
ARÁNY, ARÁNYOSSÁG, STATISZTIKA

Fordított arányosság

KÉSZÍTETTE: BENCZÉDY-LACZKA KRISZTINA, MALMOS KATALIN

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A fordított arányosság fogalma, grafikonja és tulajdonságai. A szabályosságok megfigyelése konkrét példákon, megfogalmazása kétféleképpen minden esetben. Fordítottan arányos mennyiségek ismeretlen értékeinek meghatározása következtetéssel. Vegyes, összetett arányossági feladatok megoldása.
Időkeret	4 óra
Ajánlott korosztály	6. osztály
Modulkapcsolódási pontok	6. osztály Számok és műveletek: Törtek témakör, 6. osztály Arány, arányosság, statisztika témakör 1-2. modul
A képességfejlesztés fókuszai	<p><i>Számlálás, számolás:</i> Az újonnan megismert műveletek – törtek szorzása, osztása – alkalmazása, elmélyítése, tört, százalék, arány kapcsolata.</p> <p><i>Mennyiségi következtetés:</i> Arányossági következtetések egyenes és fordított arányosságok esetén, százalékszámításban, egyszerű feladatokban.</p> <p><i>Szövegesfeladat-megoldás, problémamegoldás, metakogníció:</i> Valós életből vett problémák megoldása, szöveges feladatok megoldása, ellenőrzés. Arányossági következtetést kívánó szöveges feladatok.</p> <p><i>Rendszerezés, kombinativitás:</i> Több megoldás keresése.</p> <p><i>Deduktív következtetés, induktív következtetés:</i> Kommunikációs képességek fejlesztése.</p>

AJÁNLÁS

Egyéni munka, csoportmunka, kooperatív módszerek használata. A csoportmunkák során a tanulók többnyire négyes csoportokban dolgoznak, de fontos, hogy egyéni feladattal is kipróbálhassák magukat. Nagyon fontos a csoportokon belül kialakuló vita, a gondolkodás szabadsága, a másik véleményének figyelembe vétele, egymás tisztelete, a játékok során a játékszabályok betartása. Az egyén szerepe fontosságának megtapasztalása a közösségben. A tanulói tapasztalatcsere hangsúlyozása mellett ugyanilyen fontosnak kell lennie a frontális tanári munkának, amelynek során a tanulók megerősítést kapnak a továbbhaladásuk szempontjából legfontosabb ismeretekben, tisztázódnak a meg nem értett anyagrészek.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Feladatlapok, feladatgyűjtemény, táblázatok, grafikonok.

ÉRTÉKELÉS

Az egyéni- és csoporteredmények szóbeli értékelése, a hiányosságok pótlására, hibák javíttatására is kiterjedően. Egyéni- és csoporteredmények pozitív értékelése. Ösztönözzük arra, hogy a tanulók egymás munkáját is értékeljék, megbecsüljék.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
--	---------------------------	----------------------------------	------------------------

I. A fordított arányosság fogalma

1.	Ráhangelés	Logikus gondolkodás.	0672. modul 1. tanári melléklet
2.	A fordított arányosság bevezetése	Megfigyelő képesség, logikus gondolkodás.	1. feladatlap, írásvetítő fólia.
3.	Összefüggések elmélyítése	Megfigyelő képesség, logikus gondolkodás.	2. feladatlap
4.	Gyakorló feladatlap kitöltése	Alkalmazás.	3. feladatlap

II. Fordított arányosság ismeretlen értékének meghatározása

1.	Fordított arányosság keresése	Alkalmazás.	4. feladatlap
2.	Fordított arányosság ismeretlen értékének meghatározása	Megfigyelő képesség, logikus gondolkodás.	5. feladatlap
3.	Feladatküldés	Kreativitás, logikus gondolkodás, alkalmazás.	

III. Fordított arányosság grafikonja

1.	Táblázatok értelmezése, grafikonok vizsgálata	Megfigyelő képesség, logikus gondolkodás, alkalmazás.	6. feladatlap
2.	Feladatok megfogalmazása táblázat és grafikon alapján	Kreativitás, logikus gondolkodás, alkalmazás.	7. feladatlap
3.	Gyakorló feladatlap kitöltése	Logikus gondolkodás, alkalmazás.	8. feladatlap

IV. Vegyes és összetett arányossági feladatok megoldása			
1.	Szakértői mozaik, feladat kiosztása	Kreativitás, logikus gondolkodás, alkalmazás.	9. feladatlap
2.	Szakértői mozaik, szakértő csoportok feladatmegoldása	Logikus gondolkodás, alkalmazás.	
3.	Szakértői mozaik, feladatok megbeszélése	Alkalmazás.	
4.	A feladatok megoldásainak ellenőrzése	Megfigyelő képesség, rendszerezés.	
5.	Gyakorló feladatlap kitöltése	Alkalmazás.	10. feladatlap

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. A fordított arányosság fogalma

1. Ráhangelés

A fordított arányosság bevezetéséhez vegyük elő újból az egyenes arányosságnál használt egyik feladatot. (0672. modul 1. számú tanári melléklet.)

0672 – 1. tanári melléklet – lásd a 0672 modul tanári fájl végén és eszközei közt is!

Peti magassága és autóinak száma között	A sportszelet mérete és ára között	A puzzle lerakott darabjainak a száma és a kirakott kép területe között	A mosópor ára és a mosópor tömege között, ha vásárlásra ugyanannyi pénzt szánunk
A cipő mérete és ára között	Az elhasznált mosogatószer mennyisége és az elmosogatott edények száma között	A bankszámlánkon lévő pénz és az érte járó kamat nagysága között	A vásárlásra szánt pénzünkben vásárolható alma mennyisége és az alma ára között
Születésnapon bulin résztvevők száma és az elfogyasztott torta mennyisége között	A megmaradt mosogatószer mennyisége és az elmosogatott edények száma között	A gyümölcslé mennyisége és a benne található gyümölcs mennyisége között	A táplálkozó bárányok száma és adott mennyiségű fű elfogyasztásának ideje között
Az osztálylétszám és az osztályba járó fiúk száma között	A futóversenyen lefutott szakaszok és a hátralévő távok között	A mobiltelefon-kártyáról lebeszél percek és a fennmaradó lebeszélhető összeg nagysága között	
Az osztálylétszám és az osztályba járó fiúk száma között	A futóversenyen lefutott szakaszok és a hátralévő távok között	A megvásárolt szalámi mennyisége és az érte fizetendő összeg nagysága között	
Az osztálylétszám és az osztályba járó fiúk száma között	A futóversenyen lefutott szakaszok és a hátralévő távok között		

A tanár minden párnak kioszt egy papírlapot, amelyen a következő kifejezések szerepelnek

