0664. MODUL

SÍKIDOMOK

Háromszögek és négyszögek szerkesztése

Készítette: Takácsné Tóth Ágnes

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A háromszögek csoportosítása különböző szempontok szerint. Speciális háromszögek definíciói, tulajdonságainak összegyűjtése, szerkesztésük, háromszög egyenlőtlenség. Tükrös négyszögek szerkesztése: húrtrapéz, deltoid.
Időkeret	3 óra
Ajánlott korosztály	6. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Ajánlott megelőző tevékenység:* 5. osztály: Alakzatok 0520–0523; Ponthalmazok 0571–0576 6. osztály: Tengelyes tükrözés 0630–0633; Háromszögek, nevezetes vonalak 0663 Ajánlott követő tevékenység: 7. osztály: Háromszögek, négyszögek szerkesztése.
A képességfejlesztés fókuszai	*Számolás, becslés:* szögszámítások. *Rendszerezés, kombinativitás:* háromszögek csoportosítása különböző szempontok szerint, a szerkesztés lépéseinek megtervezése. *Deduktív, induktív következtetés:* tapasztalatok gyűjtése, egyes háromszögek tulajdonságainak meghatározásából, következtetés a hasonló háromszögek tulajdonságaira, igaz-hamis állítások, geometriai összefüggések alkalmazása a szerkesztéseknél, geometriai jelrendszer használata. *Kommunikációs képesség, szövegértés:* összefüggések felismerése szövegből, illetve összefüggések pontos, szabatos megfogalmazása, szöveg alapján rajzkészítés.

AJÁNLÁS

Az órákon vegyesen alkalmazzuk az egyéni, frontális és csoportmunkát, valamint a kooperatív tanulási módszereket. A munkaformák szervezése főként kooperatív legyen, így tanulóink elsajátíthatják a megfelelő együttműködési szabályokat. Ezzel szociális készségeik is fejlődnek. A csoportokban kb. négyen dolgozzanak, gondoskodjunk a kényelmes elhelyezkedésről, emellett a táblát is jól kell látnia minden tanulónak. A csoportmunkában fontos az egymás véleményének tiszteletben tartása, a másik fél türelmes meghallgatása, a vita pozitív menete. Nélkülözhetetlen – főleg az új fogalmak megismerése során – a tapasztalatszerzés, az észrevételek megfogalmazása. Ugyanakkor elengedhetetlen a pontosítás, ezt a legtöbb esetben frontálisan tehetjük meg.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Feladatlapok, feladatgyűjtemény, geometriai eszközök.

ÉRTÉKELÉS

A csoportok munkáját folyamatosan ellenőriznünk és értékelnünk kell. Ha szükséges segítsünk, és feltétlenül pontosítsunk. Igyekezzünk pozitívan értékelni, ne vegye kedvét tanulóinknak a hibázás lehetősége, mindig érezniük kell, hogy a hiba önmagában nem feltétlenül jelent bajt. Nagyobb problémát okoz, ha nem vagyunk hajlandóak észrevenni és kijavítani hibáinkat. Ugyanakkor követeljük meg a pontos, igényes, fegyelmezett munkavégzést. Az egyéni munkavégzést is értékeljük legalább szóban. A hiányosságok pótlására feltétlenül differenciáljuk, a házi feladatok kiadásánál is figyeljünk az egyéni igényekre.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. Tengelyesen szimmetrikus háromszögek és négyszögek tulajdonságai			
1.	Bemelegítés: A háromszögek tulajdonságai (füllentős; ellenőrzés párban)	Megfigyelő és rendszerező képesség, megfigyelőképesség.	1. feladatlap 1.-4. feladat, 3. tanári melléklet
2.	A háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenség (feladatküldés vagy staféta játék)	Becslés, mérés, rajzkészség, szerkesztési készség, következtetések.	Méretre vágott szívószálak, körző, vonalzó, írólap, színesek, labda vagy babzsák, 1. feladatlap 5. feladat
3.	Szimmetrikus négyszögek (a deltoid és a szimmetrikus trapéz tulajdonságai)	Rendszerező képesség, Induktív gondolkodás.	1. tanári melléklet: definíciókártyák, 2. feladatlap 1., 2. feladat, írólap, olló, ragasztó, vonalzó, A4-es papír, papírkorongok, színesek.

II. Háromszögek szerkesztése			
1.	Háromszögek szerkesztése három oldalból	Becslés, mérés, rajzkészség, szerkesztési készség.	Körző, vonalzó, 2. feladatlap 3., 4. feladat
2.	A szerkesztő játék szabályai	Becslés, mérés, rajzkészség, szerkesztési készség.	Körző, vonalzó, 2. tanári melléklet
3.	A szerkesztő játék végrehajtása	Induktív, deduktív következtetés, rajzkészség, szerkesztési készség.	Körző, vonalzó
4.	Háromszögek szerkesztése szögmásolással, szögméréssel, szög szerkesztésével (ellenőrzés párban)	Induktív, deduktív következtetés, rajzkészség, szerkesztési készség.	Körző, vonalzó, 3. feladatlap

III. Tükrös négyszögek szerkesztése (szimmetrikus trapéz, deltoid)			
1.	Bemelegítés: A szimmetrikus négyszögek (staféta játék vagy feladatküldés)	Deduktív, induktív következtetés, rendszerező képesség.	Labda vagy babzsák
2.	Szimmetrikus négyszögek származtatása háromszögekből	Rendszerező képesség, megfigyelő képesség.	Körző, vonalzó, 4. feladatlap
3.	Szimmetrikus trapéz és deltoid szerkesztése	Rajzkészség, szerkesztési készség.	Körző, vonalzó, 5. feladatlap

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Tengelyesen szimmetrikus háromszögek és négyszögek tulajdonságai

1. Bemelegítés: A háromszögek tulajdonságai

A háromszögekkel, ezen belül a szimmetrikus háromszögekkel kapcsolatos ismeretek felelevenítése megtörtént az előző 0663 modulban, így ennek az órának az elején már bátran alkalmazhatjuk őket.
A bemelegítés során lassabban haladó osztályokban játékos gyakorlással feleleveníthetjük a tengelyesen szimmetrikus háromszögekről tanultakat. A füllentős játék során minden csoport megfogalmaz két igaz és egy hamis állítást ezekkel kapcsolatban. Valamelyik csoport felolvassa állításait, a többi csoportnak ki kell találni, melyik állítás volt a hamis. Együtt döntik el a csoport tagjai a jó megoldást, és egy papírra felírják a megfelelő állítás sorszámát. Amikor mindenki kész van, kérésre felmutatják választásukat, az állításokat felolvasó csoport pedig megmondja a helyes megoldást. Ugyanígy járjunk el minden csoport esetében. Minden helyes választásért pont jár, a legtöbb pontot elérőket jutalmazzuk. Ezután gyakorlásként az 1. feladatlap 1.-4. feladatát oldják meg! Gyorsabban haladó osztályokban kihagyhatjuk a fenti gyakorlást, de az 1. feladatlap feladatait, vagy azok közül választva néhányat, oldjuk meg. A feladatok megoldását az „ellenőrzés párban” módszerrel hajtsák végre. A megoldáshoz adjuk meg az időkeretet, ami jelen esetben maximum 10 perc.

Az 1. feladatlap 1. feladatához használandó a 3. tanári melléklet tulajdonságokat tartalmazó papírcsíkjai. Minden csoport kapjon 1 készletet!

1. FELADATLAP

1. A tanártól a következő feliratú papírcsíkokat kapjátok:

a háromszögnek van szimmetriatengelye

a háromszögnek van két egyenlő oldala

a háromszögnek van két egyenlő szöge

a háromszög minden magasságvonala egybeesik egy szögfelezővel

a háromszögnek három szimmetriatengelye van

a háromszögnek nincs szimmetriatengelye

a háromszögnek van olyan súlyvonala, amely merőlegesen felezi az oldalt

a háromszög egyik magassága sem felezi a megfelelő oldalt

Válasszatok ki két tulajdonságot úgy, hogy ha az egyik elé a „ha”, a másik elé az „akkor” szót tesszük, akkor biztosan igaz állítást kapjunk!

Írjatok le a füzetetekbe ezekből néhányat!
Példák igaz állításokra:
Ha a háromszögnek van szimmetriatengelye, akkor a háromszögnek van két egyenlő oldala.
Ha a háromszögnek három szimmetriatengelye van, akkor a háromszög minden magasságvonala egybeesik egy szögfelezővel.
Ha a háromszög egyik magassága sem felezi a megfelelő oldalt, akkor a háromszögnek nincs szimmetriatengelye.
Ha a háromszögnek van két egyenlő oldala, akkor a háromszögnek van két egyenlő szöge.
Ha a háromszögnek van olyan súlyvonala, amely merőlegesen felezi az oldalt, akkor a háromszögnek van szimmetriatengelye.

2. Igaz vagy hamis állítások-e az alábbi meghatározások? Válaszodat indokold!
a) Egy háromszögnek nem lehet két derékszöge.
Igaz, mert két derékszög összege 180°.
b) Minden háromszögnek van két hegyesszöge.
Igaz, mert egy háromszögnek legfeljebb egy derék-, illetve tompaszöge lehet.
c) A hegyesszögű háromszög minden külső szöge hegyesszög.
Hamis, mert a belső és a mellette lévő külső szög összege 180°, ezért hegyesszög külső szöge csak tompaszög lehet.
d) A derékszögű háromszög hegyesszögeinek az összege az egyenesszög fele.
Igaz, mert a két hegyesszög összege 90°.
e) A tompaszögű háromszögnek lehet derékszöge.
Hamis, mert a belső szögek összege 180°, így csak hegyesszöge lehet.

3. Mekkorák a szimmetrikus háromszög belső szögei, ha
a) alapon fekvő szöge 44°? 44°; 44°; 92°
b) szárszöge 57°? 61,5°; 61,5°; 57°
c) az alapon fekvő szöge fele a szárszögének? 45°; 45°; 90°

4. Az alábbi feladatokat szögmérő használata nélkül oldd meg!
a) Szerkessz 60°-os szögből kiindulva 30°, 75°, 150°, 240° nagyságú szöget!
b) Szerkeszd meg a 90° negyedét! 22,5°
c) Szerkeszd meg a 120° ötnegyedét! 150°

5.
a) Hányféle háromszöget tudsz kialakítani a kapott, különböző méretű szívószálakból? Melyik három darabból nem készíthető háromszög?
b) Szerkeszd meg a különböző oldalú háromszögek közül a kisebb kerületűt!
a) Nem alkot háromszöget: 348; 347; 337; 338; 448..
Háromszöget alkot: 378; 478; 333; 334; 344; 377; 388; 444; 447; 477; 488; 777; 778; 788; 888.
b) Kettő olyan háromszög van, amelyeknek mindhárom oldala különböző, ezek kerülete 18 cm és 19 cm.
A kisebb kerületű adatai: 3 cm, 7 cm és 8 cm.

ÖSSZEGZÉS:

A háromszög egyenlőtlenség
A háromszög bármely két oldalának összege mindig nagyobb, mint a harmadik oldal.

