
ARÁNY, ARÁNYOSSÁG, STATISZTIKA

Arány, arányos osztás

KÉSZÍTETTE: BENCZÉDY-LACZKA KRISZTINA, MALMOS KATALIN

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A tört értelmezései: tört, hányados, törtrész, arány; százalék, a jelentések közötti különbözőségek. Arányos osztásra vezető szöveges feladatok megoldása. Százalékszámítási feladatok.
Időkeret	2 óra
Ajánlott korosztály	6. osztály
Modulkapcsolódási pontok	6. osztályos Számok és műveletek: Törtek témakör.
A képességfejlesztés fókuszai	<i>Számlálás, számolás:</i> Tört, százalék, arány kapcsolata. <i>Szövegesfeladat-megoldás, problémamegoldás, metakogníció:</i> Valós életből vett problémák megoldása, szöveges feladatok megoldása, ellenőrzése. Arányossági következtetést kívánó szöveges feladatok. <i>Rendszerezés, kombinativitás:</i> Több megoldás keresése. Számok felírása sokféle alakban. <i>Deduktív következtetés, induktív következtetés:</i> Százalékszámítási alapeladatok ismétlése.

AJÁNLÁS:

Egyéni munka, csoport munka vegyes használata.

TÁMOGATÓ RENDSZER:

Feladatlapok, feladatgyűjtemény, kártyajáték. A csoportmunkák során a tanulók többnyire négyes csoportokban dolgoznak, de fontos, hogy egyéni feladattal is kipróbálhassák magukat. Nagyon fontos a csoportokon belül kialakuló vita, a gondolkodás szabadsága, a másik véleményének figyelembe vétele, egymás tisztelete, a játékok során a játékszabályok betartása. Az egyén szerepe fontosságának megtapasztalása a közösségben. A tanulói tapasztalatcsere hangsúlyozása mellett ugyanilyen fontosnak kell lennie a frontális tanári munkának, amelynek során a tanulók megerősítést kapnak a továbbhaladásuk szempontjából legfontosabb ismeretekben, tisztázódnak a meg nem értett anyagrészek.

ÉRTÉKELÉS:

Az egyéni- és csoporteredmények szóbeli értékelése, a hiányosságok pótlására, hibák javíttatására is kiterjedően. Egyéni- és csoporteredmények pozitív értékelése. Ösztönözzünk arra, hogy a tanulók egymás munkáját is értékeljék, megbecsüljék.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képessegek	Eszközök, Feladatok
I. A tört értelmezései			
1.	Ráhangolás: UNO kártyajáték	Deduktív, induktív következtetés, alkalmazás	0652 modul 2. melléklet és 0654 modul 3. melléklet kártyapaklijai
2.	Bevezető feladat	Induktív, deduktív következtetés, kombinatív gondolkodás	1. feladatlap
3.	Arány, arányosság	Megfigyelő képesség, kombinatív gondolkodás	
4.	Gyakorló feladatlap	Deduktív, induktív következtetés, alkalmazás	2. feladatlap
II. Arányos osztásra vezető szöveges feladatok megoldása; százalékszámítási feladatok			
1.	Problémafelvetés: az arányos osztás bevezetése	Deduktív, induktív következtetés, alkalmazás	3. feladatlap 1., 2.
2.	Arányos osztásra vezető feladatok	Logikus gondolkodás, kombinatív gondolkodás, számolás, alkalmazás	3. feladatlap 3–8.
3.	Százalékszámítási alapfeladatok ismétlése	Logikus gondolkodás, kombinatív gondolkodás, számolás, alkalmazás	4. feladatlap

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. A tört értelmezései

1. Ráhangelés: UNO kártyajáték

Ismétlésnek használhatjuk a már jól ismert UNO játékot.

A kártyacsomag (Számok és műveletek: Törtek témakör 0652. modul 2. tanári melléklet Kártyapakli, kiegészítve a 0654. modul 3. tanári melléklettel) ötszínű – piros, kék, zöld, fekete, barna –, és 40 kártyát tartalmaz, amelyeken azonos értékű törtek különböző alakjai szerepelnek (tizedes tört, tört[tized], tört[egyszerűsített], arány illetve százalék formában). Így egy tört öt különböző színű kártyán szerepel.

0652 – 2., 0654 – 3. tanári melléklet – lásd a megfelelő modulok végén és eszközei közt is!

A játék 2-5 játékos részére készült. A játék menete: A kártyapaklit az osztó megkeveri, és mindenkinek oszt 4-4 lapot, majd a pakliban lévő következő lapot felfordítva kirakja középre a többi játékos elé. A játékosok egymás után következnek sorban, a középben lévő lapra vagy ugyanolyan színűt, vagy ugyanolyan értékűt lehet rakni. Aki nem tud rakni, az húz egy lapot a pakliból, de azután már nem dobhat csak a következő körben. Az nyer, akinek legelőször elfogynak a lapjai.

A kártyakészletben a következő lapok szerepelnek:

0,4	0,5	0,6	0,8	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	40%	50%	60%	80%
0,25	0,75	0,35	1,25	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{5}{4}$	25%	75%	35%	125%
$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{8}{10}$	2 : 5	1 : 2	3 : 5	4 : 5				
$\frac{25}{100}$	$\frac{75}{100}$	$\frac{35}{100}$	$\frac{125}{100}$	1 : 4	3 : 4	7 : 20	5 : 4				

A tanár a vitás kérdésekben segíti a tanulókat, illetve figyeli, ki, hogyan boldogul a játékkal. A játék befejeztével a csoportok találják meg az egyenlő kártyákat! Így tisztázhatjuk például, hogy a 0,4; $\frac{4}{10}$; $\frac{2}{5}$; 2 : 5; 40% ugyanazt jelenti, csak más formában írtuk fel.

2. Bevezető feladat

Kezdeményezzünk egy beszélgetést arról, hogy mi jut eszükbe a gyerekeknek az arány, arányos szavakról!

A következő feladat megbeszélésénél utaljunk vissza a gyerekek gondolataira.