- Peti magassága és autóinak száma között
 - A cipő mérete és ára között
 - Születésnapon bulin résztvevők száma és az elfogyasztott torta mennyisége között
 - Az osztálylétszám és az osztályba járó fiúk száma között
 - A sportszelet mérete és ára között
 - Az elhasznált mosogatószer mennyisége és az elmosogatott edények száma között
 - A megmaradt mosogatószer mennyisége és az elmosogatott edények száma között
 - A futóversenyen lefutott szakaszok és a hátralévő távok között
 - A matematika órából eltelt idők és a hátralévő idők között
 - A puzzle lerakott darabjainak a száma és a kirakott kép területe között
 - A bankszámlánkon lévő pénz és az érte járó kamat nagysága között
 - A gyümölcslé mennyisége és a benne található gyümölcs mennyisége között
 - A mobiltelefon-kártyáról lebeszél percek és a fennmaradó lebeszélhető összeg nagysága között
 - A megvásárolt szalámi mennyisége és az érte fizetendő összeg nagysága között
 - A mosópor ára és a mosópor tömege között, ha vásárlásra ugyanannyi pénzt szánunk
 - A vásárlásra szánt pénzünkben vásárolható alma mennyisége és az alma ára között
 - A táplálkozó bárányok száma és adott mennyiségű fű elfogyasztásának ideje között
- A tanulók párosával kapnak meg egy-egy papírlapot. Feladatuk, hogy eldöntsék, hogy a két mennyiség változásai között van-e összefüggés vagy nincs. Ha van, akkor milyen az összefüggés. A papírlapokat ennek megfelelően a táblázat megfelelő oszlopába kell tenniük. A tábla képe a következő legyen:

a) Két mennyiség együtt csökken vagy együtt nő. Ilyen összefüggés van:	b) Ha az egyik mennyiség nő, akkor a másik csökken. Ilyen összefüggés van:	Nincs sem a), sem b) típusú összefüggés a mennyiségek közt (vagy csak igen távoli)
Születésnap bulin résztvevők száma és az elfogyasztott torta mennyisége között	A megmaradt mosogatószer mennyisége és az elmosogatott edények száma között	A cipő mérete és ára között
A sportszelet mérete és ára között	A futóversenyen lefutott szakaszok és a hátralévő távok között	Az osztálylétszám és az osztályba járó fiúk száma között
Az elhasznált mosogatószer mennyisége és az elmosogatott edények száma között	A matematika órából eltelt idők és a hátralévő idők között	Peti magassága és autóinak száma között
A bankszámlánkon lévő pénz és az érte járó kamat nagysága között	A mobiltelefon-kártyáról lebeszélte percek és a fennmaradó lebeszélhető	A puzzle darabszáma és a kirakott kép területe között
A gyümölcsle mennyisége és a benne található gyümölcs mennyisége között	A vásárlásra szánt pénzünkből vásárolható alma mennyisége és az alma ára között	
A megvásárolt szalámi mennyisége és az érte fizetendő összeg nagysága	A táplálkozó bárányok száma és adott mennyiségű fű elfogyasztásának ideje	
A mosópor ára és a mosópor tömege között		

Az osztály közösen megbeszéli, hogy mindegyik papírlap a megfelelő helyre került-e. Keressük ki, melyek azok az esetek, amelyekben a két mennyiség egyenes arányos! Ekkor látják a gyerekek, hogy ezek mind az első oszlopban vannak.

2. A fordított arányosság bevezetése

Az előző feladat középső oszlopában található állításokkal fogunk részletesebben foglalkozni. Elsőként egy konkrét példán keresztül vizsgáljuk meg az alma ára és az alma mennyisége közötti összefüggést. Ehhez az 1. Feladatlapot is felhasználhatjuk. Az osztály közösen dolgozik.

1. FELADATLAP

1. Julcsi néni elment a piacra almát venni, 500 Ft-ot vitt magával. Hány darab almát tudott venni, ha egy darab alma 10 Ft, 20 Ft, 50 Ft, 100 Ft, 250 Ft, 500 Ft-ba került?

a) Töltsd ki a táblázat hiányzó részeit! Keress összefüggéseket a megfelelő mennyiségek között! Próbáld meg az összefüggéseket nyilakkal jelölni! Erre többféle lehetőség is van, arra szolgál a három táblázat, hogy mindegyikre berajzolhass példákat!

Keress összefüggéseket a táblázat adatai között!

Frontális megbeszélés során ezeket gyűjtsük össze! $10 \cdot 50 = 20 \cdot 25 = 50 \cdot 10 = 100 \cdot 5 = 250 \cdot 2$ Megfigyelhetik azt is, hogy ahányszorosára nő az egyik mennyiség, annyiad részére csökken a másik. Az ilyen összefüggéseket két mennyiség között fordított arányosságnak nevezik.

A táblázat mellé ezután rajzoltassuk be a gyerekekkel ezeket az összefüggéseket nyilakkal. Erre többféle módszert is választhatunk. Például: lehet egy olyan játékot játszani, hogy egy gyerek berajzol egy nyilat, ráírja, hogy milyen művelet tartozik hozzá, majd kihív egy következő gyereket, aki megrajzolja a párját a hozzátartozó művelettel együtt. Ezután ő berajzol egy újabb nyilat és hív egy következő gyereket. A tevékenységhez csak annyi kell, hogy legyen elég sok táblázat mondjuk egy írásvetítő fólián, hogy ha az egyik mellett már nincs hely, akkor lehessen egy másikkal folytatni. Ekkor elég természetes, hogy többféle megoldás is szülessen.

Többféle megoldás is lehetséges. Gyűjtsünk össze minél többféle lehetőséget! Például:

Alma	
ára (Ft)	mennyisége (db)
10	50
20	25
50	10
100	5
250	2

Alma	
ára (Ft)	mennyisége (db)
10	50
20	25
50	10
100	5
250	2

Alma	
ára (Ft)	mennyisége (db)
10	50
20	25
50	10
100	5
250	2

A nyilak mellé osztással is felírhatjuk az összefüggést. Tehát $\cdot \frac{1}{5}$ helyett $: 5$ stb. Az is jó, ha egy fordítottan irányított nyílra írják rá, hogy $\cdot 5$. Ez könnyebb, és jó is, ha itt is erősítjük ezeket az összefüggéseket. A későbbi számolásokat is könnyítheti, ha természetes módon tudnak választani a különféle egyenértékű felírások között.

Beszéljük meg, hogy fordított arányosságnál, ha az egyik mennyiséget az ötszörösére, huszonötöszörösére növeljük, akkor a másik mennyiség az $\frac{1}{5}$ -szörösére, $\frac{1}{25}$ -szörösére változik.

Tehát, ha az egyik mennyiség valahányszorosára változik, és a másik mennyiség annak reciprokszorosára változik, akkor a két mennyiség fordítottan arányos.

Miután a feladatot következtetéssel megoldották, az összetartozó értékpárok szorzatait vizsgáljuk meg.

b) Írd föl a megfelelő mennyiségek szorzatát többféleképpen! Számítsd ki a szorzatok értékét!

$$\begin{array}{lll}
 10 \cdot 50 = 500; & 20 \cdot 25 = 500; & 50 \cdot 10 = 500; \\
 100 \cdot 5 = 500; & 250 \cdot 2 = 500; & 500 \cdot 1 = 500
 \end{array}$$

A tanulókkal fogalmazzassuk meg, mit vettek észre!