2. A háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenség

Ezután kérdezzük meg, vajon bármilyen három hosszúság adatból szerkeszthető-e háromszög! Erre érkeznek különböző tippek: igen, nem, nem biztos. Hogy el tudjuk dönteni, kinek van igaza, osszunk minden csoportnak különböző méretű, és színű szívószálakat: 12 db 3 cm-eset, 12 db 4 cm-eset, 12 db 7 cm-eset és 12 db 8 cm-eset, a szívószálak összefűzéséhez pedig fonalat! Az azonos méretű szívószálak azonos színűek, a különböző méretűek különböző színűek legyenek! Oldják meg a csoportok a 1. feladatlap 5. feladatát! Hallgassuk meg a csoportok véleményét! Pontosítsuk az észrevételeket, amennyiben szükséges!
Folytatásként a „feladatküldés” módszerével gyakoroltassuk a háromszög egyenlőtlenséget! A csoportok adjanak meg három tetszőleges hosszúság adatot, majd jelöljék ki (esetleg a tanár válassza ki), melyik csoport milyen jelű (A,B,C,D) tanulójának kell megmondania, szerkeszthető-e háromszög az elhangzott három adatból, avagy nem! Ezután ez a csoport is mond három adatot, és ismét megadjuk ki válaszoljon, és így tovább! Az osztálytól függően alkalmazhatjuk a staféta játékot is, amikor körben állnak és agy labda vagy babzsák egymásnak dobásával történik meg a kijelölés. A játék ne legyen hosszú, mert akkor unalmassá válik, 4-5 perc elegendő! Figyeljünk arra, hogy lehetőleg mindenkire sor kerüljön, legalább egyszer!

3. Szimmetrikus négyszögek (a deltoid és a szimmetrikus trapéz tulajdonságai)

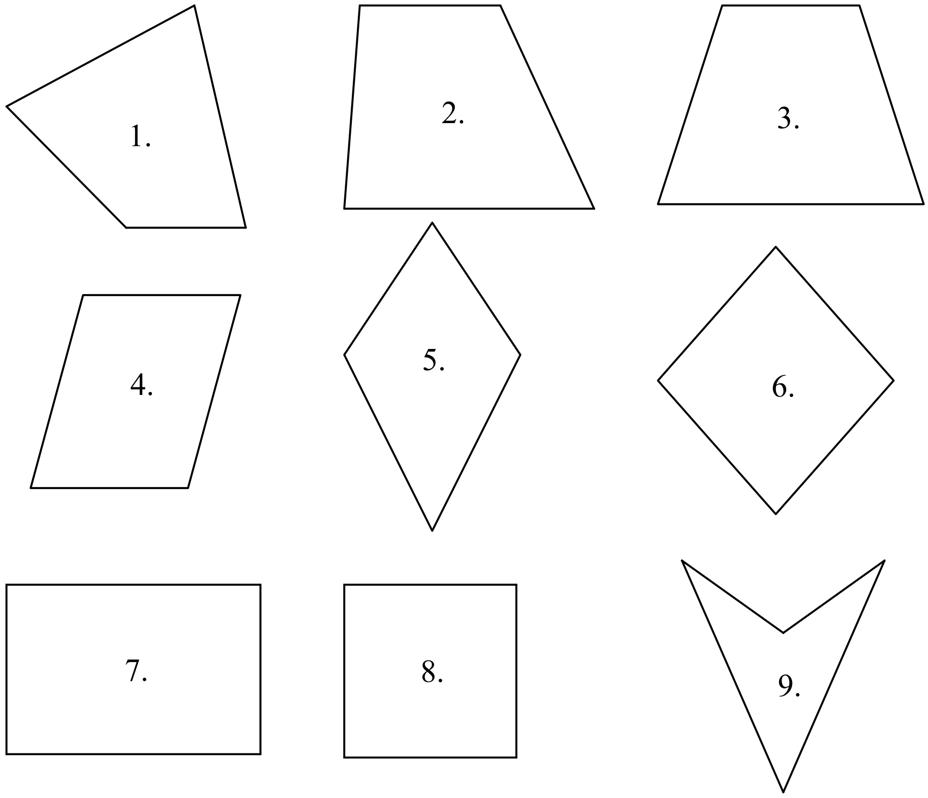
Az óra következő részében felelevenítjük a szimmetrikus négyszögekről tanultakat. A feladatot a 2. feladatlap 1. feladata tartalmazza. A csoporton belül párban dolgozzanak, az egyik páros a I. szerint, a másik páros a II. szempont szerint végezze el a csoportosítást! Ha szükséges, segítsünk a csoportoknak abban, hogy milyen halmazábrával dolgozzanak! A feladatban szereplő négyszögek: 1. – négyszög; 2. – trapéz; 3. – szimmetrikus trapéz; 4. – paralelogramma; 5. – konvex deltoid; 6. – rombusz; 7. – téglalap; 8. – négyzet; 9. – konkáv deltoid. Amikor kész vannak, a csoportokon belül a párok beszéljék meg megoldásaikat, majd közösen is tegyük ezt meg!
Térjünk ki a konvex és a konkáv deltoidra! Fogalmazzák meg miben különböznek ezek egymástól! Fogalmazzuk meg tanulóink bevonásával a konvex és a konkáv (nem konvex) szó jelentését! Írják a megfelelő rajzhoz a megfelelő elnevezést! (konvex deltoid: 5; 6; 8. konkáv deltoid: 9.)
Kérjük meg a csoportokat, hogy a saját füzetükben lássák el a megfelelő névvel az egyes halmazokat (A: négyszög; B: trapéz; C: deltoid; $B \cap C$: rombusz; D: szimmetrikus négyszög; E: deltoid; F: szimmetrikus trapéz, $E \cap F$: négyzet)! Használhatják a definíciókártyákat (1. tanári melléklet). Említsük meg, hogy szimmetrikus trapéz olyan trapéz, amelynek oldalai ugyanazon kör húrjai vagy olyan trapéz, amelynek van csúcson át nem menő szimmetriatengelye.

2. FELADATLAP

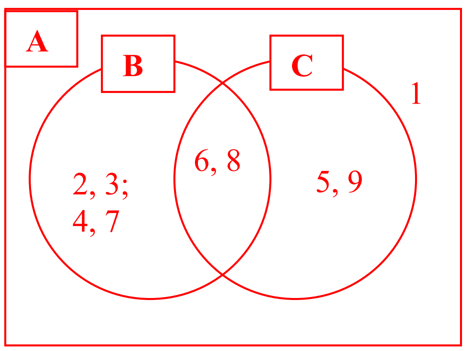
1. Csoportosítsátok az alábbi négyszögeket a megadott szempontok szerint, külön-külön az I.-es illetve II-es feladatban! Készítsetek halmazábrát! Írjátok be az egyes négyszögek számait a megfelelő helyre! Nevezzétek meg az egyes csoportokat!

I. ***A*:** négy oldala van   ***B*:** van párhuzamos oldalpárja
C: van csúcson átmenő szimmetriatengelye

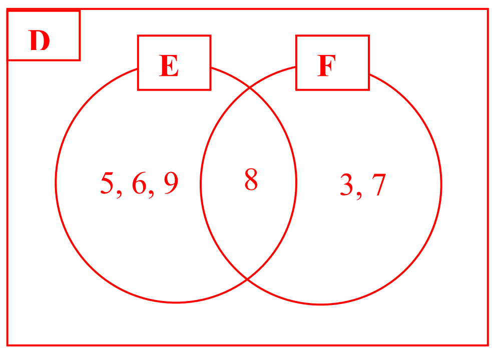
II. ***D***: van szimmetriatengelye ***E***: van csúcson átmenő szimmetriatengelye
F: szimmetriatengelye merőlegesen felezi az oldalakat



I.



II.

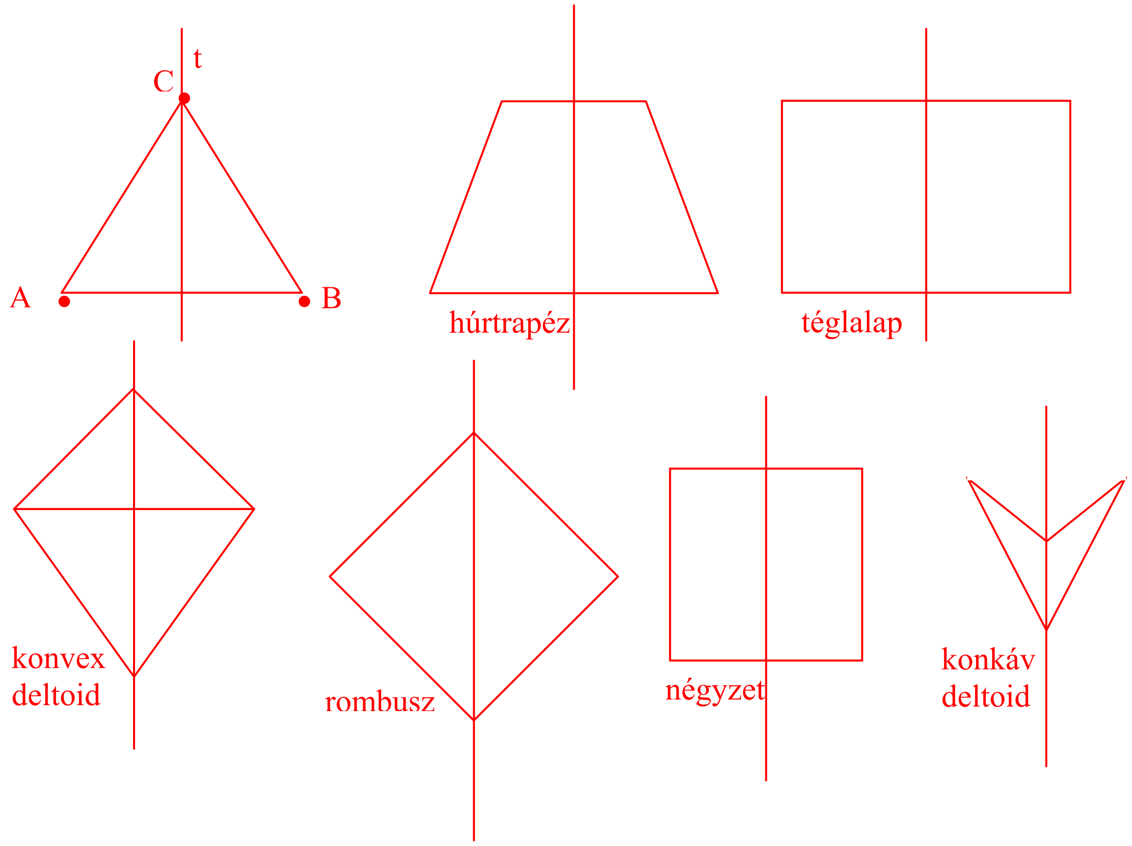


A húrtrapéz esetében próbáljanak visszaemlékezni a csoportok, miért ez az elnevezés! Ha elegendő időnk van, akkor is megbeszélhetjük az előzőeket, ha a gyerekekben nem vetődik fel ez a kérdés. Segíthetjük a visszaemlékezést egy kör és egy sáv egymásra helyezésével. Heti 3 óránál magasabb óraszám estén meg is szerkeszthetik a kör középpontját két húrfelező merőleges segítségével.