1. FELADATLAP

Nézzük meg, hogy Magyarország különböző városában milyen adatokat találhatunk a munkanélküliségre vonatkozóan. Két város munkanélküliség helyzetét vizsgáljuk a következő feladatban.

1. Mit gondolsz, melyik városban nagyobb a munkanélküliség?

a) Az A városban 330 000-rel több a munkanélküli, mint B városban.

Ezekből az adatokból még nem lehet eldönteni, melyik városban nagyobb a munkanélküliség.

Kérdezzük meg a tanulóktól, hogy milyen adatok kellenek ahhoz, hogy a kérdés eldönthető legyen!

Ahhoz, hogy eldönthető legyen a kérdés, ismerni kéne, hogy melyik városban hányan élnek.

b) Az A városban 480 000-rel több ember lakik, mint B városban, és A városban 330 000-rel több a munkanélküli, mint B városban.

Nincs elég információnk a munkanélküliek és a dolgozók számáról.

Kérdezzük meg a tanulóktól, hogy milyen adatok kellenek ahhoz, hogy a kérdés eldönthető legyen!

A kérdés eldönthetőségéhez ismerni kellene, hogy legalább az egyik városban hányan élnek.

c) Az A városban 450 000, a B városban 120 000 munkanélküli van.

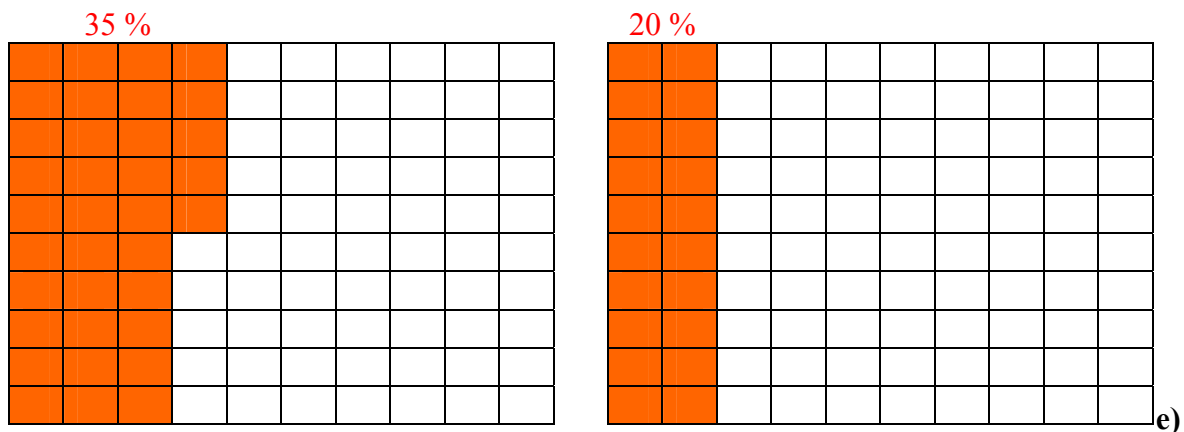
Nem lehet eldönteni, mert nem tudjuk, hogy hányan élnek a városokban.

Kérdezzük meg a tanulóktól, hogy milyen adatok kellenek ahhoz, hogy a kérdés eldönthető legyen!

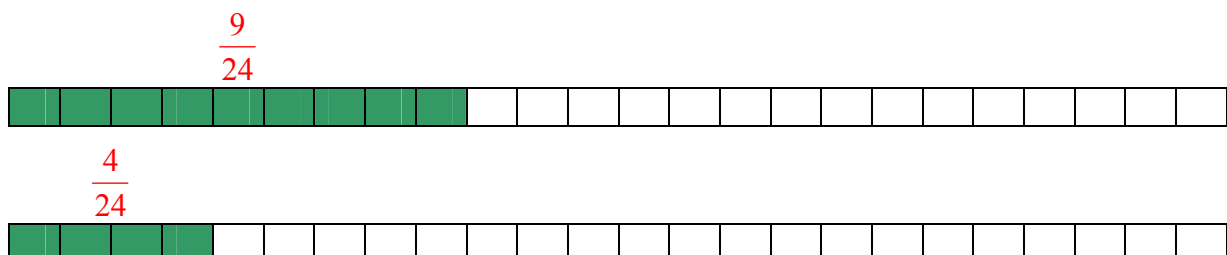
Ahhoz, hogy eldönthető legyen a kérdés, ismerni kéne, hogy melyik városban hányan élnek.

A következő megoldásokat a feladat adatainak ábrázolásával könnyen láthatóvá tehetjük:

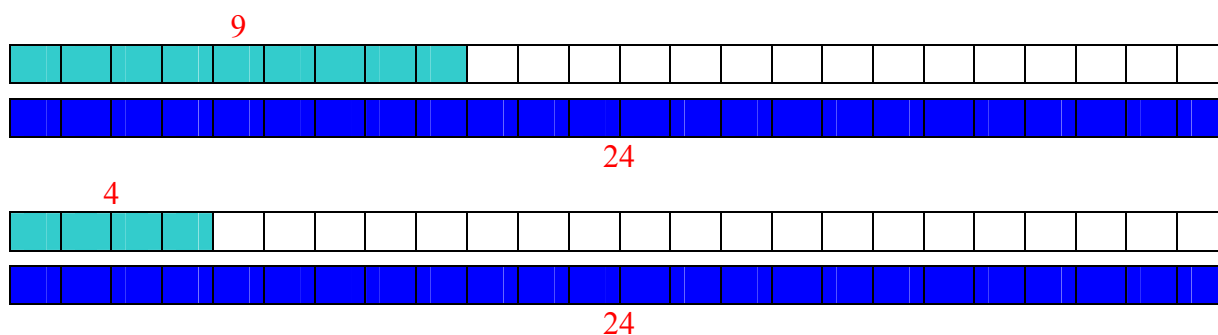
d) A munkanélküliek száma A városban 35% fölött, B városban 20% alatt van.



e) Az A városban a lakosság $\frac{9}{24}$ -ed, B városban $\frac{4}{24}$ -ed része munkanélküli.



f) Az A városban $9 : 24$, a B városban $4 : 24$ a munkanélküliek és a dolgozók aránya.



