0611. MODUL

GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK

Hány eset van?

KÉSZÍTETTE: PINTÉR KLÁRA

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Hatékony stratégiák kialakítása az összes eset felsorolására kombinatorika feladatok megoldása során. A szorzási elv felismerése különböző szövegű feladatokban. Néhány elem permutációi számának meghatározása.
Időkeret	2 óra
Ajánlott korosztály	6. osztály
Modulkapcsolódási pontok	Szorzás fogalmának mélyítése. Statisztika – összeszámlálás – táblázatba rendezés.
A képességfejlesztés fókuszai	Rendszerezés, kombinativitás Induktív gondolkodás – általánosítás. Szövegértés – a közös matematikai gondolat megtalálása különböző szövegekben. Logika – „és” , „vagy” kötőszavak helyes értelmezése. Becslés – esetek számának előzetes becslése.

AJÁNLÁS

A kombinatorika feladatok esetek összeszámlálásáról szólnak, ahol két alapvető dolgot kell figyelni, egyrészt, hogy mindig különböző eseteket soroljunk fel, másrészt hogy minden lehetőséget megtaláljunk. A korosztálynak megfelelő szint a kombinatorika feladatok megoldása során az, hogy képesek rendszerben felsorolni az összes esetet. Erre találnak, tanulnak stratégiákat, eszközöket, mint a fadiagram, a táblázatok. Egyszerű feladatoknál a szorzási elvet alkalmazzák a gyerekek. Nagyon fontos, hogy csak a konkrét tapasztalatra építve fogjunk hozzá szorozni, mert ha ezt elsietjük, lehet gyors eredményeket felmutatni, de nagyon könnyen formálissá válhat a tudás, és amint az alapfeladaton módosítunk, tehetetlenek lesznek a gyerekek, vagy hibáznak, ha nem tudják beépíteni a megoldásba a módosításokat, mert mindenáron szorzásokban akarnak gondolkozni. Ezért a szorzásos feladatok mellett feltétlenül mutassuk meg azokat a feladatokat, amikor a szorzás nem működik a módosítások miatt. A kiindulás mindig az esetek felsorolása legyen, esetleg ezen néha lehet gyorsítani a szorzással, vagy később más modellek alkalmazásával. Elengedhetetlen a sok különféle tevékenység egyéni vagy csoportmunkában.
Az anyag valójában legalább 3-4 órányi. Attól függ, hogyan tudunk haladni, hogy a tanulók mennyit találkoztak kombinatorika problémákkal korábban. A kezdőknek mindenképpen szükséges a sok tapasztalat az esetek felsorolásáról, ezért találhatók ezek a feladatok az első részben. A gráfok rajzolását, az esetek felsorolásának hatékony stratégiáit mindenképpen alaposan be kell gyakorolni. Ekkor a 2 órában nem marad idő a sorbarendezési feladatokra. Ha viszont nem kezdők, az elején lehet gyorsítani. Az anyag jellegéből adódóan a tanév során később is bármikor elővehetők az elmaradt feladatok. Nem volna szerencsés, ha a második rész teljes egészében 8. osztályra maradna, mert akkor egyszerre túlságosan sok lenne, és közben is szokni kell az ilyen típusú gondolatokhoz.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Feladatlapok, Feladatgyűjtemény,

ÉRTÉKELÉS

A gyerekek munkájának megfigyelése, a jó megoldások, gondolatok jutalmazása. Figyeljünk a gyerekekre, mert a téma különlegessége miatt nem biztos, hogy ugyanazok a gyerekek lesznek ügyesek, akik eddig a szokásos matematika feladatokban jók voltak.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. Esetek rendszerezése táblázatokkal, gráfokkal; szorzási elv			
1.	Nyaralási statisztika készítése	Adatok gyűjtése, rendszerezése.	
2.	Memória kártyák készítése; játék	Lehetőségek összeszámlálása. Ábrázolás. Figyelem, memória.	1. tanári melléklet
3.	Problémák táblázattal, gráffal, ha két dolog változhat, átvezetés a több dolog változására	Hatékony stratégia keresése: szempontok rögzítése	1. feladatlap
4.	Problémák gráffal, ha három, majd több dolog változhat	Modell felismerése.	2. feladatlap 2. tanári melléklet:
5.	További feladatok, játékok a memóriakártyákkal		
6.	Gráf modellhez szöveg készítése	Modell reprezentánsa, kreativitás.	3. tanári melléklet:
II. Sorba rendezési problémák			
1.	Szójátékok a sorba rendezésre	Verbális képességek, kreativitás, szövegértés.	
2.	Játék négy elem sorba rendezésére	Megkülönböztetés, rendszerezés.	
3.	Három, négy elem lehetséges sorrendjei	Modell felismerése	3. feladatlap
4.	Kerek asztal, ismétlődő elemek	Modell módosításainak felismerése	Feladatgyűjtemény

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Esetek rendszerezése táblázatokkal, gráfokkal; szorzási elv.

1. Nyaralási statisztika készítése

Mivel ez az év első órája, rá kell hangolódni a matematikára. Frontális, közös munkával kezdünk:
Kérdezzük meg a gyerekeket, ki hol volt a nyáron, mennyi ideig. Ezután próbáljuk együtt rendszerezni ezeket az adatokat. Először 2 szempont alapján, majd 3 szempont alapján. Az alábbi táblázat lehetőség, más szempontokat is találhatunk a gyerekeknek megfelelően, sőt a feladat el is hagyható, ha sok gyerek nem tudott eljutni nyaralni, és kellemetlenül érezné magát emiatt. A táblázatok ezért is nem kerültek bele a gyerekek munkafüzetébe. Viszont jó lenne, ha a táblázatokat és a lehetséges csoportok számát lejegyeznék a füzetükbe. A kisebbik táblázatba tegyen egy *x*-et abba a mezőbe, ahová ő maga tartozik, a nagyobbik táblázatot nagyban rajzolja le, és töltse ki az osztálytársai nevével.
Alternatív feladat a nyaralás helyett:
Ha kevesen nyaraltak az osztályból, a gyerekeket akkor is szétoszthatjuk 2-2 csoportra a következő szempontok alapján:
– barna hajú/nem barna hajú
– barna szemű/nem barna szemű
– fiú/lány
vagy
– sportolás
– tanult nyelv
– zenetanulás
Meséljetek a nyaralásról!
Próbáljunk erről statisztikát készíteni!
Két lehetséges szempont a rendszerezésre:
– **helyszín**: Magyarország vagy külföld
– **időtartam**: legfeljebb egy hét vagy egy hétnél több.
Felrajzoljuk a táblára az alábbi táblázatot, és a gyerekek monogramját beírjuk a megfelelő rubrikába.

	Magyarország	Külföld
Legfeljebb egy hét		
Több, mint egy hét		

Hány csoportba osztottuk így a nyaraló gyerekeket?
Kétféle hely, kétféle időtartam, $2 \cdot 2 =$ **4 csoport**
Figyelembe vehetünk **harmadik szempont**ot is, hogy **családtagjaikkal** vagy **gyerek csoporttal** nyaraltak. Ekkor a táblázat:

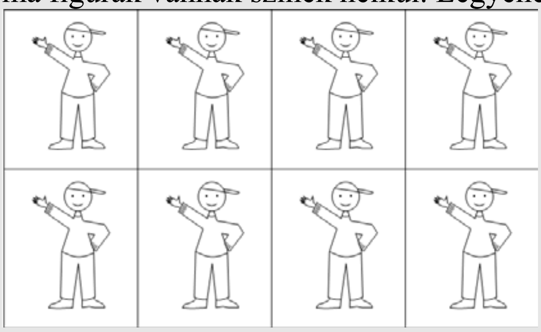
		Magyarország	Külföld
Legfeljebb egy hét	Családtagokkal		
	Gyerekcsoporttal		
Több, mint egy hét	Családtagokkal		
	gyerekcsoporttal		

Rövidebb ideig tart a táblázat kitöltése, ha a gyerekek monogramja kis kártyán van, amiket felragasztunk a megfelelő helyre, ekkor az új táblázatot az előzőből nyerhetjük a megfelelő rubrikák kettéosztásával. Ez segíti azt is, hogy lássák, hogy most a csoportok száma megkétszereződött.

Hány csoportba osztottuk így a nyaraló gyerekeket?
Megszámolhatjuk, hogy 8 csoport van, vagy gondolkodhatunk úgy, hogy minden korábbi csoportot két részre osztottunk, így $2 \cdot 4 =$ **8 csoport** lesz.

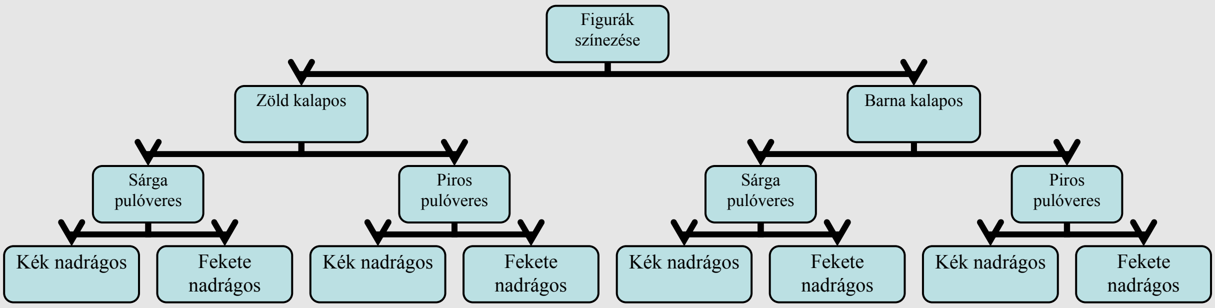
2. Memória kártyák készítése; játék

A gyerekek csoportokban dolgoznak, minden csoport kap 16 darab kártyát (**1. tanári melléklet**), melyen egyforma figurák vannak színek nélkül. Legyenek tartalék kártyáink!



A kártyák elkészítése és a lehetőségek számának megbeszélése után a gyerekek játszhatnak a memória kártyákkal, ami nemcsak a motivációt erősíti, hanem a különböző esetek megkülönböztetésének képességét és a memóriát is fejleszti.
A kártyákat a gyerekek színezzék ki (lehetőleg filctollal) úgy, hogy a kalapjuk zöld vagy barna lehet, a pulóverük sárga vagy piros, a nadrágjuk pedig kék vagy barna. Mindegyik fajta figurából 2 darabot kell készíteni. Így egy gyerek (4 fős csoportot feltételezve) 4 kártyát színez, ez nem túl sok. A színezés megszervezése fontos eleme a hatékony stratégia megtalálásának, erre hívjuk fel a gyerekek figyelmét! Kétféle kalap van, ezért először válasszuk ki, hogy a csoport melyik két tagja színezi az összes zöld kalapos figurát, a másik kettő pedig a barna kalaposokat. Aztán a két gyerek, aki azonos színű kalapot színez, kiosztja, melyikük színezi a sárga pulóvereseket, melyikük a pirosakat. Ezzel személyessé tehetők, megjeleníthetők az esetek.
Hányféleképpen lehetett színezni a figurákat? Az összeszámlálást végezzük úgy, hogy megszámoljuk, hány zöld kalapos, és hány barna kalapos van.
Zöld kalaposból is és barna kalaposból is 4 darab van, így összesen $2 \cdot 4 = 8$-féle különböző figura lehetett.
Ábrázoljuk közösen gráffal a lehetőségeket (a tanár rávezető kérdéseket tesz fel: hányféle kalap lehet, az azonos színű kalaposoknak hányféle pulóvere lehet, … a gyerekek válaszai

alapján a tanár felrajzolja a gráfot. Ez lesz a minta a további feladatokhoz, amelyeket már a gyerekek önállóan is megoldhatnak.