Ezután foglalkozzunk a szimmetrikus négyszögekkel! Tegyünk fel kérdéseket ezekkel kapcsolatban! Például:
Mivel esik egybe a deltoidok szimmetriatengelye? (átló-szimmetriaátló)
Mivel esik egybe a szimmetrikus trapéz szimmetriatengelye? (az alap felezőmerőlegese)
Milyen négyszögek kerültek a D és az E közös részébe? (négyzet)

Keress olyan négyszögeket, amelyeknek több tükörtengelyük van! (rombusz, téglalap, négyzet)
A szimmetrikus háromszögek és négyszögek vizsgálatához használjuk a 2. feladatlap 2. és 3. feladatát! A 2. feladat a) részét először eszköz segítségével oldják meg! Osszunk ki ehhez A4-es papírt, melyre rajzoljanak egy egyenest, ez lesz a szimmetriatengely, ezen kívül 4-4 db papírkorongot, ezek lesznek a „pontok”! Amikor sikerült az eszköz segítségével létrehozniuk egy-egy megoldást, rajzolják le a füzetükbe is! A csoportokon belül együtt oldják meg a feladatot az eszközzel, de mindenki a saját füzetében rajzol!

2.
a) Rajzolj egy egyenest! Keress három, illetve négy olyan pontot, melyek a megadott egyeneshez képest szimmetrikusan helyezkednek el, és semelyik három pont nincs egy egyenesen! Hányféle megoldást találtál? Kösd össze a négy pontot, és nevezd meg az így létrejött négyszögeket!



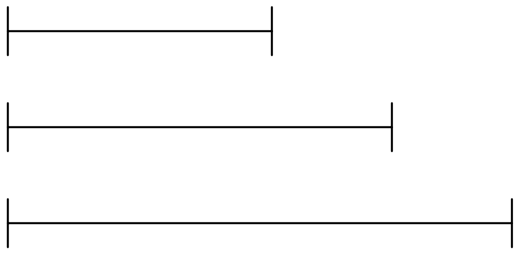
b) Keressetek egyenlő szakaszokat és egyenlő szögeket a szimmetrikus négyszögeken, jelöljétek is meg azokat! Ezek alapján soroljátok fel ezeknek a négyszögeknek a tulajdonságait!

3. Rajzolj egy téglalapot és egy négyzetet, rajzold meg az átlóikat is! Igazold, hogy mindkettő szimmetrikus trapéz! Hány szimmetriatengelyük van? Jelöld ezeket is!
A téglalapnak két szimmetriatengelye van, a négyzetnek négy. Mindkettő szimmetrikus trapéz, mert van párhuzamos oldalpárjuk, és ezek oldalfelező merőlegese egyben a szimmetriatengely.

4. Szerkessz háromszöget, ha oldalainak hossza
a) 4 cm, 5 cm, 6 cm; hegyesszögű

b) 4,5 cm, 6 cm, 7,5 cm; derékszögű
c) 7 cm, 4 cm, 4,5 cm. tompaszögű
Milyen háromszögeket kaptál az egyes esetekben?

5. Szerkeszd meg a háromszöget, ha adott három oldalának a hossza!



A tanult lépések elvégzésével, körzőnyílásba véve a megfelelő szakaszokat, megszerkesztjük a háromszöget.

Amikor kész vannak a csoportok, beszéljük meg a szimmetrikus négyszögek fajtáinak tulajdonságait, egyeztessük, melyik csoport, milyen tulajdonságokat talált! Emeljük ki, hogy a deltoidok lehetnek konvexek, illetve konkávok is!

Feladatgyűjtemény: 1–8. és 19–25. feladat

II. Háromszögek szerkesztése

1. Háromszögek szerkesztése három oldalból

Az órát indíthatjuk három oldalával megadott háromszögek szerkesztésével 2. feladatlap 4. és 5. feladat), hiszen ilyen szerkesztéseket már 5. osztályban végeztünk. Gyorsabban haladó osztályokban rögtön rátérhetünk a szerkesztő játékra.

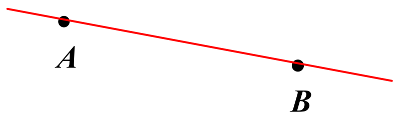
2. A szerkesztő játék szabályai

Eddigi tanulmányaink során már találkoztunk különböző szerkesztési feladatokkal. Mostani feladatunk az, hogy szerkesztéseink minél pontosabbak legyenek, és valóban egy-egy szerkesztés során csak az „euklideszi lépéseket” alkalmazzuk. Ahhoz, hogy megértsék és elfogadják az euklideszi szerkesztést, nagyon fontos, hogy megtapasztalják, mit is jelentenek az egyes lépések. Ezért az első órát érdemes ennek a feladatnak szentelni, ehhez kínálunk egy lehetőséget.
Ezen az órán a szerkesztést, mint egy játékot fogjuk kezelni, melyet az osztály együtt játszik el. Először beszéljük meg, mi szükséges ahhoz, hogy együtt játszhassunk! Szükségünk van eszközre és szabályra, ami alapján játszani tudunk. Eszközeink a körző és a vonalzó, a szabályokat pedig együtt beszéljük meg! Szemléltetésként rendelkezésünkre állnak a mobil körök és egyenesek (2. tanári melléklet). A kivetítéshez szükségünk lesz írásvetítőre az aktuális lépés kiindulásának kivetítéséhez. Mobil köreink írásvetítőhöz fóliára, táblai applikációhoz A4-es pausz papírra készüljenek.
Egy készlet tartalmazzon 2, 3, 4, 5, 6, 7 cm sugarú köröket, mind különböző színű fóliából készüljön, a középpont feketével legyen jelölve, mert e körök, mint ponthalmazok kerülnek bevetésre, és ehhez a középpont nem tartozik hozzá, az elhelyezéshez viszont szükséges. Szükséges még 5 db 20 cm hosszú, 4 cm széles fóliacsík, melyre egy-egy egyenes van rajzolva. Ezeket egymásra helyezve mozgatjuk a lehetséges helyzetek vizsgálatához.

A gyerekeknek is legyen saját készletük, melyet előre elkészítettek másolópapírra, és a füzetük borítólapjának belső oldalára ragasztott borítékban tárolnak. A körök mérete itt is 2, 3, 4, 5, 6, 7 cm legyen!
A táblai applikációhoz készült körök sugara tízszerese a készletben megadott méretekének.
Hallgassuk meg a gyerekek ötleteit a végrehajtható szerkesztési lépésekkel kapcsolatban, majd pontosítsuk, egészítsük ki azokat!

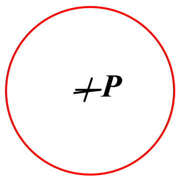
Az euklideszi szerkesztés lépései

1. Két pont összekötő egyenesét megrajzolhatjuk vonalzóval.

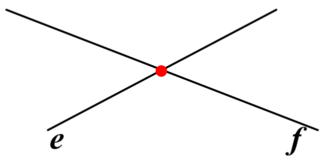


2. Két adott pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.

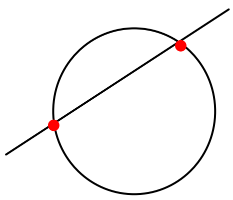
3. Adott pont körül adott körzőnyílással kört rajzolhatunk.



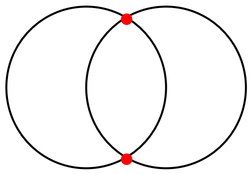
4. Két metsző egyenes metszéspontját megkereshetjük.



5. Ha egy kör és egy egyenes metszi egymást, akkor mindkét metszéspontjukat megkereshetjük.

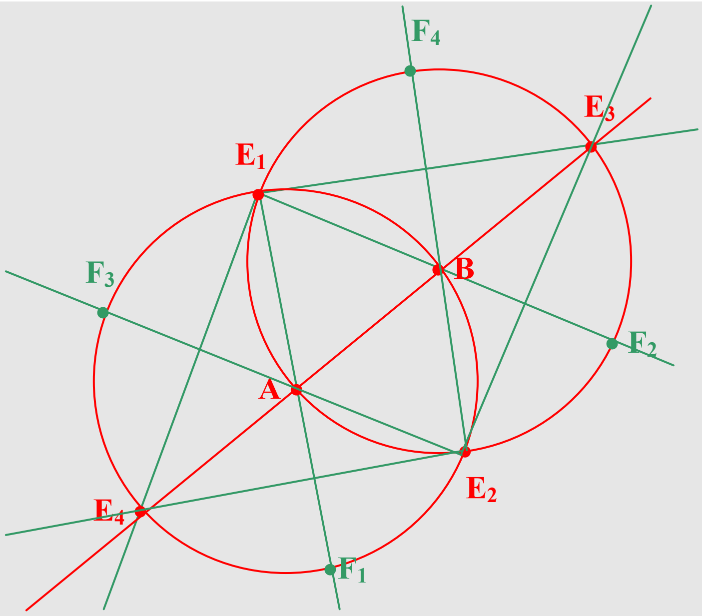


6. Ha két kör metszi egymást, akkor mindkét metszéspontjukat megkereshetjük.



3. A szerkesztő játék végrehajtása

Miután megbeszéltük az euklideszi szerkesztést, tegyük fel a kérdést, hogyan használhatjuk fel ezeket a lépéseket összetettebb szerkesztéseknél, hogyan lesz ezekből a lépésekből, például sokszög szerkesztése!
Helyezzünk a táblára egy ív csomagolópapírt, -ha fehér tábla van, akkor ez nem kell – és ezen a világos felületen dolgozzunk, a gyerekek pedig a saját füzetükben! Segítségül továbbra is használjuk az írásvetítőn kivetítve a mobil köröket és egyeneseket, a tanulók pedig a munkafüzetben megtalálható euklideszi szerkesztési lépéseket figyelhetik! A szerkesztő játék, lényege, hogy a megadott helyzetből kiindulva a gyerekek jöjjenek rá, mely pontok megszerkesztése adódik a megengedett lépések alkalmazásával!
Induljunk ki két adott pontból: *A* és *B*! Mely pontokat tudjuk ezekből megszerkeszteni a szabályaink szerint? Megrajzolhatjuk az *A* középű és a *B* középű *AB* sugarú köröket, és az *AB* egyenesét. Ezek metszéspontjait tudjuk megszerkeszteni a szabályaink szerint. Feltesszük. a megfelelő köröket és egyenest az írásvetítőre úgy, hogy a táblán a gyerekek által rendelt helyzet alakuljon ki, majd berajzoljuk a táblai ábrán a kapott pontokat: E_1, E_2, E_3, E_4, végül lekapcsolja az írásvetítőt! Látjuk az eredeti *A* és *B* pontok mellett az első lépésben megszerkesztett *E* jelű pontokat.
Mely pontokat tudjuk ezekből megszerkeszteni? Próbáljuk meg, rendszerezve összeszedni az összest!
Kezdjük az egyenesekkel! Bármelyik két ponton át lehet egyenest fektetni, ebből néhány megegyezik, mert az *AB*-n 4 pont van, nincs rajta az E_1, E_2, ezek közül kiválasztjuk az E_1-et és a többivel összekötjük.
Feltesszük az írásvetítőn a mondott egyeneseket, közösen bejelöljük az újonnan szerkesztett pontokat (melyek a körök és egyenesek metszéspontjaiként adódnak): F_1, F_2, majd megismétlik az eljárást E_2-vel: F_3, F_4 – az F jelű pontokhoz új színt használjunk, hogy lássuk, ezek a pontok a második lépésben keletkeztek.
Az E_1 –ből és az E_2 –ből indított egyeneseknek egymással is vannak további metszéspontjaik összesen 4 db (párhuzamos párok vannak közöttük, ezért nem jön létre a 8 egyenes által előállítható maximális számú pont).
Az egyenesekkel készen vagyunk, jöhetnek a körök!…
Addig folytassuk, amíg látják tanítványaink, hogy „nagyon sok” pontot tudunk megszerkeszteni két adott pontból! Fontos, hogy érezzük, az ún. euklideszi szerkesztés nem a körzőhasználattól az ami, hanem a szabályainktól! Attól, hogy alkalmasan választott körök és/vagy egyenesek metszéspontjait tekintjük megszerkesztettnek. A körzőt és vonalzót tehát nem használhatjuk akárhogyan.



