhat. A lovakat bábuk vagy korongok jelölhetik.

Kihívunk egy tanulót, aki két dobókockával dob. A dobott értékeket összeadjuk, így megkapjuk, hogy melyik ló indulhat el az adott körben. Amelyik számot dobtuk a két dobókocka összegeként, azon a pályán egyet lépünk előre a bábuval/koronggal.

A közös játék során a 10. mezőnél érhet célba a nyertes ló.












A táblára vagy az írásvetítőre a következő „versenypályát” rajzolhatjuk fel (1. tanári melléklet):

1. tanári melléklet – lásd e fájl végén és a modul eszközei közt is!

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.												
2.												
3.												
4.												
5.												
6.												
7.												
8.												
9.												
10.												

A próbajáték után lejegyezzük, hogy az egyes pályákon a lovak mennyit léptek előre.

Például a játék és a hozzá tartozó jegyzőkönyv a következőképpen nézhet ki:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.												
2.												
3.												
4.												
5.												
6.												
7.												
8.												
9.												
CÉL												

Jegyzőkönyv:

Ló	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lépések száma	0	3	6	4	4	10	4	9	5	5	2	1

3. Lóverseny alapján jegyzőkönyv készítése

Az előbbi játékot a tanulók 4 fős csoportokban játsszák. A munkafüzetben jegyzőkönyvet készítenek. A játékot a csoportok egymás után 5-ször játsszák le.

Ha van rá lehetőség, akkor a feladat feldolgozását a Lóverseny számítógépes program segítségével ajánljuk leginkább.

A tanulók 5-ször egymás után lefuttatják a programot, majd megvizsgálják a jegyzőkönyvet.

2. FELADATLAP

1. Lóverseny

A lóversenypályán válassz egy pályát, melyről a lovat indítod!

Dobjál két dobókockával és add össze a dobott értékeket! Az összeadás eredményeként kapott érték adja meg azt a pályát, amelyiken a ló egyet léphet előre. A verseny menetét jelöld a lóversenypályán! Játssz le a játékot 5-ször!

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.												
2.												
3.												
4.												
5.												
6.												
7.												
8.												
9.												
10.												
11.												

12.												
13.												
14.												
15.												
16.												
17.												
18.												
19.												
CÉL												

A verseny eredményéről készíts jegyzőkönyvet!

Ló	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lépések száma												

Ló	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lépések száma												

Ló	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lépések száma												

Ló	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lépések száma												

Ló	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lépések száma												

4. Statisztikai fogalmak előkészítése

A csoportok eredményeit közösen megbeszéli az osztály.

Minden csoportból kihívunk egy tanulót, aki felírja a táblára a játék eredményét.

A jegyzőkönyvek alapján a következő kérdéseket tehetjük fel a tanulóknak:

– Melyik pályáról nem érdemes lovat indítani? Miért?

Az 1. pályáról. Ez lehetetlen esemény, mert két dobókockával nem lehet 1-est dobni.

– Melyik pályáról érdemes lovat indítani?

A csoportok játékaiból kiderül, hogy melyik ló ért célba a legtöbb játékban.

(Beszéljük meg, hogy ez a leggyakrabban előforduló elem.)

– Melyik a középső pálya? **6; 7**

(Beszéljük meg, hogy a középső elem két részre osztja a lehetséges elemeket.)

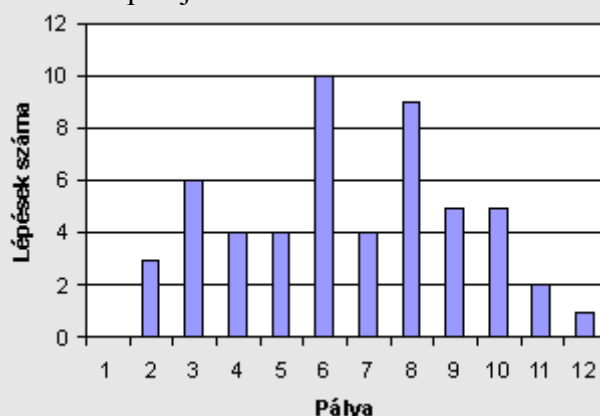
– Melyik pályákról induló lovaknak van nagyobb esélye a győzelemre: a 6-os vagy a 12-es pályáról indulónak? **6**

– Melyik pályákról induló lovaknak van nagyobb esélye a győzelemre: a 2-es vagy a 12-es pályáról indulónak? **Ugyanakkora az esélye a győzelemre.**

Beszéljük meg a tanulókkal, hogy az egyes számokat mely dobáskombinációk esetén kapjuk!

A próbajáték alapján készítsünk egy oszlopdiagramot az egyes pályákon futó lovak lépésének gyakoriságáról.