Itt a gráfoknál nagyon fontos, hogy vissza is tudják a gyerekek olvasni a gráfról az eseteket. Pl. Felemelek egy kártyát, zöld kalapos, sárga pulóveres, kék nadrágos. Hol van a gráfban ez a kártya? Ez szerintem egy fontos lépés, és később is a gráfok készítésénél meg kell győződni, hogy „nem vesztették-e el a fonalat” a gráfok készítése közben.
A gráf alapján figyeljük meg, hogy a lehetőségek száma összesen: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
Olvassuk le a gráfról (és esetleg rakjuk is ki a megfelelő kártyákat), hogy hány sárga pulóveres figura van? 4
Olvassuk le a gráfról (és esetleg rakjuk is ki a megfelelő kártyákat), hogy hány piros pulóveres és kék nadrágos figura van? 2
Játszhatjuk ezt láncban úgy is, hogy amelyik gyerek tudja a választ, az tehet fel egy ehhez hasonló kérdést erről a gráfról.
A gyerekek jutalmul játszhatnak csoportonként egy memória játékot az elkészített kártyákkal – minden figurából pontosan kettő van.
A memória játék szabálya: lefele fordítva lerakják a kártyákat. Egy játékos felfordít egy, majd még egy kártyát, és felveszi, ha ezek egyformák, különben visszafordítja, és másik játékos következik. Az nyer, aki a legtöbb párt gyűjtötte.

3. Problémák táblázattal, gráffal, ha két dolog változhat, átvezetés a több dolog változására.

A gyerekek egyéni munkában kitöltik az 1. feladatlapot. A feladatok egyrészt a gráfok, táblázatok kiegészítését és alkotását célozzák, másrészt azt a hatékony összeszámlálási stratégiát, hogy egy szempont szerinti választás rögzítésével keressük a lehetőségek számát. Az előbbi két feladat mintaként szolgál ehhez, de ha nem megy önállóan a gyerekeknek, akkor az elején közösen indítsuk el a feladat megoldását. Ha ezek a feladatok már nagyon jól mennek a gyerekeknek, átléphetőek a könnyebb feladatok. Vigyázzunk, mert sok rajzos, kirakós tapasztalat szükséges ahhoz, hogy később biztonságosan oldjanak meg a gyerekek ilyen feladatokat!

1. FELADATLAP

1. Kati Szegeden nyaralt. Barátnőinek szegedi képeslapokat akart küldeni szép bélyegekkel, mindegyiknek különbözőt (két felbélyegzett képeslap különböző, ha a képeslap és a bélyeg közül legalább ez egyik nem ugyanolyan). Ötféle képeslapot talált, melyek a Dómot, a Móra Ferenc Múzeumot, az Alsóvárosi Templomot, a Tiszát és a Hősök Kapuját ábrázolták, és háromféle bélyeget talált, az egyik fajtán virág, a másikon autó, a harmadikon kutya van.

a) Készíts táblázatot, amibe bele lehet írni, melyik képeslap + bélyeg összeállítást melyik barátnőnek küldi.
Rajzold körbe kékkel a táblázatnak azt a részét, ahová a neveket írhatja Kati!

	Dóm	Múzeum	Alsóvárosi Templom	Tisza	Hősök Kapuja		
Virág							
Autó							
Kutya							

A gyerekek megkapják a kitöltetlen táblázatot segítségképpen, meg hogy ne a vonalazgatással menjen el az idő. A további kérdésekre a kékkel körberajzolt téglalap alapján válaszolhatunk.

b) Legfeljebb hány barátnőjének küldhet így képeslapot?
$5 \cdot 3 = 15$ lehetőség van, így legfeljebb 15 barátnőjének küldhet ilyen képeslapot.

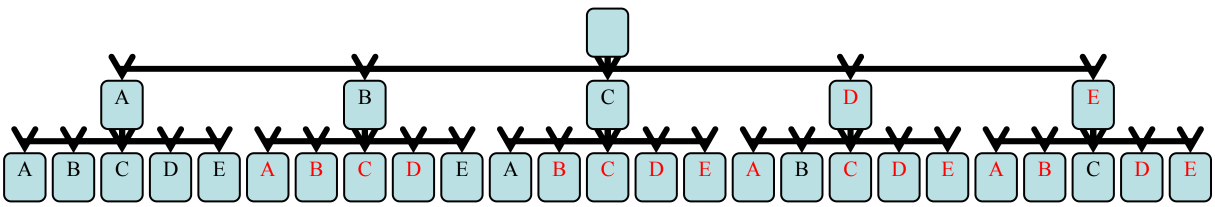
c) Hány darabot vegyen az egyes képeslapokból és a bélyegekből, ha az összes lehetőséget ki akarja használni?
Mivel mindegyik képeslap háromféle bélyeggel lehet, ezért mindegyik képeslapból 3 darabot kell venni – a sorok száma a táblázatban.
Mivel mindegyik fajta bélyeg ötféle képeslapon lehet, ezért mindegyik bélyegből 5 darabot kell venni – az oszlopok száma a táblázatban.

2. Hányféle különböző kétbetűs monogramot lehet készíteni 5 különböző betűből? Két monogram különböző, ha legalább az egyik helyen más betű áll.

a) Készíts táblázatot!
Az oszlopok a monogram első betűjét, a sorok a második betűjét jelentik.

	A	B	C	D	E
A	AA	BA	CA	DA	EA
B	AB	BB	CB	DB	EB
C	AC	BC	CC	DC	EC
D	AD	BD	CD	DD	ED
E	AE	BE	CE	DE	EE

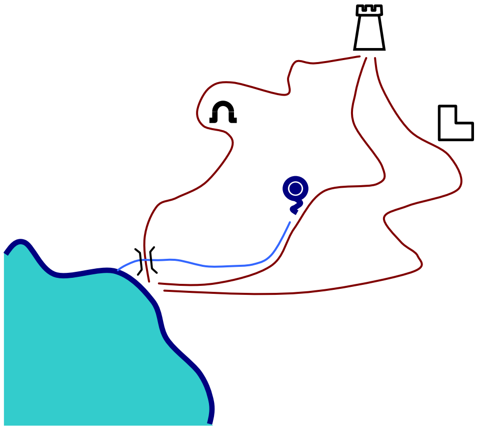
b) Egészítsd ki a gráfot!



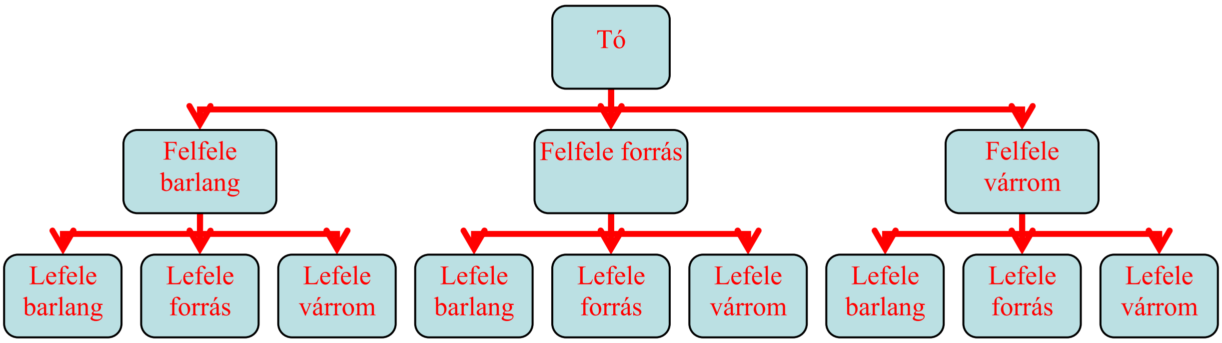
A lehetséges kétbetűs monogramok száma: $5 \cdot 5 = 25$

c) Hány betűre lenne szükség, hogy az osztályotok minden tanulójának tudjatok ezekből a betűkből különböző kétbetűs monogramot összeállítani?
Ha az osztálylétszám legfeljebb 25, akkor 5 betű elég, ha 25-nél több, de legfeljebb 36, akkor 6 betű kell, és ha 36-nál is több, akkor kell 7 betű.

3. Egy túra a tótól a hegyen levő kilátóba vezet. Háromféle útvonal vezet a kilátóba, az egyik úton egy barlang, a másikon egy forrás, a harmadikon egy várrom esik útba.



a) Hányféleképpen lehet oda-vissza megtenni a túrát, ha felfelé és lefelé is bármelyik útvonalat választhatjuk? Rajzolj gráfot!



Mivel felfelé is háromféle útvonal közül lehet választani, és lefelé is, ezért 3 · 3 = 9 lehetőség van.

b) Hány útvonal lehetséges, ha a túra során két látványosságot szeretnénk útba ejteni?

Az előző 9 lehetőség közül nem felelnek meg azok, amelyek során ugyanazt a látványosságot ejtik útba felfelé, mint lefelé. 3 ilyen eset van, így 9 – 3 = 6 lehetőség marad túra útvonalaira.

4. Figyeld meg az alábbi táblázatot!

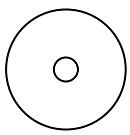
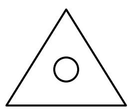
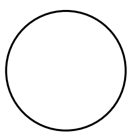
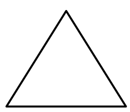
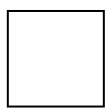
a) Milyen alakzat hiányzik a táblázatból?

Lyukas négyzet

b) Hány szempont szerint osztályoztuk a logikai készlet elemeit, és mik voltak ezek a szempontok?

Két szempont, az alak és a lyukasság szerint.

c) Helyezd el a logikai készlet elemeit a megfelelő téglalapokban!

	Kör	Háromszög	Négyzet
Lyukas			
Teli			

d) Milyen szempont szerint lehetne még osztályozni, és így hány csoport lenne?

A megfelelő helyekre berakható elemek alapján látható, hogy a mind a 6 csoport két részre osztható aszerint, hogy kicsi vagy nagy.

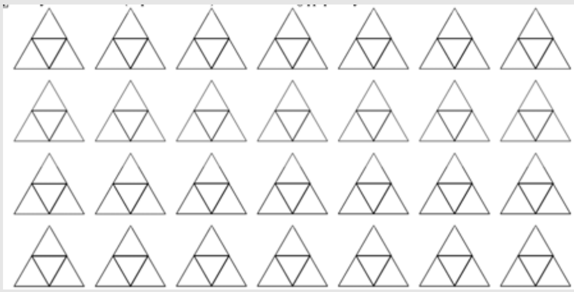
Így $6 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ csoport lesz. Ekkor mindegyik csoportba egy-egy elem jut a piros, kék, zöld, sárga színekből.

Ez alapján kiszámolható a logikai készlet elemeinek száma: $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 48$

A táblázatban adott csoportosítást folytathatjuk a színek alapján is, így mind a 6 csoport négy részre osztható, így $6 \cdot 4 = 24$ csoport lesz, mindegyikben egy-egy lyukas és nem lyukas elem.

4. Problémák gráffal, ha három, majd több dolog változhat

A gyerekek egyéni munkában kitöltik a 2. feladatlapot. A több szempont szerinti változást tartalmazó feladatok táblázatokkal nehezebben ábrázolhatók, ezért most a gráfok rajzolását gyakoroljuk, utána végezzük a szorzást. A 3. feladathoz használjuk a **2. tanári melléklet** háromszögkártyáit!