Jó, ha a megszerkesztett pontok tulajdonságaira is rákérdezünk! Például, egy körvonal pontjai a középponttól adott távolságra vannak, ezért két kör metszéspontjáról tudjuk, hogy milyen messze van az egyik kör középpontjától, s milyen messze van a másikétól. Fogalmaztassuk is meg a gyerekekkel az ilyen tulajdonságokat, hiszen éppen ezek alapján fogjuk majd szerkeszteni a pontokat!

A hátralévő időben beszéljük meg a gyerekekkel, hogy az euklideszi szerkesztés lépéseit már eddig is használtuk egyszerű szerkesztésekben:

Szakaszmásolás;

Szögmásolás;

Szakasz felezőpontjának és felezőmerőlegesének szerkesztése;

Adott pontból adott egyenesre állított merőleges egyenes szerkesztése;

Adott ponton áthaladó adott egyenessel párhuzamos egyenes szerkesztése;

Kör érintőjének szerkesztése adott érintési pont esetén.

Említsük meg, hogy voltak olyan „szerkesztések”, melyeknél megengedtünk egyszerűsítő lépéseket, például merőlegesek egyenesek rajzolása derékszögű vonalzó segítségével, de továbbra is a szerkesztés az euklideszi szerkesztést fogja jelenteni!
Amennyiben szükséges (lassabban haladó csoportokban), és van időnk rá, végezzék el tanulóink a füzetükben ezeket az alapszerkesztéseket, frontálisan beszéljük is meg a szerkesztések menetét! Idő hiányában adjuk fel házi feladatnak, ez esetben viszont a következő óra elején ellenőrizzük munkájukat!

4. Háromszögek szerkesztése szögmásolással, szögméréssel, szög szerkesztésével

A hátralévő időben háromszögszerkesztéseken keresztül gyakoroljuk az euklideszi szerkesztést, de most már nemcsak oldalt, hanem szögeket is megadunk. Az előző órákon már megtanultuk a szögmásolást és a szögek szerkesztését, most ezeket az ismereteinket kamatoztathatjuk.

A szerkesztési feladatoknál nagyon fontos, hogy át tudjuk gondolni a szerkesztés menetét, értsük, és pontosan lássuk, mit, miért hajtunk végre. Ezért nagyon fontos a vázlat megléte, hiszen ebben tervezzük meg a szerkesztés menetét. Szintén lényeges, hogy tanulóink valóban az euklideszi lépéseket alkalmazzák.
A bemelegítő, legegyszerűbb szerkesztési feladatok (3. feladatlap 1.-5. feladat) alkalmasak a matematikai nyelvhasználat fejlesztésére, és a szerkesztés lépéseinek begyakorlására. Az első feladathoz a szerkesztés menetét részletesen leírtuk, ez a tanulói munkafüzetben is megjelenik. Először készítsünk színes vázlatot! Jelöljük a vázlaton pirossal azokat az adatokat, melyeket a szöveg megadott, majd sárgával), és a szerkesztésben fel fogunk használni! (Így az ábrán sárgával jelennek meg az azokat, melyeket ismereteink segítségével mi kikövetkeztetünk (amennyiben van ilyen adottakkal összefüggő adatok. Ez fontos szemléletalakító hatású.) Érdemes a szerkesztés lépéseinek sorrendjét is jelölni a vázlaton, és leírni őket szavakkal. Az első feladatnál még nincs szükség összefüggés alkalmazására, a második feladatnál már igen, erre feltétlenül hívjuk fel a figyelmet!
A 4. feladatnál két megoldás lehetséges, ennek felismerését a gyorsabban haladóktól várjuk el, közösen is beszéljük meg! Az 5. feladatot is inkább gyorsabban haladók oldják meg! Ismét dolgozhatnak az „ellenőrzés párban” módszerrel.

3. FELADATLAP

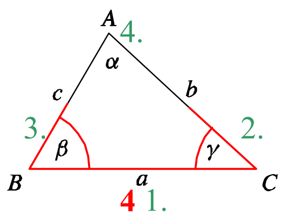
1. Szerkessz háromszöget, ha egyik oldala 4 cm a rajta lévő két szög 60°és 30°! Készíts vázlatot!

A szerkesztés menete
Először készíts színes vázlatot az elemzéshez! Jelöld a vázlaton pirossal azokat az adatokat, melyeket a szöveg megadott, majd sárgával azokat, melyeket ismereteink segítségével mi kikövetkeztetünk, és a szerkesztésben fel fogunk használni! Jelöld a szerkesztés lépéseinek sorrendjét a vázlaton, és írd is le a lépéseket szavakkal.

Adatok
$a = 4$ cm
$\beta = 60°$
$\gamma = 30°$

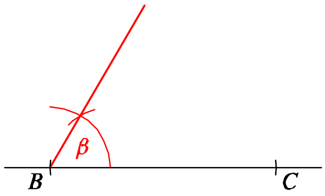
Összefüggések

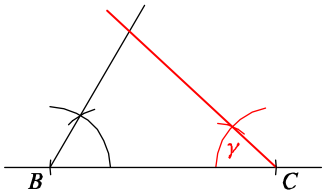
Vázlat



A szerkesztés lépései

1. Felveszek egy 4 cm hosszúságú szakaszt.
2. A szakasz egyik végpontjához megszerkesztem a 60°-os, a másik végpontjához a 30°-os szöget.
3. A két szögszár metszéspontja lesz a háromszög harmadik csúcsa.





2. Szerkessz egyenlőszárú háromszöget, ha alapja 4,5 cm, az alapon fekvő szöge 75°! Készíts vázlatot!

A szerkesztés menete megegyezik az 1. feladatnál leírtakkal, de itt már felhasználjuk az egyenlőszárú háromszög szögeivel kapcsolatos ismereteket. Hívjuk fel a figyelmet arra, hogy az adatok lejegyzése mellett szükséges lejegyezni azt az összefüggést, miszerint az alapon lévő szögek megegyeznek!

Adatok

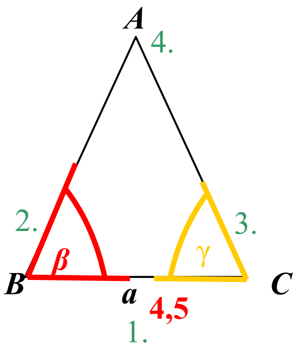
$a = 4{,}5$ cm

$\beta = 75°$

Összefüggések

$\beta = \gamma = 75°$

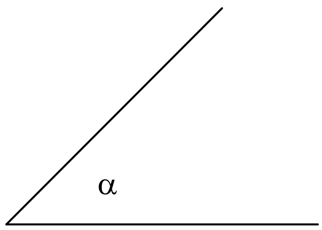
Vázlat



A szerkesztés lépései

1. Felveszem az *a* oldalt.
2. Az *a* oldalra *B* csúccsal megszerkesztem a 75°-os szöget.
3. Ugyanezt a *C* csúcshoz is.
4. A két szögszár metszéspontja adja az *A* csúcsot.

3. Adott egy α szög. Szerkessz derékszögű háromszöget, ha egyik befogója 45 mm és a befogón fekvő egyik szög az adott szög!

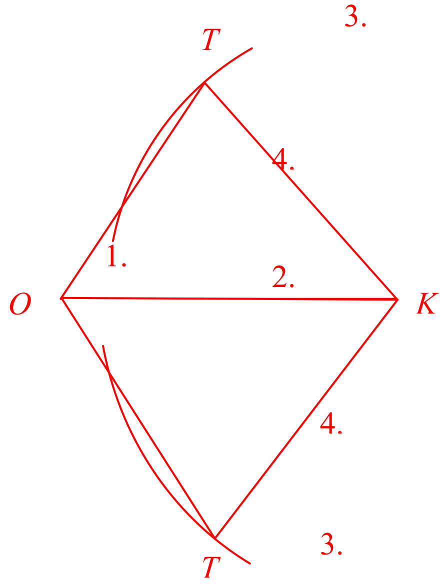


Felvesszük a 45 mm-es befogót (*CA*), egyik végpontjában 90°-os szöget szerkesztünk, a másikban pedig az adott szöget másoljuk a befogóra. A két szög szárának metszéspontja adja a háromszög harmadik csúcsát, *B*-t.

4. Szerkessz egyenlőszárú háromszöget, amelynek
a) egyik oldala 5 cm és a rajta lévő szög 45°;
b) egyik oldala 6 cm és a rajta lévő szög 60°!
Szerkeszd meg a háromszögek szimmetriatengelyeit! Készíts vázlatot!

a) I. megoldás
Felvesszük az 5 cm alapot, és a szakasz mindkét végpontjában megszerkesztjük a megadott szöget. Ahol a két szögszár metszi egymást, ott lesz a harmadik csúcs.
II. megoldás
Felvesszük az 5 cm-es szárat, egyik végpontjában megszerkesztjük a megadott szöget. A másik végpont köré, mint középpont köré rajzolt 5 cm sugarú körívvel elmetsszük a megszerkesztett szög másik szárát. Ez a metszéspont lesz a harmadik csúcs.
b) Egyenlő oldalú háromszög a megoldás.

5. A 6. b. osztály az erdei iskolában az egyik napon tájékozódási versenyt tart. Útjuk során egy útelágazáshoz érkeznek, ahol megkapják a következő feladatot. Így hangzik:
A két ösvény, melyek találkozásánál álltok, 60°-os szöget zár be egymással. A keleti irányú ösvényen nem mehettek, mert az éjszakai vihar alámosta az utat, de el kell jutnotok a keleti irányban található, innen 3,5 km távolságra lévő kilátótoronyhoz. Induljatok el a másik erdei úton mindaddig, amíg ahhoz a turistaházhoz nem értek, ahonnan pontosan 5 km-es út vezet a kilátóhoz.
a) Szerkesszétek meg a turistaház helyét! A rajzon 1 km-nek 1 cm feleljen meg!
b) Hány km-t kell mennetek a turistaházig? Összesen mekkora utat fogtok megtenni a kilátóig?



a) Adatok
OK = 3,5 km
TK = 5 km
60°

Vázlat:

A szerkesztés lépései:
1. 60°-os szög szerkesztése
2. OK távolság felmérése cm-ben
3. K középpontú, 5 cm sugarú körív rajzolása. A körív és a szögszár közös pontjainak megjelölése
4. A háromszög oldalainak megrajzolása.
Két helyen lehet a turistaház.