Az A városban nagyobb a munkanélküliség.

Beszéljünk arról a tanulókkal, hogy a százaléknak, a törtnek és az arálynak ugyanaz a matematikai tartalma, tehát mindhárom ugyanakkor a számnak más-más alakja. Az adatok aránya sokszor többet mond, mint az adatok különbsége. A gyakorlati életben, a különböző tudományokban az arányokat nagyon sokszor használjuk. A feladatot egészítsük ki a városok lakosainak számával. (A városban 1 200 000; B városban 720 000 ember lakik.) Így látják a kapcsolatot a tört alak, a százalék és az arány között.

3. Arány, arányosság

Tisztáztuk, hogy az arány miért fontos fogalom. Mutassuk meg a tanulóknak, hogy honnan ered az arány fogalma, illetve mit jelent ma a matematikában. Keressünk olyan példákat, hogy a köznapi életben mikor használjuk az arány kifejezést, és ezekben a példákban milyen értelemben jelenik meg.

Arány, arányosság Olvasmány

Az arány, arányos szavak hallatán nemcsak matematikára gondolunk, sokkal tágabban is értelmezhetők ezek a szavak. Az arányos szó alapvetően pozitív értelmezéssel bír. Ha egy épület nem arányos, hanem aránytalan, azt nem szoktuk szépnek látni. Egy lakásvásárlásnál, ha azt mondjuk, hogy aránytalanul sokba kerül, azt is mondjuk, hogy az ára nincs arányban az épület állagával, túl drágán adják a lakást. Ha az iskolában fegyelmező intézkedést kap egy diák, és azt mondjuk, hogy aránytalanul szigorú döntés, akkor ez azt jelenti, hogy a beírás nincs arányban az elkövetett vétséggel, azaz igazságtalan. Ezek a példák mutatják, hogy a matematikai tartalom túl valami egyebet – szépérezék, igazságérezet ... – is kifejezünk ezekkel a szavakkal. A görögök ebben az értelemben az arányt erkölcsi kategóriának tekintették, és tekinthetjük mi is.

Az ókori matematikusok a test és lélek harmóniáját az arányok helyes megválasztásában látták.

Arisztotelész (Kr. e. 384–322.) görög filozófus és matematikus az arányt a szépség elengedhetetlen feltételének tartotta.

Eukleidész (Kr.e. 365.?–300.?) görög matematikus "Elemek" című könyvében összefoglalta elődei arányelméletét.

A középkorban élő művészek az arányt, mint emberfeletti dolgot emlegették. Már régtől ismert, a természetben is megfigyelhető az az arány, amit aranymetszési arálynak vagy „Divina proportio” (ejts: divina proporció), „isteni arány” neveztek az ókori matematikusok.



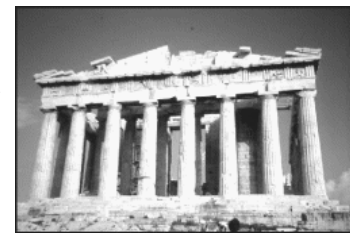
Egy szakasz vagy mennyiség aránymetszés szerinti felosztásakor a keletkező kisebb darab úgy aránylik a nagyobbhoz, mint a nagyobb az egészhez.

Ezt az arányt annyira szépen tartották, hogy nagyon sok műemlék arányaiban is felfedezhető. Így például a Belvederei Apollón szobron, amely Kr. e. 350 körül készült. Az „I” vel jelölt vonal az egész testet az aránymetszés arányának megfelelően osztja fel.



Az aránymetszést már az ókorban is előszeretettel használták a képzőművészetekben. Rájöttek ugyanis, hogy az aránymetszéssel osztott távolságok általában kellemes hatást keltenek a szemlélőben. Az ókori

Egyiptomban még valószínűleg nem tudatosan alkalmazták a módszert, bár a Gízai piramisokon felfedezhetők az aránymetszésre jellemző arányok.



A görögök már szilárd matematikai alapokra helyezték építészetüket. Az athéni Akropolisz főépítésze, Pheidias a Parthenon tervezésekor számtalan helyen élt az aránymetszés lehetőségével.

Az állat- és növényvilág is megszámlálhatatlan lehetőséget nyújt az aránymetszés megfigyelésére. Tesztmódszerekkel végzett vizsgálatokkal kimutatták, hogy a legtöbben az aránymetszési arányt hordozó, vagy az ahhoz közelálló alakzatokat tartják leginkább esztétikusnak. Ez azzal magyarázható, hogy közvetlen környezetünk, maga a természet ehhez számos mintával szolgál. Ezzel találkozunk számos virág mintázatában, fák leveleinek méretarányaiban, az ágak és levelek elhelyezkedési viszonyaiban...

A köznapi életben az arány kifejezésre a következő példákkal ébreszthetjük fel a tanuló fantáziáját:

Az arány, arányos fogalmakat tágabb értelemben az egyenletes, harmonikus, igazságos fogalmak szinonimájaként használják. Az arányos szó ilyen értelmezése a fogalom nem mérhető dolgokra való kiterjesztése. Amikor egy sportversenyen az arany, ezüst, illetve bronzérmeket a helyezéseknek megfelelően osztják ki, a díjakat a teljesítménnyel arányosnak mondjuk. Amikor a vétség nagyságával arányos büntetésről beszélünk, az arányos jelzővel annak igazságos voltát akarjuk kifejezni. Ezekben az esetekben az arányosság csupán azt jelenti, hogy két dolog közül az egyiknek valamely rangskálán való elhelyezkedése összhangban van a másik dolog egy másfajta skálán való helyzetével.

Az aránylag kifejezést sokszor a viszonylag szóval azonos értelemben használjuk. Az aránylag, viszonylag szavak valamilyen elképzelt normával való összehasonlítást fejeznek ki. Arányos fejlődésen egyenletes, minden irányú, kiegyensúlyozott fejlődést értünk.