Az összetartozó értékpárok szorzata ugyanaz a 0-tól különböző állandó, ez az arányosságra jellemző mennyiség.

Ennek minden esetben szemléletes jelentése is van. Ebben a példában ez éppen az a pénzösszeg, amit Juli néni az almára akar költeni.

3. Összefüggések elmélyítése

A tanulók önállóan megoldják a következő feladatot, majd közösen megbeszélik a megoldást.

2. FELADATLAP

1. 8 béránynak 12 napig elegendő a széna, amit a gazda vásárol. Hány napig elegendő ugyanez a szénamennyiség, ha 1, 2, 3... bérányt tart?

a) Töltsd ki a táblázat hiányzó részeit!

Bérányok száma (db)	Idő (nap)
1	96
2	48
3	32
4	24
6	16
8	12
12	8

Diagram showing relationships between rows:

- From row 1 to row 2: $\cdot 2$ (number of sheep), $\cdot \frac{1}{2}$ (time)
- From row 1 to row 3: $\cdot 3$ (number of sheep), $\cdot \frac{1}{3}$ (time)
- From row 1 to row 4: $\cdot 4$ (number of sheep), $\cdot \frac{1}{4}$ (time)
- From row 1 to row 6: $\cdot 6$ (number of sheep), $\cdot \frac{1}{6}$ (time)
- From row 1 to row 8: $\cdot 8$ (number of sheep), $\cdot \frac{1}{8}$ (time)
- From row 1 to row 12: $\cdot 12$ (number of sheep), $\cdot \frac{1}{12}$ (time)

b) Írd fel a bérányok számának és az időnek a szorzatát többféleképpen! Számítsd ki a szorzatok értékét!

$$1 \cdot 96 = 96;$$

$$2 \cdot 48 = 96;$$

$$3 \cdot 32 = 96;$$

$$4 \cdot 24 = 96;$$

$$6 \cdot 16 = 96;$$

$$8 \cdot 12 = 96$$

c) Hány napig elegendő a széna 24 bérány számára, ha feltesszük, hogy egy napra minden bérány ugyanannyi szénát fogyaszt el? Számolj többféleképpen!

1. megoldás (következtetés)

A bérányok számának csökkenésével arányosan több napig elegendő a széna, a bérányok számának növekedésével arányosan kevesebb napig elegendő a széna mennyisége.

8 béránynak

12 napig elegendő a széna

1 béránynak

$12 \cdot 8 = 96$ napig elegendő a széna

24 béránynak

$96 : 24 = 4$ napig elegendő a széna

24 béránynak ugyanaz a széna mennyiség 4 napig elegendő.

2. megoldás: (a fordított arányosság értelmezése alapján)

Az összetartozó értékpárok szorzata állandó:

$$8 \cdot 12 = 24 \cdot x$$

$$96 = 24 \cdot x$$

$$x = 96 : 24 = 4$$

24 béránynak ugyanaz a széna mennyiség 4 napig elegendő.

3. megoldás (alkalmazzuk a fordított arányosságot):

Ahányszorosára változik az egyik mennyiség, annyiad részére változik a másik mennyiség.

Bérányok száma (darab)	Idő (nap)
8	12
⋮	⋮
24	x

Diagram showing relationships:

- From 8 to 24: $\cdot 3$ (number of sheep)
- From 12 to x: $\cdot \frac{1}{3}$ (time)

$$x = 12 \cdot \frac{1}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

24 béránynak ugyanaz a széna mennyiség 4 napig elegendő.

4. Gyakorló feladatlap kitöltése

3. FELADATLAP

1. 10 ember 36 óra alatt végez el egy munkát. Hány óra alatt készült volna el ezzel a munkával ugyanilyen tempóban haladva 8; 6; 5; 4; 2; 1 ember?
Egészítsd ki a táblázatot! Írd fel az emberek számának és a munka elvégzéséhez szükséges időnek a szorzatát többféleképpen!

Emberek száma	A munka elvégzéséhez szükséges idő (óra)
1	360
2	180
4	90
5	72
6	60
8	45
10	36

Diagram showing relationships between rows:

- From row 1 to row 2: $\cdot 2$ (on the number of people), $\cdot \frac{1}{2}$ (on the time)
- From row 1 to row 4: $\cdot 4$ (on the number of people), $\cdot \frac{1}{4}$ (on the time)
- From row 1 to row 5: $\cdot 5$ (on the number of people), $\cdot \frac{1}{5}$ (on the time)
- From row 1 to row 6: $\cdot 6$ (on the number of people), $\cdot \frac{1}{6}$ (on the time)
- From row 1 to row 8: $\cdot 8$ (on the number of people), $\cdot \frac{1}{8}$ (on the time)
- From row 1 to row 10: $\cdot 10$ (on the number of people), $\cdot \frac{1}{10}$ (on the time)

2. Ferenc egy 35 km-es futóversenyen indul vasárnap délelőtt. Hány km-t kell még lefutnia, ha már lefutott 0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35 km-t?
Készíts táblázatot! Írd fel a megtett út és a hátralévő út szorzatát többféleképpen!
Keress alkalmas összefüggést a lefutott és a hátralévő út között!

Lefutott út (km)	Hátralévő út (km)
0	35
5	30
10	25
15	20
20	15
25	10
30	5
35	0

$0 \cdot 35 = 0;$ $5 \cdot 30 = 150;$ $10 \cdot 25 = 250;$ $15 \cdot 20 = 300;$
 $20 \cdot 15 = 300;$ $25 \cdot 10 = 250;$ $30 \cdot 5 = 150;$ $35 \cdot 0 = 0$

Ez nem fordított arányosság! Alkalmas összefüggés: $út_{hátralévő} = 35 - út_{lefutott}$

Beszéljük meg a tanulókkal az észrevételeket. Itt nincsen fordított arányosság, pedig ha az egyik mennyiség nő, akkor a másik mennyiség csökken. (Nem érvényes a fordított arányosság tulajdonsága, hogy ha az egyik mennyiség valahányszorosára változik, akkor a másik mennyiség annak reciprokszorosára változik.) Az értékpárok szorzata sem állandó, tehát nem teljesül a fordított arányosság szabálya.

II. Fordított arányosság ismeretlen értékének meghatározása

1. Fordított arányosság keresése

4. FELADATLAP

1. Keress összefüggést az alábbi mennyiségpárok között! Válaszd ki közülük a fordított arányosságokat! Fordítottan arányos mennyiség esetén számítsd ki a hiányzó mennyiséget!

a) 300 Ft-ból 6 tollat vásároltunk tavaly. Hány tollat tudunk vásárolni ugyanennyi pénzért idén, ha a tollak ára 10 Ft-tal emelkedett?

b) 1 kg pulykamell filé 900 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül fél kg ugyanilyen egységárú pulykamell filé?

c) 4 ember egy kert felásásával 10 óra alatt végez. Mennyi idő alatt ásná fel ugyanezt a kertet 5 ember, ha mindenki ugyanolyan tempóban ás?

d) A 37-es cipő 9600 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül a 39-es méretű cipő?

