0663 MODUL

SÍKIDOMOK

Háromszögek, nevezetes vonalak

Készítette: Jakucs Erika, Takácsné Tóth Ágnes

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A háromszög nevezetes vonalainak megkeresése.
Időkeret	3 óra
Ajánlott korosztály	7. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Ajánlott megelőző tevékenységek*: 5. osztály: Ponthalmazok 0571–0576 6. osztály: Tengelyes tükrözés 0631-0633; Síkidomok 0661–0662 *Ajánlott követő tevékenységek* 7. osztály: Háromszögek szerkesztése 0752; Geometriai számítások 0761–0764;
A képességfejlesztés fókuszai	*Rendszerezés, kombinativitás:* háromszögek csoportosítása különböző szempontok szerint, a szerkesztés lépéseinek megtervezése, több megoldás keresése szerkesztési feladatok megoldása során *Deduktív, induktív következtetés:* igaz-hamis állítások; geometriai összefüggések alkalmazása a szerkesztéseknél; geometriai jelrendszer használata, tapasztalatokon alapuló általánosítás és bizonyítás; definíció és tulajdonság közötti különbség tételének fokozatos alapozása *Beszédkészség, szövegértés:* összefüggések felismerése szövegből illetve összefüggések pontos, szabatos megfogalmazása, szöveg alapján rajzkészítés. Matematikai nyelvhasználat.

AJÁNLÁS

Az órákon vegyesen alkalmazzuk az egyéni, frontális és csoportmunkát, valamint a kooperatív tanulási módszereket. A munkaformák szervezése főként kooperatív legyen, így tanulóink elsajátíthatják a megfelelő együttműködési szabályokat. Ezzel szociális készségeik is fejlődnek. A csoportokban kb. négyen dolgozzanak, gondoskodjunk a kényelmes elhelyezkedésről, emellett a táblát is jól kell látnia minden tanulónak. A csoportmunkában fontos az egymás véleményének tiszteletben tartása, a másik fél türelmes meghallgatása, a vita pozitív menete. Nélkülözhetetlen – főleg az új fogalmak megismerése során – a tapasztalatszerzés, az észrevételek megfogalmazása. Ugyanakkor elengedhetetlen a pontosítás, ezt a legtöbb esetben frontálisan tehetjük meg.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Háromszög-modell, vízmérce, függőón, tabukártyák, írólap, táblai szerkesztő eszközök, írólap mozgatható modell

ÉRTÉKELÉS

A csoportok munkáját folyamatosan ellenőriznünk és értékelnünk kell. Ha szükséges segítsünk, és feltétlenül pontosítsunk. Igyekezzünk pozitívan értékelni, ne vegye kedvét tanulóinknak a hibázás lehetősége, mindig érezniük kell, hogy a hiba önmagában nem feltétlenül jelent bajt. Nagyobb problémát okoz, ha nem vagyunk hajlandóak észrevenni és kijavítani hibáinkat. Ugyanakkor követeljük meg a pontos, igényes, fegyelmezett munkavégzést. Az egyéni munkavégzést is értékeljük legalább szóban. A hiányosságok pótlására feltétlenül differenciáljuk, a házi feladatok kiadásánál is figyeljünk az egyéni igényekre.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. A háromszög oldalfelező merőlegesei			
1.	Bemelegítő: Mit tudsz rólam? (diákkvartett)	Megfigyelő és rendszerező képesség, megfigyelőképesség.	
2.	A szakaszfelező merőleges (Játékos ismétlés – Ki vagyok én?)	Deduktív, induktív következtetés.	
3.	A háromszög oldalfelező merőlegesei	Rajzkészség, szerkesztőkészség, következtetések; megfigyelő és rendszerező képesség	A4-es írólap
4.	A háromszög oldalfelező merőlegeseinek megszerkesztése	Megfigyelő és rendszerező képesség	1. feladatlap 1. 2. feladat
5.	Húrnégyszögek	Megfigyelő és rendszerező képesség	1. feladatlap 3. feladat

II. A háromszög szögfelező egyenesei			
1.	A szögfelező egyenes (ismétlés – Ki vagyok én? vagy Tabu játék)	Emlékezőképesség, rendszerező-képesség	
2.	A háromszög szögfelező egyenesei	Rajzkészség, szerkesztőkészség, következtetések	A4-es írólap
3.	A háromszög szögfelező egyeneseinek megszerkesztése		2. feladatlap

III. A háromszög magasságvonala és súlyvonala			
1.	A magasság fogalma	Emlékezőképesség, rendszerező-képesség	1. tanári melléklet: demonstrációs háromszögek, táblai vonalzók, mérőszalag, függőón
2.	A háromszög magasságvonalai és magasságpontja	Rajzkészség, szerkesztőkészség, következtetések	3. feladatlap 1. feladat, 1. tanári melléklet
3.	A háromszög magasságának megszerkesztése	Rajzkészség, szerkesztőkészség, következtetések	3. feladatlap 2. 3. feladat
4.	A háromszög súlyvonala	Megfigyelőképesség, következtetések	Kartonpapír, vonalzó, színesek, olló, tű, cérna, 3. feladatlap 4. 5. feladat
5.	A magasságpont létezésének bizonyítása	Rajzkészség, szerkesztőkészség, következtetések	mobilegyenesek

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. A háromszög oldalfelező merőlegesei

1. Bemelegítő: Mit tudsz rólam?

Az óra elején ismételjük át a háromszögekkel kapcsolatos ismereteket a diákkvartett módszer segítségével! A csoporttagok A, B, C, D jelölést kapnak. A tanár nyitott mondatokat mond a háromszögekkel kapcsolatban, amelyeket úgy kell kiegészíteni, hogy igaz állítást kapjunk, vagyis meg kell adni, melyik háromszög fajtára lesz igaz az állítás. A tanár megadja, melyik csoport, melyik tanulójától (A, B, C, D) várja a választ. Ha többféle háromszögre is igaz, nem kötelező felsorolni az összes lehetőséget, elég egy olyan háromszög fajtát mondani, amire igaz az állítás, de azért kérdezzük meg, melyik háromszögekre igaz még az állítás. Jó válasz esetén pontot kapjon a csoport, rossz válasz esetén jelöljünk ki egy másik válaszadót! Az a csoport győz, aki a legtöbb pontot gyűjtötte össze. Jutalmazzuk őket!

Példák nyitott mondatokra, amelyek közül tetszés szerint válogathatunk, az osztály tudásának megfelelően. Természetesen más nyitott mondatokat is megfogalmazhatunk:

A .... háromszögnek pontosan egy szimmetriatengelye van.
Az egyenlőszárú háromszög.
A .... háromszög tengelyesen szimmetrikus.
Az egyenlőszárú háromszög (ezen belül az egyenlő oldalú is).
A .... háromszögnek van két egyenlő szöge.
Az egyenlőszárú háromszög (ezen belül az egyenlő oldalú is).
A .... háromszögnek nemcsak hegyesszöge van.
A derékszögű és a tompaszögű háromszög.
A .... háromszögnek vannak egyenlő oldalai.
Az szimmetrikus háromszög (ezen belül egyenlőszárú és az egyenlő oldalú).
A .... háromszögnek nem lehet tompaszöge.
A hegyesszögű, a derékszögű, az egyenlő oldalú háromszög.
A .... háromszögnek pontosan két egyenlő oldala van. Az egyenlőszárú háromszög.
A .... háromszög minden szöge egyenlő. Az egyenlő oldalú háromszög.
A .... háromszög legnagyobb szöge az egyenesszög fele. A derékszögű háromszög.
A .... háromszögnek három szimmetriatengelye van. Az egyenlő oldalú háromszög.
A .... háromszög szögei nem nagyobbak a teljesszög negyedénél.
A hegyesszögű és a derékszögű háromszög.
Gyorsabban haladó osztályokban úgy is játszhatjuk, hogy nem a tanár mondja a nyitott mondatot, hanem először az a feladat, hogy a csoportok gyűjtsenek ilyeneket a háromszögekkel kapcsolatban, majd a tanár által kijelölt csoport ismertet egyet a gyűjtésükből, és az előbbiekben vázolt módon kiválasztjuk a válaszadót. Egy nyitott mondat csak egyszer hangozzék el!

A játékidő: max. 10 perc

2. A szakaszfelező merőleges

A szakaszfelező merőleges ponthalmaz tulajdonságának ismétlésével kezdjünk! Ehhez játékos ismétlésként ajánljuk a „Ki vagyok én?” játékot Ez módot ad minden kapcsolódó fogalom gyors felelevenítésére.

Ki vagyok én?

A televízióból ismert játék tanórai változata. Egy önkéntes, vagy kijelölt „áldozat” kiáll az osztály elé, és valamilyen szerepet ruházunk rá. Formailag ez történhet úgy, hogy a fejére kötünk egy kártyát, mint a számháborúban, melyen felirat jelzi, hogy ő most éppen ki. Az „áldozat” ezt nem láthatja, ki kell találnia. A többiek vállalják, hogy egy-egy (legfeljebb 3, 4 – állapodjunk meg előre, akár a nehézség függvényében) mondattal segítik őt. A segítő mondatok a feladványt alkotó szókapcsolatok, szóösszetételek egyetlen jelentéssel bíró alkotó elemét sem használhatják fel, ezeket körülírással, vagy ravasz nyelvi fortéllyal ki kell kerülni. A játék akkor ér véget, ha megfejtettük a feladványt. (Én nem szoktam fejre rakni, mert sok a spontán feladvány, a gyerekek is adnak egymásnak. Inkább az „áldozat” háta mögött felírjuk a táblára.)

Példajáték:

Legyen a kitalálandó két pont távolsága, ezt tehát vagy a játékos fejére tesszük (mint a számháborúban), vagy háta mögött felírjuk a táblára. A többiek segítő mondatokat fogalmaznak meg, s ha készen állnak, ezt jelentkezéssel jelzik. A kitaláló játékos felszólít valakit, az pedig egy kerek, pontosan megfogalmazott mondatot ad elő:

1. Te egy geometriai fogalom vagy, háromnál eggyel kevesebb objektumé lehetsz. (A kitaláló játékos megjegyzi, ami hallott, és felszólít egy következő jelentkezőt.)
2. A legkisebb geometriai objektumoké vagy. (A kitaláló játékos megjegyzi, ami hallott, és felszólít egy következő jelentkezőt.)
3. Mérünk téged.

Ha a kitaláló megértette, amit hallott, akkor a következőket gondolhatja magában, esetleg hangosan (eleinte inkább hangosan kérjük, hogy segíthessünk): 1. szerint én két geometriai objektumnak a valamije vagyok. 2. alapján két pont valamije lehetek. A 3. állítás szerint, csakis távolság lehetek, a megfejtés tehát: két pont távolsága vagyok.
Ha csoportban játsszuk (2-3 fő), akkor a tagok hangosan megvitatják a hallottakat, hangosan vonják le következtetéseiket, a játék sokkal hatékonyabb módszertani szempontból, spontán megszervezése nehezebb, mert a csapatok szerveződése felkorbácsolja a fegyelmet. Lehet ezért padonkénti párokban játszani, vagy előző óra végén jelezni, hogy csak előre összeállt csapatok kerülhetnek porondra. A játékidő maximum 10 perc.

3. A háromszög oldalfelező merőlegesei

Osszunk ki mindenkinek írólapot, melyre nagyméretű háromszöget rajzolnak, ki-ki olyat, amilyen neki tetszik. Amikor elkészültek, kérdezzük meg: Mit gondoltok lehet-e két egybevágó a háromszögeitek közt? Az igen ritka véletlen volna, vagy inkább csak szándékosan sikerülhet.
Most hajtogassátok meg az egyik oldalszakasz felezőmerőlegesét! Mit lehet tudni ennek minden pontjáról? Pontjai egyenlő távol vannak az oldal két végpontjától.
Hajtogassátok meg egy másik oldal felezőmerőlegesét is! Mit lehet tudni ennek a pontjairól? Általában maguktól megfogalmazzák, ha mégsem, akkor kérdezzünk rá: A két merőleges metszéspontja mindkét tulajdonsággal bír, azaz egyenlő távol van, pl. az A és a B csúcstól, és egyenlő távol van a B és a C csúcstól is, így a háromszög mindhárom csúcsától egyenlő távol van.
Hajtogassátok meg a harmadikat is, mit vesztek észre? Ez is átmegy az előző kettő metszéspontján. Vita keveredik arról, hogy ez véletlen-e, ebből kialakul a bizonyítás. Mint láttuk a metszéspont egyenlő távolságra van mindhárom csúcstól, ezért az A és a C csúcstól is, így rajta kell legyen az AC oldal felezőmerőlegesén is

Ez a metszéspont egyenlő távol van a csúcsoktól. Milyen pontok rendelkeztek hasonló tulajdonsággal, mint a csúcsok? A körvonal pontjai. Akkor mind a három csúcs rajta van egy körvonalon, amelynek középpontja az oldalfelezők metszéspontja. Tehát tudunk olyan kört rajzolni e metszéspont köré, amelyik átmegy a csúcsokon.
Az előbbi gondolatmenetet próbáljuk úgy vezetni, hogy ezt a tapasztalatot lehetőleg a gyerekek fogalmazzák meg.

4. A háromszög oldalfelező merőlegeseinek megszerkesztése

Miután hajtogatással tapasztalatokat gyűjtöttünk a háromszög oldalfelező merőlegeseiről, szerkesszük is meg őket (1. feladatlap 1. feladat)! A csoporton belül osszák el, ki melyik háromszög esetén hajtja végre a szerkesztést, természetesen a gyorsabban haladók mind a hármat készítsék el! A csoporton belül egyeztessék szerkesztéseiket, figyeljék meg, hogy különböző típusú háromszögekben hol lehet az oldalfelező merőlegesek metszéspontja!
A 2. feladatban a háromszög körülírt körével kapcsolatos ismereteket lehet tapasztalati úton megszerezni, ennél többre itt még nincs is szükség, tehát ne várjuk el kötelező tanulnivalóként!
Gyorsabban haladó csoportban tanakodhatunk arról, vajon van-e még másik olyan pont is, mely körül a csúcsokon áthaladó kör írható.

1. FELADATLAP

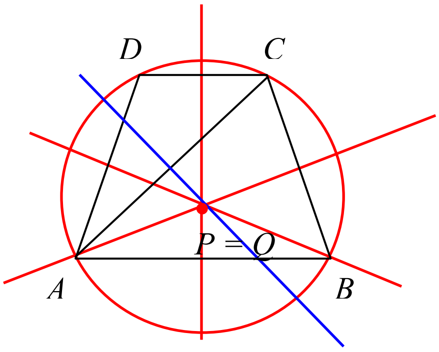
1. Szerkeszd meg a háromszöget, majd oldalfelező merőlegeseinek metszéspontját!
a) A háromszög oldalai 5 cm, 6 cm és 7 cm.
A háromszög hegyesszögű, a metszéspont a háromszög belsejében található.
b) A derékszögű háromszög befogói 3,5 cm és 5 cm.
A metszéspont az átfogó felezőpontja.
c) A háromszög oldalai 4 cm, 5 cm, 8 cm.
A háromszög tompaszögű, a metszéspont a háromszögön kívül található.

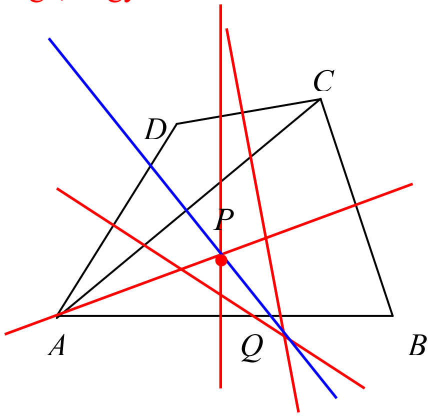
Rajzolj e metszéspont köré a háromszög csúcsain átmenő kört!

2. Határozzátok meg az előző feladatban megszerkesztett oldalfelező merőlegesek metszéspontjának a háromszög csúcsaitól való távolságát! Mit tapasztaltok? Indokoljátok meg a tapasztaltakat!
A metszéspont távolsága az egyes csúcsoktól ugyanakkora mind a három esetben. A távolság: a) 2,5 cm; b) 3 cm; c) 4,9 cm.
Próbáljatok a háromszög köré kört rajzolni!

3. Rajzolj egy szimmetrikus négyszöget (pl. szimmetrikus trapéz), és mellé egy általános négyszöget! Szerkeszd meg mindkét négyszög oldalfelező merőlegeseit! Mit tapasztalsz? Próbáld megindokolni a tapasztaltakat!
Az *AB* és *BC* oldalfelezők metszéspontja kijelöli az *ABC* háromszög körülírt körének középpontját, *P* pontot. A *CD* és *AD* oldalfelezők metszéspontja, pedig az *ACD* háromszög körülírt körének középpontját jelöli ki, *Q* pontot. Ez a két pont a húrnégyszög esetében megegyezik, míg a másik esetben nem. Ráadásként szerkesszük meg mindkét négyszögben az *AC* háromszögoldal felezőmerőlegesét is! Láthatjuk, hogy a húrnégyszögnél ez is átmegy a *P* ponton, míg a másik esetben nem. Viszont átmegy a *CD* és *AD* oldalak metszéspontján, *Q*-n. Láthatjuk tehát, hogy lehetnek olyan négyszögek, melyeknek van körülírt köre, ilyen a négyzet, téglalap, húrtrapéz, de nem minden négyszög ilyen.

A háromszögeknek tehát jellegzetes tulajdonsága, hogy mindnek van körülírt köre.

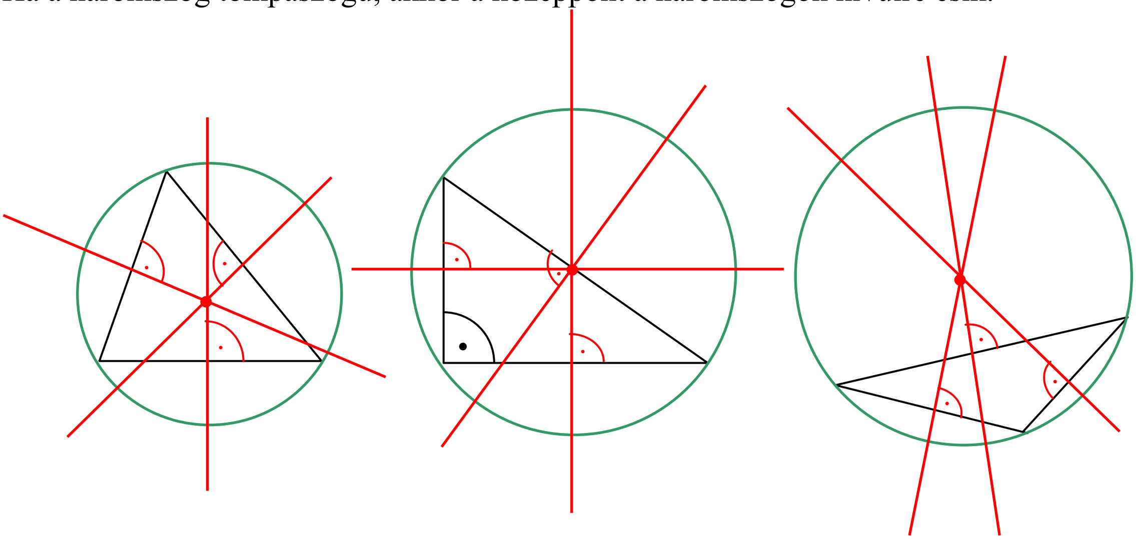




ÖSSZEGZÉS

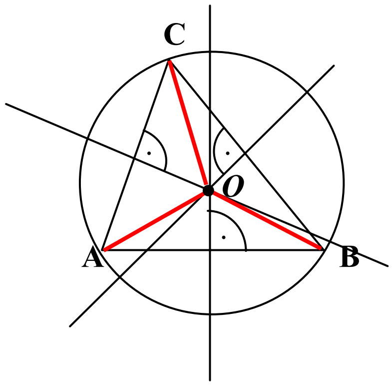
A HÁROMSZÖG OLDALFELEZŐ MERŐLEGESEI

Bármely háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást.
Ha a háromszög hegyesszögű, akkor a kör középpontja a háromszög belsejében van
Ha a háromszög derékszögű, akkor a kör középpontja az átfogóra esik.
Ha a háromszög tompaszögű, akkor a középpont a háromszögön kívülre esik.



A háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja a háromszög köré írható kör középpontja. A háromszög köré írható köre mindig létezik.

Bizonyítás



Az *AB* oldal felezőmerőlegesének minden pontja egyenlő távolságra van az *A* és a *B* ponttól.

$$AO = OB$$

Az *BC* oldal felezőmerőlegesének minden pontja egyenlő távolságra van az *B* és a *C* ponttól.

$$BO = OC$$

Az *AC* oldal felezőmerőlegesének minden pontja egyenlő távolságra van az *A* és a *C* ponttól.

$$AO = OC$$

Az *O* pont a három oldalfelező merőleges metszéspontja, ezért mind a három csúcstól egyforma távolságra van.

$$AO = OB = OC$$

Ez a távolság lesz a háromszög köré írható körnek a sugara.

5. Húrnégyszögek

Megismertük, hogy bármilyen háromszög köré írható kör, gyorsabban haladó csoportokban, érdeklődő gyerekek körében felvethetjük a kérdést: Vajon a négyszögek esetében is így van ez? Feltehetően megoszlanak a vélemények. Készítsünk két rajzot egymás mellé, egy húrnégyszög, például húrtrapéz és egy általános négyszög rajzát! Mind a két négyszögnek megszerkesztjük az oldalfelező merőlegeseit (1. feladatlap 3. feladat). Ehhez kérjünk segítségét, két önként jelentkező szerkeszt az egyik négyszögnél az egyik, a másiknál a másik tanuló, mi pedig mondjuk a szerkesztés lépéseit.
Szerkesszük meg az *AB* és a *BC* oldal felezőmerőlegeseit! Az *AB* és a *BC* oldal felezői egy pontban metszik egymást. Ez egyenlő távoli *A*-tól és *B*-től, valamint *B*-től és *C*-től, ezért *A*, *B* és *C* egyenlő távoliak e ponttól. Most megszerkesztjük a *CD* oldal felező merőlegesét is, majd az *AD* oldalét. Ez metszi a *BC* oldalfelező merőlegesét egy olyan pontban, megy egyenlő távolságra van a *B*-től és a *C*-től, valamint a *C*-től és *D*-től. **Olyan pontra leltünk eszerint, mely a négyszög csúcsaitól egyenlő távoli, körülötte tehát megrajzolható a négy csúcson átmenő kör. IGAZ?**
A válaszok valószínűen nem lesznek egyértelműek, hiszen a táblai rajz sem az. Jól látható, hogy a húrnégyszög esetében minden rendben van, a négy oldal felezőmerőlegesei egy

pontban metszik egymást. Ezt el is vártuk, hiszen ezért húrnégyszög, mert rajzolható köré a csúcsain áthaladó kör. A másik négyszögnél viszont baj van. Az oldalfelezők nem egy ponton haladnak át, hanem két metszéspont jött létre. Mi ennek az oka? Hagyjunk egy kis időt a megfejtésre, gondolkodjanak hangosan, vitassuk meg a felmerült magyarázatokat! Végül adjuk meg a megfejtést!
Azokban az osztályokban, amelyekben nem tárgyaljuk meg a kitekintésben említett problémát, azért hozzuk szóba a négyszögek esetét! Kérdezzük meg, hogy vajon a háromszögekhez hasonlóan írható-e kör bármilyen négyszög köré! Ha van időnk egy szerkesztéses próbálkozással, eldönthetjük a kérdést bizonyítás nélkül is (Feladatgyűjtemény 15. 16. feladat). Magyarázatként elég utalni a húrnégyszögek fogalmára, hiszen már megtapasztalták, hogy nem minden négyszög húrnégyszög. Időhiány esetén adjuk fel ezt házi, vagy szorgalmi feladatnak!

Feladatgyűjtemény: 1-5. feladat

II. A háromszög szögfelező egyenesei

1. A szögfelező egyenes

Bevezetésként a szögfelező ponthalmaz tulajdonságának ismétlésével kezdjünk! A játékos ismétlésre ajánlatunk: „Ki vagyok én?”, vagy „Tabu”. Ezek a játékok módot adnak minden kapcsolódó fogalom gyors felelevenítésére. A „Ki vagyok én?” – leírása az előző, második órarészletben megtalálható. Játszhatjuk most úgy is, hogy a kitaláló menet közben találgat! Ez könnyebb, mert visszajelzést ad a nyomravezetőknek. A kitalálandó fogalmat most is a táblára írjuk: A szögfelező egy pontja.
A gyerekek ilyeneket mondanak:
Te egy olyan geometriai izé vagy, aminél kisebbről nem tanultunk. PONT?
Na de milyen? – Egyenlő távol vagy két félegyenestől. De milyen félegyenestől?
Olyanoktól, amelyek egy pontból indulnak ki. Vagyis egy szög szárai?
Igen. Akkor a szög felezőjéről van szó?
Nem egészen. Gondolj arra, mi vagy te! Persze egy pont, akkor a szögfelező egy pontja.

Tabu játék

Felírjuk a feladványt egy cédulára, amit majd ki kell találnunk. Egy önkéntes előáll, ő lesz, aki majd körülírja. Előtte a tanár „letabuzza” azokat a kifejezéseket, amelyek szerinte a körülírást egyszerűvé teszi. Ezeket a tabukat is ráírja a cédulára, ezután tehet kísérletet a játékos. A tabu szavakat szóösszetételben sem, ragozott formában sem szabad használnia, egyébként bármit mondhat, az osztály pedig megpróbálja kitalálni a fogalmat. A mostani esetben tabu lehet: pl. szög; és a felezés szó.

2. A háromszög szögfelező egyenesei

Osszunk ki mindenkinek írólapot, melyre nagyméretű háromszöget rajzolnak, ki-ki olyat, amilyen neki tetszik.
Most hajtogassátok meg az egyik szög felezőegyenesét! Mit lehet tudni ennek minden pontjáról? Pontjai egyenlő távol vannak a szög két szárától.
Hajtogassátok meg egy másik szög felezőegyenesét is! Mit lehet tudni ennek a pontjairól? Általában maguktól megfogalmazzák, ha mégsem, akkor kérdezzünk rá: A két szögfelező metszéspontja mindkét tulajdonsággal bír, azaz egyenlő távol van pl. az *a* és a *b* oldaltól, és

egyenlő távol van a *b* és a *c* oldaltól is, így a háromszög mindhárom oldalától egyenlő távol van.
Hajtogassátok meg a harmadikat is, mit vesztek észre? Ez is átmegy az előző kettő metszéspontján. Ismerős vita keveredik arról, hogy ez véletlen-e, ebből kialakul a bizonyítás. Mint láttuk a metszéspont egyenlő távol van mindhárom oldaltól, ezért az *a* és a *c* oldaltól is, így rajta kell legyen az *a* és *c* oldal által bezárt szög felezőegyenesén is.
Ez a metszéspont egyenlő távol van az oldalaktól. Vajon ez a pont milyen körnek lehet a metszéspontja? Olyan kört, amelyik érinti a háromszög mind a három oldalát. Ez a háromszög beírt köre.
Az előbbi gondolatmenetet próbáljuk úgy vezetni, hogy ezt a tapasztalatot lehetőleg a gyerekek fogalmazzák meg.