Amikor minden csoportban, mindenki kész van, beszéljük meg a feladat megoldását, mondják el véleményüket a turistaház helyének egyértelműségéről! Ha nincs elegendő időnk, akkor a feladatok közül adjunk házi faladatnak is!

Feladatgyűjtemény: 9–18. feladat

III. Tükrös négyszögek szerkesztése (szimmetrikus trapéz és deltoid)

Az óra célja, hogy a négyszögek halmazán belül részletesebben tanulmányozzuk azokat, amelyek tengelyesen szimmetrikusak. Átismételjük tulajdonságaikat, megismerkedünk szerkesztésükkel.

1. Bemelegítés: A szimmetrikus négyszögek

A szimmetrikus négyszögekkel kapcsolatos tudnivalókat a modul 1. órájában már átismételtük, ezért most elegendő egy rövid felelevenítés is. A staféta játékhoz álljanak körbe, adjunk a kezdő játékosnak egy labdát, vagy egy babzsákot, mondjon egy állítást valamelyik szimmetrikus négyszögről! Akinek tovább dobja a labdát, meg kell mondania, hogy igaz vagy hamis volt-e az állítás! Ez a játékos ismét mond egy állítást, stb. A játékos ismétlés során lehetőleg minél több tanulóra kerüljön sor, de ne tartson tovább maximum 10 percnél! A játékot játszhatjuk a diákkvártett szabályai szerint is, vagy a feladatküldés módszerével, ekkor a tanár jelöli ki az állítást mondó, és a válaszoló személyét!

2. Szimmetrikus négyszögek származtatása háromszögekből

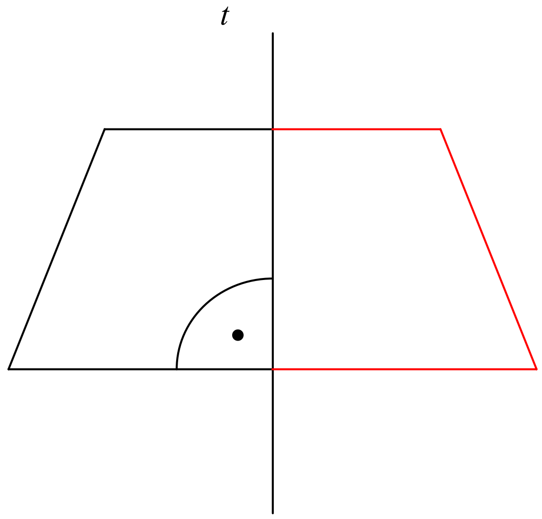
A következőkben szimmetrikus négyszögeket hozunk létre háromszögek tükrözésével a 4. feladatlap segítségével. Amennyiben takarékoskodni szeretnénk az idővel, rövidíthetjük a munkát úgy, hogy a csoporton belül mindenki csak egy feladatot old meg, és amikor készen vannak, majd ismertetik társakkal a megoldást. Frontálisan is beszéljük meg a megoldásokat!

4. FELADATLAP

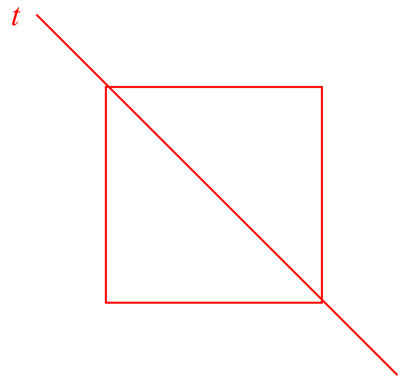
1. Szerkessz egyenlőszárú háromszöget, amelynek alapja 3 cm, szárai 5 cm-esek! Tükrözd a háromszöget az egyik szárának egyenesére! Milyen alakzatot kaptál? Deltoidot.

2. Szerkessz egyenlő oldalú háromszöget 3 cm-es oldalakkal! Tükrözd az egyik oldalának egyenesére! Milyen alakzatot kaptál? Rajzold meg az átlóit! Rombuszt.

3. Tükrözd a trapézt a megadott t egyenesre! Milyen alakzatot alkot az eredeti alakzat a tükörképével együtt? Szimmetrikus trapézt.



4. Rajzolj egyenlőszárú, derékszögű háromszöget, amelynek befogói 4 cm-esek! Tükrözd a háromszöget az átfogó egyenesére! Milyen alakzatot alkot az eredeti háromszög és a tükörképe együttesen? Négyzet.



3. Szimmetrikus trapéz és deltoid szerkesztése

Az óra hátralévő részében szerkesztési feladatokat oldjunk meg! Ehhez nyújt segítséget a 6. feladatlap és természetesen a feladatgyűjtemény. Az 1. feladat ad egy mintát a szerkesztés menetéhez, ennek meglétét a többi feladatnál is kérjük és ellenőrizzük! Az első négy feladat alapszerkesztéseket tartalmaz, amelyeknek egy megoldása van. Beszéljük meg, hogy hány adat szükséges egy tükrös négyszög megszerkesztéséhez! Három, de speciális esetben kettő (rombusz) illetve egy adat (négyzet) is elegendő lehet)!
Az 2. és az 6. feladatban megadott adatokkal már két megoldás lehetséges. A 7. feladat adatai pedig végtelen megoldást tesznek lehetővé. Feltétlenül elemezzük, miért! Amennyiben maradt időnk, illetve a gyorsabban haladóknak válogassunk a feladatgyűjtemény feladatai közül!

5. FELADATLAP

1. . Szerkessz szimmetrikus trapézt, amelynek egyik alapja 6 cm, az alapon lévő szöge 60°-os, szára 3,5 cm!

A szerkesztés menete

Először készíts színes vázlatot az elemzéshez! Jelöld a vázlaton pirossal azokat az adatokat, melyeket a szöveg megadott, majd sárgával azokat, melyeket ismereteink segítségével mi kikövetkeztetünk, és a szerkesztésben fel fogunk használni! Jelöld a szerkesztés lépéseinek sorrendjét a vázlaton, és írd is le a lépéseket szavakkal.

Adatok

AB = 6 cm

α = 60°

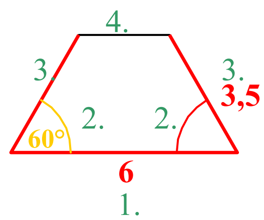
$AD = BC$ = 3,5 cm

Összefüggések

A trapéz alapon fekvő két-két szöge egyenlő.

A trapéz egy száron fekvő szögeinek összege 180°.

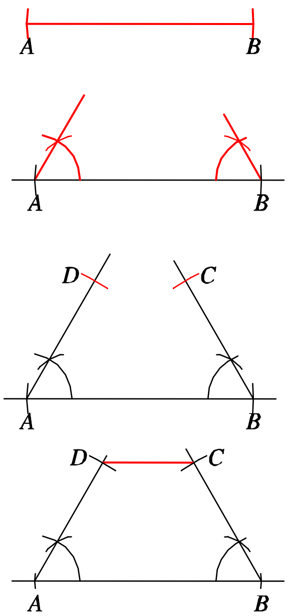
Vázlat



A szerkesztés lépései

1. Felvesszük az AB oldalt (5 cm).
2. Megszerkesztjük a 60°-os szöget, A illetve B csúccsal.
3. A szögszárakra felmérem az AD illetve BC oldal hosszát (3-3 cm).
4. Összekötjük a CD pontokat.

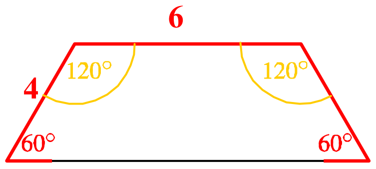
A szerkesztés menete

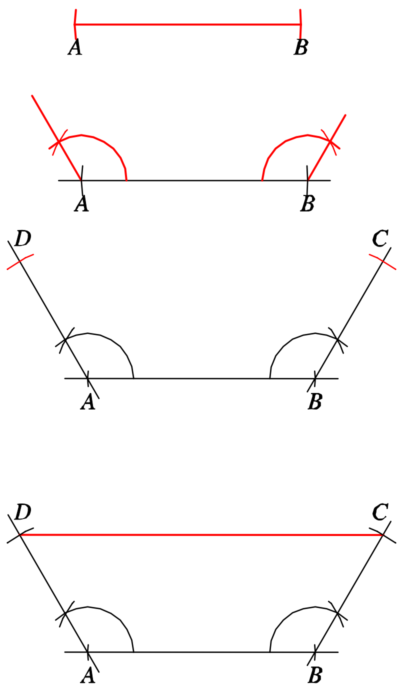


2. Szerkessz szimmetrikus trapézt, amelynek egyik alapja 6 cm, van 60°-os szöge, és szára 4 cm!

I. Az első megoldás megegyezik az 1. feladatnál leírtakkal.

II. A szerkesztés menete megegyezik a I.-ben leírtakkal, annyi különbséggel, hogy a 2. lépésben 120°-os szöget mérünk fel az *AB* szakasz két végpontjába.





3. Szerkessz deltoidot, ha oldalai 4 cm és 6 cm, az oldalak által bezárt szög 120°!
Felvesszük a 6 cm-es oldalt, rászerkesztjük a 120°-os szöget, majd a szögszárra felmérjük a 4 cm-t. Az így kapott csúcsból körzővel 4 cm sugarú körívet, a 6 cm-es szakasz végpontjából pedig 6 cm sugarú körívet rajzolunk. A két körív metszéspontja lesz a deltoid negyedik csúcsa.

4. Szerkessz rombuszt, ha oldala 4 cm, egyik szöge 30°!
A 4 cm-es szakasz felvétele után az egyik végpontba 30°-os, a másik végpontba 150°-os szöget szerkesztünk. A kapott szögszárakra felmérjük a 4- 4 cm-t, így megkapjuk a rombusz hiányzó két csúcsát.

5. Szerkessz négyzetet, ha átlója 5 cm!
Szerkesztünk két, egymásra merőleges egyenest, s a metszéspontjukból kiindulva felmérünk mind a négy irányba 2,5 cm-t. Az így kapott négy pont lesz a négyzet négy csúcsa.

6. A gyerekek a nyári táborban azt a feladatot kapják, hogy készítsenek papírsárkányt. Előtte viszont el kell készíteniük a kicsinyített modellt! Hogyan tudják ezt megtenni? Segíts nekik! Szerkeszd meg a papírsárkány tervét, ha tudjuk, hogy oldalai 35 cm illetve 50 cm-esek, az egyik merevítője 45 cm-es. Mekkora rúdra lesz szükségük, hogy mindkét merevítőre elég legyen? A rajzon 1 cm feleljen meg 10 cm-nek.