Fordítottan arányos mennyiségpárok:

a) Idén 5 darab tollat tudunk vásárolni ugyanennyi pénzért.

c) Ugyanezt a kertet 5 ember 8 óra alatt ásná fel.

2. Döntsd el, melyik állítás igaz! A hamis állításokat tedd igazzá!

a) 400 Ft-ért 2 kg körtét tudunk venni. Ha a körte fele annyiba kerülne, akkor kétszer annyi körtét tudnánk vásárolni.

Igaz.

b) Egy épület kitakarítását egy 8 fős takarítócég 6 óra alatt tudja kitakarítani. Ha a takarítócég dolgozóinak a fele szabadságra megy, akkor fele annyi idő alatt végeznek a takarítással. (Ha feltételezzük, hogy a takarítócég embereinek teljesítménye állandó.)

Hamis. Ha a takarítócég fele szabadságra megy, akkor kétszer annyi idő alatt végeznek a takarítással.

c) Két adag fagyaltkehely elkészítéséhez fél liter fagylaltra van szükségünk. Akkor kétszer annyi fagyaltkehely elkészítéséhez fele annyi fagylaltra van szükségünk.

Hamis. Kétszer annyi fagyaltkehely elkészítéséhez kétszer annyi fagylaltra van szükségünk.

d) 900 cukorkát harmincasával csomagolnak be, így 30 dobozba fér bele. Ha háromszor annyi cukorkát tesznek egy dobozba, akkor harmad annyi dobozt kell felhasználni.

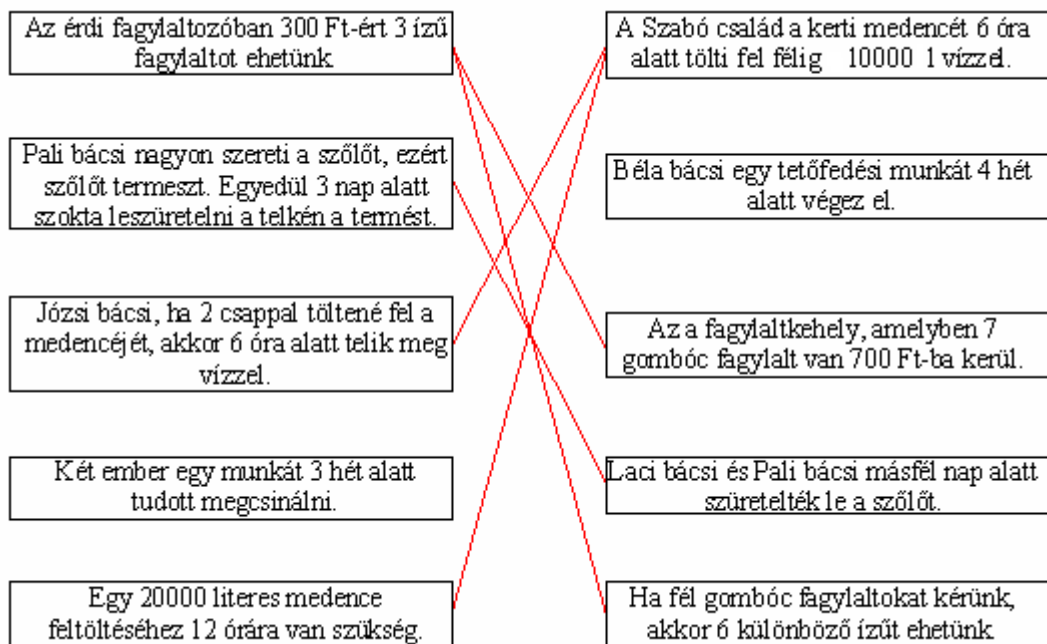
Igaz.

e) Ha fél óra alatt 60 km-t teszünk meg autóval az autópályán, akkor háromszor annyi idő alatt, háromszor annyi utat teszünk meg. (Feltételezzük, hogy egyenletes tempóban haladtunk.)

Igaz.

A megoldás megbeszélésénél beszéljük meg a tanulókkal, hogy melyik állítás egyenes és melyik fordított arányosság.

3. Keress egyenes és fordított arányosságot! Az összetartozó mondatokat kösd össze!



2. Fordított arányosság ismeretlen értékének meghatározása

Az 1. Feladatot a tanár az osztállyal közösen oldja meg. A feladat megoldása során a tanulók ötletei alapján következtetéssel számoljunk!

5. FELADATLAP

1. A 6.a az osztálykirándulást egy kulcsos házba szervezi. A ház kibérlése 37500 Ft-ba kerül. Mennyit kell fizetnie egy tanulónak a szállás bérletéért, ha az osztályból 15; 20; 25; 30 tanuló tud elmenni a kirándulásra?

Készíts táblázatot! Számolj többféleképpen!

Tanulók száma	A szállásért fizetendő összeg (Ft/fő)
15	2500
20	1875
25	1500
30	1250

a) Ha a 6.a, a 6.b és a 6.c osztály együtt menne el kirándulni, akkor fejenként 625 Ft-ot kellene fizetni a szállásért. Hányan mehetnének a kirándulásra a 6. évfolyamból?

A kirándulásra 60-an mehetnének a 6. évfolyamból.

b) A kirándulás előtt három tanár a családjával együtt (összesen 12 fő) megnézte a kulcsos házat és környékét. Mennyit kellett fizetniük a szállásért fejenként?

3125 Ft-ot kellett fizetniük fejenként a szállásért.

A következő feladatokat a tanulók önállóan oldják meg, majd a megoldásokat közösen ellenőrzik.

2. Viktor az iskolába gyalog vagy kerékpárral szokott menni. Gyalog 1 óra alatt 4 km-t, kerékpárral 1 óra alatt 8 km-t tesz meg. (Feltételezzük, hogy Viktor egyenletes sebességgel halad minden esetben.)

Mennyi idő alatt ér Viktor az iskolába kerékpárral, ha gyalog negyed óra alatt ér be?

Viktor kerékpárral 7,5 perc alatt ér be az iskolába.

3. Lajos bácsi kertjében lévő medencéjét szombaton fel akarta tölteni vízzel. Ha a csapot teljesen kinyitja, akkor egy óra alatt 321 liter víz kerül a medencébe, így 4 óra alatt megtelik a medence. Lajos bácsi véletlenül nem teljesen nyitotta ki a csapot, így a medence 12 óra alatt telt meg. Hány liter víz került a medencébe óránként ezen a szombaton?

Ezen a szombaton 107 liter víz került a medencébe óránként.