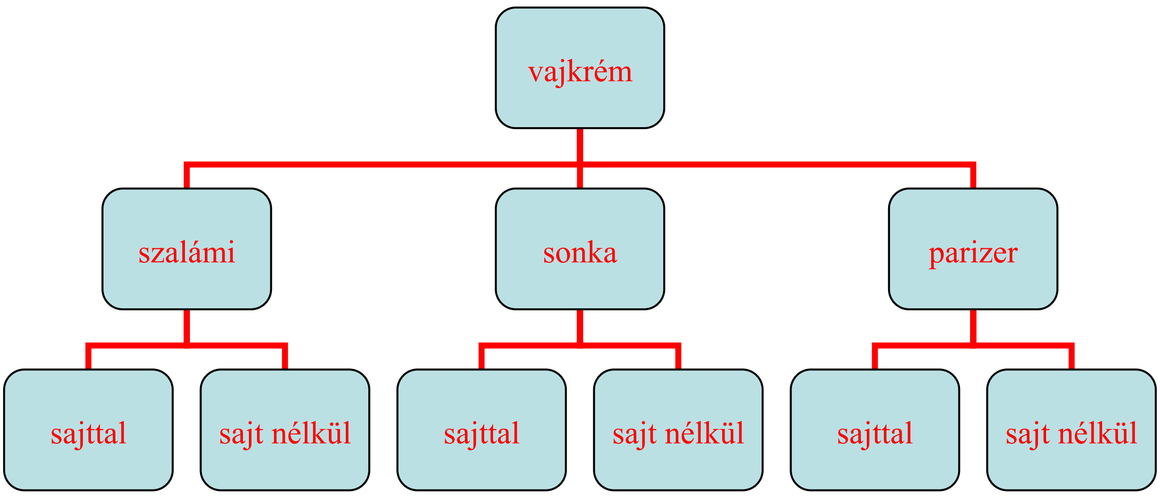
A feladatoknak vannak olyan kérdései, amelyek azt mutatják, hogy nem szabad mindig szorozni. Az utolsó feladat pedig egyáltalán nem szorzással működik. Erre azért van szükség, mert a gyerekek hajlamosak mindig szorozni, ha megtanulták ezt a módszert.

Fontos, hogy ha kevés az időnk, akkor inkább a sorba rendezéseket hagyjuk későbbre, az itt következő feladatlap ugyanis szükséges a továbblépéshez.

2. FELADATLAP

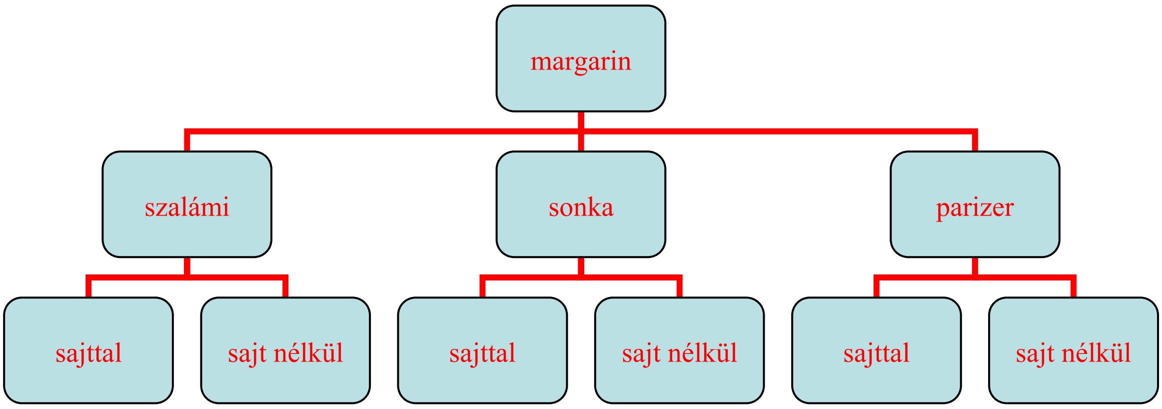
1. Szendvicseket készítünk az útra. Megkenjük vajkrémmel vagy margarinnal, teszünk rá szalámit, sonkát vagy parizert és vagy rakunk bele sajtot, vagy nem.

a) Hányféle vajkrémes szendvicset lehet így készíteni? Rajzolj gráfot!



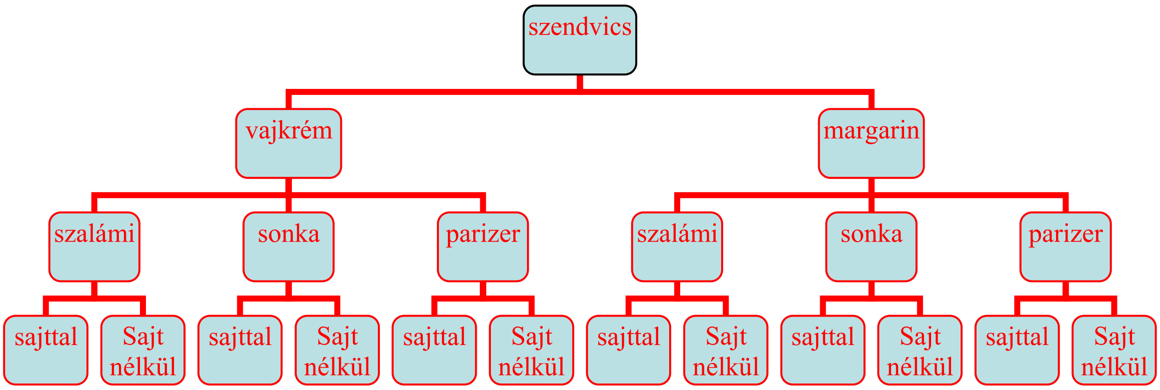
A vajkrémes szendvicsek $3 \cdot 2 = 6$ –félék lehetnek.

b) Hányféle margarinos szendvicset lehet készíteni?



Az előbbihez hasonlóan $3 \cdot 2 = 6$ lehetőség.

c) Hányféle szendvicset lehet készíteni összesen?



A lehetséges szendvicsek száma: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

d) Zsófi a parizert nem szereti, akkor hányféle szendvicset ehet?

A szalámi nélküli szendvicsek száma az előbbi gráfról is leolvashatóan: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

2. Írd ide három saját könyvednek a címét, melyeket legutóbb olvastál:

A:……………………………………………………

B:……………………………………………………

C:……………………………………………………

Néha kölcsönadod a könyveidet a barátodnak, ezért ezek a könyvek most lehetnek nálad vagy a barátodnál.

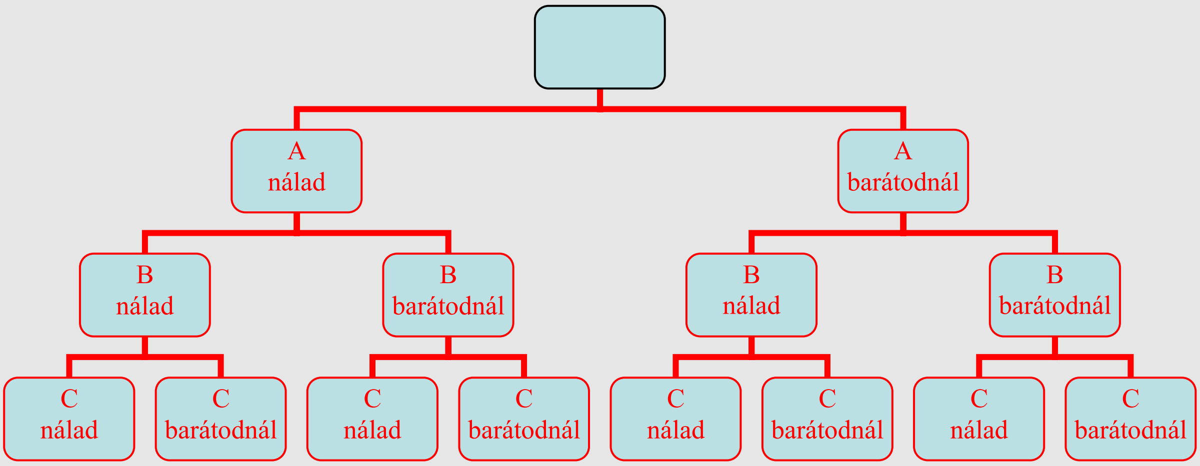
a) Hányféle lehetőség van arra, hogy a három könyv kinél van kettőtök közül?

Segítségképpen elkezdhetjük az esetek felsorolását: mely könyvek vannak nálad: *ABC*, *AB*, *AC*, *A*, *BC*, *B*, *C*, egy sem. Dolgozhatunk táblázattal is:

Nálad	Barátodnál
A	*B* *C*
B	*A* *C*
C	*A* *B*
A *B*	*C*
A *C*	*B*
B *C*	*A*
A *B* *C*	–
–	*A* *B* *C*

8 lehetőség.

Az ábrázolást indítsuk az alapján, hogy az *A* könyv nálad van, vagy a barátodnál, majd ezt a gondolatot folytassuk.



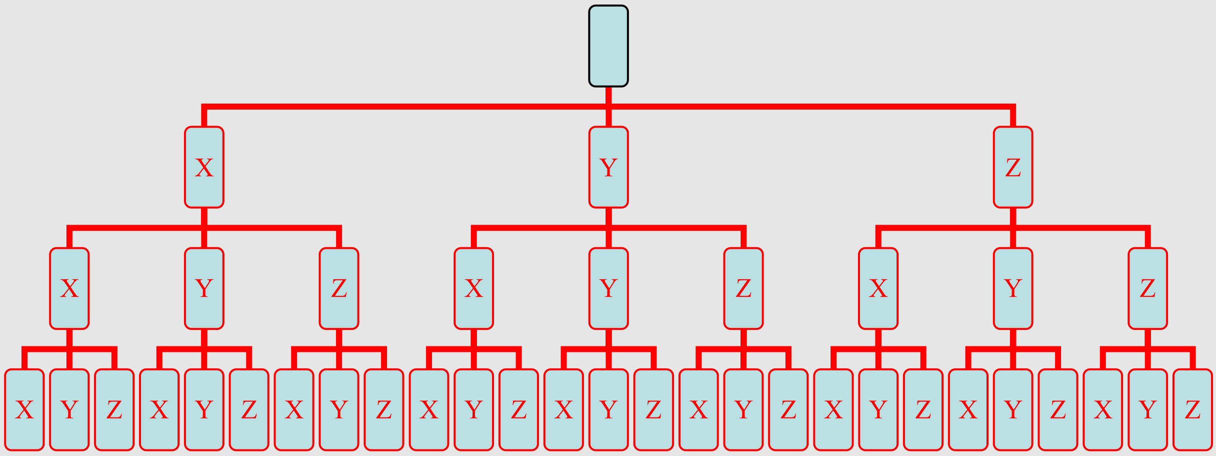
8 lehetőség.

Érdemes mindhárom megoldást megbeszélni, a különböző szempontú megközelítések miatt ez nagyban tágítja a gyerekek látókörét

b) Hányféle lehetőség van, ha a három könyvedet két barátodnak adhatod kölcsön?

A feladatnak ez a része nehezebb, lehet továbblépési lehetőség, nem feltétlen szükséges mindenkinek megoldani. A megoldás az előző gondolat folytatása 1-gyel nagyobb elemszámra.