3. A háromszög szögfelezői egyeneseinek megszerkesztése

A háromszög szögfelező egyeneseivel kapcsolatos tapasztalatszerzés után szerkesztéssel is támasszuk alá tapasztalatainkat (2. feladatlap 1. feladat)! A csoporton belül osszák el, ki melyik háromszög esetén hajtja végre a szerkesztést, természetesen a gyorsabban haladók mind a hármat készítsék el! A csoporton belül egyeztessék szerkesztéseiket, figyeljék meg, hogy különböző típusú háromszögekben hol lehet a szögfelező egyenesek metszéspontja!
A 2. feladatban a háromszög beírt körével kapcsolatos ismereteket lehet tapasztalati úton megszerezni, ennél többre itt még nincs is szükség, tehát ne várjuk el kötelező tanulnivalóként!
A 3. feladatban szimmetrikus háromszögekben vizsgáljuk meg az oldalfelező merőlegesek, illetve a szögfelezők metszéspontját! Fontos, hogy kiemeljük csak az egyenlő oldalú háromszögekben egyezik meg ez a két metszéspont.
Gyorsabban haladó csoportban tanakodhatunk arról, vajon van-e még másik olyan pont is, mely körül az oldalakat érintő kör írható. Eleinte igazán meggyőzően érvelnek amellett, hogy nincs több ilyen pont, a köré írt kör esetében bevált utat járva. Hatásos, ha rezzenéstelen arccal hallgatunk, vagy elölről kezdetjük az egészet. A két oldaltól egyenlő távoli pontok halmaza a szögfelező. És a két oldalegyenestől? Elég, ha csökönyösen ismételgetjük a kérdést, egyszer csak valaki feljajdulva fellendíti a kezét: a szögfelezők egyenesek! Innen már sínen van a beszélgetés. Hamarosan világot látnak a háromszög hozzáírt körei is, és megtalálják az összes megoldást
Természetesen most is megkérdezzük, hogy a beírt kör középpontjának elhelyezkedése hányféle lehet? Alkalmazhatjuk a „fejlehajtós játékot": összegyűjtjük a tippeket a táblán, és eldöntendő kérdés formájában vetjük fel, hogy melyik lesz a jó válasz. A gyerekek fejüket lehajtva a padra kézfeltartással szavaznak, így a tekintélyesebbek véleménye nem befolyásolja a többieket, és mindenki állásfoglalásra kényszerül. A játék állásfoglalásra, előre elgondolásra kényszerít, fejleszti a feltételek áttekintésére való képességet, az előrelátást.

2. FELADATLAP

1. Szerkeszd meg a háromszöget, majd szögfelezőinek metszéspontját! Rajzolj e metszéspont köré a háromszög oldalait érintő kört!

a) A háromszög oldalai 5,5 cm, 6,5 cm és 8 cm. Hegyesszögű háromszög.
b) A háromszög oldalai 6 cm, 8 cm és 10 cm. Derékszögű háromszög
c) A háromszög oldalai 4 cm, 5 cm és7,5 cm. Tompaszögű háromszög. Mindhárom esetben a szögfelezők metszéspontja belső pont.

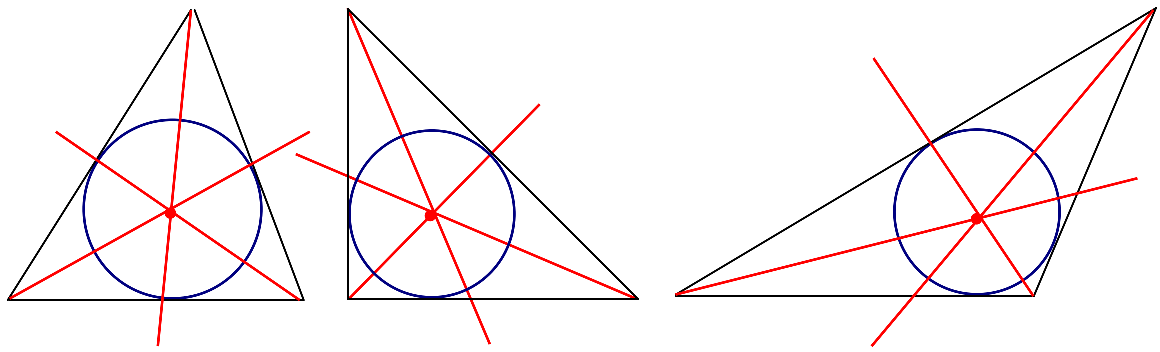
Rajzolj e metszéspont köré a háromszög oldalait érintő kört!

2. Határozzátok meg az előző feladatban megszerkesztett szögfelező egyenesek metszéspontjának a háromszög oldalaitól való távolságát! Mit tapasztaltok? Indokoljátok meg a tapasztaltakat!
A metszéspont távolsága az egyes oldalaktól ugyanakkora. A távolság: a) 1,8 cm; b) 2 cm; c) 1,1 cm.
Próbáljatok a háromszög oldalait érintő kört rajzolni!

3. Szerkessz egyenlő oldalú háromszöget, amelynek oldalai 5,5 cm-esek!
a) Szerkeszd meg az oldalfelező merőlegesek metszéspontját!
b) Szerkeszd meg a belső szögfelezőinek metszéspontját!
Mit tapasztalsz? Igaz-e ez az észrevétel minden szimmetrikus háromszögre? Állításodat szerkesztéssel igazold!
Az egyenlő oldalú háromszög esetében a két metszéspont egybeesik, de ez nem igaz abban az esetben, ha a háromszögnek csak két oldala egyenlő.

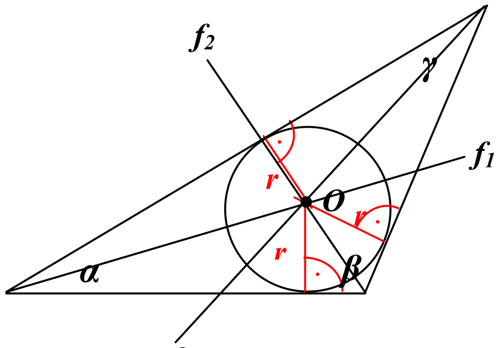
A HÁROMSZÖG SZÖGFELEZŐI

A háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást. Ez a pont minden esetben, a háromszög belsejében található.



A háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja a háromszög beírható körének a középpontja. A háromszög beírt köre mindig létezik.

Bizonyítás



Az f_1 szögfelező pontjai azonos távolságra vannak a α szög két szárától.

Az f_2 szögfelező pontjai azonos távolságra vannak a β szög két szárától.

Az f_3 szögfelező pontjai azonos távolságra vannak a γ szög két szárától.

Az O pont a három szögfelező közös pontja, ezért a háromszög oldalaitól való távolsága azonos. Ez a távolság a háromszög beírt körének sugarával (r) egyenlő.

Feladatgyűjtemény: 6-14. feladat

III. A háromszög magasságvonala és súlyvonala

1. A magasság fogalma

A magasság fogalmával már eddigi tanulmányaink során is találkoztunk. A feladatunk most is a fogalom pontosítása, mélyítése, valamint a háromszög magasságvonalainak vizsgálata. Bevezetésként tehát először a fogalmat mélyítsük! Szükségünk lesz demonstrációs méretű derékszögű, hegyesszögű és tompaszögű háromszögekre (1. tanári melléklet). Ezen kívül vigyünk be az órára táblai derékszögű és egyenes vonalzót, mérőszalagot (esetleg vízmércét), valamint jó, ha be tudunk szerezni függőónt.
Hívjunk ki egy alacsonyabb gyereket (Pisti), és kérdezzük meg: „Miképp mérhetném meg, milyen magas Pisti?" A felhasználható eszközök láttán ötleteket adnak, mérnek is, így meghatározzuk Pisti magasságát.
Pisti megmérése történhet vízmérce segítségével. A legmagasabb ponthoz illesztjük a mércét, beállítjuk vízszintesre, a derékszöggel, vagy a függőónnal kijelöljük a függőleges irányt, lehetőleg távolabb, és ott mérünk. Sugalljuk ezzel azt a szemléletet, hogy a magasság egy *sáv* szélessége, ezért bárhol – az alakzattól távol is mérhető. Tisztázzuk azonban, hogy a háromszög magasságvonala a csúcson átmenő magasság, mert csak így jutunk el a magasságponthoz.
A következő lépésben kérjük meg Pistit, hogy feküdjön fel a tanári asztalra (vagy egy padra). Tegyük fel a kérdést! Most milyen magas Pisti?
Eltérő véleményekre számíthatunk. Vannak, akik ismét mérnének, mások azt mondják ugyanakkora. Megállapodunk, hogy egy ember magasságán a fejétől a lábfejéig tartó hosszat értjük.
Térjünk át a háromszögekre! A hegyesszögű háromszöget vegyük elő a 3. tanári mellékletből, és kérdezzük meg, hogy milyen magas! Mérési ötletekkel állnak elő a gyerekek. Végezzük is el a mérést! Kérjük meg az egyik gyereket, hogy rajzolja rá krétával, vagy színessel a háromszögre a megmért vonalat.
Határozzuk meg a magasság fogalmát! Ehhez a ”Telefonos” változatot ajánlom. Önként vállalkozó (később bárki) adja az utasításokat, (jelen esetben a háromszög magasságvonalának megrajzolásához szükségeseket) háttal állva, vagy ülve a táblának, esetleg telefonkagylóval eljátszva, hogy vidékről beszél. A tanár a táblára rajzolt háromszögön végrehajtja az „utasításokat", minden pontatlanságot kihasználva ügyetlenkedik. Ha már ismert a játék, akkor a „táblai szerkesztő" szerepre is gyereket kérhetünk fel. A játék igen gyorsan fejleszti mind a nyelvi készséget, mind a pontatlanságok feltárására irányuló figyelmet. A játék során megfogalmazzák (némi nyelvi ügyetlenkedés után) a háromszög magasságvonalának definícióját. Hasonló ehhez a 0662 modulban előforduló (I./4.) „Kekec"-játék.
Vizsgáljuk tovább a háromszög magasságát! Fektessük a másik élére a háromszögmodellt! Most milyen magas a háromszög? Valószínűen vita alakul ki, vannak, akik vélik, hogy ugyanakkora, ahogy Pisti is. Mások azt mondják ez más eset. Segítsünk megfogalmazni:

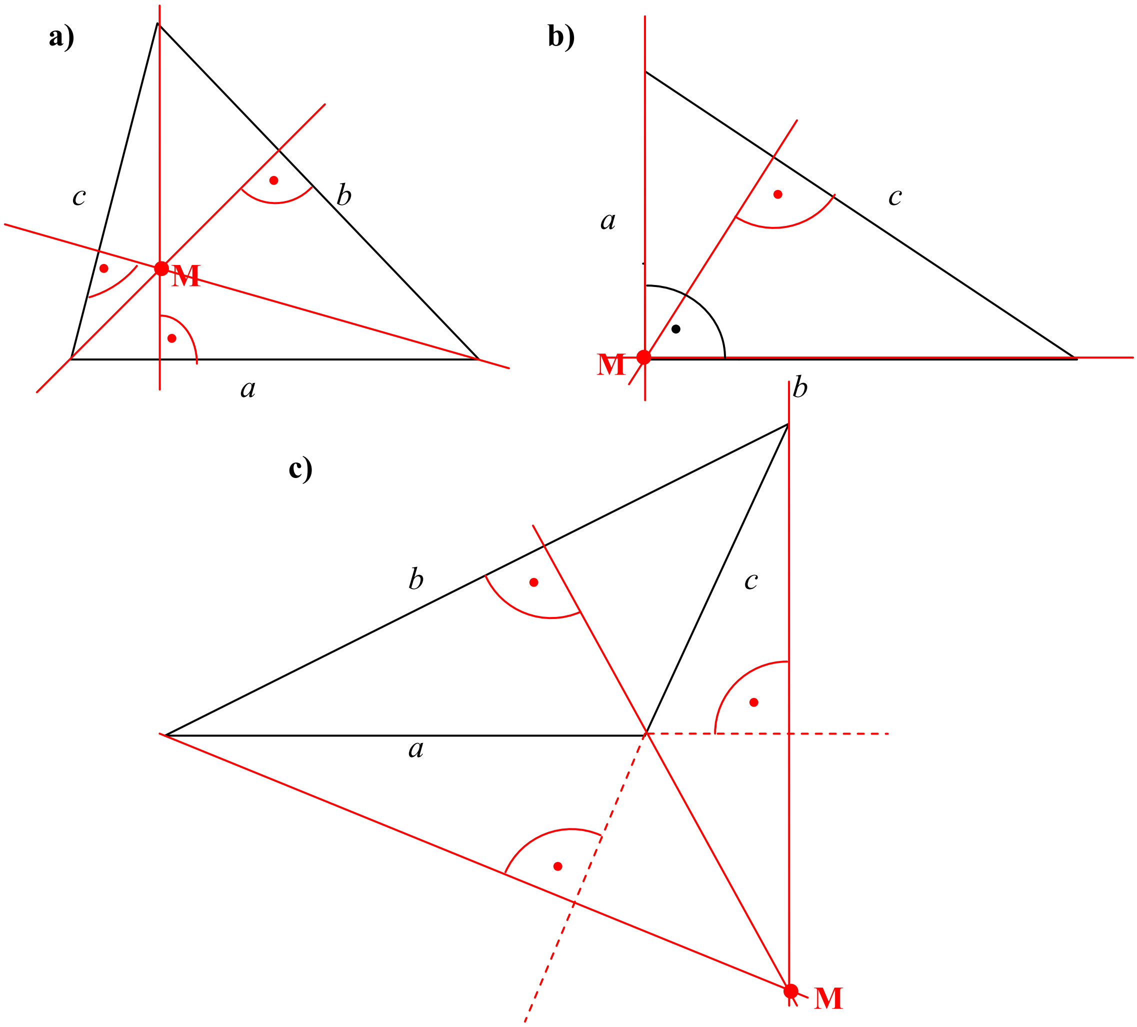
Pisti magasságát testének egy kitüntetett irányában értelmezzük, a háromszögnek azonban nincs (ez esetben) kitüntetett oldala, ezért bármelyik oldalhoz tartozik megfelelő magasság.

2. A háromszög magasságvonalai és magasságpontja

Folytassuk a magasságvonalak vizsgálatát! Ismét kérjünk meg egy gyereket, hogy a modellünkön rajzolja be a második magasságvonalat is! Kérdezzük meg, hogy berajzoltuk-e már az összes magasságot! Hamar rájöhetnek, hogy hiányzik még a harmadik oldalhoz tartozó magasság, ezt is rajzoltassuk be a modellen! Így jól látható, hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Elkereszteljük e közös pontot magasságpontnak.
Gyakorlásként a 3. feladatlap 1. a) feladatában rajzolja be mindenki a megadott hegyesszögű háromszög magasságait!
Ezután kérdezzük meg, hogy „Hol lehet a háromszög magasságpontja?”!
Kísérleti modellünkön (hegyesszögű háromszög) szépen kirajzolódtak a belső magasságvonalak, a kevésbé óvatos gyerekek bátran kijelentik, hogy a magasságpont mindig belül van.
Vegyük elő a derékszögű modellt (1. tanári melléklet), állítsuk az asztalra az egyik befogójával, és egy gyerekkel helyeztessük el a függőónt a háromszögön! Közben tisztázzuk a függőón szerepét (a függőleges irány kijelölése), mivel manapság már nem annyira közismert eszköz ez! Mutassuk meg a hegyesszögű háromszög modellünk segítségével, amelyen már be vannak rajzolva a magasságok, hogy a csúcsból elindított függőón fonala egybeesik a magasság egyenesével, tehát alkalmas annak kijelölésére! Ha nem tudunk „igazi” függőónt beszerezni, elég, ha egy fonálra erősítünk egy nehezéket, és már kész is a saját eszközünk. Ennek segítségével próbáljuk meg berajzolni a magasságvonalakat! Szépen látszik, hogy a függőón a másik befogón halad végig, tehát nem kell berajzolni, mert a derékszögű háromszögnek az egyik befogójához tartozó magasságvonala éppen a másik befogó, így a magasságpont a derékszögű csúcs. Mutassuk meg a modellünkön ezt a másik befogó esetében is, majd az átfogóhoz tartozó magasságot is nézzük meg! Láthatjuk, hogy ezt már be kell rajzolni, tegyük is meg, és azt is észrevetetjük, hogy ez a magasságvonal is áthalad a derékszögű csúcson, vagyis a magasságponton.
Folytassuk a munkát ismét a munkafüzetben, az 1. feladat b) részének derékszögű háromszögén rajzolják be a magasságokat!
Következik a harmadik háromszög modell, a tompaszögű háromszög (1. tanári melléklet), és kísérlet előtt megtippeltetjük, hogy ennek hol a magasságpontja! Ezután mérnek az előbbiek szerint. A függőón mutatja, hogy két magasságszakasz is kívül halad a háromszögön. Miután megállapítják, hogy a tompaszögű háromszög magasságpontja kívülre esik, meg is rajzolják munkafüzetükben az 1. c) feladat tompaszögű háromszögének magasságpontját!

3. FELADATLAP

1. Rajzold be a megadott háromszögek magasságvonalait, jelöld meg a magasságpontot!

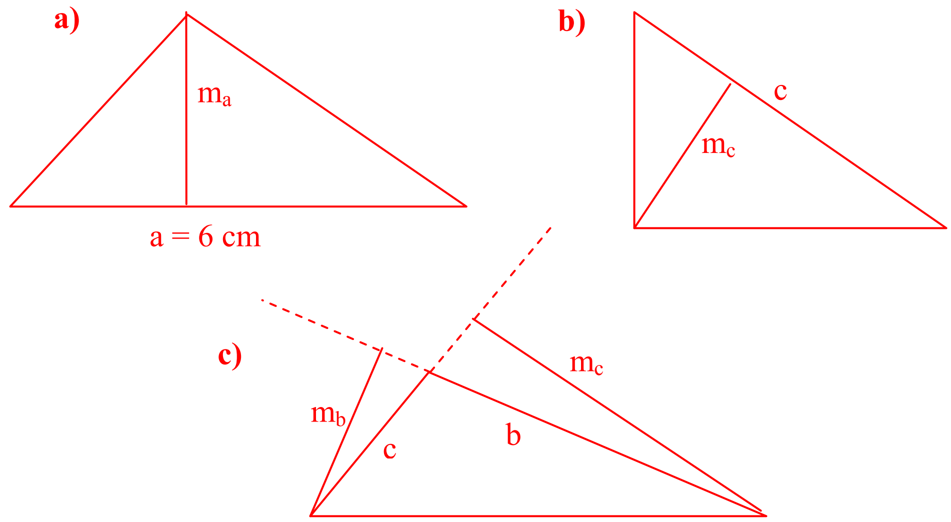


2. Szerkeszd meg a háromszögeket, és a kijelölt magasságokat!

a) A háromszög oldalai 4 cm, 5,5 cm, 6 cm. A 6 cm-es oldalhoz tartozó magasság.

b) A derékszögű háromszög befogói 3,5 cm és 4,5 cm. Az átfogóhoz tartozó magasság.

c) A háromszög két oldala 5,2 cm és 6,5 cm, az általuk bezárt szög 120°. Mind a két megadott oldalhoz tartozó magasság.



3. Döntsd el, hogy melyik állítás igaz, illetve hamis a háromszög magasságvonalaival kapcsolatosan!

Van olyan magasságvonal, amely nem halad át a háromszög egyik csúcsán sem. hamis
Az oldal és a hozzátartozó magasság mindig merőlegesek egymásra. igaz
Van olyan háromszög, amelynek nincs magasságpontja. hamis
Van olyan háromszög, amelynek magasságpontja egybeesik az egyik csúccsal. igaz
A háromszög bármely magassága mindig a háromszög belsejében helyezkedik el. hamis

4. Vonalzóra, mint alátámasztásra helyezve találjátok meg a kartonpapírból kivágott háromszög egyensúlyi helyzetét! Keressétek meg az összes lehetséges egyensúlyi helyzetet! Rajzoljátok meg a háromszögön a vonalzó alátámasztó éleit! Hány ilyen élt találtatok? Mit lehet ezekről az élekről megállapítani?