4. Egy csomagoló üzembe nagy mennyiségű mosópor érkezett. Az üzem vezetői még nem döntötték el, hogy mekkora adagokba csomagolják a mosóport. Az utazó csomag 0,8 kg; a normál csomag 3,6 kg; az óriás csomag pedig 15 kg tömegű. Az utazó csomagból 54000db-ot tudnának leszállítani.

a) Hány darab normál, illetve óriás csomagot tudna leszállítani az üzem, ha egyszerre csak egyféle kiszérelést tud leszállítani?

12000 db normál vagy 2880 db óriás csomagot tudna leszállítani az üzem.

b) Hány kg mosópor érkezett az üzembe? **43200 kg mosópor érkezett az üzembe.**

5. Egy német márkájú autó egyenletesen haladva 60 km/h sebességgel bizonyos távolságot 4 óra alatt tesz meg.

a) Mennyi idő alatt tenné meg ugyanezt a távolságot, ha 100 km/h sebességgel haladna egyenletesen?

Az autó ugyanezt a távolságot 2 óra 24 perc alatt tenné meg, ha 100 km/h sebességgel haladna egyenletesen.

b) Mekkora sebességgel kellene haladnia az autónak, hogy ugyanezt az utat 3 óra alatt tegye meg?

80 km/h sebességgel kellene haladnia az autónak, hogy ugyanezt az utat 3 óra alatt tegye meg.

6. 37500 darab vasaló legyártását 75 ember 20 nap alatt végzi el.

a) Hány darab vasalót gyárt ugyanennyi ember 15 nap alatt?

28125 db vasalót gyárt 75 ember 15 nap alatt.

b) Hány nap alatt gyárt ugyanennyi vasalót 20%-kal kevesebb ember?

60 ember 25nap alatt gyárt ugyanennyi vasalót.

3. Feladatküldés

A tanulók 4 fős csoportban dolgoznak.

Feladat: Minden csoport közösen kitalál egy fordított arányossági feladatot. A csoportok továbbadják a kitalált feladatot a mellettük lévő csoportnak. A kapott feladatot megoldják (táblázatot és grafikont is készíthetnek hozzá az ügyesebbek). A megoldást visszaadják a küldő csoportnak, akik ellenőrzik.

A csoportok ismertetik feladataikat, majd az osztály közösen megbeszéli az eredményeket. A tanár és az osztály megdicsérheti az ötletes feladatokat.

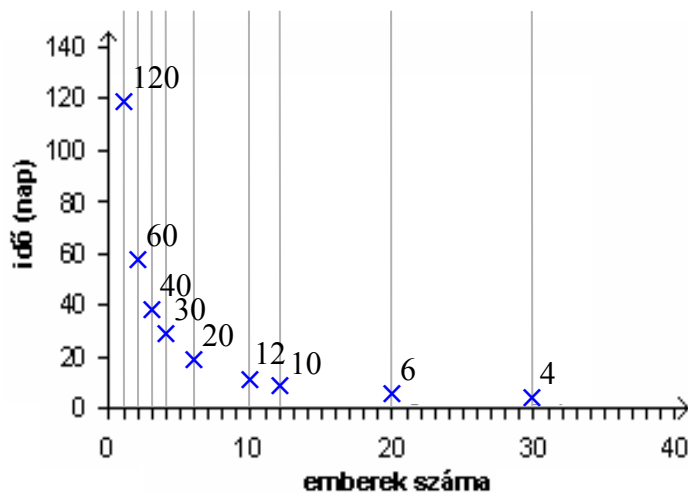
III. Fordított arányosság grafikonja

1. Táblázatok értelmezése, grafikonok vizsgálata

A tanulók 4 fős csoportokban dolgoznak. Az első feladatban a csoportok a grafikon alapján kitöltik a táblázat hiányzó adatait, és válaszolnak a kérdésekre. A második és harmadik feladatban a táblázat alapján kell a grafikont elkészíteniük, majd azután válaszolni a kérdésekre.

6. FELADATLAP

1. Egy hajó zátonyra futott egy lakatlan sziget mellett. A hajószakács épségben partot ért, és a roncsról szerencsésen kimenekítette a hajó ételkészletének egy részét. Még nem tudta, hányan maradtak rajta kívül életben a hajó személyzete és utasai közül. A következő grafikonon azt ábrázoltuk, hogy az emberek számától hogyan függ, hogy hány napig elegendő a táplálékuk. A grafikon alapján készíts táblázatot, és válaszolj a kérdésekre!



Emberek száma (fő)	Idő (nap)
1	120
2	60
3	40
4	30
6	20
10	12
12	10
20	6
30	4

- a) 1 embernek hány napig elegendő az élelem? **1 embernek 120 napig elegendő az élelem.**
 b) 30 napig hány embernek elegendő az élelem? **30 embernek 4 napig elegendő az élelem.**
 c) Ha 20 ember maradt életben akkor legkésőbb hány nap múlva kell jönni segítségnek ahhoz, hogy ne éhezzenek?

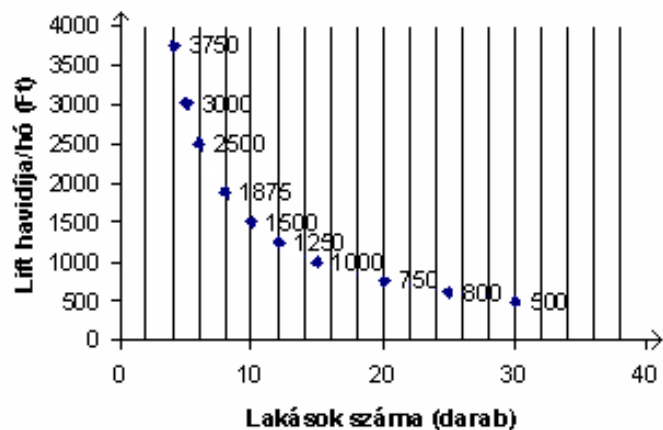
20 embernek 6 napig elegendő az élelem, tehát a 7. napon kell megérkeznie a segítségnek.

- d) 24 napig hány embernek elegendő az élelem?

24 napig 5 embernek elegendő az élelem.

2. Egy lakótelepen különböző méretű házakat terveznek. A következő táblázatban azt tüntettük fel, hogy a lakások számának változásától hogyan függ, hogy mennyit kell fizetni a lift üzemeltetésére havonta. Egészítsd ki a táblázatot! A táblázat alapján készíts grafikont, majd válaszolj a következő kérdésekre!

Lakások száma (darab)	Lift lakásonkénti havidíja (Ft)
4	3750
5	3000
6	2500
8	1875
10	1500
12	1250
15	1000
20	750
25	600
30	500



a) Egy 4 lakásos társasházban lakásonként mennyit kell fizetni havonta a lift üzemeltetéséért?

Egy 4 lakásos társasházban lakásonként 3750 Ft-t kell fizetni havonta a lift üzemeltetéséért.

b) Hány lakás van abban a házban, ahol havonta a lift üzemeltetése lakásonként 1250 Ft-ba kerül?

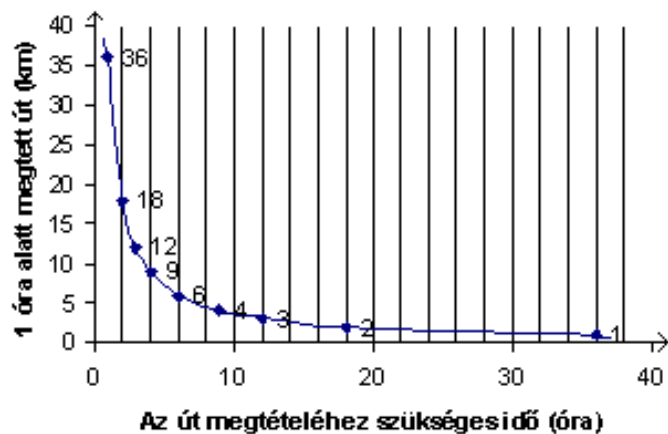
12 lakás van abban a házban, ahol havonta a lift üzemeltetése lakásonként 1250 Ft-ba kerül.

c) Egy 50 lakásos társasházban mennyit kell havonta lakásonként fizetni a lift üzemeltetéséért?

Egy 50 lakásos társasházban 300 Ft-ot kell havonta lakásonként fizetni a lift üzemeltetéséért.

3. A következő táblázatban azt tüntettük fel, hogy Gábor különböző sebességgel, egyenletes tempóban haladva, mennyi idő alatt teheti meg az otthona és a nagyszülei lakása közötti utat. Egészítsd ki a táblázatot! A táblázat alapján készíts grafikont, majd válaszolj a következő kérdésekre!

1 óra alatt megtett út (km)	Az út megtételéhez szükséges idő (óra)
2	18
3	12
4	9
6	6
9	4
12	3
18	2



a) Ha Gábor kerékpárral megy a nagyszüleihez, akkor 1 óra alatt 6 km-t tud haladni. Hány óra alatt ér a nagyszüleihez?

Ha Gábor 1 óra alatt 6 km-t tud haladni, akkor 6 óra alatt ér a nagyszüleihez.

b) Ha Gábor 4 óra alatt teszi meg az utat, akkor hány km-t tesz meg 1 óra alatt?

Ha Gábor 4 óra alatt teszi meg az utat, akkor 9 km-t tesz meg 1 óra alatt.

c) Hány km-re lakik Gábor a nagyszüleitől? 36 km-re lakik Gábor a nagyszüleitől.

d) Ha 72 km-t tesz meg 1 óra alatt, akkor hány óra alatt teszi meg az utat a nagyszüleihez?

Ha 72 km-t tesz meg 1 óra alatt, akkor fél óra alatt teszi meg az utat a nagyszüleihez.

TUDNIVALÓ:

Fordított arányosság

Ha két változó mennyiség olyan, hogy ahányszorosára változik az egyik, a másik ugyanannyi részére változik, akkor azt mondjuk, hogy azok fordítottan arányosak.

Másképpen megfogalmazva:

Ha két változó mennyiség kapcsolata olyan, hogy a megfelelő értékek szorzata egy nullától különböző állandó, akkor a két mennyiség fordítottan arányos.

A fordított arányosság képe nem egyenes.

2. Feladatok megfogalmazása táblázat és grafikon alapján

A feladat megoldása során az első feladatban kialakított 4 fős csoportok dolgoznak tovább.

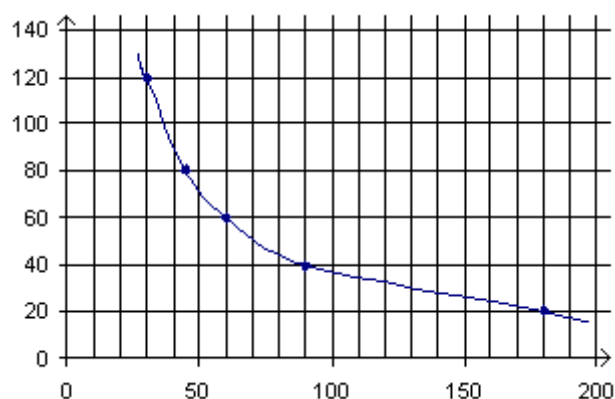
Az 1. Feladatban táblázat alapján a csoportnak kell egy feladatot megfogalmaznia, kérdéseket feltenni, a kérdésekre válaszolni, illetve a hozzá tartozó grafikon elkészíteni.

A 2. és 3. Feladatban grafikon alapján kell a csoportnak feladatokat megfogalmazni, kérdéseket feltenni, a kérdésekre válaszolni, illetve a hozzá tartozó táblázatot elkészíteni.

7. FELADATLAP

1. A táblázat alapján fogalmazd meg egy feladat szövegét, tegyél fel kérdéseket, válaszolj a feltett kérdésekre és készíts grafikon!

180	20
90	40
60	60
45	80
30	120



Beszélgethetünk a gyerekekkel arról, hogy szabad-e minden esetben összekötni a pontokat. Hozhat valamelyik gyerek olyan megoldást is, ahol csak pontok vannak. Kérdés lehet például, hogy milyen törtrész kilókat vásárolhatunk.

Ha sebesség – út grafikonnak tekintjük, akkor összeköthetők a pontok. Így ráirányíthatjuk a gyerekek figyelmét a folytonosság fogalmára!

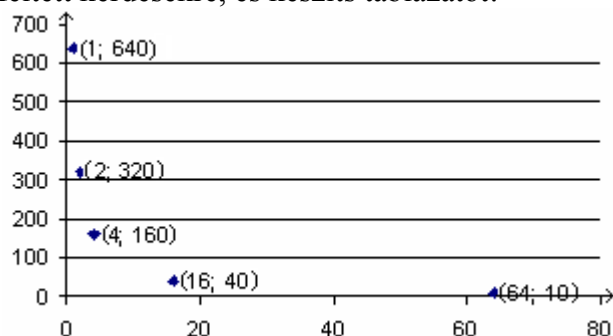
Például: A narancs kilója 180 Ft, ekkor 20 kg-ot tudunk vásárolni az erre szánt pénzből.

Mennyi narancsot tudunk vásárolni, ha 90, 60, 45, 30 Ft-ra csökkent le kilója?

a) Mennyi pénzünk szánunk a narancs vásárlására? (3600 Ft)

b) Hány kiló narancsot tudunk venni, ha kilója 300 Ft? (12kg)

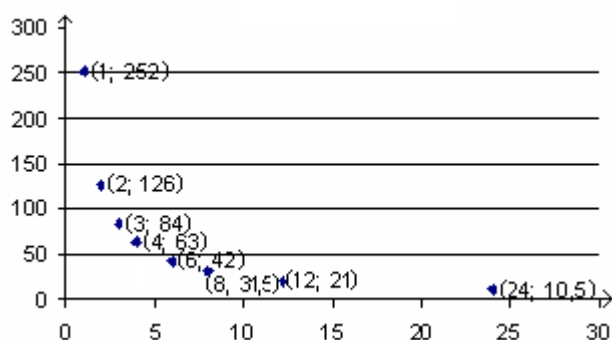
2. A grafikon alapján fogalmazd meg egy feladat szövegét, tegyél fel kérdéseket, válaszolj a feltett kérdésekre, és készíts táblázatot!



I csomagban lévő joghurt mennyisége (darab)	Kipakolandó csomagok száma (darab)
1	640
2	320
4	160
16	40
64	10

Például: Egy üzletbe 640 darab joghurt érkezett. Hány darab csomagot kell kipakolni a pultra, ha darabonként, párosával, négyesével, 16-osával és 64-esével vannak csomagolva?

3. A grafikon alapján fogalmazd meg egy feladat szövegét, tegyél fel kérdéseket, válaszolj a feltett kérdésekre, és készíts táblázatot!



Emberek száma (fő)	Munkával töltött idő (nap)
1	252
2	126
3	84
4	63
6	42
8	31,5
12	21
24	10,5

Például: 12 ember egy munkát 3 hét alatt végez el. Mennyi idő alatt végzi el ugyanazt a munkát 1, 2, 3, 4, 6, 8, 24 ember, ha a teljesítményük ugyanolyan?

3. Gyakorló feladatlap kitöltése

A tanulók önállóan megoldják a feladatokat, majd közösen ellenőrzik a megoldásokat.

8. FELADATLAP

1. Egy kert területe 4200 m^2 . Milyen hosszú a kert, ha a szélessége 60 m ?

$T = a \cdot b$ A kert 70 m hosszú.

a) Milyen hosszú egy ugyanekkora területű kert, ha a szélessége fele az előzőnek?

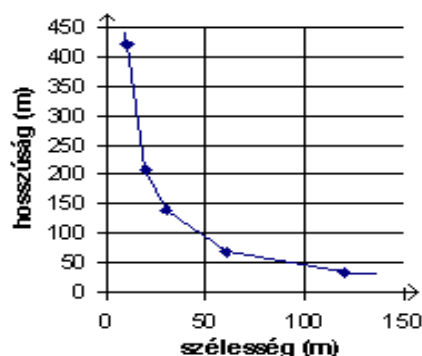
140 m hosszú az ugyanekkora területű kert, ha a szélessége 30 m .

b) Milyen széles az ugyanekkora területű kert, ha a hosszúsága fele az előzőnek?

120 m széles az ugyanekkora területű kert, ha a hosszúsága 35 m .

c) Készíts táblázatot és grafikont, hogy hogyan változhat az ugyanekkora területű kert hosszúsága és szélessége?

szélesség (m)	hosszúság (m)
10	420
20	210
30	140
60	70
120	35



d) Mekkora az ugyanekkora területű kert szélessége, ha hossza 210 m?
 20 m széles az ugyanekkora területű kert, ha hossza 210 m.

2. Egy üzletközpontot 30 ember 15 hónap alatt épít fel.

a) Hány embernek kell dolgoznia a legújabb üzletközpont felépítésénél, ha az üzletközpontnak 9 hónap alatt fel kell épülnie?

50 embernek kell dolgoznia a legújabb üzletközpont felépítésénél, ha az üzletközpontnak 9 hónap alatt fel kell épülnie.

b) Hány hónapig tart az üzletközpont felépítése, ha csak 20-an tudnak dolgozni az építkezésen?

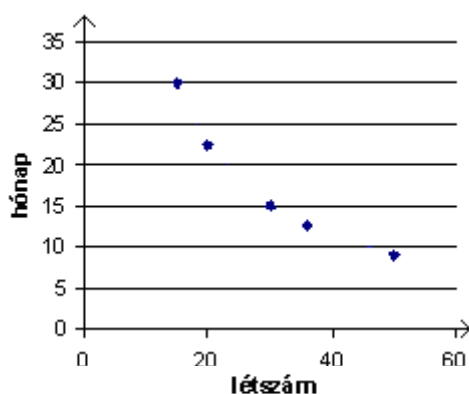
22 és fél hónapig tart az üzletközpont felépítése, ha csak 20-an tudnak dolgozni az építkezésen

c) Mennyi idővel hamarabb fejezik be az üzletközpont építését, ha az eredeti létszámnál 20%-kal több embert foglalkoztat az építető?

Ha 36-an tudnak dolgozni az építkezésen, akkor 12 és fél hónapig tart az üzletközpont felépítése.

d) Készíts táblázatot és grafikont, hogy hogyan befolyásolja a munkások száma az üzletközpont felépítésének idejét?

létszám	hónap
15	30
20	22,5
30	15
36	12,5
50	9



IV. Vegyes és összetett arányossági feladatok megoldása

1. Szakértői mozaik, feladat kiosztása

A tanulók 4 fős csoportokban dolgoznak. A csoporton belül mindenki külön feladatot fog kapni, ezért minden tanulónak mondunk egy számot 1-től 4-ig. A megoldandó feladatot mindenki a saját száma szerint fogja kapni. A tanulók feladatkiosztásánál vegyük figyelembe, hogy a feladatok 1-től 4-ig fokozatosan nehezednek. Egyenes, fordított és vegyes arányossági feladatokat fognak megoldani.

A 9. Feladatlapon található feladatokat oldják meg a tanulók önállóan, mindenki a saját számának megfelelően.

9. FELADATLAP

1. Egy szabályos háromszög oldalai 4 cm hosszúak. Ha a háromszög minden oldalát 25 %-kal meghosszabbítjuk, akkor mennyivel lesz hosszabb a kerülete az új háromszögnek? Írd fel, hogyan aránylik a két szabályos háromszög kerülete egymáshoz! Hány százalékkal lesz nagyobb az új háromszög kerülete?

$$a_1 = 4 \text{ cm}; K_1 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ (cm)} \quad a_2 = 5 \text{ cm}; K_2 = 3 \cdot 5 = 15 \text{ (cm)}$$

$K_1 : K_2 = 12 : 15 = 4 : 5$ Az új háromszögnek 3 cm-rel, 25 %-kal lesz hosszabb a kerülete.

2. Egy kereskedő a nagybani piacon 31500 Ft-ért vásárolt kesudiót, kilógrammját 1200 Ft-ért. Legközelebb ugyanennyi pénzért hány kilogramm kesudiót vásárolhatott, ha a kesudió kilógrammonkénti árát 5 %-kal megemelték a nehezebb szállítási körülmények miatt?

Ha 5%-kal megemelik a kesudió kilónkénti árát, akkor 1260 Ft-ba kerül kilója, így 25 kg-ot tud vásárolni legközelebb a kereskedő.

3. Egy 8 fős csoport 10 nap alatt csomagol be 15000 kg vaníliás cukrot. Mennyi vaníliás cukrot csomagol be 3 fő 7 nap alatt?