A három gyerek nevét *X*, *Y*, *Z*-vel jelöljük, az első szinten az az *A*, a másodikon a *B*, a harmadikon pedig a *C* könyv helyét jelöljük.



Ha két barátoddal cserélgetitek a könyveket, minden könyv 3 helyen lehet, így minden elágazásnál 3 felé haladhatunk, a lehetőségek száma: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

c) Hányféleképpen lehetséges, hogy pontosan két könyv legyen nálad, ha három barátodnak adhatod kölcsön a könyveidet?

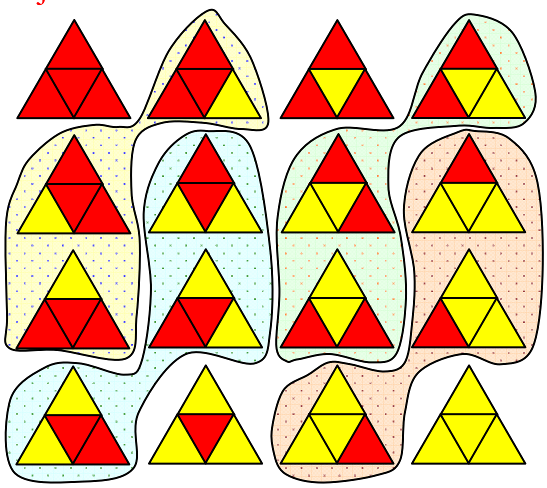
A fenti gráfról is leolvasható, hogy melyek azok az esetek, amikor pontosan két könyv van nálad. A fa gyökerétől indulva azok az ágak, melyeken végighaladva két *X*-et találunk, ezek száma: 6

Erre az eredményre juthatunk úgy is, hogy 3-féleképpen választhatjuk ki azt a könyvet, amelyik nincs nálad, és 2-féleképpen választhatjuk ki, hogy ez a könyv melyik barátodnál van, így a lehetőségek száma: $3 \cdot 2 = 6$.

3. Egy szabályos háromszöget négy egybevágó háromszögre osztottunk. Színezzük ezeket a háromszögeket pirosra vagy sárgára!

a) Hányféle különböző színű háromszöget kaphatunk?

Színezzünk! Ha lehet, próbáljunk rendszerben színezni!



Mivel mind a négy kis háromszög lehet piros is és sárga is, ez $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ lehetőség.

b) Hány háromszög van ezek között, melyeket forgatással nem lehet átvinni egymásba?

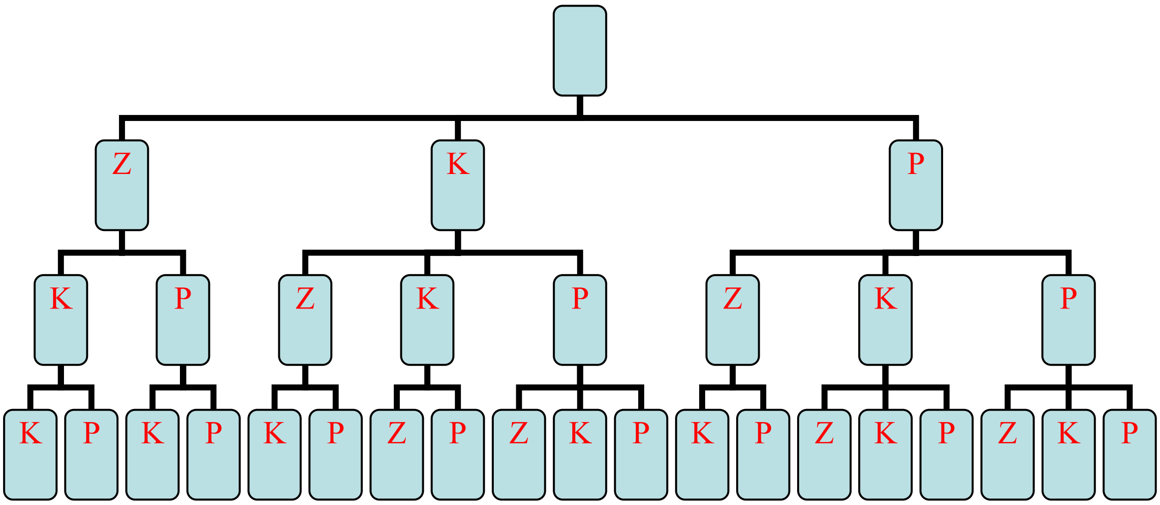
A fenti színezett háromszögek között bekarikázzuk azokat, melyek forgatással egymásba vihetők. Így 8 különböző háromszöget kapunk.

A középső háromszög 2-féle színű lehet, körülötte a 3 háromszög között lehet 3 piros, vagy 2 piros és 1 sárga, vagy 1 piros és 2 sárga, vagy 3 sárga. Ez összesen $2 \cdot 4 = 8$ lehetőség.

4. Egy kalapban 1 zöld, 2 kék és 3 piros golyó van. Három golyót húzunk sorban egymás után úgy, hogy a kihúzott golyót nem tesszük vissza.

a) Hányféleképpen húzhatunk?

Rajzoljunk gráfot! Ha az eddigiek alapján a gyerekek kezdenének leszokni a rajzolásról, itt látják a fontosságát, hiszen a feladat nem megy az automatikus szorzással.



A lehetőségek száma: 19

b) Hányféle lehet a kihúzott három golyó, ha a húzások sorrendjét nem tekintjük?

Ha a sorrend nem számít, a lehetőségek:

ZKK, ZKP, ZPP, KKP, KPP, PPP

Tehát ekkor 6 lehetőség van.

Figyeljük meg, hogy az esetek felsorolása milyen rendszer szerint történt!

c) Mondjunk olyan állításokat, melyek biztosan igazak, lehet, hogy igazak, biztosan nem igazak!

Ez a két pont a valószínűségi játékok témakörhöz is tartozhat, véleményem szerint fontos, hogy ezeknek a gondolatoknak a kapcsolata is megjelenjen tapasztalat szintjén, ezért hasznos, ha most is foglalkozunk vele.

Biztosan igaz:
– A harmadik golyó legalább kétféle színű lehet.
– Nincs két zöld golyó.
– Ha nincs zöld, akkor van piros.

Lehet, hogy igaz:
– Mindhárom színűből van.
– A három golyó egyforma színű
– Nincs piros golyó.
– Mindhárom húzás során háromféle színű golyó közül választhatunk.

Lehetetlen:
– Minden golyó kék.
– Mindhárom húzás során kétféle színű golyó közül választhatunk.

Ezt a részt feldolgozhatjuk úgy is, hogy kártyákon megadjuk az állításokat, és a gyerekeknek kell csoportosítaniuk ezeket a fenti szempont szerint.

Azt is megfigyelhetjük konkrét húzásokkal, majd a megfelelő esetek összeszámlálásával, hogy melyik kártya mekkora eséllyel lesz igaz. Ebből játékot is lehet csinálni: a gyerekek kártyákat húznak. Egy kör a megadott golyók közül három kihúzása. Minden kör végén 1 pontot kap az, akinek a kártyáján igaz állítás van. Figyeljük meg, hogy melyik kártyával hány pontot szereztek 20 kör után. Ha választhatunk a kártyák közül, melyiket érdemes választani, és melyiket egyáltalán nem?

d) Mi történik, ha minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót?
Ha minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót, és a sorrend számít, akkor mindhárom húzás során 3-féle golyó közül húzhatunk, így a lehetőségek száma: $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.
Ha a sorrend nem számít (itt sem működik a szorzás, figyeljük meg az összeszámlálás rendszerét):
– mindhárom golyó egyszínű: 3 eset
– kettő egyszínű, egy ezektől különböző: $3 \cdot 3 = 9$ eset
– három különböző színű: 1 eset
Összesen: 3+9+1=13 lehetőség.

5. További feladatok, játékok a memóriakártyákkal

Az alábbi feladatok bármikor előkerülhetnek akár a tanév során később is. A gyerekek csoportokban dolgoznak. Az elkészített memóriakártyát használják. A feladat fejleszti a megfigyelő képességet, logikai képességet.
További játéklehetőségek az elkészített memóriakártyákkal:

a) JÁTÉK: Osszuk ki a csoport tagjai között a memóriakártyákat, majd sorban mindenki rak, ha tud úgy rakni, hogy mindegyik kártya pontosan egy ruhadarab színében térjen el a közvetlen előtte levőtől!
A következő két feladat megoldása a játékbeli tevékenységen alapuljon, az itt leírt rövid megoldást előzze meg a megfelelő kártyák konkrét kirakása.

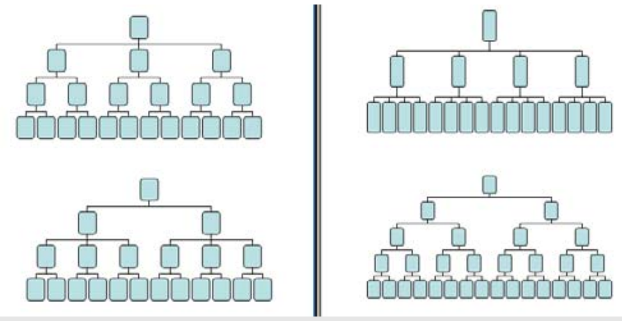
b) FELADAT: Hányféle olyan kártya van, amely a zöld kalapos, sárga pulóveres, kék nadrágostól pontosan két ruhadarab színében tér el? (az egyformákat egynek vesszük) 3-féleképpen választható ki az a ruhadarab, amelyik színe megmarad. Mivel mindegyik megváltozó színű ruhadarab csak egy másik színre változhat, így a lehetőségek száma 3.

c) FELADAT: Hányféle olyan kártya van, amely a zöld kalapos, sárga pulóveres, kék nadrágostól pontosan egy ruhadarab színében tér el? (az egyformákat egynek vesszük) 3-féleképpen választható ki az a ruhadarab, amelyik színe megváltozik. Mivel a megváltozó színű ruhadarab csak egy másik színre változhat, így a lehetőségek száma 3.

d) JÁTÉK: Rajzoljunk egy lapra egy 3x3-as táblát, melynek minden mezőjébe egy kártyát lehet helyezni. Két játékos játszhat. Leraknak egy tetszőleges kártyát akárhova a táblán. Ezután az A játékos kiválaszt egy kártyát, átadja a B játékosnak, az pedig elhelyezi a táblán. Majd B is választ egy kártyát, amit átad az A játékosnak, és ezt az A játékos helyezi el a táblán. Az győz, aki tud úgy rakni, hogy egy sorban, vagy egy oszlopban vagy átlóban három figurának legyen egyforma színű ruhadarabja.

6. Gráf modellhez szöveg készítése

A gyerekek csoportokban dolgoznak. Mindegyik csoport kap egy gráfot, melynek a mezői nincsenek kitöltve. (**3. tanári melléklet**)



A csoportnak kell kitalálnia hozzá feladatot, melynek a megoldását az adott gráf adja. Ezután leírják a feladatot, és átadják egy másik csoportnak, mindegyik csoport megoldja a másik csoport által neki adott feladatot, amit a feladat kitűzője ellenőriz. Négyféle gráfot adunk meg, ha több csoport van, vagy kitalál a tanár másikat, vagy valamelyikből több csoportnak ad, csak ezek ne egymásnak adjanak feladatot.
Ezek a feladatok fejlesztik a gyerekek kreativitását, valamint tudatosítják a korábbi, szorzásos feladatok szerkezetét, azok mintájára lehet szövegeket alkotni. Ezt tanácsolhatjuk is a gyerekeknek, ha nem tudnak elindulni.