Ezután a tű és cérna segítségével függesszétek fel a háromszöget az egyik csúcsánál, és vizsgáljátok ebben a helyzetben is a háromszög egyensúlyi helyzetét! A függőón segítségével ellenőrizzétek, mivel esik egybe a függőón által kijelölt függőleges irány!
Az alátámasztó élek, amelyeket súlyvonalaknak nevezünk, a háromszög csúcsait a szemközti oldal felezőpontjával kötik össze. Három súlyvonal van, amelyek egy pontban, a súlypontban metszik egymást.

5. Rajzolj egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű háromszöget! Szerkeszd meg mindhárom háromszög súlyvonalait!

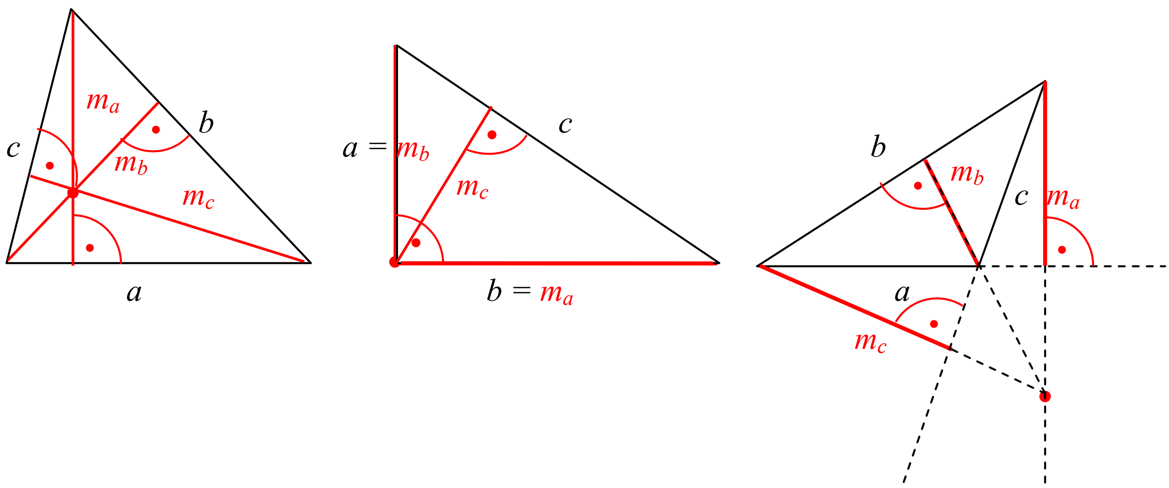
3. A háromszög magasságának megszerkesztése

Az eddigi feladatokban csak berajzolni kellett a magasságot, ezért itt az idő a szerkesztés gyakorlására is! Oldják meg az 3. feladatlap 2. feladatát, melyben három háromszögszerkesztés és egy-egy magasság megszerkesztés a feladat! Differenciáljunk, lassabban haladók az a) feladatot, gyorsabban haladók a b) és c) feladatokat is oldják meg, természetesen a hátralévő idő függvényében! A csoporton belül beszéljék meg a szerkesztés menetét, de mindenki a saját füzetében dolgozik! A csoportok között járkálva ellenőrizzük, illetve segítsük munkájukat! Ha belefér az órába, akkor a 3. feladat igaz-hamis állításait is vizsgálják meg, ha nem, adjuk házi feladatnak a megmaradt szerkesztésekkel együtt!

ÖSSZEGZÉS

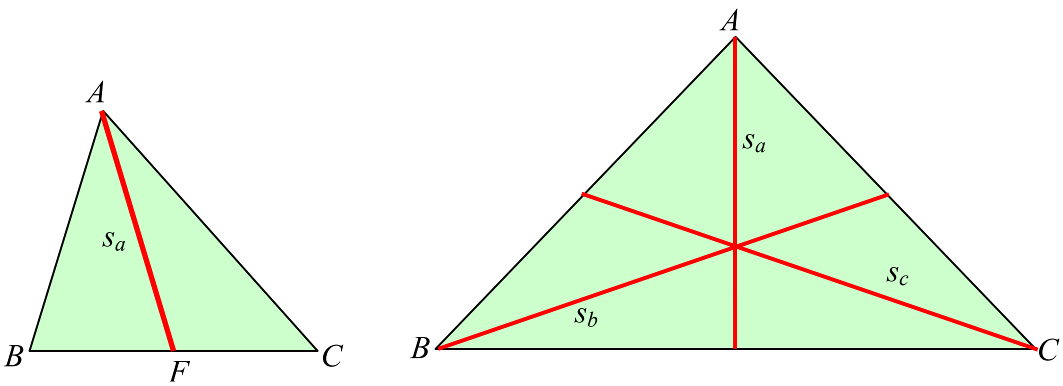
A háromszög magasságvonala, magasságpontja

A háromszög magasságvonala a háromszög csúcsából a szemközti oldalegyenesre bocsátott merőleges egyenes.
A háromszög magassága a háromszög csúcsa ás és a szemközti oldalegyenes távolsága.
Az a, b, c oldalhoz tartozó magasság jele rendre m_a, m_b, m_c.
A háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög magasságpontja.



A háromszög súlyvonala

A háromszög súlyvonala a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakasz, illetve a szakasznak a hossza. Az A, B, C csúcsból kiinduló súlyvonal jelölése rendre s_a, s_b, s_c.
A háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont a háromszög súlypontja.
A súlypont minden esetben a háromszög belső pontja.



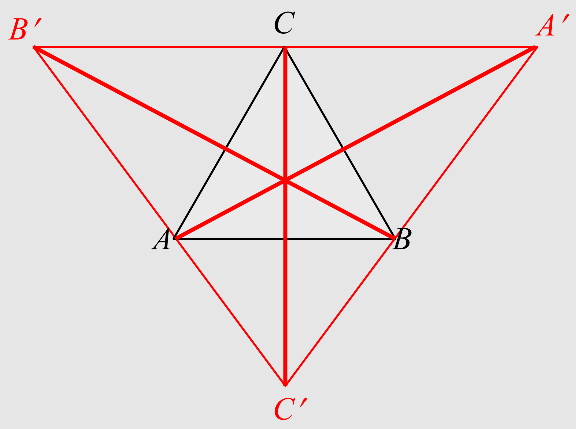
4. A háromszög súlyvonala

Az óra utolsó részében ismerkedjünk meg a háromszög újabb nevezetes vonalával, a súlyvonallal. Osszunk ki minden csoportnak kartonpapírt, ollót, tűt, cérnát és függőónt (fonálra erősített bármilyen nehezék). A kartonpapírból vágjon ki minden csoport egy tetszőleges háromszöget!

A feladat a következő: Vonalzóra, mint alátámasztásra helyezve találják meg a kartonpapírból kivágott háromszög egyensúlyi helyzetét! Keressék meg az összes lehetséges egyensúlyi helyzetet! Rajzolják meg a háromszögön a vonalzó alátámasztó éleit! Ezután a tű és cérna segítségével függesszék fel a háromszöget az egyik csúcsánál, és vizsgálják ebben a helyzetben is a háromszög egyensúlyi helyzetét! A függőón segítségével ellenőrizzék, mivel esik egybe a függőón által kijelölt függőleges irány (3. feladatlap 4. feladat)! Miután megtalálták mindhárom súlyvonalat, ügyesebbek megpróbálhatják a háromszög kiegyensúlyozását a súlypontban alátámasztva. Beszéljük meg azt is, hogy hol található a háromszög súlypontja! Kérjük meg a csoportokat, mutassák meg háromszögeiken a megtalált súlypontokat! Láthatjuk, hogy minden háromszögfajta esetén a súlypont mindig belső pont! Ugyanennek ellenőrzését tegyük meg szerkesztés segítségével is, így elkerülhetők a pontatlanságból eredő hibák (3. feladatlap 5. feladat)! Az 5. feladatot házi feladatnak is adhatjuk.

5. A magasságpont létezésének bizonyítása

Amennyiben van időnk, gyorsabban haladó osztályokban megmutathatjuk, hogy a magasságvonalak egy pontban metszik egymást. Mobil egyenesekkel (lásd „Háromszögek szerkesztése” modul, melléklet) dolgozzunk, táblán mágnessel, vagy írásvetítőn gyurmaragasztóval. A gyerekek a füzetükben szerkesztenek.
Rajzoljuk fel az *ABC* háromszöget. Kérjünk önként jelentkezőt, hogy helyezze el az egyik mobil egyenest úgy, hogy átmenjen az egyik csúcson, és párhuzamos legyen a szemközti oldallal! Folytassuk a másik, illetve a harmadik oldallal párhuzamos egyenes felrakásával! Kialakul a mobil egyenesekből egy nagyobb háromszög, *A’B’C’*.
Milyen speciális négyszöget láttok az ábrán? Megtalálják a paralelogrammákat (lehet, hogy előbb a trapézokat): *ABA’C* paralelogramma, mert szemben levő oldalai páronként párhuzamosak. *ACBC’* szintén.
Mit lehet mondani az *A’B* és a *C’B* szakaszokról? Mindkettő az *AC*-vel egyenlő hosszú, ezért egymással is egyenlők, így a nagy háromszögnek a B pont oldalfelező pontja.
Milyen szerepet játszik a nagy háromszögben az *ABC* háromszög *B* csúcsból induló magassága? Átmegy a felezőponton, és merőleges az oldalegyenesre, tehát oldalfelező merőleges.
Fejezzétek be a bizonyítást!
Ugyanez elmondható a másik két magasságról is. Eszerint az *ABC* háromszög magasságvonalai az *A’B’C’* háromszögben oldalfelező merőlegesek, ezért egy pontban metszik egymást.