Az arány, arányos szavak művészi, esztétikai értelemben azt fejezik ki, hogy az, amire vonatkoznak olyan, amilyennek lennie kell, vagyis a részek egymáshoz és az egészhez való viszonya egy valóságos vagy elképzelt (ideális) rendszernek megfelel. Az arány fogalma ilyen értelemben vonatkozhat művészeti alkotás *térbeli* (képzőművészet), vagy *időbeli* (zeneművészet) viszonyaira.

4. Gyakorló feladatlap

2. FELADATLAP

1. Különböző áruházakban a férfiak és nők számát vizsgálták. 1 nap alatt az I. áruházban 100 vásárló közül 75 nő volt, a II. áruházban 120 vásárló közül 100 férfi volt.

Válaszolj az alábbi kérdésekre!

a) A kiválasztott napon melyik áruházban vásárolt több nő és mennyivel?

Az I. áruházban 55-tel több nő vásárolt, mint a II.-ban.

b) Hányszor több férfi vásárolt a II. áruházban, mint az elsőben?

A második áruházban 4-szer több férfi vásárolt, mint nő.

c) A vásárlók mekkora része volt nő az egyes áruházakban?

Az I. áruházban a vásárlók $\frac{3}{4}$ -ed része, a II.-ban $\frac{1}{6}$ -od része volt nő.

d) Melyik áruházban nagyobb a férfi vásárlók százaléka?

A II. áruházban a férfiak nagyobb százalékban vásároltak.

e) Mennyi a férfi vásárlók és a női vásárlók aránya az egyes áruházakban?

Az I. áruházban 1:3 a II. áruházban 5 : 1 a férfi és női vásárlók aránya.

2. Számítsd ki, hogyan aránylik a 28 a 4-hez, mondj olyan számpárokat, melyek aránya ugyanennyi!

Írjuk fel a táblára a talált párokat, majd írassuk fel közösleges törtben is az osztásokat. Vetessük észre a számlálók változásait, a nevezők változásait.

$$28 : 4 = 7$$

28 és 4 aránya 7.

Ilyen számpárok még:

$$7 : 1 = 14 : 2 = 21 : 3 = 28 : 4 = 35 : 5 = 42 : 6 = 49 : 7 = 56 : 8 = 63 : 9 = 70 : 10 = 77 : 11 \text{ stb.}$$

$$\frac{7}{1} = \frac{14}{2} = \frac{21}{3} = \frac{28}{4} = \frac{35}{5} = \text{stb.}$$

3. Hogyan aránylik a 4 a 28-hoz? Számítsd ki, majd írd meg olyan számpárokat, amelyek aránya ugyanennyi!

$$4 : 28 = \frac{1}{7}$$

4 és 28 aránya.

Ilyen számpárok még:

$$1 : 7 = 2 : 14 = 3 : 21 = 4 : 28 = 5 : 35 = 6 : 42 = 7 : 49 = 8 : 56 = 9 : 63 = 10 : 70 = 11 : 77 \text{ stb.}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{2}{14} = \frac{3}{21} = \frac{4}{28} = \frac{5}{35} = \text{stb.}$$

TUDNIVALÓ:

Az arány két szám hányadosát jelenti. Az első szám az osztandó, a második az osztó. Az arány értéke azt megmutatja meg, hogy hányszorosa az első szám a másodikkal (az osztandó az osztónak).

Például: 5 és 2 aránya $\frac{5}{2} = 2,5$. A 2 és 5 aránya $\frac{2}{5} = 0,4$. A példából is látszik, hogy az arányban szereplő számok nem felcserélhetőek.

4. Olvasd el az alábbi szöveget, majd válaszolj a kérdésekre!

A kelet-közép-európai országok és fővárosaik lakosságának számát hasonlították össze, amelyek mind történelmi múltjukat, mind társadalmi-gazdasági helyzetüket tekintve lényegesen különböznek egymástól. Németországban a fővároson kívül élők száma 79269 ezer fő, míg Ausztriában ugyanez ez a szám 6559 ezer fő. A vizsgált országok közül Magyarország összlakossága 10088 ezer fővel a harmadik helyen szerepel. Lettországban az ország $\frac{1}{3}$ -a, Lengyelországban az $\frac{5}{113}$ -a él a fővárosában. Észtországban a fővárosban és az országban élők aránya 9:31.

Az egykori Csehszlovákia területén Csehországban 10228 ezer fő, Szlovákiában pedig 5392 ezer fő él. A kisebb területű Pozsonyban 426 ezer fő él 368 km²-en, míg közel 500 km²-en Prágában 2,7-szer többen élnek. Az EU negyedik legnépesebb városa, a 3389 ezer fő lakosú, egyesített Berlin éppúgy, mint a volt Jugoszláv utódállam, Szlovénia 266 ezer lelket számláló fővárosa, Ljubjana. Budapest a tíz nagyváros között 1 millió 705 ezer lakosával népességszáma alapján a második. Budapest után 1690 ezer fővel Varsó a harmadik, Bécs 1599 ezer fővel a negyedik helyen következik a vizsgált fővárosok közül. A legkisebb területű Tallinnban 158 km²-en 396 ezer fő, a közel kétszer akkora területű Rigán 740 ezer fő él. Litvánia fővárosában, Vilniusban 553 ezer fő, az ország 16%-a, Szlovéniában ugyanez az érték 13,3%. E két ország fővárosaiban az 1995-től rendelkezésre álló adatok alapján összességében természetes fogyásról beszélhetünk. A vizsgált fővárosok közül ebben az időszakban e kétszer volt a fogyás mértéke a legalacsonyabb, és mindkét nagyvárosnál 1996 után is volt olyan esztendő, amikor a születések száma meghaladta a halálozásokét.

a) Mit tudunk az egyes országokról?

- Németországban a fővároson kívül élők száma 79269 ezer fő
 - Ausztriában a fővároson kívül élők száma 6559 ezer fő
 - Magyarország összlakossága 10088 ezer fő
 - Lettországban az ország $\frac{1}{3}$ -a él a fővárosában
 - Lengyelországban az $\frac{5}{113}$ -a él a fővárosában
 - Észtországban a fővárosban élők aránya 9:31
 - Csehországban 10228 ezer fő él
 - Szlovákiában 5392 ezer fő él
 - Litvánia fővárosában, Vilniusban 553 ezer fő, az ország 16 %-a
 - Szlovénia fővárosában, Ljubjana 266 ezer fő, az ország 13,3 %-a.
- Más dolgokat is megtudtunk: pl. Tallin a legkisebb, Riga kétszer akkora stb.

b) Mit tudunk az egyes fővárosokról?

- Pozsonyban 426 ezer fő él
- Prágában 2,7-szer többen élnek, mint Pozsonyban
- Berlin 3389 ezer fő lakosú
- Ljubjana 266 ezer fő lakosú
- Budapest 1 millió 705 ezer fő lakosú

- Varsó 1690 ezer fő lakosú
- Bécs 1599 ezer fő lakosú
- Tallinn 396 ezer fő lakosú
- Rigán 740 ezer fő él
- Vilniusban 553 ezer fő él.

c) Mely országok, illetve fővárosok lakosságának arányát tudjuk összehasonlítani számolás nélkül?

Lettország, Lengyelország, Észtország, Litvánia, Szlovénia.

d) Mit tudunk az egyes országok és azok fővárosainak lélekszámáról?

- Németországban a fővároson kívül élők száma 79269 ezer fő, Berlin 3389 ezer fő lakosú. Németország teljes lakossága 79269 ezer + 3389 ezer = 82658 ezer fő.
- Ausztriában a fővároson kívül élők száma 6559 ezer fő, Bécs 1599 ezer fő lakosú. Ausztria teljes lakossága 6559 ezer + 1599 ezer = 8158 ezer fő.
- Magyarország összlakossága 10088 ezer fő, Budapest 1 millió 705 ezer fő lakosú
- Lettországban az ország $\frac{1}{3}$ -a él a fővárosában, Rigán 740 ezer fő él. Lettország teljes lakossága 2220 ezer fő.
- Lengyelországban az $\frac{5}{113}$ -a él a fővárosában, Varsó 1690 ezer fő lakosú. Lengyelország teljes lakossága 38194 ezer fő.
- Észtországban a fővárosban és az országban élők aránya 9:31, Tallinn 396 ezer fő lakosú. Észtország teljes lakossága 1364 ezer fő.
- Csehországban 10228 ezer fő él, Prágában 2,7-szer többen élnek, mint Pozsonyban. Prágában 426 ezer $\cdot 2,7 = 1150,2$ ezer fő él.
- Szlovákiában 5392 ezer fő él, Pozsonyban 426 ezer fő él.
- Litvánia fővárosában, Vilniusban 553 ezer fő, az ország 16 %-a. Litvánia teljes lakossága: 3456,25 ezer fő.
- Szlovénia fővárosában, Ljubjana 266 ezer fő, az ország 13,3 %-a. Szlovénia teljes lakossága 2000 ezer fő él.

II. Arányos osztásra vezető szöveges feladatok megoldása; százalékszámítási feladatok

1. Problémafelvetés: az arányos osztás bevezetése

A következő problémát vethetjük fel a tanulóknak. Az osztályban akár el is lehet játszani.

3. FELADATLAP

1. Julcsi születésnapján a meghívottakat meglepte Julcsi anyukája 15 lufival, amit nekik kellett felfújni. A fiúk kétszer annyi lufit tudtak felfújni, mint a lányok. Hány lufit fújtak fel a lányok és hány lufit fújtak fel a fiúk?

1. megoldás:

Szemléltethetjük a megoldást, úgy hogy kihívunk egy fiút és egy lányt. A lufikból a lány mindig egyet vegyen, míg a fiú kettőt.

Így a lány 5 darab lufit vesz el, míg a fiú 10 darabot.

A megoldást ellenőriztessük le:

$$10 : 5 = 2 \text{ (Kétszer annyit vett el a fiú, mint a lány.)}$$

$$10 + 5 = 15 \text{ (Összesen 15 lufit vettek el.)}$$

2. megoldás:

Osszuk el a lufikat 3 egyenlő részre (1 rész 5 lufi).

Ezekből az egyenlő részekből a lányok 1-et vehetnek el a fiúk 2-t.

Tehát a lányok 5 darab lufit fújtak fel, a fiúk pedig 10 darab lufit.

Egy másik példát adjunk fel a tanulóknak, ahol mindenki egyedül végiggondolhatja a megoldást.

2. Osszuk fel egy 12 cm hosszú szakaszt 1 : 3 arányban.

Figyeltessük meg a tanulókkal, hogy amikor 2 : 1 arányban osztottunk, akkor 3 egyenlő részre osztottuk először, majd egy, illetve két részt vettünk belőle. Ezt törtekkel így írhatjuk fel:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

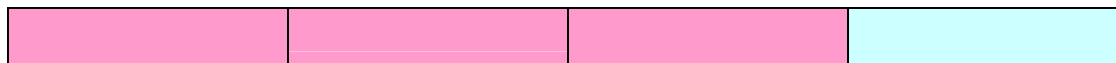
Amikor 1 : 3 arányban osztottunk egy szakaszt, akkor 4 egyenlő részből vettünk 1, illetve 3 egyenlő részt. Ezt törtekkel így írhatjuk fel:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

2. Arányos osztásra vezető feladatok

3. Egy esküvői vacsorára 68 vendéget várnak. A menyasszonynak háromszor annyi meghívottja van, mint a vőlegénynek. (Azaz a vendégek 3:1 arányban vannak a vacsoraasztalnál.) Hány vendéget vár a jegyespár külön-külön az emlékezetes eseményre?

Megoldás:



$$3 \text{ rész} + 1 \text{ rész} = 4 \text{ rész} \quad 68 : 4 = 17 \quad 1 \text{ rész} = 17 \quad 3 \text{ rész} = 51$$

51 vendéget hívott a menyasszony és 17 vendéget a vőlegény.

