

---

# PONTHALMAZOK

## Háromszögek és négyszögek szerkesztése

---

Készítette: Jakucs Erika, Lénárt István, Makara Ágnes

## MODULLEÍRÁS

<b>A modul célja</b>	Körző és vonalzó használatával mintázatok készítése. Háromszögek előállítására síkon és gömbön, szerkesztése három oldal ismeretében. Tapasztalatok a háromszög-egyenlőtlenségről. Négyszögek előállítására síkon és gömbön, téglalap hajtogatása, szerkesztése.
<b>Időkeret</b>	8 óra
<b>Ajánlott korosztály</b>	5. osztály
<b>Modulkapcsolódási pontok</b>	<p><i>Tágabb környezetben:</i> Természetismeret, technika</p> <p><i>Szűkebb környezetben:</i> Ponthalmazok, szerkesztések, párhuzamos és merőleges egyenesek síkon és gömbön.</p> <p><i>Ajánlott megelőző tevékenységek:</i> Vonalzó és körzőhasználat ismerete, párhuzamos és merőleges egyenesek rajzoló módjának ismerete. Ponthalmazokkal végzett halmazműveletek. Nevezetes pontthalmazok ismerete, és szerkesztési eljárásuk tudása.</p> <p><i>Ajánlott követő tevékenységek:</i> Az itt megtanultak alkalmazása szerkesztésekben, később mértani hely keresésével kapcsolatos problémák feldolgozásában.</p>
<b>A képességfejlesztés fókuszai</b>	<p><i>Síkbeli, gömbi és térbeli tájékozódási:</i> geometriai alapfogalmak, alapszerkesztések két és háromdimenziós geometriákban.</p> <p><i>Tájékozódás a számok között:</i> Becslés, mérés: a háromszög szerkeszthetőségének megsejtése az adatok ismeretében. Szögek mértékével történő számolási műveletek 540-ig.</p> <p><i>Rendszerezés, kombinatív gondolkodás:</i> Fogalmak közötti összefüggések (háromszög, négyszög síkon és gömbön). Háromszögek szerkeszthetőségének tapasztalása az oldalak közötti kapcsolat felismerésével (háromszög-egyenlőtlenség)</p> <p><i>Gondolkodási képességek:</i> Logikai gondolkodás (állítások összekötése és-sel, vagy-gyal), kombinativitás (összes eset keresése), megfigyelés, rendszerezés (a lehetséges esetek rendszerezése, a különbözőek és egyezők szétválogatása).</p> <p><i>Induktív, deduktív gondolkodás:</i> A kísérletek során végzett megfigyelések alapján sejtések megfogalmazása, ezek ellenőrzése, érvelések.</p> <p><i>Kommunikációs képességek:</i> szövegértés kompetencia, matematikai nyelvhasználat. A megfigyelések saját nyelven történő megfogalmazása, majd a matematikai szófüzés elsajátítása, adekvát használata.</p> <p><i>Személyiségfejlesztés:</i> vitahelyzetben a türelem, a tolerancia fejlesztése, csoportmunkában az együttműködési készség fejlesztése. