
SZÁMELMÉLET

Törzsszám (prímszám), összetett szám, prímtényező felbontás

KÉSZÍTETTE: PINTÉR KLÁRA

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Számok felépítése prímekből. Prímszámok meghatározása. Összetett számok felbontása.
Időkeret	1 óra
Ajánlott korosztály	6. osztály
Modulkapcsolódási pontok	Számfogalom, helyiértékes írásmód és a műveletek elmélyítése. Kombinatorika: osztók megkeresése.
A képességfejlesztés fókuszai	Matematikai szakszavak megfelelő használata. Induktív gondolkodás – általánosítás. Szabály megállapítása, alkalmazása. Halmazszemlélet: részhalmaz, halmazok közös része, üres halmaz. Logika – „és”, „vagy” kötőszavak helyes értelmezése, „minden”, „van olyan” helyes használata.

AJÁNLÁS

A lényeg a prímszámok fogalmának bevezetése ebben a modulban. A prímszámokat a számok prímtényező alakjából „fedezzük fel”, amit a színes rudak színeivel rakunk ki és a számok „színképének” nevezünk. A gyerekek nem látják a színes négyzetek magasságát, így kell kitalálniuk a színek jelentését. Ahogy egyre újabb színekre van szükség a számok kirakásához, természetesen jönnek a prímek, mint a számok építőkövei. Ez a szemléltetés Szendrei Julianna ötlete, kiválóan alkalmas a prímekekkel való tevékenységekre, és jól tovább vihető a prímtényező felbontásból osztók keresésére, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös fogalmak bevezetésére is. A prímtényező felbontást nem írjuk hatvány alakban, mert a hatványozást csak 7. osztályban vezetjük be. A prímtényező felbontás további alkalmazásai, ezekkel kapcsolatos érdekességek is 7. osztályban kerülnek elő, akkor játszunk a prímkártyákkal is, amikor már indokolt, hogy miért pont azokat a számokat írtuk a kártyákra. 7. osztályra maradnak azok a gondolatok, hogy például három egymás utáni természetes szám között van 2-vel, 3-mal osztható, így három egymás utáni természetes szám szorzata biztosan osztható 6-tal, stb.

A tananyag jelenlegi felépítését a megadott 1 óra indokolja, aminek az az alapja, hogy 7. osztályban újra előkerülnek a prímek, a prímtényező felbontás, stb. Véleményem szerint ennek elsajátítására feltétlen kellene 2 óra. A hiányzó óra megnyerhető, ha az elején a maradékokkal számolással csak 3 órát töltünk, vagy mivel a legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös témakörben szerepelnek törtek, onnan csípünk le egy órát.

1 órába feltétlen bele kell férjen a prímszám fogalma, a prímtényező felbontás, ebből osztók keresésének megmutatása.

Ha 2 órára tudunk tervezni, az Eratoszenészi szitát előrevehetjük a prímek fogalma után, elkezdjük, és a számok kiszitálását 200-ig házi feladatnak adjuk. Ekkor van idő gyakorolni a prímtényező felbontást, és ebből az osztók keresését.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Feladatlapok, Feladatgyűjtemény; színes rúdkészlet csoportonként és a tanárnak.

ÉRTÉKELÉS

a gyerekek munkájának megfigyelése, az ügyesebbek jutalmazása.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képessegek	Eszközök, Feladatok
I. Prímszámok			
1.	Számok „színe”	Számolási képesség. Kombinatív képessegek. Szabályalkotás.	Színes rudak csoportonként, 1. tanári melléklet, 1. feladatlap
2.	Prímszám fogalma	Kísérletezés. Rendszerezés, szabályalkotás	Színes rudak, 1. feladatlap
3.	Prímtényező felbontás	Konstruálás. Kombinatív képessegek.	Színes rudak, 1. feladatlap
4.	Gyakorlás	Alkalmazás.	2. feladatlap
5.	Számok osztói és ábrázolásuk	Alkalmazás.	Színes rudak, 3. feladatlap
6.	Eratoszenési szita	Konstruálás.	3. feladatlap

A FELDOLGOZÁS MENETE


I. Prímszámok

1. Számok „színképe”


A gyerekek csoportban dolgoznak. Minden csoport kap egy lapot 5 szám „színképével” (1. tanári melléklet), amiből ki kell találniuk a színezés szabályát. A színek megfelelnek a színes rúdkészlet színeinek, és a számok prímtényezős felbontását raktuk ki ezekkel. 2 – rózsaszín, 3 – világoskék, 5 – citromsárga, 7 – fekete és a szám a kirakott színeknek megfelelő számok szorzata. A színes rudakkal is megmutathatjuk a számokat, de csak lefektetve, felállítva csak akkor, ha a gyerekek rájöttek a szabályra. Ha kitalálták a szabályt, írják mellé a szorzat alakokat. Szükségük lesz a gyerekeknek színes ceruzákra.

1. FELADATLAP


1. Találjátok ki a színezés szabályát!

$12 =$ 

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

$45 =$ 

$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$

$36 =$ 

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$


$75 =$ 

$75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$


$98 =$ 

$98 = 2 \cdot 7 \cdot 7$

Ha valamelyik csoport kitalálja a szabályt, színes rudakból kirakhat egy számot és megmutathatja előbb a tanárnak, azután a többieknek (persze ha tényleg jó), ez segít a többieknek. Addig csinálják, amíg minden csoport rá nem jön a szabályra. Ha a szabály kitalálása egyik csoportnak sem megy, akkor segítségképpen megmutathatjuk a következőket:

$72 =$ 

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$50 =$ 

$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$

$20 =$ 

$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

$28 =$ 

$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$

$35 =$ 

$35 = 5 \cdot 7$

Felelevenítjük, hogy az egyiptomi számoknál a jelek összege adja meg a számot, itt pedig ezek szorzata adja a számot.

Minden csoportnak adjunk egy színes rúdkészletet, és minden gyerek rakjon ki legalább egy további számot, a csoport mindenkiét ellenőrizze, minden csoport egyet mutasson meg a többieknek.

2. Rakjuk ki a számokat 2-20-ig az eddig használt négyféle színű színes rúddal! Mely számoknak kell feltétlenül új színt találni? Írjuk mellé a szorzat alakot számokkal is!

A gyerekek csoportban keresik a számok előállítását, osszuk szét a számokat a csoportok között, így időt nyerünk. Utána közösen lejegyezzük az alábbi táblázatba a számok színeképet, majd a következő feladat során az osztók számát. Mindenki írja a saját füzetébe. Megállapítják, hogy a 11, 13, 17, 19 számokat nem lehet kirakni a 2, 3, 5, 7 tényezők felhasználásával. Beszéljünk meg közösen színeket ezeknek a számoknak, olyanokat, ami nincs a színes rudak között. Például 11 türkiz, 13 szürke, 17 világos zöld, 19 okkersárga.

Szám	Színkép	Osztók száma	Szám	Színkép	Osztók száma
2	2	2	12	$2 \cdot 2 \cdot 3$	6
3	3	2	13	új szín	2
4	$2 \cdot 2$	3	14	$2 \cdot 7$	4
5	5	2	15	$3 \cdot 5$	4
6	$2 \cdot 3$	4	16	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	5
7	7	2	17	új szín	2
8	$2 \cdot 2 \cdot 2$	4	18	$2 \cdot 3 \cdot 3$	6
9	$3 \cdot 3$	3	19	új szín	2
10	$2 \cdot 5$	4	20	$2 \cdot 2 \cdot 5$	6
11	új szín	2	1		1

2. A prímszám fogalma

3. Írjuk 2-20-ig a számok mellé, hogy hány osztójuk van!

Közösen beszéljük meg, mit lehet megfigyelni. Az egy színből álló számok azok, amelyeknek pontosan két osztójuk van. A többi szám ezekből felépíthető. Az egy színből álló számokat nevezzük prímekeknek, a többieket összetett számoknak. Az 1-nek egy osztója van, se nem prímszám, se nem összetett szám. A tapasztalatok alapján fogalmazzuk meg a következőket:

TUDNIVALÓ:

Azokat a természetes számokat, amelyeknek két pozitív osztója van, **prímszámoknak** nevezzük.

Azokat a természetes számokat, amelyeknek kettőnél több osztója van, **összetett számoknak** nevezzük.

Az 1 nem prímszám és nem is összetett szám.

A gyerekek csoportban oldják meg a következő feladatot, mindenki írja a füzetébe a prímekek, végül megbeszéljük közösen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47. Házi feladatként kereshetik tovább a prímekek.

Ha van időnk, itt megmutathatjuk az Eratoszteni szitát.

4. Soroljuk fel az 50-nél kisebb prímszámokat!

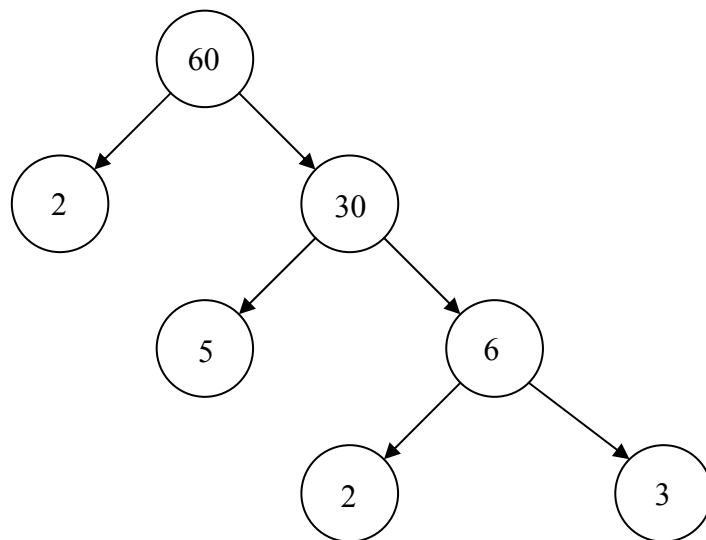
3. Prímtényező felbontás

A következő feladat a prímtényező felbontást készíti elő. A gyerekek párban dolgoznak. Mindenki készít egy színeképet, kiszámolja, melyik számhoz tartozik, és a számot megmondja a párjának, akinek szintén el kell készíteni a színeképet. Közben próbáljanak a gyerekek praktikus módszert keresni a színekép meghatározására.

5. Készíts egy színeképet, számold ki, melyik számhoz tartozik, majd a számot mondd meg a társadnak. Te megkapod az ő számát. Készítsétek el a kapott számnak is a színeképet, majd ellenőrizzétek, jól dolgozott-e a társatok!

A fenti feladatban 2-3 számot elegendő felbontani, utána közösen beszéljük meg az alábbi két módszert.

1. módszer: A számot két 1-nél nagyobb természetes szám szorzatára bontjuk, majd a tényezőket is tovább bontjuk, amíg lehet. A lépéseket nyíldiagrammal ábrázoljuk: Például:



A tovább nem bontható számok a prímszámok, ezek szorzata adja a számot:

$$60 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

2. módszer: Leírjuk a számot, húzunk mellé egy vonalat. A szám sorába írjuk a legkisebb prímosztóját, majd a szám alá ennek az osztó párját. Ezzel a számmal folytatjuk az eljárást mindaddig, amíg a baloldalra 1 kerül. A prímtényező felbontás a jobboldalon levő számok szorzata.

$$\begin{array}{r|l}
 60 & 2 \\
 30 & 2 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}$$

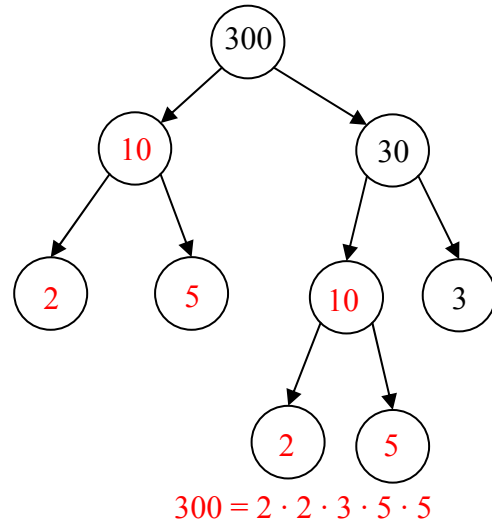
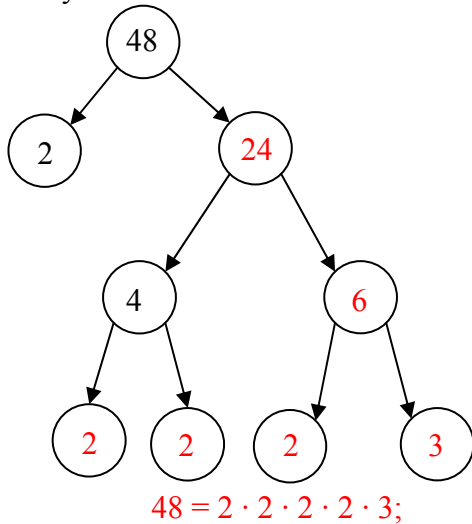
$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

4. Gyakorlás

A következő feladatlap a gyakorlást szolgálja, házi feladatnak is adható. Különösen fontos a 4. feladaton való otthoni gondolkodás, a következő órán megbeszéljük a helyes válaszokat és indoklásokat.