4. Budapest-Szentendre távolsága légvonalban 20 km. A térképen 4 cm. Mekkora a térkép méretaránya?

$$4 : 2\,000\,000 = 1 : 500\,000$$

A térkép méretaránya 1 : 500 000.

5. A boltban kapható falfestéket 1:5 arányban kell hígítani. 2 liter vízhez mennyi festéket keverjek?

2 liter vízhez 10 liter festéket kell keverni.

6. Zsuzsi és Peti elhatározták, hogy anyukájukat együtt lepik meg születésnapja alkalmából. Összeadták megspórolt pénzüket, így 5100 Ft-juk volt az ajándéokra. Zsuzsi kétszer annyi pénzt takarított meg, mint Peti. Külön-külön mennyi pénzüket volt?

$$1 \text{ rész} + 2 \text{ rész} = 3 \text{ rész}$$

$$5100 : 3 = 1700$$

$$1 \text{ rész} = 1700$$

$$2 \text{ rész} = 3400$$

Zsuzsinak 3400Ft-ja, míg Petinek 1700Ft-ja volt.

7. Nyáron egy gyümölcsöskert „Szedd magad” akciót hirdetett. Két család együtt ment almát szedni. Megegyeztek, hogy a leszedett almát együtt méretek le, s abból mindenki ugyanannyit kap. Milyen arányban osztozkodott a két család, ha összesen 54 kg almát szedtek, és az egyik család négytagú, a másikban öten vannak? Mennyi jutott egy-egy családtagnak?

1. megoldás: 9 ember szedte le az 54 kg almát, így $54 : 9 = 6$ kg jutott mindegyiküknek. Az egyik család $6 \cdot 4 = 24$ kg, a másik család $6 \cdot 5 = 30$ kg gyümölcsöt vitt haza. Az osztozkodás aránya: $24 : 30 = 4 : 5$

2. megoldás: 4 : 5 arányban osztozkodtak, mert így jut minden családtagnak egyenlő mennyiségű alma.

$$4 \text{ rész} + 5 \text{ rész} = 9 \text{ rész}$$

$$54 : 9 = 6$$

$$4 \text{ rész} = 24$$

$$5 \text{ rész} = 30$$

A 4 fős család 24 kg almát vitt haza, az 5 fős család 30kg almát.

8. Egy kosárlabda meccsen az egyik csapatból 7 játékos lépett pályára. Összesen 88 pontot szereztek. Három játékos nem szerzett pontot. Két játékos ugyanannyi pontot dobott. Az egyik társuk háromszor annyit dobott, a másik társuk pedig fele annyi pontot szerzett, mint ők ketten külön - külön. Hány pontot dobtak a játékosok külön - külön?

$$1 \text{ rész} + 2 \text{ rész} + 2 \text{ rész} + 6 \text{ rész} = 11 \text{ rész}$$

$$88 : 11 = 8$$

$$1 \text{ rész} = 8; \quad 2 \text{ rész} = 16; \quad 2 \text{ rész} = 16; \quad 6 \text{ rész} = 48$$

3. Százalékszámítási alapfeladatok ismételése

Ha az arányos osztásból indulunk ki úgy, hogy 100 részre osztunk, akkor ismét eljuthatunk a százalékszámításhoz.

A következő feladatok megoldását csoportmunkában ajánljuk.

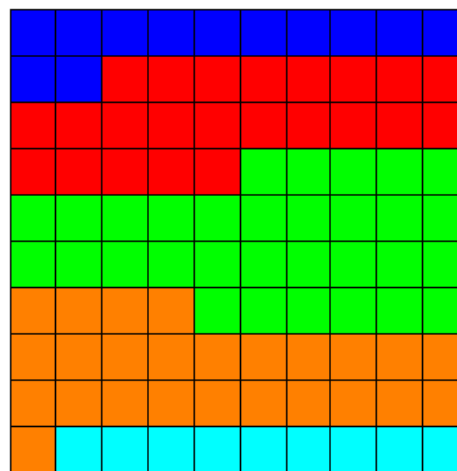
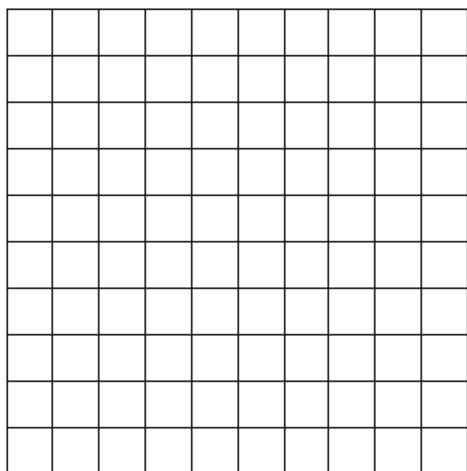
4. FELADATLAP

1.

a) A 6.c osztályban a legutolsó matematika felmérésen az 5, 4, 3, 2, 1-es jegyeket 3 : 5 : 7 : 8 : 2 arányban kaptak a tanulók. Az ábra segítségével határozd meg az osztály jegyeit, ha a 6.c osztályba 25 tanuló jár!

Blue	Blue	Blue	Red	Red
Green	Green	Green	Green	Green
Orange	Orange	Orange	Orange	Orange
Orange	Orange	Orange	Cyan	Cyan
Cyan	Cyan	Cyan	Cyan	Cyan

b) Négy hatodikos osztályban 100 tanulóval központi matematika felmérést készítettek. Az 5, 4, 3, 2, 1-es jegyeket a következő arányban kaptak a tanulók: $12 : 23 : 31 : 25 : 9$. Az ábra segítségével határozd meg, hány darab 5, 4, 3, 2, 1-es jegyeket kaptak a tanulók!



c) Melyik feladatban kaptak a tanulók nagyobb arányban 5-ös osztályzatot?