8 fő	10 nap	15000 kg
1 fő	10 nap	1875 kg
1 fő	1 nap	187,5 kg
1 fő	7 nap	1312,5 kg
3 fő	7 nap	3937,5 kg

3 fő 7 nap alatt 3937,5 kg vaníliás cukrot csomagol be.

4. Egy strandon a nagymedencébe 960 m^3 víz fér. 3 ugyanolyan teljesítményű csap 4 óra alatt tölti fel. Mennyi víz fér az élményfürdős medencébe, ha azt 6 ugyanolyan csap két és fél óra alatt tölti fel?

3 csap	4 óra	960 m^3
3 csap	1 óra	240 m^3
1 csap	1 óra	80 m^3
1 csap	2,5 óra	200 m^3
6 csap	2,5 óra	1200 m^3

1200 m^3 víz fér az élményfürdős medencébe.

2. Szakértői mozaik, szakértő csoportok feladatmegoldása

Az azonos feladatokat megoldó tanulók átmenetileg egy-egy új csoportot alakítanak és megbeszélik a feladat megoldását, összevetik eredményeiket. A tanár a vitás kérdésekben segít a csoportoknak.

3. Szakértői mozaik, feladatok megbeszélése

Újra az eredeti csoportok alakulnak ki. Minden tanuló ismerteti feladatát és annak megoldását. A többiek a hallottak alapján megoldják a feladatot. Így mind a 4 feladat megoldásának szerepelnie kell minden tanuló tankönyvében vagy füzetében.

4. A feladatok megoldásainak ellenőrzése

Az egyes feladatok ellenőrzésénél egy-egy csoportokból úgy szólítsunk fel tanulót, hogy más számú feladatot ismertessen, mint amit ő megoldott. Ebből látjuk, hogy mely csoportok dolgoztak hatékonyan.

Dicsérjük meg azokat a tanulókat, akik megfelelően el tudták magyarázni a feladatok megoldását, majd értékeljük a csoportok munkáját szóban és jó pontokkal is.

5. Gyakorló feladatlap kitöltése

A következő feladatlapot házi feladatnak is feladhatjuk, ha nem jut rá idő az órán.

10. FELADATLAP

1. A nyári táborban 3 gyerek 15 perc alatt 6 nyársat farag ki az esti szalonnasütéshez. Hányan faragjanak az előkészületeknél, ha 1 óra alatt kell 32 nyársat elkészíteni?

Egy gyerek 1 óra alatt 8 db nyársat tud kifaragni, így 4 gyereknek kell faragnia az előkészületeknél.

2. Józsi bácsi tanyáján teheneket tenyészt. 3 tehene 5 nap alatt 54 l tejet ad. Hány liter tejet adnának 1 hónap (30 nap) alatt a tehenei, ha vásárolna még két tehenet? (Minden tehén átlagban ugyanannyi tejet ad naponta.)

5 tehén 540 liter tejet adna 30 nap alatt.

3. Egy játékgyárban 10 dolgozó 3 nap alatt 150 dömpert rak össze. Hány dömpert rak össze a karácsony előtti készülődésben 15 dolgozó 7 nap alatt?

525 darab dömpert rak össze a karácsony előtti készülődésben 15 dolgozó 7 nap alatt.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. A következő mennyiségpárok közül válaszd ki az egyenesen és fordítottan arányos mennyiségpárokat! A hiányzó értékeket számítsd ki!

a) 20 dkg mák 320 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül 1,5 kg mák? **2400 Ft-ba kerül 1,5 kg mák.**

b) Egy farmon 25 nyúlnek 5 napig elegendő 1 zsák nyúltáp. Hány napig elegendő az 1 zsák nyúltáp 125 nyúlnek? **1 napig elegendő a nyúltáp 125 nyúlnek.**

c) 30 dkg dió 420 Ft-ba kerül. Mennyibe kerül 1,5 kg dió? **2100 Ft-ba kerül 1,5 kg dió.**

d) Egy farmon 10 lónak 5 napig elegendő a széna. Hány napig elegendő ugyanennyi széna 5 lónak? **10 napig elegendő a szalma 5 lónak**

Egyenesen arányos mennyiségpárok: a), c)

Fordítottan arányos mennyiségpárok: b), d)

2. Egy bevásárlóközpontnak 240 darab karácsonyi dísz van a karácsonyi dekorációhoz. Hány darab dísz tudnak felrakni egy fenyőfára, ha 2, 3, 4, 5, 6, 8 darab karácsonyfát akarnak állítani? Készíts táblázatot!

Karácsonyfák száma (db)	Díszek száma 1 karácsonyfán (db)
2	120
3	80
4	60
5	48
6	40
8	30

3. 8 szobafestő 12 nap alatt végezte el egy ház kifestését. Hány nap alatt készült volna el a festés, ha ugyanilyen teljesítménnyel 6; 4; 2; 1 festő dolgozott volna?

Szobafestők száma (fő)	Idő (nap)
8	12
6	16
4	24
2	48
1	96

4. Egy 500 m³-es medencét 4 csap 6 óra alatt tud teljesen feltölteni.

a) Hány óra alatt telne meg a medence, ha csak 3 csapot nyitnánk meg a feltöltéskor?

3 csappal 8 óra alatt telne meg a medence.

b) Hány csap tudná feltölteni a medencét 1 óra alatt?

1 óra alatt 24 csappal lehet feltölteni a medencét.

c) Mennyi idő alatt telne félig a medence, ha 4 csapot használnánk a feltöltéskor?

3 óra alatt töltenénk meg félig a medencét 4 csappal.

5. Egy pályázat megírásához 138 600 karakter leütése szükséges. Mennyi idő alatt gépeli le ezt a pályázatot egy gyorsan, közepesen, lassan gépelő gépíró, ha

– a gyorsan gépelő 840 karaktert üt le percenként,

– a közepesen gépelő 792 karaktert üt le percenként,

– a lassan gépelő 700 karaktert üt le percenként?

A gyorsan gépelő gépíró 165 perc alatt, a közepesen gépelő 175 perc alatt, a lassan gépelő gépíró 198 perc alatt gépelné be a levelet.

6. A mandarin kilója 180 Ft, ekkor 8 kg tudunk vásárolni az erre szánt pénzből. Mennyi mandarint tudunk vásárolni, ha 240, 200, 90 Ft-ra változott a kilónkénti ára?

Készíts táblázatot és ábrázold grafikonon a mandarin mennyisége és ára közötti összefüggést!

a) Mennyi pénzt szánunk a mandarin vásárlására? **1440 Ft-ot szántunk mandarinvásárlásra.**

b) Hány kiló mandarint tudunk venni, ha kilója 300 Ft? **4,8 kg-t tudunk venni ilyen áron.**

Mandarin ára (Ft)	Mandarin mennyisége (kg)
240	6
200	7,2
180	8
90	16