A minta alapján a következőt kaphatjuk:



Ezután minden csoport elkészíti a saját játéka alapján az oszlopdiagramot az egyes pályákon futó lovak lépésének gyakoriságáról.

II. Adathalmazok vizsgálata

1. Mi a 3 szám összege?

A tanulók 4 fős csoportokban fognak játszani.

A játék menete:

Egy dobozba 6 db számkártyát teszünk, melyeken a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek szerepelnek.

Egymás után kihúzzunk 3 számkártyát úgy, hogy minden húzás után visszatesszük az előzőleg kihúzott számkártyát.

Az egyes húzások eredményeit a tanulók lejegyzik a füzetükbe.

Legyen A esemény: a kihúzott számok összege legalább 8 (vagyis 8 vagy annál több);

B esemény: az A ellentettje (vagyis B akkor következik be, ha a kihúzott számok összege kisebb 8-nál).

A feladatot kezdjük egy próbajátékkal! A tanár kihív egy tanulót, aki a számkártyákat kihúzza. A húzások eredményét az alábbihoz hasonló jegyzőkönyvbe rögzítjük a táblán:

Húzott számok										
Húzott számok összege										
Esemény										

Például ezt kaphatjuk:

Húzott számok	2, 3, 1	1, 1, 5	4, 4, 3	1, 4, 4	3, 2, 1	5, 5, 1	2, 3, 5	2, 0, 1	0, 1, 5	4, 3, 4
Húzott számok összege	6	7	11	9	6	11	10	3	6	11
Esemény	B	B	A	A	B	A	A	B	B	A

A tanulók csoportokban 20-szor megismétlik a húzásokat, a 3. Feladatlap 1. feladatában rögzítik eredményeiket.

3. FELADATLAP

1. Egy dobozba tegyél 6 db számkártyát, melyeken a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek szerepeljenek! Egymás után húzz ki 3 számkártyát úgy, hogy minden húzás után visszateszed az előzőleg kihúzott számkártyát! A kísérletet ismételd meg 20-szor egymás után!

Az egyes húzások eredményeit rögzítsd a jegyzőkönyvben!

Legyen A esemény: a kihúzott számok összege legalább 8 (vagyis 8 vagy annál több);

B esemény: az A ellentettje (vagyis B akkor következik be, ha a kihúzott számok összege kisebb 8-nál)!

Húzott számok										
Húzott számok összege										
Esemény										

Húzott számok										
Húzott számok összege										
Esemény										

- Írd fel, hogyan aránylik egymáshoz az A és a B esemény előfordulásainak a száma!
- Írd fel, hogyan aránylik egymáshoz az A , illetve az összes esemény előfordulásainak a száma!
- Írd fel, hogyan aránylik egymáshoz az B , illetve az összes esemény előfordulásainak a száma!
- A kísérletek eredménye alapján mire következtetsz az A vagy B esemény bekövetkezése a valószínűbb?
- Hányszor kaptál pontosan 8-at eredményül?
- A húzások hány százalékában kaptál páros számot összegül?

Miután kitöltötték a 3. feladatlapot a tanulók, összesítsük a kapott eredményeket! Számítsuk ki az egész osztályban kapott eredmények alapján az A és a B esemény arányát! Az összesített eredmények alapján döntsék el, hogy az A vagy B esemény bekövetkezése a valószínűbb.

Gyűjtsük össze, hogy az egyes összegek hányszor fordultak elő az egész osztály játszmái során! Az eredmények alapján készítsünk oszlopdiagramot az összegek előfordulásának gyakoriságokról!

2. Pénzdobálás

Továbbra is 4 fős csoportokban dolgoznak a tanulók. A 4. Feladatlapon szereplő valószínűségi kísérletet a csoportok önállóan végezzék el és válaszoljanak a kérdésekre.

4. FELADATLAP

1. Dobjál fel három pénzérmét! Legyen:

A esemény: Az eredmény három fej vagy három írás.

B esemény: Az eredmény két fej és egy írás.

C esemény: Az eredmény két írás és egy fej.

A kísérletet 20-szor egymás után ismételd meg!
A kísérletek alapján készíts jegyzőkönyvet!

Kísérlet	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Esemény										

Kísérlet	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
Esemény										

- Írd fel, hogyan aránylik egymáshoz az A , B és a C események előfordulásának a száma! Mennyi az A , B , C , események gyakorisága (azaz, hány ilyen dobás volt)?
- Melyik esemény következett be a legtöbbször?
- Milyen a dobás kimenete, ha nem tartozik egyik esemény közé sem?
- A dobások hányad részében fordult elő A esemény? Vagyis mennyi az A esemény relatív gyakorisága 20 dobásból?

Miután a csoportok elvégezték a kísérleteket és válaszoltak a kérdésekre, az eredményeket megbeszélik. Összehasonlítják, hogy az egyes események aránya hogyan változott csoportonként.

Érdeemes összesíteni az eredményeket, megnézni, hogy az összes csoportban hányszor fordultak elő az A , B , C események, vagyis az egész osztályban mennyi volt a gyakoriságuk, majd összesítsük a dobások számát is, és kiszámítsuk ki, hogy ezek hányadrészében jöttek ki az egyes események, vagyis mennyi a relatív gyakoriságuk.

A gyakoriság, relatív gyakoriság szavakat használjuk óra közben, mindig tegyük világossá a gyerekeknek, hogy ez mit jelent.

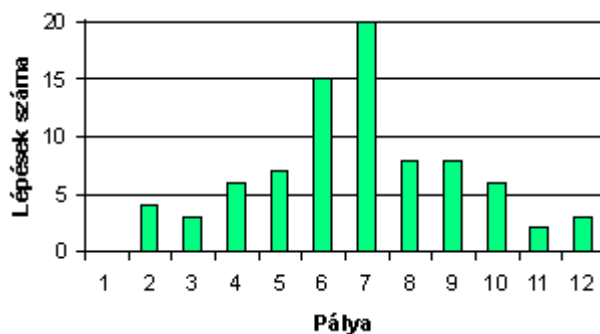
3. Gyakorló feladatlap kitöltése












A tanulók a feladatlapot önállóan oldják meg, majd ezután közösen ellenőrzi az osztály a megoldásokat.

A feladatlapot házi feladatnak is feladhatjuk, ha nem jut rá idő az órán.

5. FELADATLAP

1. Lóverseny. A legutóbbi versenyről csak a jegyzőkönyv alapján elkészített diagram maradt meg. A diagram alapján készítsd el a célfotót, a jegyzőkönyvet, és válaszolj a kérdésekre!



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.												
2.												
3.												
4.												
5.												
6.												
7.												
8.												
9.												
10.												
11.												
12.												
13.												
14.												
15.												
16.												
17.												
18.												
19.												
CÉL												

Ló	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lépések száma	0	4	3	6	7	15	20	8	8	6	2	3

- a) Melyik pályáról indult a nyertes ló? 7
b) Hányadik lépésnél ért célba a nyertes ló? 20
c) Melyik pályáról induló lovak jutottak túl az 5. lépésen? 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
d) Melyik pályáról induló lovak jutottak túl a 10. lépésen? 6, 7

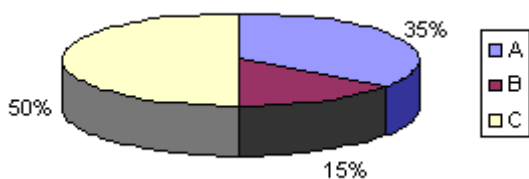
2. Peti feldobott három pénzérmét 20-szor egymás után. A jegyzőkönyvben az egyes események a következőket jelentik:

A esemény: Az eredmény három fej vagy három írás.

B esemény: Az eredmény két fej és egy írás.

C esemény: Az eredmény két írás és egy fej.

Egészítsd ki a hiányos jegyzőkönyvet a következő diagram alapján, majd válaszolj a kérdésekre!



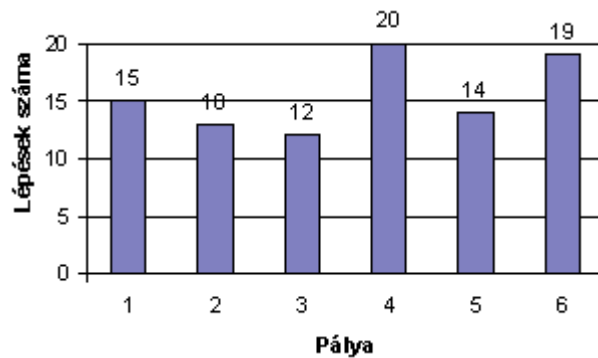
Esemény	A	B	C
Gyakoriság	7	3	10

- a) Írd fel, hogyan aránylik egymáshoz az A, a B és a C esemény gyakorisága!
 $A : B : C = 7 : 3 : 10$
b) Melyik esemény következett be a legkevesebbszer? **B**

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Lóverseny

A diagram alapján készítsd el a célfotót, a jegyzőkönyvet, és válaszolj a kérdésekre!