II. Sorba rendezési problémák

1. Szójátékok a sorba rendezésre

1. Játsszunk bevezetésül közösen a Scrabble játék betűivel, a tanár húz 3 betűt, a gyerekek kirakják belőle az összes lehetséges sorrendet, megkeresik közülük az értelmes szavakat. Figyeljünk oda, hogy az összes eset felsorolása is rendszerben történjen. Ha a gyerekek más rendszert javasolnak, utána mindenképpen mutassuk meg a felsorolásnak azt a hatékony stratégiáját, ami tovább fejleszthető, és táblázatba rendezhető, gráffal lerajzolható, szorzással kiszámolható az esetszám: pl. TÁR, TRÁ, RÁT, RTÁ, ÁRT, ÁTR. A szorzást semmiképp se mutassuk még meg ennél a feladatnál, hagyjuk, hogy később maguk alkalmazzák a gyerekek, ha szükségesnek érzik.
2. Keressünk hárombetűs szavakat, melyek betűinek sorrendjét változtatva a lehető legtöbb esetben kapunk értelmes szót.
A csoportokat pontozzuk: minden olyan szó,
– amely 2 sorrendben értelmes, 1 pontot ér (például PÉK, KÉP – 1 pont),
– amelyik 3 sorrendben, az 8 pontot ér (például ÉLT, LÉT, TÉL – 8 pont),
– amelyik 4 sorrendben, az 16 pontot ér (például TÉR, RÉT, ÉRT, TRÉ – 16 pont),
– az ennél többféle sorrendben értelmes szavak 32 pontot érnek.
A gyerekek csoportokban dolgoznak. 5-10 percet adunk nekik igény szerint a szavak gyűjtésére, utána a megadott pontok szerint minden csoport teljesítményét kiértékeljük. Megbeszéljük, hogy mennyi lehetne a legtöbb szó, amit 3 betűből képezhetnénk.
Az idő letelte után adjuk fel szorgalmi feladatnak, de akkor már csak a legalább 3-féle sorrendben értelmes szavakat értékeljük.
3. Keressünk 3 - 4 szóból álló mondatokat, amelyek szórendjét megváltoztatva a mondat értelme is megváltozik. Magyarázzuk meg, és hangsúlyozással érzékeltessük a különböző értelmezéseket! Például: Ne gyere ma. Hat óra tíz perc. Nem minden téglalap négyzet.

2. Játék négy elem sorba rendezésére

A gyerekek csoportokban játszanak. Tevékenység közben fedezik fel a különböző esetek felismerését, hiszen ellenőrzik egymást. Ha a körben már mindenki passzol, közösen vizsgálják meg, hogy lehet-e újabb esetet felsorolni. Így felsorolják az összes lehetőséget négy elem sorba rendezésére.

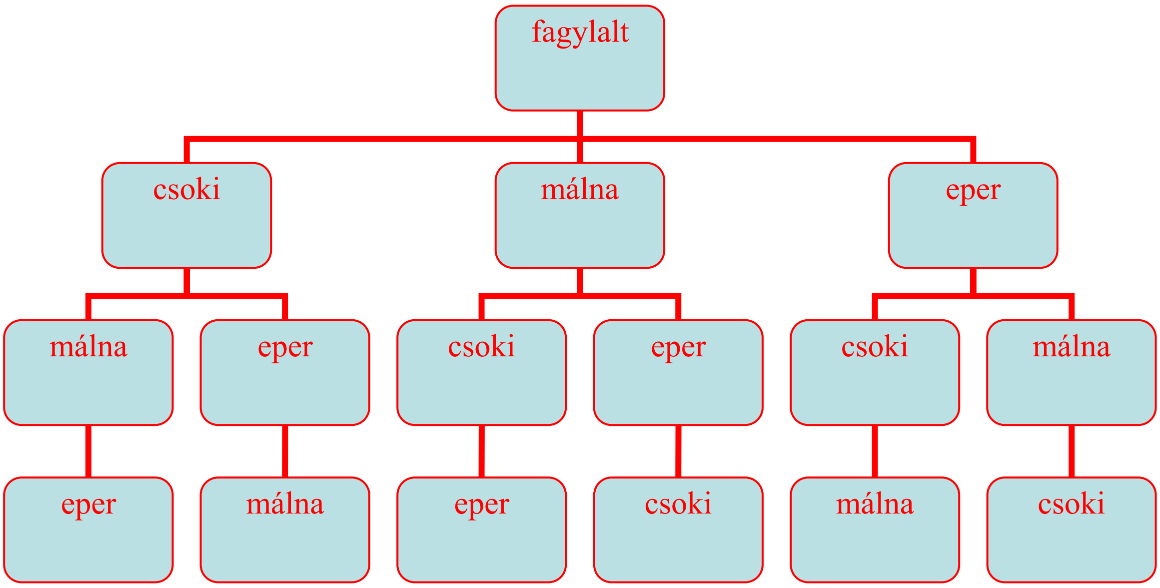
Minden játékosnak legyen piros, kék, zöld és sárga ceruzája. Körben haladva egymás után kerülnek sorra a játékosok, és mikor egy játékos sorra kerül, négy különböző színű pöttyöt rajzol egymás mellé. Mindegyik játékos ugyanarra a lapra rajzol az előző játékos négyese alá az összes előző négyestől különböző négyest. Két négyes különböző, ha valamelyik helyen nem ugyanolyan színű pötty áll. Érdemes korlátozni az időt, amíg talál valaki egy négyest. Ha rajzol egy különbözőt, akkor kap egy korongot, ha nem tud találni, passzol, nem kap semmit, ha olyat rajzol, ami már szerepelt, akkor levonnak tőle egy korongot és áthúzzák a négyesét. Az győz, aki a legtöbb korongot gyűjtötte.
A játékban színes pöttyök sorrendje helyett más eszközt is alkalmazhatunk, ha van legalább 25-30 darab „színenként”. Ezek lehetnek színes rudak, számkártyák, pénz érmék, Master Mind (színkitalálós) játék. Ha például fogpiszkálókra fűzünk fel színes gyöngyöket úgy, hogy jelöljük gyurmagombóccal melyik az eleje, akkor megvan az az előnyünk, hogy az eseteket át tudjuk rendezni egymás mellé rakva a rendszerben egymáshoz tartozókat.

3. Három, négy elem lehetséges sorrendjei

A 3. feladatlap kitöltése egyéni munkában, majd a feladatok megbeszélése. A csoportok dolgozhatnak együtt is a feladatokon. Az 1. feladat 3 elem sorrendjeinek gráffal való ábrázolására vonatkozik. A 2. feladatban egy elem rögzítésével 4 elem sorrendjeit visszavezetjük 3 elem sorrendjeire. A további feladatokban már megjelennek speciális feltételek, melyek mutatják, hogy az automatikus szorozgatással vigyázni kell. A 3. feladatban a holtverseny és az 5. feladat valójában az ismétléses permutáció előkészítését szolgálja. A gráfok rajzolása mellett sokszor érdemes az esetek rendszerben való felsorolását is felírni vagy legalább elkezdeni, hiszen akkor az elemek cseréje másképpen látszik. Hasznos, ha a gyerekek többféle megközelítésben is látják a feladatokat. Mivel a kombinatorika-feladatok megoldása során a gyerekeknek alkalmuk van saját ötleteiket kifejteni, és ez nagyban fejleszti a probléma megoldási képességüket, feltétlenül támogassuk a gyerekek különböző próbálkozásait.

3. FELADATLAP

1. Háromgombócos (csokoládé, málna, eper ízekből egyet-egyet) fagylaltot veszünk tölcsérben, a gombócokat egymás tetejére rakják. Ábrázold gráffal és számold össze az összes lehetőséget a gombócok sorrendjére!



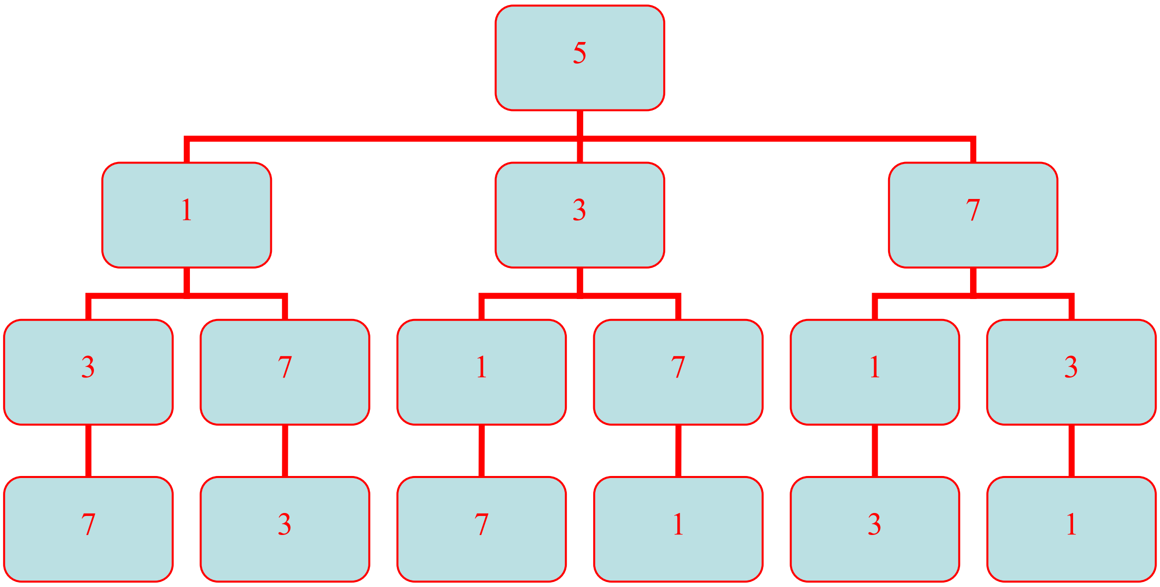
A legalsó gombóc háromféle lehet, és bármelyiket választjuk legalsónak, kétféle lehet a következő gombóc, a tetejére kerülő gombóc pedig egyértelmű.
Tehát a lehetőségek száma: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
Rendezhetjük az eseteket a következőképpen is:

CME	MCE	ECM
CEM	MEC	EMC

2. Az 1, 3, 5, 7 számjegyek egy-egy számkártyán szerepelnek.

a) Hány 5-tel osztható négyjegyű számot lehet összerakni belőlük?
Ahhoz, hogy a szám 5-tel osztható legyen, az egyes helyiértékre az 5 kell kerüljön (hiszen az 5 többszörösei 0-ra vagy 5-re végződnek). Ezután választhatjuk a tízes, a százas és az ezres helyiértéket.
Rendszerben felsorolva az eseteket:

7315	7135	3175
3715	1735	1375

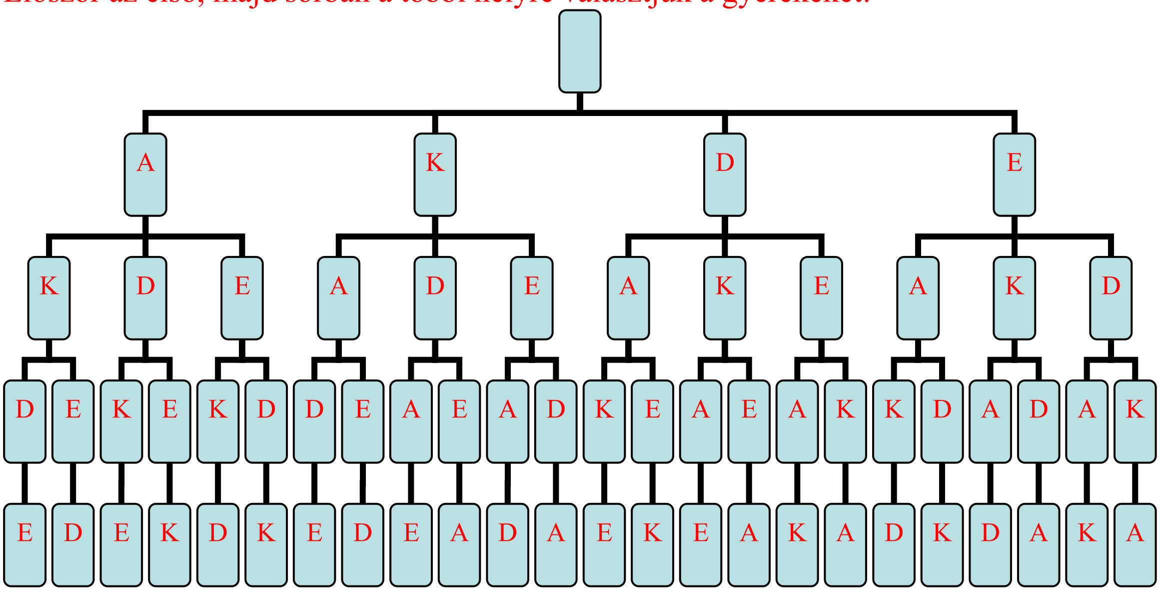


Leolvasható az általános módszer: a tízesek helyére 3-féle számot írhatunk, bármelyiket írtuk a tízesek helyére, utána a százasok helyére 2-félét írhatunk, végül egy számjegy marad az ezresek helyére. Tehát a lehetőségek száma: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

b) Hány négyjegyű számot lehet összerakni belőlük?
Ha az 5 helyett bármelyik számot írjuk az egyesek helyére, ugyanígy 6 lehetőség van. Mivel 4-féle számjegy állhat az egyesek helyén, a lehetőségek száma: $4 \cdot 6 = 24$.

3. Az iskolai szövegértés verseny első négy helyezettje: Anna, Kata, Dóra és Erna.

a) Hányféle sorrendben végezhettek az első négy helyen, ha nem volt holtverseny?
Először az első, majd sorban a többi helyre választjuk a gyerekeket:



A gráf egy ágának felrajzolása is elegendő lehet, ami után a szabályosság felismerhető. Vagy gondolkodhatunk az előző feladat mintájára: Az első helyezettet 4 gyerek közül választhatjuk, a másodikat már csak 3, a harmadikat 2, és a negyedik helyre 1 gyerek marad. Így a lehetőségek száma: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) Hányféleképpen lehetséges, hogy a második helyen Dóra végezzen, ha nem volt holtverseny?

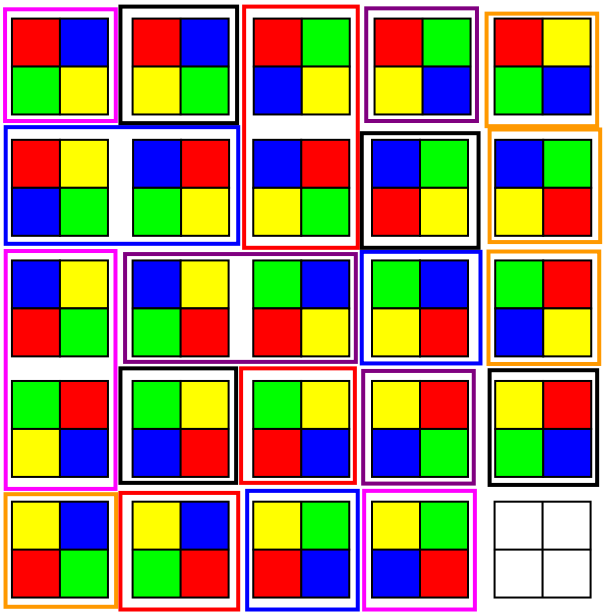
A gráfról is leolvasható, hogy Dóra 6-féleképpen végezhetett a második helyen.
Gondolkodhatunk úgy is, hogy ha Dóra a második, az első helyezettet 3-féleképpen, a harmadikat 2-féleképpen, a negyediket már csak egyféleképpen választhatjuk, így a lehetőségek száma: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

c) Hányféle sorrendben végezhettek, ha a harmadik helyen holtverseny volt?

Ha a harmadik helyen holtverseny van, akkor az utolsó két helyen a gyerekek sorrendje lényegtelen, így a lehetőségek száma az a) eset fele, azaz 12.
A válasz a gráfról is leolvasható, de ha szükséges új gráfot is rajzolhatunk. Az első helyre 4-féleképpen választhatunk ki gyereket, a másodikra 3-féleképpen, és a kimaradó kettő gyerek holtversenyben harmadik. Így a lehetőségek száma: $4 \cdot 3 = 12$.

4. Színezzük négy különböző színnel a kis négyzeteket (egy kis négyzet egyszínű). Hány lehetőség van, ha

a) a kis négyzetek helye rögzített?



Legyen szisztematikus a színezés! A bal felső sarokkal kezdjük, ez négyféle színű lehet. Rögzítsük ennek a színét, utána a többit változtassuk. A következő, a jobb felső sarok már csak háromféle színű lehet, a bal alsó sarok kétféle színű lehet, a jobb alsó sarok színe pedig már egyértelmű. Így a lehetséges színezések száma:
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

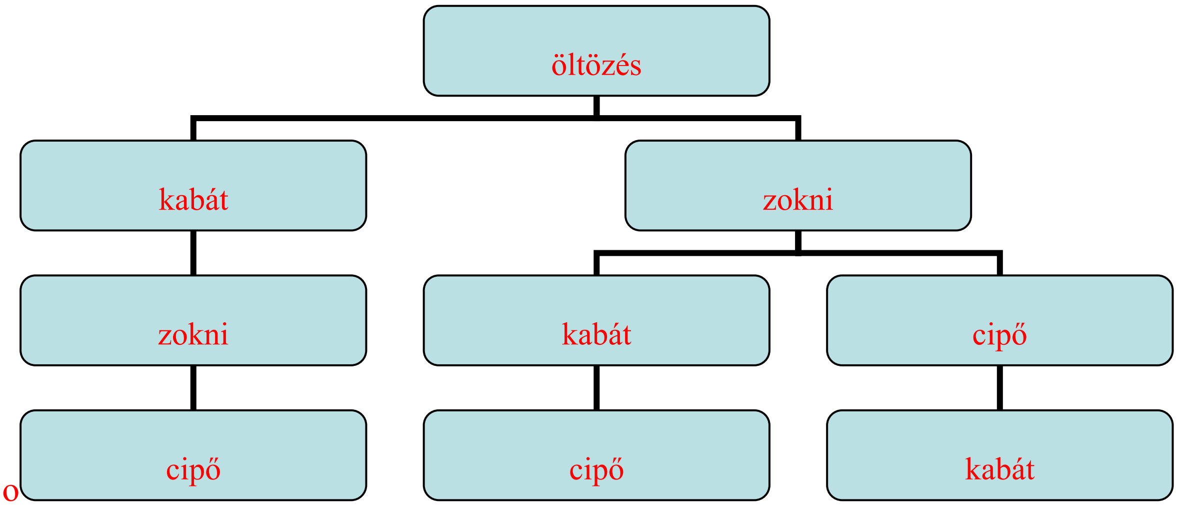
b) nem tekintjük különbözőnek azokat az eseteket, melyek forgatással egymásba átvihetők?

Karikázzuk be egy színnel azokat a négyzeteket, melyek forgatással átvihetők egymásba.
Figyeljük meg, hogy ugyanazzal a színnel mindig 4 négyzetet lehet bekarikázni, és 6-féle színnel kellett karikázni. Tehát 6 különböző négyzet van, ha a forgatással egymásba átvihetőket egyformának tekintjük.

5. Hányféle sorrendben vehetjük fel a következő ruhadarabokat?

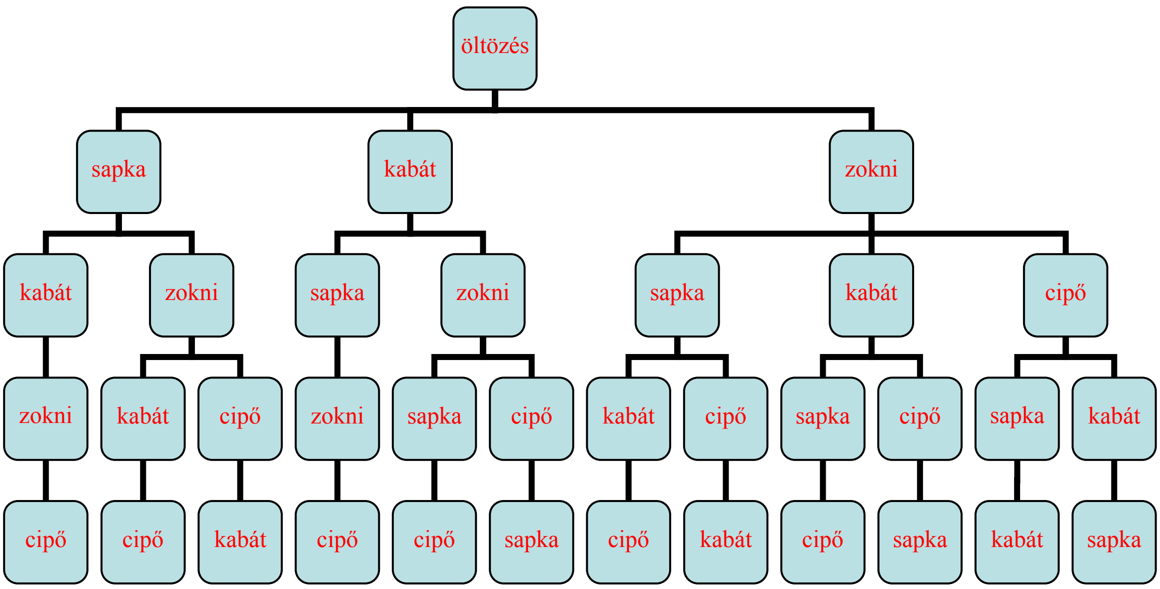
a) kabát, zokni, cipő

Rajzoljanak a gyerekek gráfot! Figyeljünk arra, hogy a zoknit feltétlenül hamarabb kell felvenni, mint a cipőt! Az automatikus szorzás nem célravezető!



o
A lehetséges sorrendek száma 3.
A három ruhadarab közül a cipő és a zokni sorrendjét nem mi határozzuk meg, az adott, ezért ez megfelel annak a modellnek, amikor két egyforma elem szerepel a sorba rendezendő elemek között – ezt a gyerekeknek nem kell megtanítani, csak a tanár jó, ha látja, hogy milyen hasonló feladatok lehetnek.

b) sapka, kabát, zokni, cipő
Az előzőhöz hasonlóan:



Láthatjuk, hogy a lehetőségek száma 12.