Az a) esetben $3 : 25 = 12 : 100$, mivel 25 tanulóból 3-an kaptak 5-ös osztályzatot. A b) esetben ugyanez az arány $12 : 100$, tehát mindkét esetben ugyanolyan arányban értek el a tanulók 5-ös osztályzatot.

d) Melyik feladatban kaptak a tanulók nagyobb részben 3-as osztályzatot?

Határozd meg, hogy az egyes esetekben a tanulók hány százaléka kapott 3-ast! Melyik esetben tudod könnyen meghatározni?

Az a) esetben a tanulók $\frac{7}{25} = \frac{28}{100}$ része, azaz 28%, a b) esetben $\frac{31}{100}$ része, azaz 31% kapott

3-as osztályzatot, tehát a b) esetben kaptak a tanulók nagyobb részben 3-ast.

e) A tanulók hány százaléka ért el közepesnél jobb eredményt az egyes esetekben?

Az a) esetben a tanulók 32%-a, a b) esetben 35%-a kapott közepesnél jobb osztályzatot.

A következő feladatot is csoportokban oldják meg a tanulók közösen, miután mindenki végigolvasta az újságcikket.

2. Olvasd el az újságcikket figyelmesen!

Kevesebb a vezetékes, több a mobil

Tavaly év végén 3,613 millió vezetékes telefonvonal volt üzemben, ami 57 ezerrel, 1,6%-kal kevesebb az egy évvel korábbinál. A mobil előfizetők száma 6,886 millióról 7,945 millióra nőtt ebben az időszakban, ami 15,4%-os növekedést jelent, derül ki a KSH honlapján közzétett előzetes adatokból. A negyedik negyedévben tavaly a vezetékes hívások átlagos időtartama 3, a mobilhívásoké átlagosan 1,4 perc volt.

Vezetékes telefonokról a tavalyi utolsó negyedévben 854 millió hívást indítottak az internet-behívószám adataival együtt, 5,1%-kal kevesebbet, mint egy évvel korábban. 2002 negyedik negyedéhez viszonyítva a helyi hívások száma 7,4%-kal csök-



kent, a belföldi hívások száma 0,2%-kal nőtt. A nemzetközi hívások száma 8%-kal csökkent. A vezetékes hálózatokból indított hívások összes időtartama több mint 2,5 milliárd perc volt, 8,6%-kal kevesebb, mint 2002 negyedik negyedévében.

A mobil készülékekről indított hívások száma 1,2 milliárd volt, ami 13 ezerrel, 1,1%-kal több a harmadik negyedévinél, és 57 ezres, 5%-os emelkedést jelent az előző év azonos időszakához képest. A mobil készülékekről indított hívások időtartama 1,7 milliárd perc volt 2003 negyedik negyedévében, 24%-kal több, mint 2002 azonos időszakában.

Az [origo] nyomán

a) Rendszerezd és tedd áttekinthetővé az adatokat a táblázatban! Ahol szükséges, végezd el a megfelelő számításokat.

	2002 / negyedik negyedév	2003 / negyedik negyedév
Vezetékes telefonvonalak száma	3,67 millió	3,613 millió
Vezetékes hívások száma	899,89 millió (körülbelül)	854 millió
Vezetékes hívások időtartama	2,735 milliárd perc (körülbelül)	2,5 milliárd perc
Mobil előfizetők száma	6,886 millió	7,945 millió
Mobilhívások száma	1,199943 milliárd	1,2 milliárd
Mobilhívások időtartama	1,371 milliárd perc (körülbelül)	1,7 milliárd perc

b) Ellenőrizd, hogy az adatok alapján valóban annyi-e a százalékos változás!

Az 1,6 % kerekített érték, 1,553...%-hez.

A 15,4 % kerekített érték az 1,537...%-hoz.

Az 5 % kerekített érték a 4.75...%-hoz.

A 2003 –ra megadott adatok alapján:

A vezetékes hívások száma szorozva az átlagos beszélgetési idővel (3 perc) 2,562 milliárd perc. Itt a megadott érték nem kerekített, hanem kevesebb.

A mobilhívások száma szorozva az átlagos beszélgetési idővel 1,68 milliárd perc. A megadott érték kerekített.

c) Miért van jóval több mobil előfizető, mint vezetékes telefon előfizető? Szerinted mi az oka annak, hogy csökkent a vezetékes előfizetők száma, míg a mobiltelefonok esetében éppen ellentétes változás figyelhető meg?

Itt többféle elképzelés lehetséges. Ezzel és hasonló kérdésekkel elősegíthetjük, hogy a tanulók elgondolkozzanak kapott eredményeiken ne csak számszerűen, hanem „tartalmilag” is. A csoport kialakít egy közös elképzelést a kérdésekkel kapcsolatban.

Míg egy háztartásban általában egy vezetékes telefon szokott lenni, a mobil „személyi” telefon, sőt valaki többet is használ (pl. külön munkahelyi mobiltelefon). Bizonyos szempontból a mobil korszerűbb ezért használják egyre többen, helyettesítve vezetékes telefonjaikat.

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Keresd a párját!

a)

$$\begin{array}{c} A \\ \hline \frac{27}{100} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} B \\ \hline 0,6 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} C \\ \hline 0,28 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} D \\ \hline \frac{7}{25} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} E \\ \hline 27\% \end{array}$$

$$\begin{array}{c} F \\ \hline 60\% \end{array}$$

$A = E$

$B = F$

$C = D$

b)

$$\begin{array}{c} A \\ \hline 2 : 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} B \\ \hline 0,7 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} C \\ \hline 35\% \end{array}$$

$$\begin{array}{c} D \\ \hline 7 : 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} E \\ \hline \frac{7}{20} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} F \\ \hline \frac{2}{3} \end{array}$$

$A = F$

$B = D$

$C = E$

c)

$$\begin{array}{c} A \\ \hline 2 : 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} B \\ \hline 3 : 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} C \\ \hline 10 : 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} D \\ \hline 9 : 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} E \\ \hline 5 : 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} F \\ \hline 14 : 21 \end{array}$$