	1	2	3	4	5	6
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						
10.						
11.						
12.						
13.						
14.						
15.						
16.						
17.						
18.						
19.						
CÉL						

Ló	1	2	3	4	5	6
Lépések száma						

- a) Melyik pályáról indult a nyertes ló? **4**
 b) Hányadik lépésnél ért célba a nyertes ló? **20**
 c) Melyik pályáról induló lovak jutottak túl az 10. lépésen?
Mindegyik ló túljutott az 10. lépésen.
 d) Melyik pályáról induló lovak jutottak túl a 15. lépésen?
A 4. és a 6. pályáról induló lovak jutottak túl a 15. lépésen.

e) Egy dobókocka segítségével játszhatsz Te is! Játékod alapján készíts jegyzőkönyvet és diagramot!

	1	2	3	4	5	6
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						
10.						
11.						
12.						
13.						
14.						
15.						
16.						
17.						
18.						
19.						
CÉL						

Ló	1	2	3	4	5	6
Lépések száma						

2. Dobjál fel négy pénzérmét! Legyen:

A esemény: Az eredmény négy fej vagy négy írás.

B esemény: Az eredmény két fej és két írás.

C esemény: Az eredmény három írás és egy fej vagy három fej és egy írás.

A kísérletet 20-szor egymás után ismételd meg!

A kísérletek alapján készíts jegyzőkönyvet!

Kísérlet	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Esemény										

Kísérlet	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
Esemény										

a) Írd fel, hogyan aránylik egymáshoz az *A*, *B* és a *C* események előfordulásának a száma! Mennyi az *A*, *B*, *C*, események gyakorisága?

b) Melyik esemény következett be a legtöbbször?

c) Kaphatunk-e olyan eredményt, mely nem tartozik egyik esemény közé sem?

d) A dobások hányad részében fordult elő a *C* esemény, vagyis mennyi a *C* esemény relatív gyakorisága 20 dobásból?

3. Egy dobókockával kétszer dobj egymás után, és a dobott számokat sorrendben írd fel egymás mellé! Legyen:

A esemény: Az így kapott kétjegyű szám páros.

B esemény: Az így kapott kétjegyű szám páratlan és osztható 3-mal.

C esemény: Az így kapott kétjegyű szám páratlan és nem osztható 3-mal.

A kísérletet 20-szor egymás után ismételd meg!

A kísérletek alapján készíts jegyzőkönyvet!

Kísérlet	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Esemény										

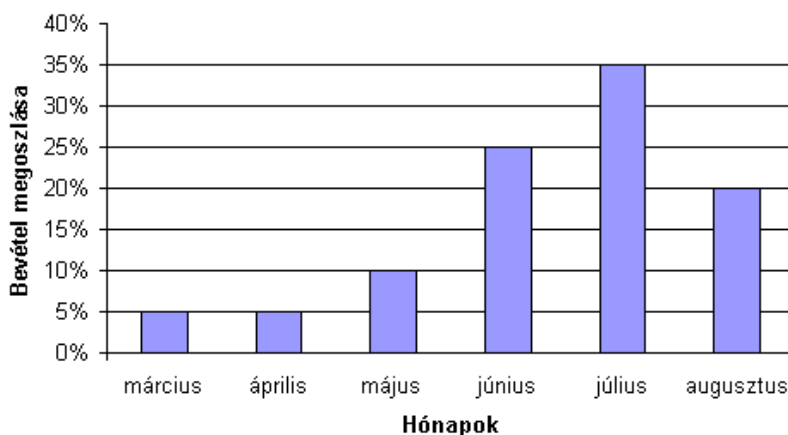
Kísérlet	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
Esemény										

a) Írd fel, hogyan aránylik egymáshoz az *A*, *B* és a *C* események előfordulásának a száma! Mennyi az *A*, *B*, *C*, események gyakorisága?

b) Melyik esemény következett be a legtöbbször?

c) Az eredmények hányad részében fordult elő az *A* esemény? (Mennyi az *A* esemény relatív gyakorisága?)

4. A következő oszlopdiagram egy szálloda tavaszi-nyári bevételeinek megoszlását mutatja.



a) Töltsd ki a táblázatot a diagram alapján, ha az összes bevétel 927 millió forint volt!

Hónapok	Bevétel (millió forint)
Március	46,35
Április	46,35
Május	92,7
Június	231,75
Július	324,45
Augusztus	185,4

b) Mekkora volt a szállodának az átlagos havi bevétele a tavaszi-nyári időszak alatt?

$927 : 6 = 154,5$ millió Ft

A szálloda átlagos havi bevétele a tavaszi-nyári időszak alatt 154,5 millió Ft volt.

0674 – 1. tanári melléklet:**Osztályonként 1 példány ebben a méretben írásvetítő fólián.**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.												
2.												
3.												
4.												
5.												
6.												
7.												
8.												
9.												
10.												

Jegyzőkönyv:

Ló	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lépések száma												