4. Kerek asztal, ismétlődő elemek

FELADATGYŰJTEMÉNY

1. Az étkezőben választhatunk paradicsomleves és zöldborsóleves közül, rizs, sült burgonya és vegyes zöldség köret, valamint rántott sajt, sült hús és tejfölös hús közül, melyekhez süteményt vagy pudingot lehet választani. Hányféleképpen állíthatjuk össze az ebédünket, ha

a) paradicsomlevest és rántott sajtot választunk, hozzá valamelyik köretet és desszertet.
$3 \cdot 2 = 6$

A gyerekek a megoldást gráf rajzolása útján kapják meg, az elején különösen, a többit ezekből következtethetik.

b) csak köretet eszünk feltéttel (sajttal vagy hússal). $3 \cdot 3 = 9$

c) nem eszünk desszertet. $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ (az előzőekhez kétféle levest választhatunk)

d) háromfogásos ebédet eszünk, bármit választhatunk a felsoroltak közül. $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ (az előzőekhez kétféle desszertet választhatunk)

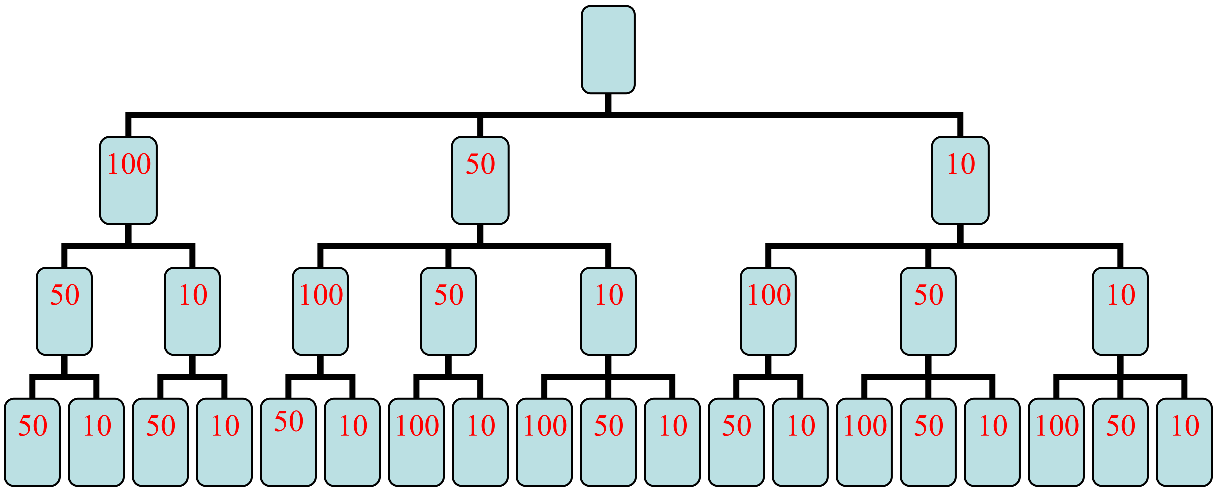
2. Kétgombócos fagylaltot veszünk, kapható eper, málna, csokoládé, citrom, vanília fagyi. Fontos számunkra a tölcsérben a gombócok sorrendje. Rajzolj!

a) Hányféleképpen választhatunk, ha mindkét gombóc különböző?
A legalsó gombóc 5-féle lehet, a következő már a legalsó fajta nem lehet, így csak 4-féle lehet. Tehát a lehetőségek száma: $5 \cdot 4 = 20$

b) Hányféleképpen választhatunk, ha ugyanabból a fajtából több gombócot is vehetünk?
Ekkor mindegyik gombóc 5-féle lehet, a lehetőségek száma: $5 \cdot 5 = 25$.

3. Dorka perselyében 1 db 100 forintos, 2 db 50 forintos, 4 db10 forintos pénzérme van. Kiráz a perselyből egymás után három érmét.

a) Hányféle lehet a sorban kirázott három érme?



A gráfról leolvasható, hogy a lehetőségek száma: 19.

b) Mennyi lehet a kirázott pénzösszeg?
Az összeg lehet:
$100 + 50 + 50 = 200$
$100 + 50 + 10 = 160$
$100 + 10 + 10 = 120$
$50 + 50 + 10 = 110$
$50 + 10 + 10 = 70$
$10 + 10 + 10 = 30$
Tehát 6-féle összeg lehet, ekkor az érmék kiesésének sorrendje nem számít.

c) Mondjunk olyan állításokat, melyek biztosan igazak, lehet, hogy igazak, és lehetetlenek a kipotyogott érmékre!
Biztos állítások:
– Nem lehet 200 forintnál több.

– Legalább 30 forint.

Lehetséges állítások:

– Háromféle érme van.
– Van 100 forintos.
– Mindegyik érme egyforma.
– Elsőre 100 forintos pottyan ki.

Lehetetlen állítások:

– Mindegyik érme 50 forintos.
– 150 Ft pottyan ki.

4. Anna, Kata és Dóra annyiszor nézik meg a kedvenc előadásukat, ahány különböző módon le tudnak ülni egymás mellé.

a) Hányszor nézik meg ezt az előadást?

Három lány lehetséges sorrendjeinek száma: $3 \cdot 2 = 6$, ennyiszer nézik meg az előadást. (ADK, AKD, DAK, DKA, KAD, KDA)

b) Az első előadáson elhatározták, hogy senki sem arra a helyre ül, amelyik jegy a kezében van. Hányféleképpen lehetséges ez?

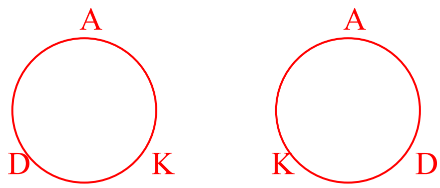
Ha Anna Kata helyére ül, akkor Dóra csak Anna helyére ülhet, így marad Katának Dóra helye. Anna ülhet Dóra helyére is, ekkor Katának kell Anna helyére ülni és Dórának Kata helyére. Más lehetőség nincsen. Tehát kétféleképpen ülhetnek le így:

Anna helye	Dóra helye	Kata helye
D	K	A
K	A	D

c) Minden előadás előtt beülnek a cukrászdába egy kerek asztal köré. Lehetséges-e, hogy minden alkalommal különféleképpen üljenek, ha a kerek asztalnál csak az számít, hogy kinek ki a szomszédja (azaz a kerek asztalt körbe forgathatónak gondoljuk)?

Rajzoljuk le a kör alakú asztalt, és köré a gyerekek nevének kezdőbetűjét!

Láthatjuk, hogy csak 2 olyan eset van, amely különböző. Gondoljunk a négyzet körbeforgatására!



5. Hányféleképpen lehet sorba rendezni a lányok nevének betűit?

DÓRA 4 különböző betű összes lehetséges sorrendjeinek száma a korábbiakhoz hasonlóan (ha szükséges, rajzoljunk, vagy kezdjük rendszerben összeírni): $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

KATA a 2 A betű sorrendje nem számít, így az előző eredményt osztani kell 2-vel (rajzoljunk először gráfot, vagy táblázatot), így a lehetőségek száma: 12.

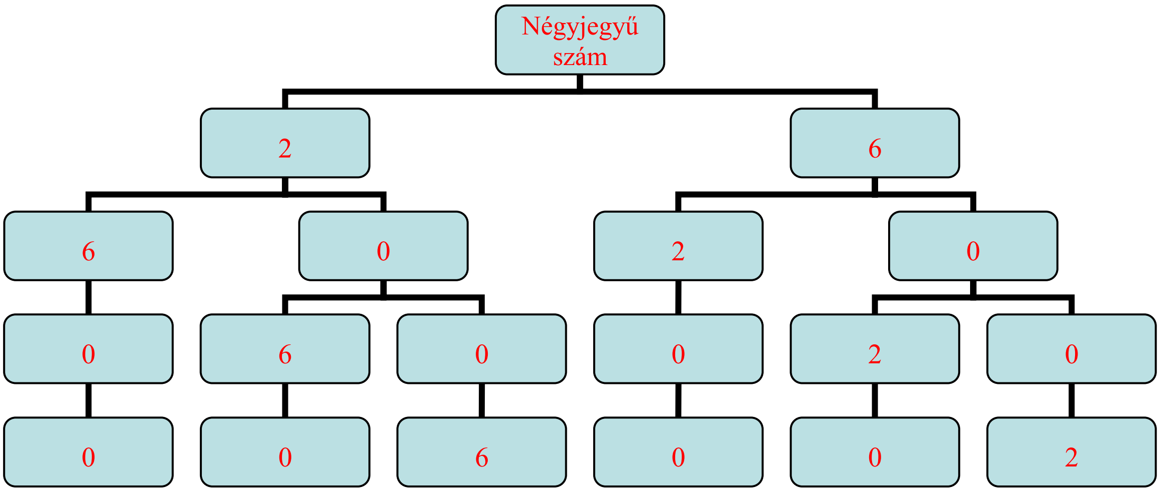
ANNA a két N betű sorrendje sem számít, így az előző eredményt tovább osztani kell 2-vel (rajzoljunk először gráfot, vagy táblázatot), a lehetőségek száma: 6

6.

a) Hány négyjegyű szám képezhető a 2, 0, 0, 6 számkártyákból? (Ez azt jelenti, hogy minden kártyát pontosan egyszer használhatunk fel.)

Az első helyre 0 nem kerülhet.

Rajzoljunk gráfot! Az első számjegytől sorban ábrázoljuk a lehetőségeket.



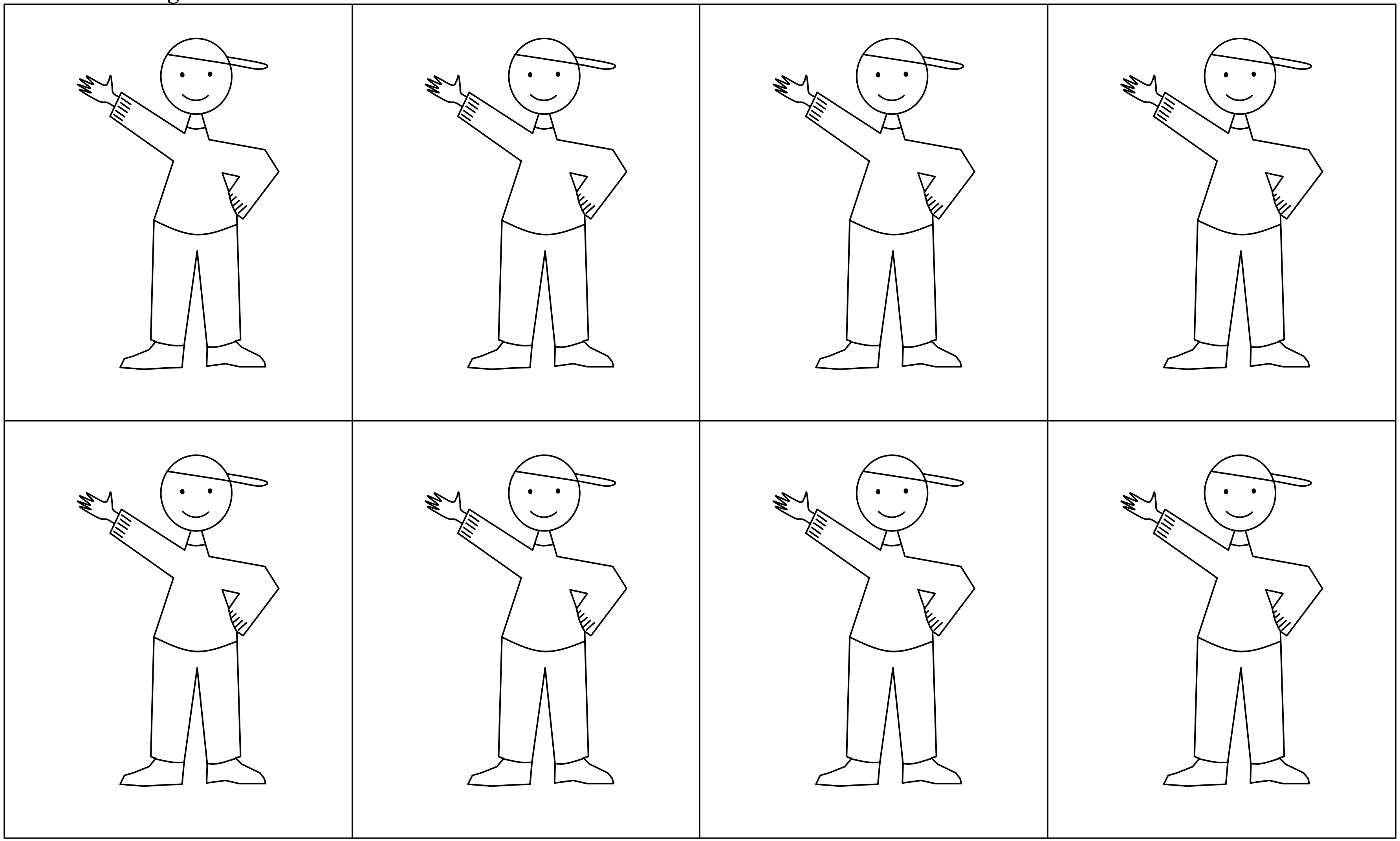
Láthatjuk, hogy a lehetőségek száma: 6
Táblázattal:

Ezres	Százas	Tízes	Egyes
2	0	0	6
2	0	6	0
2	6	0	0
6	0	0	2
6	0	2	0
6	2	0	0

b) Hány legfeljebb négyjegyű szám képezhető a 2, 0, 0, 6 számkártyákból? (Ez azt jelenti, hogy minden kártyát legfeljebb egyszer használhatunk fel.)
Az előző gráf bővül azokkal az esetekkel, amikor a szám 0-val kezdődik (azaz nem négyjegyű). Ha az első helyen 0 áll, utána a 206 számkártyákat a korábbiak alapján 6-féle sorrendben rakhatjuk. Így összesen 6 + 6 = 12 eset van.

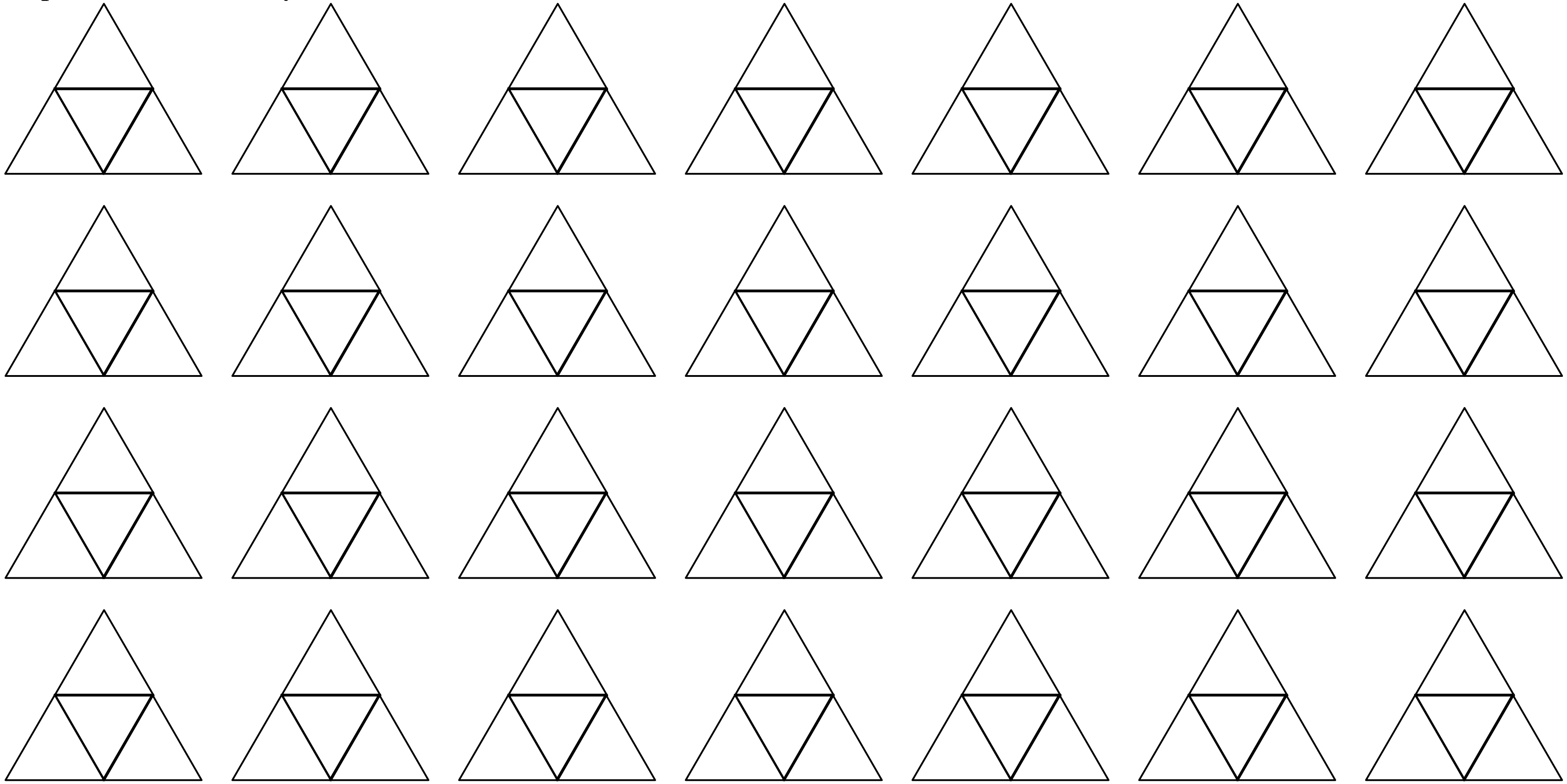
0611 – 1. tanári melléklet: Memóriakártyák

Osztályonként 16 példány ebből az oldalból (csoportonként 2x8 db kártya), vékony kartonlapra nyomva ebben a méretben. A vonal mentén szétvágandó.



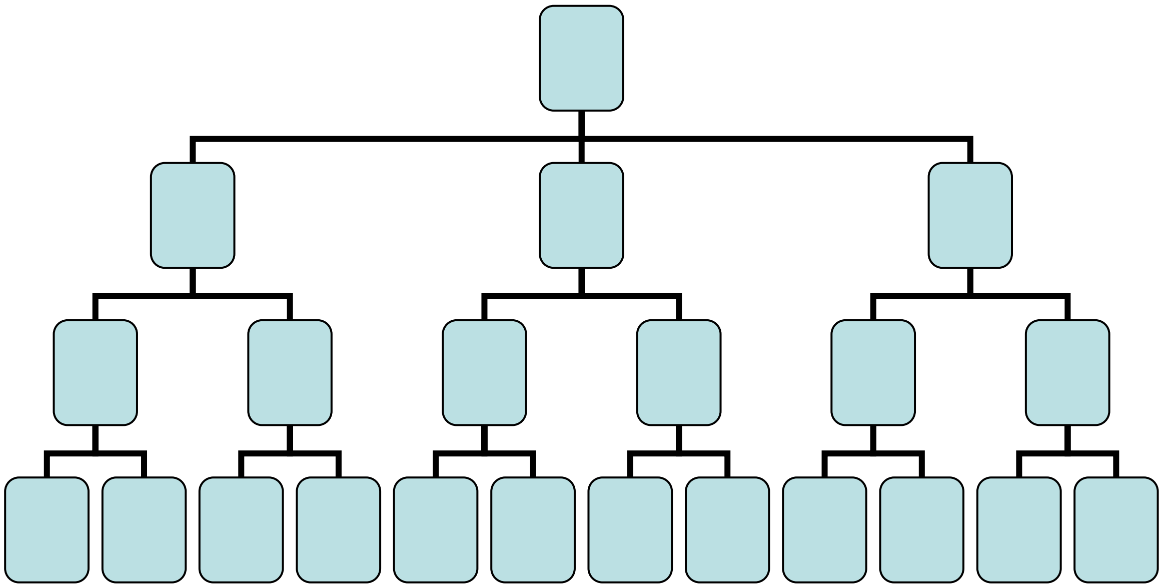
0611 – 2. tanári melléklet: Háromszögek (1 oldal)

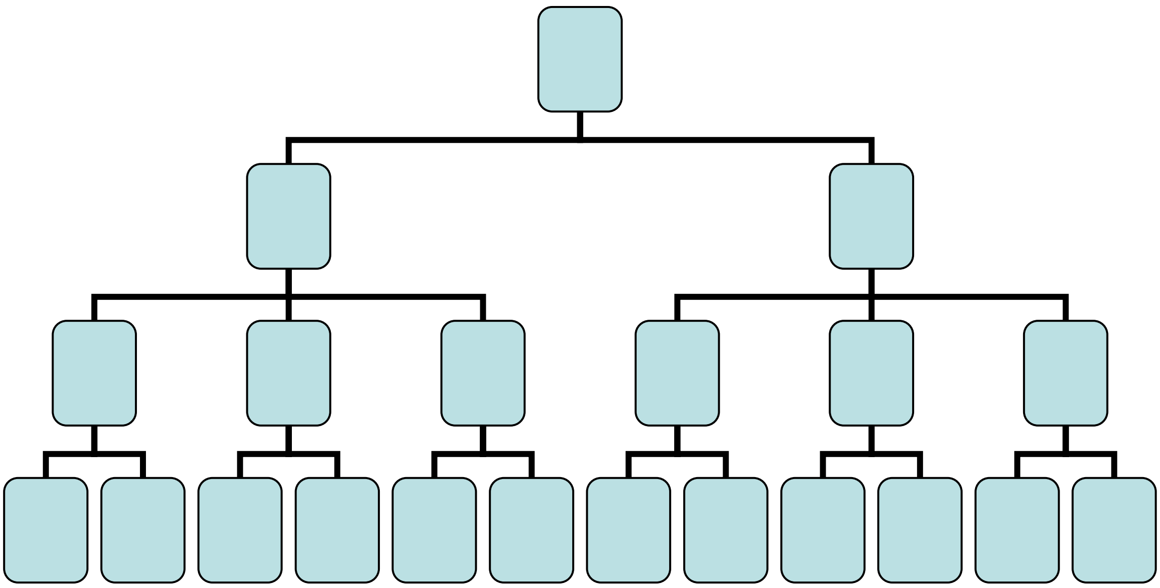
Osztályonként 1 db ebből az oldalból ebben a méretben géppapírra nyomva. A mellékletből az iskolában minden új órai felhasználáshoz csoportonként 1 db fénymásolatot kell készíteni.



0611 – 3. tanári melléklet: Gráfmodell/1. oldal (1 készlet 4 db gráfból áll, 2 oldalon helyezkedik el.)

Osztályonként 2 készlet (Csoportonként 1 gráf) géppapírra nyomva ebben a méretben.





0611 – 3. tanári melléklet: Gráfmodell/2. oldal