Deltoidot kell szerkeszteni, melynek adottak az oldalai és az egyik átlója. Két megoldás lehetséges, attól függően, hogy a szimmetriaátlót vagy a másik átlót tekintjük adottnak. A rajzon 1 cm feleljen meg 10 cm-nek.
I. megoldás: Ha nem a szimmetriaátló van megadva, akkor ebből az adatból (4,5 cm) kiindulva, mint közös alapra megszerkesztjük a két egyenlő szárú háromszöget. A szimmetriaátlót megmérve 7, 2 cm adódik, a másik átló 4,5 cm. Mindkét merevítő elkészítéséhez tehát 117 cm hosszú rúd szükséges.
II. megoldás: Ha a szimmetriaátló adott (4,5 cm), szintén ebből indulunk ki. Egyik végpontjából, mint középpont köré, mindkét oldalon 3,5 cm sugarú kört rajzolunk, a másik végpont köré 5 cm sugarú kört rajzolunk. A két-két különböző sugarú kör metszéspontja adja a deltoid egy-egy csúcsát. A szimmetriaátló 4,5 cm, a másik átlót megmérve 6,8 cm adódik. Mindkét merevítő elkészítéséhez tehát 113 cm hosszú rúd szükséges.

7. Szerkessz deltoidot, ha átlói 4 cm és 7 cm!
A megoldás nem egyértelmű. Mind a 4 cm-es, mind a 7 cm-es átló lehet szimmetriaátló, emiatt két megoldás lehet. Ugyanakkor kevés adat van megadva, így attól függően, hogy a szimmetriaátlót mely pontjában metszi a másik átló, a két megoldáson belül külön-külön végtelen további megoldások lehetnek.

Feladatgyűjtemény: 26–31. feladat

FELADATGYŰJTEMÉNY

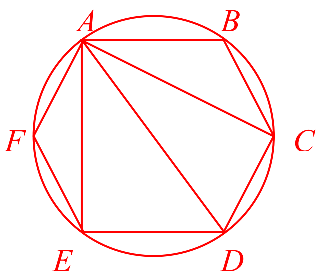
1. Melyik állítás igaz, melyik hamis?

A háromszög a legkisebb oldalszámú sokszög.	igaz
Van olyan háromszög, amelynek pontosan két szimmetriatengelye van.	hamis
Az egyenlő oldalú háromszög szimmetriatengelye egybeesik a szögfelezővel.	igaz
Létezik egyenlő szárú derékszögű háromszög.	igaz
A derékszögű háromszögben az átfogó rövidebb a befogónál.	hamis
Ha egy háromszögben van olyan szögfelező, amely merőlegesen felezi a szemközti oldalt, akkor a háromszög szimmetrikus.	igaz

2. Megadott szakaszokból lehet-e háromszöget szerkeszteni? Szerkeszd is meg a háromszöget!

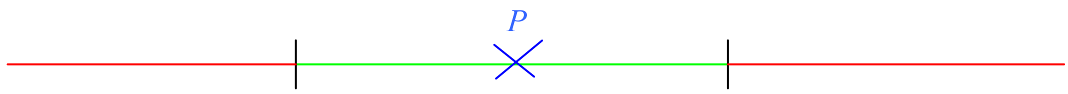
a) 3 cm, 4 cm, 5 cm	igen
b) 5 cm, 7 cm, 12 cm	nem
c) 2,5 cm, 5 cm, 9 cm	nem
d) 10 cm, 15 cm, 20 cm	igen

3. Szerkessz egy 3 cm sugarú körbe szabályos hatszöget! Jelölj ki egy csúcsát, és húzd meg az ebből a csúcsból kiinduló átlókat! A kapott háromszögek közül keress egyenlőszárú, derékszögű, tompaszögű, hegyesszögű háromszöget!

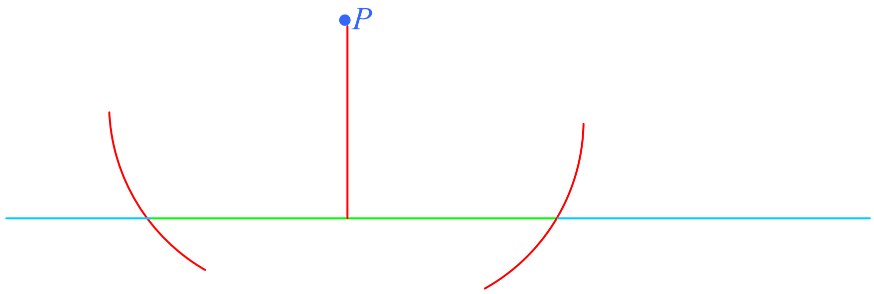


Egy csúcsból pl. A három átló húzható.
Egyenlőszárú háromszög: *AFE, ABC*
Derékszögű háromszög: *AED, ACD*
Tompaszögű háromszög: *AFE, ABC*
Hegyesszögű háromszög: nincs ilyen

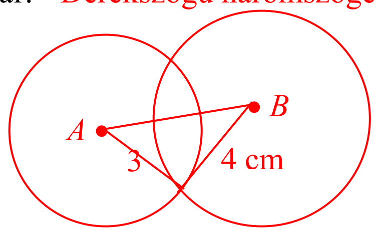
4. Vegyél fel egy egyenest, jelöld meg egy P pontját! Keresd meg az egyenesnek azokat a pontjait, melyek az adott ponttól 25 mm távolságra vannak. Színezd zölddel a 25 mm-nél kisebb távolságra, pirossal a 25 mm-nél nagyobb távolságra levőeket!



5. Vegyél fel egy egyenest és az egyenestől 3 cm-re egy P pontot! Keresd meg az egyenesnek azokat a pontjait, melyek a P ponttól 5 cm távolságra vannak! Színezd zölddel az egyenesnek azokat a pontjait, melyek P ponttól 5 cm-nél kisebb, kékkel azokat, melyek 5 cm-nél nagyobb távolságra vannak!



6. Vegyél fel egymástól 5 cm távolságra egy A és egy B pontot! Keresd meg azokat a pontokat, melyek A-tól 3 cm, B-től 4 cm távolságra vannak! Hány megoldást találtál?
Két megoldás van.
Válaszd ki az egyik kapott pontot, és kösd össze A és a B pontokkal, valamint az A-t is a B ponttal! Milyen alakzatot kaptál? Derékszögű háromszöget kapunk.



7. Egy háromszög egyik oldala 2 cm-rel rövidebb, mint a másik, és 3 cm-rel hosszabb, mint a harmadik. Kerülete 20 cm. Szerkeszd meg a háromszöget!
A háromszög oldalai 7 cm, 9 cm és 4 cm.

8. Egy háromszög minden oldalának hossza cm-ekben mérve egész szám. Két oldala 3 cm és 4 cm. Mekkora lehet a harmadik oldal? Szerkeszd meg a háromszögeket! Add meg fajtájukat is!
A harmadik oldal 2 cm, 3 cm, 4cm, 5 cm illetve 6 cm lehet. A háromszögek rendre a következő fajtájúak: tompaszögű, hegyesszögű és egyben egyenlő szárú, hegyesszögű és egyenlő szárú, derékszögű és tompaszögű háromszög.

9. Szerkessz szimmetrikus háromszöget, melynek oldalai
a) 5 cm és 4 cm
b) 3,5 cm és 6 cm
c) két általad előre megadott hosszúságú szakasz
Hányféle háromszöget kaptál az egyes esetekben?
Két megoldás van, mivel mindkét megadott szakasz lehet az alap, illetve a szár is.

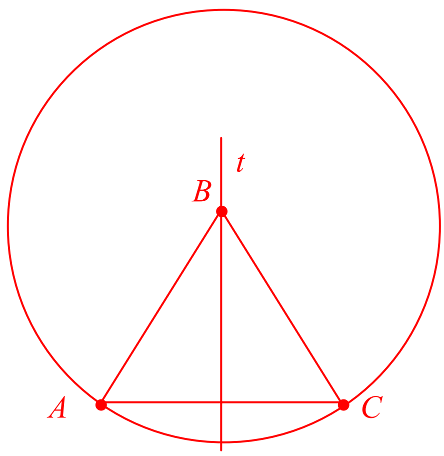
10. Szerkessz egyenlőszárú háromszöget, ha
a) alapja 5 cm, az alapon lévő szög 45°-os
b) szára 6 cm, szárszöge 75°!
a) Felvesszük az alapot, majd a két végpontjához szerkesztünk egy-egy 45°-os szöget. A két szög szárának metszéspontja a harmadik csúcs.
b) Felvesszük a 6 cm-es egyik szárat, egyik végpontjában felmérjük a 75°-os szöget. A szög másik szárára is felmérünk 6 cm-t, így megkapjuk a háromszög harmadik csúcsát.

11 Szerkessz derékszögű háromszöget, ha befogói 3 cm és 5 cm!
Megszerkesztjük a 90°–os szöget. Az egyik szögszárra felmérjük a 3 cm-t, a másikra az 5 cm-t. Az így kapott két szakasz végpontokat összekötjük.

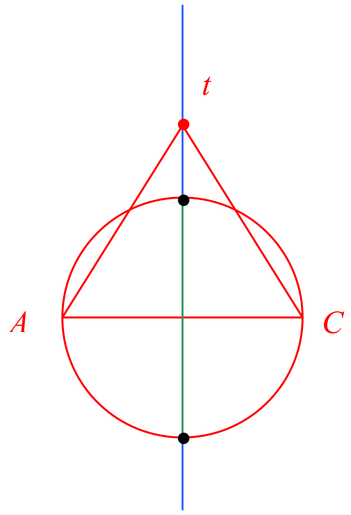
12. Szerkessz egy 3 cm sugarú körbe olyan háromszöget, amelynek csúcsai a körvonalon vannak, és adott két oldala! Mérd meg a harmadik oldalt, és számítsd ki a háromszög kerületét!
a) 3 cm és 5 cm 6 cm; K = 14 cm
b) 3 cm és 3 cm 5 cm; K = 11 cm
c) 4 cm és 5 cm 6 cm; K = 15 cm

13. Vegyél fel tetszőlegesen egy *AB* szakaszt! Hol legyen a *C* pont, ha azt szeretnénk, hogy az *A, B, C* pontok által meghatározott háromszög egyenlőszárú legyen, és az *AB* szakasz a háromszög alapja?
A *C* pont az *AB* szakasz felező merőlegesén van, kivéve a szakasz felezőpontját.

14. Vegyél fel tetszőlegesen egy *AB* szakaszt! Hol legyen a *C* pont, ha azt szeretnénk, hogy az *A, B, C* pontok által meghatározott háromszög egyenlőszárú legyen, és az *AB* szakasz a háromszög szára?
A *B* pont, mint középpont köré rajzolunk egy *AB* sugarú kört, melynek bármely pontja (kivéve *A* pontot, és az *A*-val átellenes pontot) lehet a *C* pont. Az *ABC* szög szögfelezője (*AC* szakasz felező merőlegese) a háromszög szimmetriatengelye.



A lehetséges pontok közül jelöld kékkel azokat, amelyek hegyesszögű, feketével azokat, amelyek derékszögű és zölddel azokat, amelyek tompaszögű háromszög csúcsai!
Hol legyen a *C* pont, hogy az *ABC* háromszög egyenlő oldalú legyen?
Egyenlő oldalú a háromszög, ha a *B* pontból kiinduló félegyenes 60°-os szöget zár be az *AB* szakasszal. A további eseteket és színezéseket az ábra mutatja.