2. FELADATLAP

1. Egészítsd ki az alábbi diagramokat, rajzold meg a színeküket és írd fel a számok prímtényezős felbontását!



2. Írd fel a következő számok prímtényezős felbontását és rajzold meg a színeküket!

$$\begin{array}{r|l} 711 & 3 \\ 237 & 3 \\ 79 & 79 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 495 & 3 \\ 165 & 3 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

3. Az alábbi számok között a prímszámok vagy az összetett számok vannak többen?

143

53

273

259

167

1694

91

107

69

73

Prímek: 53; 73; 107; 143; 167.

Összetett szám: $143 = 11 \cdot 13$; $273 = 3 \cdot 7 \cdot 13$; $259 = 7 \cdot 37$; $1694 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11$; $91 = 7 \cdot 13$;
 $69 = 3 \cdot 23$;

4. Az alábbi állítások között melyik igaz, melyik hamis?

a) Minden prímszám páratlan.

Hamis: 2.

b) Három prímszám összege mindig páratlan.

Hamis: $2+3+5=10$, a 2 benne van, akkor páros.

c) Van két olyan prímszám, melyek különbsége 2.

Igaz: pl. 17-19; 29-31; 41-43; ezek az ikerprímek.

d) Ha egy szám osztható 5-tel, akkor nem lehet prím.

Hamis, az egyetlen 5-tel osztható prímszám az 5.

5. Számok osztói és ábrázolásuk

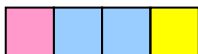
A gyerekek csoportban oldják meg a következő feladatot, mindenki írja a füzetébe az osztókat, ellenőrzik egymást. Itt az osztók keresése a prímtényezők alapján történik, ez fejleszti a kombinatív képességeket, mélyíti a prímtényező felbontás ismeretét. Az osztó párok külön is érdekesek, hiszen a színek kettéválasztásával kapjuk őket.

Figyeljük meg a kétféle szorzatokra bontások rendszerét: először az összes olyan szorzat, ahol az egyik tényező 1, a másik 3 prímtényezőtől áll, utána azok, amikor 2-2 prímtényezőtől állnak a tényezők. Más rendszer is elfogadható természetesen, például sorban az összes 1 prímtényezőtől álló osztót, 2 prímtényezőtől álló osztót, 3 prímtényezőtől álló osztót, stb. írjuk fel.

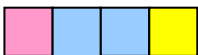








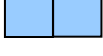

A színek színes négyzeteibe most már bele is írhatjuk a prímeket, ezzel megkönnyítjük az osztók felírását.

3. FELADATLAP

1. Rakjuk ki a következő színekpet (90):



Rakjuk ki a szám összes osztóját osztó párokban:

1 – 90			egy osztó a $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$
2 – 45			két osztó, a 2 és a $3 \cdot 3 \cdot 5$
3 – 30			két osztó, a 3 és a $2 \cdot 3 \cdot 5$
5 – 18			két osztó az 5 és a $2 \cdot 3 \cdot 3$
6 – 15			két osztó a $2 \cdot 3$ és a $3 \cdot 5$
9 – 10			két osztó a $3 \cdot 3$ és a $2 \cdot 5$

A 90-nek 12 osztója van.

Adjunk további számokat a gyerekeknek, melyek összes osztóját kell megkeresniük az előbbi módszerrel és felírni a számot és az osztóit prímtényezős alakban.

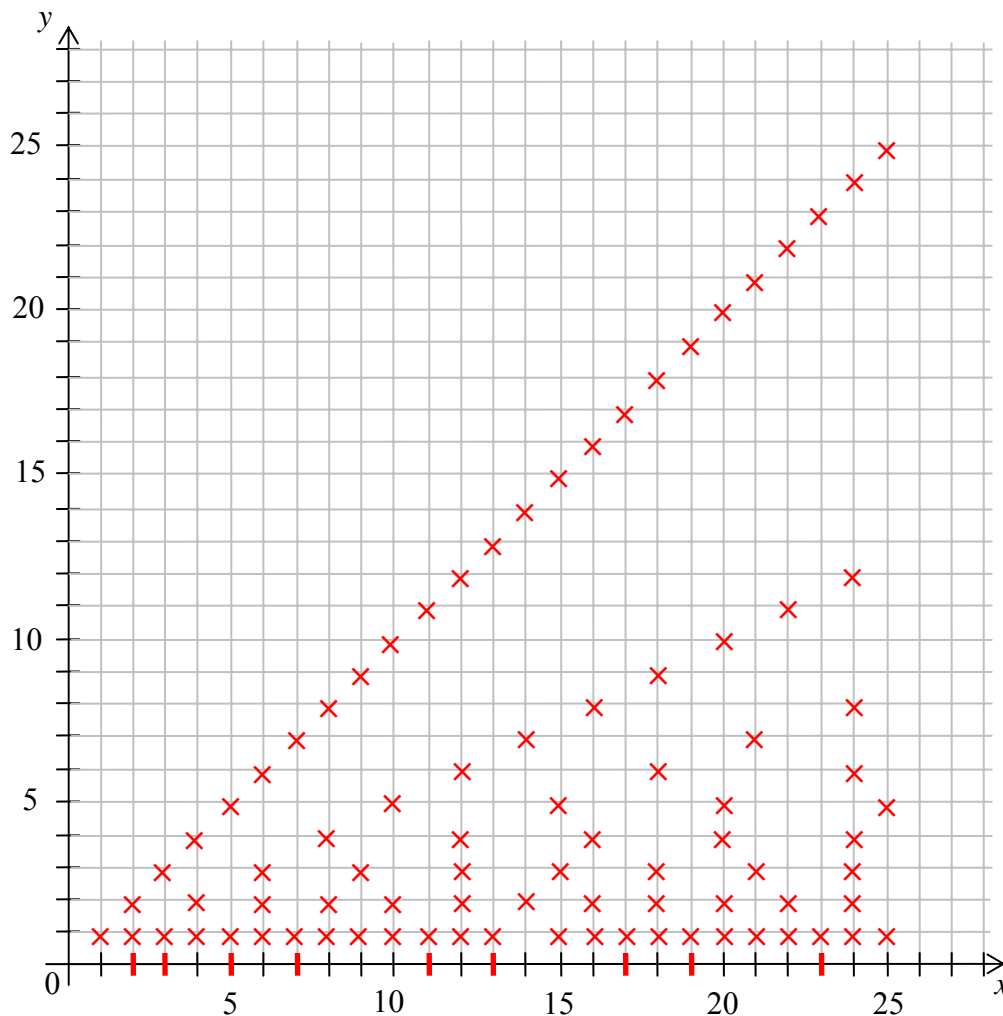
Csoportonként adjunk négy számot a gyerekeknek prímtényezős alakban, mindenki egynek önállóan keresse meg az osztóit a prímtényezők alapján, utána a csoport tagjai megbeszélnek. Közös ellenőrizzük az osztók számát.

A számok lehetnek például: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$; $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$; $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$; $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Megfigyelhetjük, hogy ha 4 prímtényező van, melyek közül kettő egyforma, akkor az osztók száma 12 függetlenül attól, hogy melyek a prímtényezők.

A következő feladatot frontálisan oldjuk meg a táblán, a gyerekek rajzolják a füzetükbe. A gyerekek házi feladatként tovább folytathatják.

2. Rajzoljunk koordináta-rendszert és ábrázoljuk a számok osztóit. Az x tengelyen a pozitív természetes számokat, az y tengelyen osztóikat ábrázoljuk: egy $(a; b)$ pontot megjelölünk, ha b osztója a -nak.



Figyeljük meg, mit lehet leolvasni az y tengellyel párhuzamos egyenesekről (egy szám összes osztóját), az x tengellyel párhuzamos egyenesekről (egy szám összes többszörösét) és a 0 pontból induló, az x tengellyel 45° szöget bezáró félegyenesről, (minden szám osztója önmagának). Olvassuk le, melyek a prímszámok! (Piros vonallal jelöltek. Ez előkészíti az Eratoszthenészi szita alkalmazását.)

6. Eratoszthenészi szita

A számok osztóinak előbbi ábrázolásából indulunk.

Figyeljük meg, hogy melyek lehetnek prímszámok.

A 2 prím, de egyetlen további többszöröse sem az.

A 3 prím, de egyetlen további többszöröse sem az.

A 4 a 2 többszöröse, nem prím.

Az 5 prím, de egyetlen további többszöröse sem az. Stb.