$A = F$

$B = D$

$C = E$

2. Egy téglalap oldalainak aránya 1 : 3. Kerülete 24 cm. Mekkora az oldalai? Mekkora a területe?

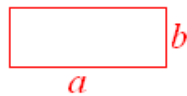
$$K = 2 \cdot (a + b)$$

$$8 \text{ egység} = 24 \text{ cm}$$

$$1 \text{ egység} = 3 \text{ cm}$$

$$a = 3 \text{ cm}$$

$$b = 9 \text{ cm}$$



3. Számítsd ki, hogyan aránylik a 27 a 3-hoz, majd írd olyan számpárokat, melyek aránya ugyanennyi!

$$27 : 3 = 9 : 1 = 9$$

$$\text{Például: } 18 : 2 = 36 : 4 = 45 : 5 = 135 : 15$$

4. Számítsd ki, hogyan aránylik a 3 a 27-hez, majd írd olyan számpárokat, melyek aránya ugyanennyi!

$$3 : 27 = 1 : 9 = \frac{1}{9}$$

$$\text{Például: } 2 : 18 = 4 : 36 = 5 : 45 = 15 : 135$$

5. Mennyi

a) 250 Ft-nak az 1%-a, 20%-a, 30%-a?

2,5 Ft; 50 Ft; 75 Ft.

b) 1500 m-nek a 20%-a, 18%-a, 50%-a?

300 m; 270 m; 750 m.

c) 12 liternek a 80%-a, 150%-a, 3000%-a?

9,6 l; 18 l; 360 l.

6. Hány százaléka

a) a 100-nak a 2, 50, 77, 78?

2%; 50%; 77%; 78%.

b) 1 órának a 30 perc, 15 perc, 45 perc?

50%; 25%; 75%.

c) 1 km-nek az 500m, a 300m, a 230m?

50%; 30%; 23%.

7. Hány százaléka

a) a 2 a 2-nek, a 8-nak, a 20-nak és az 50-nek?

100%; 25%; 10%; 4%.

b) a 150 a 300-nak, a 450-nak, a 900-nak és a 150000-nak?

50%; 33,33%; 16,66%; 0,1%.

c) az 1 km a 200 m-nek, a 4 km-nek, az 1500 m-nek?

500%; 25%; 150%.

8. A málnaszörpöt 1:10 arányban hígítottam. 2 cl szörphöz mennyi vizet öntöttem?

2 cl szörphöz 20 cl vizet öntöttem.

9. A kutyusom magassága a valóságban fél m, az enyém 1,5 m. A rólunk készült képen a kutyusom 5 cm. Milyen magas vagyok én a képen?

15 cm.

10. Egy háromszög kerülete 20 cm, oldalainak aránya 2 : 3 : 5. Mekkora az egyes oldalak? Szerkeszd meg a háromszöget a füzetedben!

$$2 + 3 + 5 = 10; \quad 20 : 10 = 2; \quad a = 4\text{cm}; \quad b = 6\text{cm}; \quad c = 10\text{cm}$$

11. Egy négyszög oldalainak aránya 1 : 2 : 2 : 3. A kerülete 16 cm. Mekkora a négyszög oldalai?

$$1 + 2 + 2 + 3 = 8; \quad 16 : 8 = 2; \quad a = 2\text{cm}; \quad b = 4\text{cm}; \quad c = 4\text{cm}; \quad d = 6\text{cm}$$

12. Egyik nap Szilvi és Lali 3500 forintot szeretne szétosztani 2:3 arányban! Mennyit kap egy-egy gyerek? Másnap ismét ugyanennyi pénzen osztóznak, most a Lalinak és Szilvinek jutó pénz aránya 2:3. Mennyit kapott ezen a napon Szilvi és mennyit Lali?

$$2 : 3 = 1400 : 2100$$

Egyik nap Szilvi 1400 Ft-ot, Laci 2100 Ft-ot kapott.

Másik nap Szilvi 2100 Ft-ot, Laci 1400 Ft-ot kapott.

13. A 6. a osztályosoknak papírgyűjtést szerveztek az osztályfőnökök. Az egyik osztály 120 kg, a másik osztály 60 kg papírt gyűjtött. Az érték járó pénzt a papír tömegének arányában osztják fel. Mennyi ez az arány? Mekkora részét kapják az egyes osztályok a pénznek?

$$120 : 60 = 2 : 1$$

Az egyes osztályok a pénznek a $\frac{2}{3}$, és $\frac{1}{3}$ részét kapják.

14. János és Károly felásták a szomszéd kertjét, ketten együtt 10000 forintért. Károly erősebb, így többet dolgozott, mint János, ezért a munkájukért kapott pénzt 4:6 arányban osztották szét. Hány forintot kaptak külön-külön?

Károly 6000 Ft-ot, János 4000 Ft-ot kapott.

15. Két festő együtt elvállalta egy lakás kifestését. Az egyik 4 napig, a másik 12 napig dolgozott a lakás kifestésén. Ezen a munkán 32000 Ft volt a hasznuk. A pénzt a ledolgozott napok számának arányában osztották el egymás között. Mennyi ez az arány?

Mekkora részét kapja egy-egy festő a 32000 Ft-nak?

Hány forintot kapnak a festők?

$$4 : 12 = 1 : 3$$

$\frac{1}{4}$, illetve $\frac{3}{4}$ részét kapják a festők a pénznek, azaz 8000 és 24000 Ft-ot.

16. Két szám összege 896, arányuk 3 : 4. Melyek ezek a számok?

A két szám a 384 és az 512.

17. Két szám különbsége 150, arányuk 19 : 4. Melyek ezek a számok?

A két szám a 190 és a 40.

18. Négy természetes szám úgy aránylik egymáshoz, mint 2 : 4 : 5 : 9. Közülük a legkisebb a 42. Melyek ezek a számok?

A négy természetes szám a 42, 84, 105 és a 189.

19. Egy baráti társaságban a lányok és fiúk aránya 4 : 3. Hány lány és hány fiú van a társaságban, ha a társaság összesen 28 fős?

A társaságban 16 lány és 12 fiú volt.