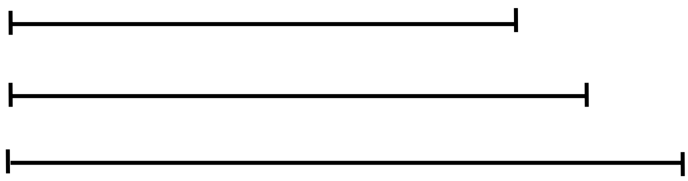


Feladatgyűjtemény: 15–27. feladat

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Szerkessz szimmetrikus háromszöget, melynek oldalai 3 cm, 5 cm, 5 cm hosszúak!
a) Szerkeszd meg az oldalfelező merőlegeseit!
b) Rajzold meg a háromszög körülírt körét!

2. Szerkessz háromszöget, ha a háromszög oldalai a megadott szakaszok!
a) Szerkeszd meg az oldalfelező merőlegeseit!
b) Rajzold meg a háromszög körülírt körét!



3. Rajzolj egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű háromszöget!
a) Tükrözd mind a három háromszöget a leghosszabb oldal felezőmerőlegesére! Milyen sokszöget határoznak meg az eredeti és a tükörkép háromszög csúcsai? Háromszögeket.
b) Tükrözd mind a három háromszöget a legrövidebb oldal felezőmerőlegesére! Milyen sokszöget határoznak meg az eredeti és a tükörkép háromszög csúcsai? Háromszögeket.

4. Rajzolj egy hegyesszögű háromszöget! Szerkeszd meg egyik oldalának felezőmerőlegesét! Határozd meg a felezőmerőlegesnek a háromszög csúcsaitól való távolságát! Az *AB* oldal felezőmerőlegese az *A* és a *B* csúcstól egyenlő távolságra (az *AB* oldal fele) van, a *C* csúcstól való távolság a *C* csúcsból a felezőmerőlegesre bocsátott merőleges szakasz hossza.

5. Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak!

a) Van olyan háromszög, amelyben az oldalfelező merőlegesek egy pontban metszik egymást. igaz

b) Minden háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja belső pont. hamis

c) Ha egy háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja nem belső pont, akkor a háromszög tompaszögű. igaz

d) Van olyan háromszög, amelyben az egyik oldal felezőpontja az oldalfelező merőlegesek metszéspontja. igaz, a derékszögű háromszög

e) Minden háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja egyenlő távolságra van a háromszög csúcsaitól. igaz

f) Nem minden háromszög köré rajzolható kör. hamis

6. Szerkessz háromszöget, amelynek oldalai 6 cm, 7 cm és 7,5 cm!

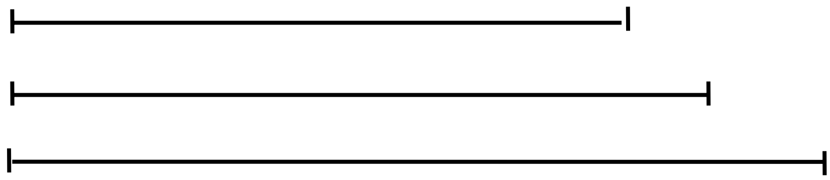
a) Szerkeszd meg a szögfelezőit!

b) Rajzold meg a háromszög beírt körét!

7. Szerkessz háromszöget, ha a háromszög oldalai a megadott szakaszok!

a) Szerkeszd meg a belső szögfelezőit!

b) Rajzold meg a háromszög beírt körét!

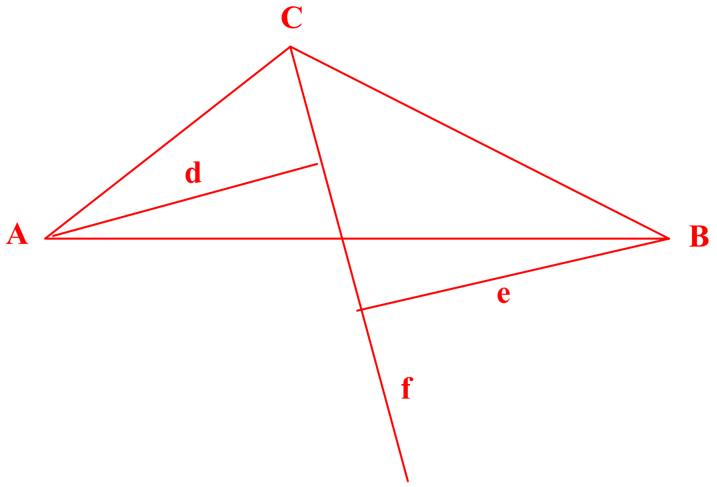


8. Rajzolj egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű háromszöget!

a) Tükrözd mind a három háromszöget a legnagyobb szögének szögfelezőjére! Milyen sokszöget határoznak meg az eredeti és a tükörkép háromszög csúcsai? Háromszögeket.

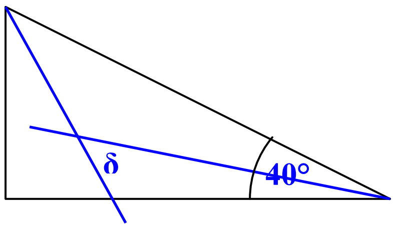
b) Tükrözd mind a három háromszöget a legkisebb szögének szögfelezőjére! Milyen sokszöget határoznak meg az eredeti és a tükörkép háromszög csúcsai? Háromszögeket.

9. Rajzolj egy tompaszögű háromszöget! Szerkeszd meg legnagyobb szögének szögfelezőjét! Határozd meg a szögfelezőnek a háromszög csúcsaitól való távolságát!



A szögfelező (*f*) *C* csúcstól való távolsága nulla. A másik két csúcsból merőlegest állítunk a szögfelezőre, és az így létrejött merőleges szakasz (*d* és *e*) hossza a keresett távolság.

10. Mekkora szöget zár be a két megadott szögfelező?



$\delta = 45°$

11. Döntsd el az alábbi állításokról, hogy mindig igaz, lehet, hogy igaz vagy hamis!

a) Van olyan háromszög, amelyben a szögfelezők egy pontban metszik egymást.
Mindig igaz.

b) Van olyan háromszög, amelynek szögfelezőinek metszéspontja külső pont.
Hamis.

c) Ha egy háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja és a szögfelezőinek metszéspontja egybeesik, akkor a háromszög szimmetrikus. Lehet, hogy igaz.

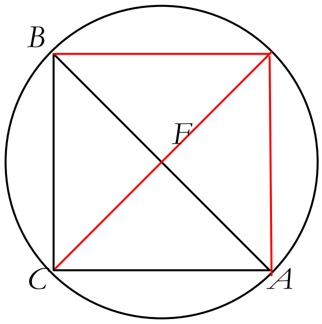
d) Nincs olyan háromszög, amelyben a szögfelezők nem metszik egymást.
Mindig igaz.

e) Minden háromszög szögfelezőinek metszéspontja egyenlő távolságra van a háromszög oldalaitól. Mindig igaz.

12. Bizonyítsd be, hogy ha a háromszög derékszögű, akkor körülírt körének középpontja az átfogó felezőpontja! (Jusson eszedbe, amit a téglalapról tudsz!)
A derékszögű háromszöget átfogójának felező pontjára tükrözve, a két háromszög együtt téglalapot alkot, melynek átlója a háromszög átfogója. A téglalap átlói felezik egymást, hiszen középpontos tükrözéssel jött létre, ezért az átlók metszéspontjától (az átfogó felezőpontja) a csúcsok egyforma távolságra vannak, tehát az átlók metszéspontja, mint középpont köré rajzolt körvonal áthalad a téglalap csúcsain.

13. Bizonyítsd be, hogy ha a háromszög körülírt körének középpontja egyik oldalának felezőpontja, akkor a háromszögnek van derékszöge! (Használd fel a kör jól megválasztott sugarainak egyenlőségét!)

I. Ha az egyik oldal felezőpontja a körülírt kör középpontja, akkor ez a felezőpont egyenlő távolságra van a háromszögnek mind a három csúcsától, $AF = BF = CF$. Emiatt az AFC és BCF háromszögek egyenlőszárú derékszögű háromszögek, így a CA és BC alapokon fekvő szögek, egyenlőségük miatt 45°-osak. Tehát a C csúcsnál lévő szög derékszög.
II. Mivel a háromszög derékszögű, kiegészíthető téglalappá. E téglalap egyik átlója a háromszög átfogója, ezért az átfogó felezőpontja a téglalapnak középpontja. (F), egyben a másik átló felezőpontja is. A téglalap átlói egyenlő hosszúak, ezért a feleik is egyenlők, az F tehát egyenlő távol van az eredeti háromszög mindhárom csúcsától, ezért a körülírt körének középpontja.