3. Az alábbi táblázatba a pozitív egész számokat írtuk 1-től 100-ig. Az 1 nem prím. A 2 prím, karikázzuk be, és húzzuk ki a 2 többszöröseit. A következő szám a 3, karikázzuk be, majd húzzuk ki a többszöröseit. A következő ki nem húzott szám nagyság szerint haladva az 5, karikázzuk be, majd húzzuk ki a többszöröseit. Így haladunk tovább 10-ig. (Nem kell tovább nézni, mert a 10-nél nem nagyobb számok többszöröseiként minden 100-nál nem nagyobb összetett szám előáll, ugyanis $10 \cdot 10 = 100$.) A kihúzások után megmaradt számok a 100-nál nem nagyobb prímszámok.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. A prímszámok milyen számjegyre végződhetnek? Keress mindegyikre példákat!

1; 3; 7; 9

2. Hány 7-re végződő 100-nál kisebb prímszám van?

7; 17; 37; 47; 67; 97 azaz 6 db

3. Melyik a legkisebb pozitív egész szám, amelynek a 30-szorosánál 7-tel nagyobb szám nem prím?

A $7 \cdot 30 + 7 = 217$ biztos nem prím, de van nála kisebb is, a $6 \cdot 30 + 7 = 187 = 11 \cdot 17$. Előtte a 37; 67; 97; 127; 157 prím.

4. Melyik a legkisebb pozitív prímszám, amely nem állítható elő két pozitív prímszám különbségeként?

$2 = 5 - 3$; $3 = 5 - 2$; $5 = 7 - 2$; 7 páratlan, a két szám közül az egyik páros, a másik páratlan, mindegyik szám prím, ezért a 2-nek szerepelnie kell. Csak a kivonandó lehet, ehhez a kisebbítendőnek 9-nek kéne lenni, ami viszont nem prím. Tehát a 7 a legkisebb ilyen szám.

5. Az első 20 prímszám összege páros vagy páratlan?

Egy páros és 19 páratlan szám összege páratlan.

6. Milyen számjegy áll az egyesek helyén a 100-nál kisebb prímszámok szorzatában?

A 2 és az 5 szerepel a tényezők között, ezért 10 többszöröse a szorzat, azaz 0-ra végződik.

7. Dobj egy számot dobókockával, adj hozzá 12-t. Tippelj, minek nagyobb az esélye, hogy ez az összeg prímszám vagy összetett szám! Végezd el a kísérletet 20-szor és számold össze, hányszor kaptál prímszámot és hányszor összetett számot!

13; 17 prímek, 14; 15; 16; 18 összetett számok, tehát összetett szám nagyobb eséllyel dobható.

8. Készíthető-e az 1–9 számokkal bűvös négyzet, amelyben minden sorban, oszlopban és átlóban levő számok szorzata ugyanannyi?

Nem, mert az 5 és a 7 sem szerepelhet minden sorban prímtényezőként.

9. Írjuk fel a 280, a 252, az 550, a 702 számok prímtényező felbontását! Ez alapján írjuk fel az összes osztójukat! Melyiknek hány osztója van?

$$280 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \quad 16 \text{ osztó}$$

$$252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \quad 18 \text{ osztó}$$

$$550 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \quad 12 \text{ osztó}$$

$$702 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 \quad 16 \text{ osztó}$$

10. A $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$ szorzatnak melyik szám az osztója a 15, a 25, a 39, a 45, a 66, a 102 közül? Számoljunk a prímtényezők alapján!

15; 25; 45.

11. Állapítsuk meg a prímtényező felbontás alapján, hogy a $2 \cdot 3$, a $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, a $2 \cdot 3 \cdot 11$, a $3 \cdot 5 \cdot 11$, a $2 \cdot 5 \cdot 13$, a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ szorzatok közül melyiknek többszöröse az 1650?

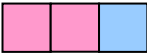
Mivel $1650 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$, ez többszöröse a $2 \cdot 3$ -nak, a $2 \cdot 3 \cdot 11$ -nek, a $3 \cdot 5 \cdot 11$ -nek, a $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ -nek.

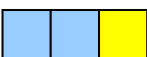
0643 – 1. tanári melléklet

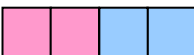
Osztályonként 8 db (csoportonként 1 db) ebben a méretben géppapíron színes nyomtatásban.


Számok színeképe


Találjátok ki a színezés szabályát!

$12 =$ 


$45 =$ 

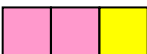
$36 =$ 

$75 =$ 

$98 =$ 

 $72 =$ 

$50 =$ 

$20 =$ 

$28 =$ 

$35 =$ 