15. Szerkeszd meg a háromszöget, ha adott egy oldala és az arra illeszkedő két szöge!

a) 6 cm; 45° és 30°,
b) 4,5 cm;75° és 60°;
c) 5 cm; 15° és 75°.

Milyen típusú háromszögeket kaptál az egyes esetekben?

Az adott oldalból kiindulva megszerkesztjük a két végpontba az adott szögeket, s a szögszárak metszéspontja adja a háromszög harmadik csúcsát.

a) tompaszögű háromszög
b) hegyesszögű háromszög
c) derékszögű háromszög

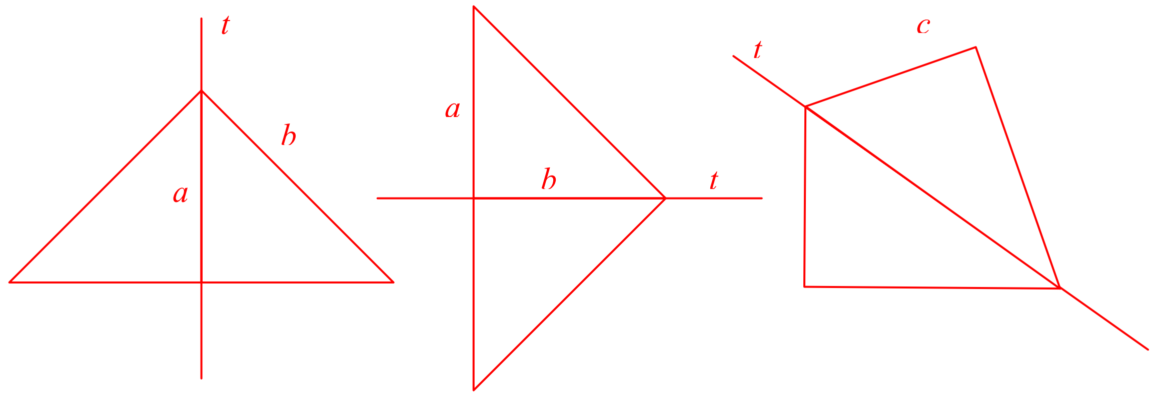
16. A koordinátarendszerben adott az A (–5; 4) pont. Add meg az x tengelyen két olyan további pont jelzőszámait, melyek az A ponttal együtt hegyesszögű, derékszögű illetve tompaszögű háromszöget adnak meg! Keress olyan megoldásokat is, melyeknél az előbbi feltételek mellett egyenlő szárú háromszöget kapsz!

Hegyesszögű háromszög pl.: (–3; 0) és (–6; 0); egyenlő szárú is: (–2; 0) és (–8; 0)
Derékszögű háromszög, pl.: (–-5; 0) és (1; 0), egyenlőszárú is: (–5; 0) és (–1; 0)
Tompaszögű háromszög, pl.: (–7; 0) és (4; 0); egyenlőszárú is: (–10; 0) és (0; 0)

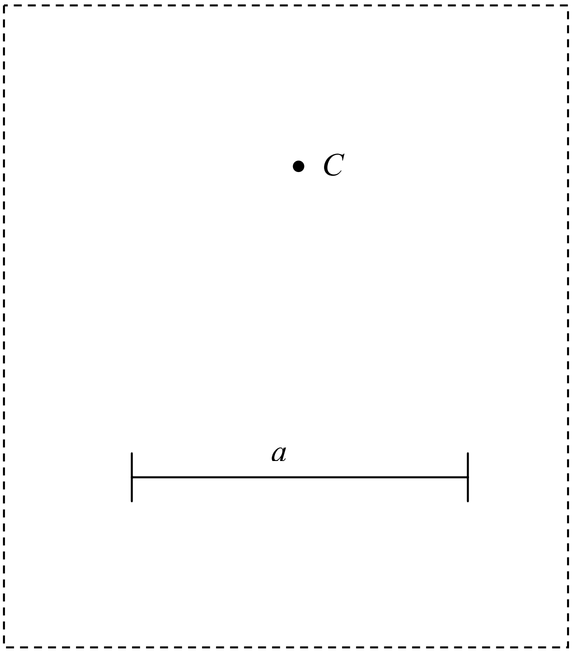
17. Szerkessz derékszögű háromszöget, ha befogói 3 cm és 4,2 cm! Tükrözd a háromszöget először egyik, majd másik befogójának, végül átfogójának egyenesére (minden tükrözést külön-külön háromszögekkel végezz!) Milyen síkidomot alkot együtt az eredeti alakzat és a tükörképe?

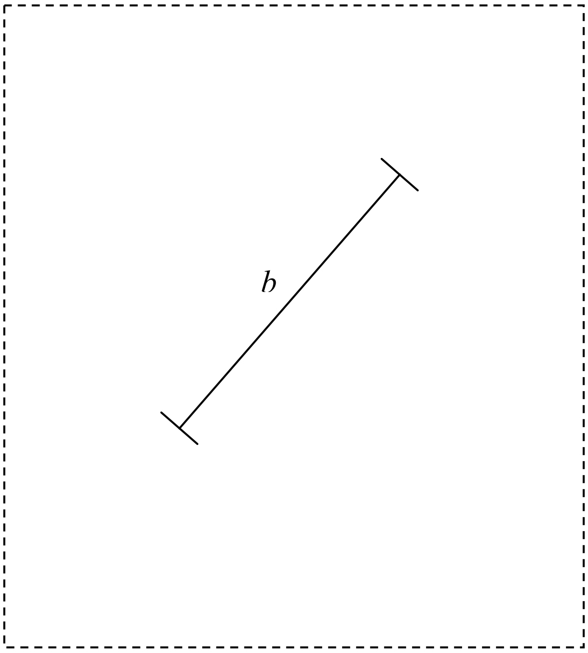
Ha a befogóra tükrözzük a háromszöget, egyenlő szárú háromszöget kapunk, szárainak hossza egyenlő a derékszögű háromszög átfogójával.

Ha az átfogóra tükrözzük a háromszöget, deltoidot kapunk, amelynek oldalai a derékszögű háromszög befogóival egyenlő hosszúak.



18. Szerkeszd meg azokat a tükrös háromszögeket, melyeknek néhány részlete adott! Fejezd be a rajzot! Hányféle megoldást találtál?
Az első rajz esetében egy megoldás van, az adott *C* pontot összekötjük az a szakasz két végpontjával. A második esetben végtelen sok megoldás lehetséges, mivel az adott b oldalt szárnak tekintve, a szárszög nagyságától függően, végtelen sok megoldás adódik.



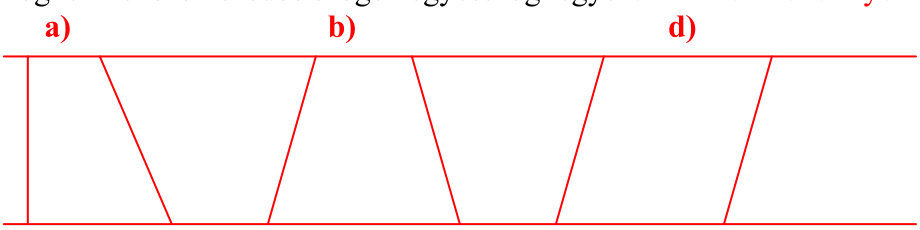


19. A koordináta-rendszerben megadott *A* (0; 5), *B* (-4; 0), *C* (0; -8) pontok egy négyszög csúcsai. Keresd meg az x tengelyen a negyedik csúcsot (jelzőszámaival add meg), úgy, hogy a négyszög

a) konvex legyen; ($x > 0$)
b) konkáv legyen; ($x = -1, -2, -3$)
c) deltoid legyen. ($x = 4$)

20. Rajzolj két párhuzamos egyenest egymástól 25 mm távolságra! Rajzolj négyszögeket úgy, hogy csúcsaik az egyeneseken legyenek, és

a) a négyszögnek legyen derékszöge; pl. derékszögű trapéz, téglalap,
b) a négyszögnek legyen két egyenlő oldala; pl. szimmetrikus trapéz, paralelogramma, rombusz, téglalap, négyzet
c) a négyszögnek legyen homorúszöge; Nem lehet ilyet rajzolni.
d) a négyszögnek legyen két szimmetriatengelye; pl. rombusz, téglalap, négyzet
e) a négyszögnek két szomszédos szöge hegyesszög legyen. Nem lehet ilyet rajzolni.



21. Rajzolj egy 3 cm sugarú körbe négyszögeket úgy, hogy csúcsai a körön legyenek, és megfeleljenek az alábbi feltételeknek is! Van

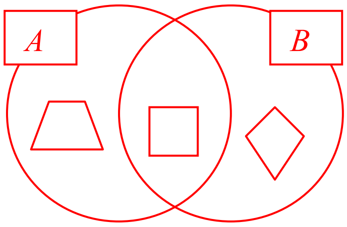
a) két egyenlő oldala; pl. szimmetrikus trapéz, téglalap, négyzet
b) két tompaszöge; pl. szimmetrikus trapéz

c) párhuzamos oldal párja; pl. szimmetrikus trapéz, téglalap, négyzet
d) szimmetriatengelye; pl. szimmetrikus trapéz, téglalap, négyzet
e) homorúszöge. nincs ilyen négyszög.

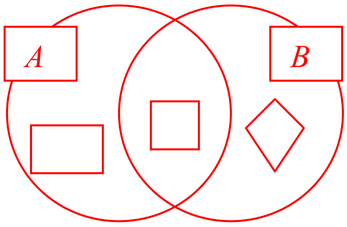
22. Tedd igazzá a nyitott mondatokat! A következő nevek közül válogass:
trapéz, deltoid, rombusz, szimmetrikus trapéz, téglalap, négyzet
– Van olyan téglalap, ami nem négyzet.
– Minden téglalap szimmetrikus trapéz.
– Nincs olyan rombusz, ami nem deltoid.
– Ha egy négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor az deltoid.
– Ha egy négyszögnek van párhuzamos oldalpárja, akkor az trapéz.
– Ha egy deltoid átlói felezik egymást, akkor az rombusz.