14. Rajzolj néhány különböző típusú háromszöget! Szerkeszd meg a körülírt és a beírt körüket!

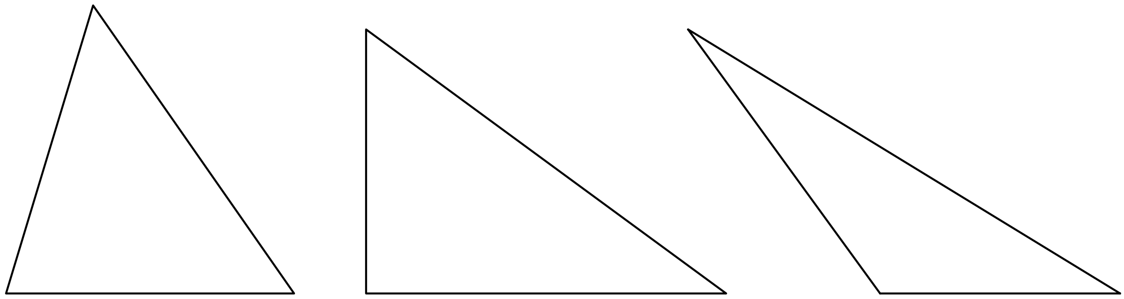
a) Van-e olyan háromszög, melynek e két köre metszi egymást? Nincs. A körülírt kör belsejében van a háromszög, a háromszögnek viszont belsejében van a beírt kör, ezért a két kör nem metszheti egymást.

b) Van-e olyan háromszög, melynek e két köre koncentrikus? Igen, a szabályos háromszög. Koncentrikusak a körök, ha a belső szögfelezők és az oldalfelező merőlegesek metszéspontja megegyezik.
Legyen az ABC háromszög A és C csúcsán áthaladó szögfelezők metszéspontja O. Mivel O-n az AC oldal felezőmerőlegese is áthalad, és a szakaszfelező a szakasznak szimmetriatengelye, ezért az AOC háromszög szimmetrikus. Így az A és C csúcsokban levő $\alpha/2$ és $\beta/2$ szögek egyenlők, amiből az eredeti háromszög két szöge, $\alpha=\beta$. Ha a háromszög másik két csúcsát választjuk kiindulásunkkor, ugyanezt kapjuk másik két szögre. Ha tehát a körök koncentrikusak, akkor a háromszög mindhárom oldala egyenlő kell, legyen.
Ez elegendő is, hiszen a szabályos háromszög oldal- és szögfelező egyenesei oldalanként egybeesnek, így be- és körülírt körének középpontja valóban közös.

15. Sorold fel, milyen húrnégyszögekről tanultunk! Rajzolj egy húrnégyszöget, és szerkeszd meg oldalainak felezőmerőlegesét! Hol találkoznak a felezőmerőlegesek?
Rajzolj olyan kört, amely a húrnégyszög csúcsain halad át!
Húrnégyszögek: szimmetrikus trapéz, téglalap, négyzet. A felezőmerőlegesek egy pontban metszik egymást, ez a négyszög köré írható kör középpontja.

16. Rajzolj egy „általános” négyszöget! Szerkeszd meg oldalainak felezőmerőlegesét! Mit tapasztalsz?
Az oldalfelező merőlegesek nem metszik egymást egy pontban.

17. Szerkeszd meg az adott háromszögek magasságpontját!



A magasságpont a hegyesszögű háromszög esetén belső pont, a derékszögű háromszögnél a derékszög csúcsa, a tompaszögű háromszög esetén pedig a háromszögön kívül található.

18. Szerkessz háromszöget, ha oldalainak hossza

a) 5 cm; 5,5 cm; 6 cm **b)** 4,5 cm; 6 cm; 7,5 cm **c)** 3,5 cm; 5 cm; 7 cm

Szerkeszd meg a háromszögek magasságvonalait!

Mérd meg a csúcsoknak a szemközti oldalegyenestől való távolságát! Az egyes oldalakhoz tartozó magasságokat kell megmérni, amelyek a következők:

a) 5,1 cm; 4,7 cm; 4,3 cm.

b) 6 cm; 4,5 cm; 3,6 cm.

c) 4,7 cm; 3,4 cm; 2,4 cm.

19. Szerkeszd meg ismét a 18. feladatban megadott háromszögeket! Szerkeszd meg mindhárom háromszög súlyvonalait!

Mind a három háromszögben a súlypont belső pont.

20. Vegyél fel a füzetedben egy tompaszögű *ABC* háromszöget!

a) Szerkeszd meg a magasságpontját, és jelöld *M*-mel!

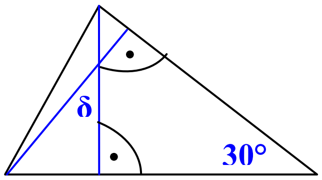
b) Szerkeszd meg az *AMC* háromszög magasságpontját! Mit veszel észre? Magyarázd meg!

A magasságpont az eredeti háromszög *B* pontja. Az *AMC* háromszögben az *AM* oldalhoz tartozó magasság tartalmazza a *CB* oldalt, a *CM* oldalhoz tartozó az *AB* oldalt, az *AC* oldal pedig megegyezik az eredeti háromszög *AC* oldalával. A három említett magasság közös pontja ezért a *B* pont. A másik két esetben hasonló a bizonyítás. Az *A, B, C* és *D* pontok bármelyike a másik három által meghatározott háromszögnek magasságpontja. (A szakirodalom ortocentrikus pontnégyesnek nevezi az ilyen négy pontot.)

c) Szerkeszd meg a *BMC* háromszög magasságpontját! Mit veszel észre? Magyarázd meg! A magasságpont az eredeti háromszög A pontja.

d) Szerkeszd meg az *AMB* háromszög magasságpontját! Mit veszel észre? Magyarázd meg! A magasságpont az eredeti háromszög C pontja.

21. Mekkora szöget zár be a két magasságvonal?



$\delta = 30°$

22. Rajzolj egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű háromszöget!

a) Tükrözd mind a három háromszöget a leghosszabb oldalhoz tartozó magasságára! Milyen sokszöget határoznak meg az eredeti és a tükörkép háromszög csúcsai?
Háromszögeket.

b) Tükrözd mind a három háromszöget a legrövidebb oldalhoz tartozó magasságára! Milyen sokszöget határoznak meg az eredeti és a tükörkép háromszög csúcsai?
Háromszögeket.

23. Egy háromszög két magasságvonalának hossza megegyezik. Milyen fajta háromszög lehet?
Szimmetrikus háromszög. Ha $m_a = m_b$, akkor $a = b$, mert $2T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$ (T a háromszög területe). A háromszög tehát egyenlőszárú.

24. Szerkessz egyenlő oldalú háromszöget, amelynek oldalai 6 cm-esek! Szerkeszd meg a magasságpontját! Vizsgáld meg a háromszögnek mely nevezetes vonalai haladnak át a magasságponton? Tapasztalataidat indokold!
A magasságponton áthaladnak a szögfelezők és az oldalfelező merőlegesek is. Az egyenlő oldalú háromszögnek három tükörtengelye egybeesnek a szögfelezőkkel, a magasságokkal és az oldalfelező merőlegesekkel.

25. Rajzolj egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű háromszöget! Tükrözd mind a három háromszöget egyik súlyvonalára! Milyen sokszöget határoznak meg az eredeti és a tükörkép háromszög csúcsai?
Tengelyesen szimmetrikus ötszöget.

26. Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak!

a) Van olyan háromszög, amelyben oldalfelező merőlegesek metszéspontja nem belső pont. Igaz.
b) Van olyan háromszög, amelyben a szögfelezők metszéspontja nem belső pont. Hamis.
c) Minden háromszögnek létezik magasságpontja. Igaz.
d) Ha egy háromszög magasságpontja a háromszögön kívül van, akkor a háromszög belső szögei nem nagyobbak 90°-nál. Hamis.
e) A szimmetrikus háromszög szögfelezőinek metszéspontja megegyezik a magasságponttal. Hamis.
f) Nincs olyan háromszög, amelynek nincs súlypontja. Igaz.
g) Ha egy háromszög súlypontja egybeesik a magasságpontjával, akkor a háromszögnek nemcsak egy tükörtengelye van. Igaz.
h) Ha egy háromszög magasságpontja a háromszög egyik csúcsa, akkor a háromszög belső szögei nem kisebbek az egyenesszög felénél. Hamis.

27. „Van-e olyan háromszög” – játék

Készíts egy-egy kártyát, melyen a háromszög valamely nevezetes pontja szerepel! Minden pontról van egy kártya. Írd fel a füzetedbe az alábbi nyitott mondatot:
Van-e olyan háromszög, melyben megegyezik a ______________ és a _______________?
Húzz a kártyakészletből kettőt, és helyezd el azokat a nyitott mondatban, majd válaszold meg a keletkezett kérdést! Válaszaidat indokold!
Van-e olyan háromszög, melyben megegyezik a magasságpont és a beírt kör középpontja?
Van-e olyan háromszög, melyben megegyezik a magasságpont és a körülírt kör középpontja?

Van-e olyan háromszög, melyben megegyezik a körülírt kör középpontja és a beírt kör középpontja?
MINDHÁROM ESETBEN A SZABÁLYOS HÁROMSZÖG. A szögfelező egyeneseknek és az oldalfelező egyeneseknek egy pontban kell metszeniük egymást. A szimmetriatengely magasságvonal, oldalfelező merőleges és szögfelező egyaránt. Mivel e nevezetes vonalcsaládok egy-egy pontban metszik egymást, ezért ezek a pontok mind a tengelyre kell, hogy essenek.

1. tanári melléklet: Demonstrációs háromszögkészlet

Demonstrációs készlet: Kemény kartonlapra nyomva a következő méretekben osztályonként 1 készlet (3 db háromszög). A háromszögek kivágandóak a határvonaluk mentén.
Az elkészítendő háromszögek méretei:

40 cm; 50 cm; 60 cm – hegyesszögű
30 cm; 40 cm; 50 cm – derékszögű
30 cm; 50 cm; 70cm – tompaszögű.

Oldalai különböző hosszúak, és különböző színnel jelöltek. A szemben lévő oldalak és szögek színezése azonos. Betűjelzéseik is a megfelelő színnel szerepelnek.