23. Készíts halmazábrát, és minden tartományába rajzolj sokszöget! Az üres tartományokat satírozd be!

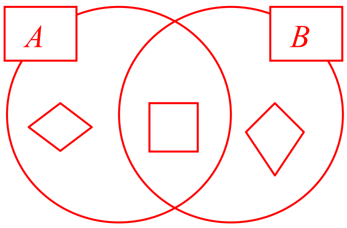
a) *A*: szimmetrikus trapéz; *B*: deltoid



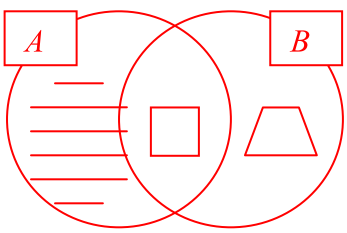
b) *A*: téglalap; *B*: deltoid



c) *A*: rombusz; *B*: deltoid



d) *A*: négyzet; *B*: szimmetrikus trapéz



24. Döntsd el a 13+1-es kérdéssor nyitott mondatairól, hogy igazak, vagy hamisak!
1. Minden trapéz négyszög. igaz
2. A paralelogramma tengelyesen szimmetrikus sokszög. hamis
3. Minden rombusz deltoid. igaz
4. Van olyan szimmetrikus trapéz, ami deltoid. igaz
5. Ha a négyszögnek két szimmetriatengelye van, akkor téglalap. hamis

6. Ha a négyszögnek négy szimmetriatengelye van, akkor négyzet.	igaz
7. A deltoid felbontható két, szimmetrikus háromszögre.	igaz
8. Minden négyzet téglalap.	igaz
9. Minden rombusz trapéz.	igaz
10. Ha egy négyszög átlói egyenlő hosszúak, akkor szimmetrikus trapéz.	igaz
11. Ha egy négyszög minden oldala egyenlő, akkor deltoid.	hamis
12. Ha egy négyszög átlói merőlegesek egymásra, akkor rombusz.	hamis
13. A négyzet szimmetriaátlóinak száma egyenlő oldalainak számával.	igaz
13+1. Van olyan négyszög, amelynek három szimmetriatengelye van.	hamis

25. Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben a következő pontokat: A (2; 1), B (5; 4), C (8; 1)! Keress olyan negyedik pontot, hogy a négy pont együtt olyan négyszöget határozzon meg, amelynek egy szimmetriatengelye van! ($x = 5$; $y < 1$)
Lehet-e olyan négyszöget találni, amelynek négy szimmetriatengelye van? Négyzet D (5;-2)

26. Szerkessz deltoidot, ha
a) egyik oldala 5 cm, az oldalon lévő két szög 120° illetve 45°;
Két megoldás van.
1. Az 5 cm-es oldalból kiindulva, felmérjük a szakasz egy-egy végpontjába a 120°-os illetve a 45°-os szöget. Az 45°-os szög szárára ismét felmérünk 5 cm-t, s ennek végpontjában megszerkesztjük a 120°-os szöget. A két 120°-os szög szárainak metszéspontja lesz a deltoid negyedik csúcsa.
2. Ugyanúgy indulunk ki, mint az előbb, de most a 120°-os szög másik szárára mérjük fel az 5 cm-t, s ennek végpontjába a 45°-os szöget. Most a két 45°-os szögszár metszéspontja lesz a negyedik csúcs.
b) szimmetriaátlója 8 cm, a másik átló 5 cm, egyik oldala 35 mm;
Egy megoldás van. Az 5 cm-es átlóból indulunk ki, melynek megszerkesztjük a felezőmerőlegesét, ez lesz a szimmetriaátló egyenese. Az 5 cm hosszú átló egyik végpontja köré rajzolt, 35 mm sugarú körívvel elmetsszük a felezőmerőlegest. Az így kapott metszéspont a deltoid harmadik csúcsa, melyből kiindulva felmérjük a szimmetriaátló egyenesére a 8 cm-t. Ezzel megkapjuk a negyedik csúcsot is.
c) oldalai 4 cm illetve 6 cm, egyik átlója 5 cm.
Két megoldás van.
1. Nem a szimmetriaátló az adott. Ebből kiindulva, mint közös alapra a két oldalára megszerkesztjük a két egyenlő szárú háromszöget.
2. A szimmetriaátló az adott. Ekkor is ebből indulunk ki, egyik végpontja köré, mindkét oldalon egy-egy 4 cm sugarú, a másik végpontja köré mindkét oldalon egy-egy 6 cm sugarú körívet rajzolunk. A megfelelő körívek metszéspontja adja a deltoid hiányzó két csúcsát.

27. Szerkessz szimmetrikus trapézt, amelynek
a) egyik alapja 8 cm, szára 4 cm, az erre illeszkedő szög 60°;
A 8 cm-es alapra rámérjük mindkét végén a 60°-os szöget, majd a szög száraira a 4 cm-t. Így megkapjuk a húrtrapéz hiányzó csúcsait.
b) alapja 9 cm, szára 4 cm, átlója 8 cm;
A 9 cm-es alap egyik végpontjából 8 cm-es körívet rajzolunk, a másik végpontból pedig 4 cm sugarú körívvel elmetsszük az előző körívet. Ez a metszéspont lesz a harmadik csúcs. Az eljárást megismételjük fordított körív méretekkel. Így megkapjuk a negyedik csúcsot is.
c) alapjai 5 cm és 3 cm, szára 4 cm.
Megrajzoljuk az 5 cm-es alapot, és mindkét végpontja körül rajzolunk egy-egy 4 cm-es körívet. Megszerkesztjük az alap felezőpontját, ebből a pontból mindkét irányba rámérünk

1,5 cm-t. Az így kapott pontokba állítunk egy-egy merőlegest az alapra. A merőlegeseknek az 5 cm-es alap végpontjai köré rajzolt 4-4 cm-es körívekkel alkotott metszéspontja határozza meg a hiányzó csúcsokat.

28. Szerkessz rombuszt, amelynek

a) átlói 7 cm és 4 cm;

Felveszünk két, egymásra merőleges egyenest, és a metszéspontjukból mindkét irányban felmérünk az egyikre 3,5-3,5 cm-t, a másikra 2-2 cm-t. Az így kapott négy pontot összekötve jutunk a keresett rombuszhoz.

b) oldala 45 mm, egyik szöge 75°;

A megadott oldal (legyen *AB*) egyik végpontjában (*A*) megszerkesztjük a 75°-os szöget, amelynek szögszárára pedig felmérjük a 45 mm-t(*D*). *BD* egyenesre, mint tengelyre tükrözzük az *A* pontot, megkapjuk rombusz negyedik (*C*) csúcsát..

c) rövidebbik átlója 5 cm, egyik szöge 105°.

Megszerkesztjük a 105°-os szöget, s ennek szögfelezőjét. A szögfelező egyenesére rámérjük az átló hosszát, 5 cm-t. Az így kapott pontban párhuzamost húzunk a 105°-os szög mindkét szárával. Ezek a párhuzamosok kimetszik a szögszárakon a hiányzó csúcsokat.

29. Szerkessz négyzetet, ha átlója 6 cm!

Lásd 27/a. feladat, de most mindkét egyenesre a metszéspontból 3-3 cm-t mérünk fel.

30. Szerkessz téglalapot, ha egyik oldala 6 cm, átlója 8 cm!

Egyenlőszárú háromszöget szerkesztünk, melynek alapja a téglalap adott oldala, 6 cm, szára pedig az átló fele, vagyis 4 cm. A szárakat a szárszögnél meghosszabbítjuk és a meghosszabbításokra is felmérjük a 4-4 cm-t. Az így kapott két pont és a háromszög alapjának két végpontja, a téglalap négy csúcsa.

31. Vágj ki papírból szimmetrikus háromszögeket, melyeknek adatai:

1. alapja 3 cm, szára 2 cm;
2. alapja 3 cm, szára 4 cm;
3. alapja 2 cm, szára 3 cm;
4. minden oldala 3 cm
5. minden oldala 2 cm!

Rakj ki ezek segítségével deltoidokat!

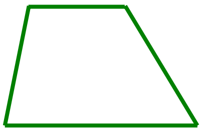
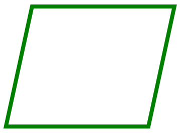
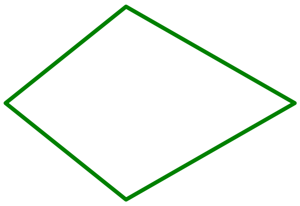
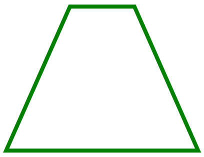
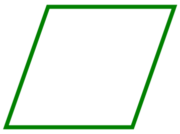
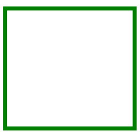
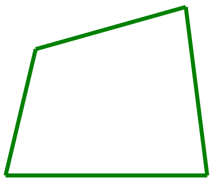
A létrehozható deltoidok a következők:

– oldalai 2 cm és 4 cm, a nem szimmetriaátló 3 cm;
– oldalai 2 cm és 3 cm, a nem szimmetriaátló 3 cm;
– oldalai 3 cm és 4 cm, a nem szimmetriaátló 3 cm;
– 3 cm, 2 cm, 4 cm oldalú rombusz;

1. tanári melléklet – Definíciókártyák

Csoportonként 1 db készlet (8 kártya), kartonpapírra nyomva, kártyák (hátulja a köv. oldalon). Ez az oldal a kártyák első oldala (zöld négyszögek), a következő oldal (meghatározások) a kártyák hátoldala. Vigyázni kell, hogy a megfelelő fogalom a megfelelő rajzzal legyen egy kártyán. A kártyák kivágandóak.

A kártyák első oldala.

TRAPÉZ 	**PARALELOGRAMMA** 
TÉGLALAP 	**DELTOID** 
SZIMMETRIKUS TRAPÉZ 	**ROMBUSZ** 
NÉGYZET 	**NÉGYSZÖG** 

A kártyák másik oldala.

Olyan négyszög, melynek van párhuzamos oldalpárja.	**Olyan négyszög, amelynek szemközti oldalai párhuzamosak**
Olyan paralelogramma, melynek minden szöge egyenlő.	**Olyan négyszög, melynek van csúcson átmenő szimmetriatengelye.**
Olyan négyszög, melynek szimmetriatengelye oldalfelező merőleges.	**Olyan deltoid, melynek minden oldala egyenlő.**
Olyan négyszög, melynek minden oldala és minden szöge egyenlő.	**Olyan sokszög, melynek négy oldala és négy szöge van.**

2. tanári melléklet:

MOBIL KÖRÖK ÉS EGYENESEK

Mobil köreink írásvetítőhöz fóliára, táblai applikációhoz A4-es pausz papírra készüljenek. Egy készlet tartalmazzon 2, 3, 4, 5, 6, 7 cm sugarú köröket, mind különböző színű fóliából készüljön, a középpont feketével legyen jelölve, mert e körök, mint ponthalmazok kerülnek bevetésre, és ehhez a középpont nem tartozik hozzá, az elhelyezéshez viszont szükséges. Szükséges még 5 db 20 cm hosszú, 4 cm széles fóliacsík, melyre egy-egy egyenes van rajzolva. Ezeket egymásra helyezve mozgatjuk a lehetséges helyzetek vizsgálatához.
A gyerekeknek is legyen saját készletük, melyet előre elkészítettek másolópapírra, és a füzetük borítólapjának belső oldalára ragasztott borítékban tárolnak. A körök mérete itt is 2, 3, 4, 5, 6, 7 cm legyen!
A táblai applikációhoz készült körök sugara tízszerese a készletben megadott méretekének.

3. tanári melléklet

8 db, géppapírra nyomva ebben a méretben csoportonként 1 db. Az állítások kivágandóak. A háttérszínnek nincs jelentősége.

a háromszögnek van szimmetriatengelye
a háromszögnek van két egyenlő oldala
a háromszögnek van két egyenlő szöge
a háromszög minden magasságvonala egybeesik egy szögfelezővel
a háromszögnek három szimmetriatengelye van
a háromszögnek nincs szimmetriatengelye
a háromszögnek van olyan súlyvonala, amely merőlegesen felezi az oldalt
a háromszög egyik magassága sem felezi a megfelelő oldalt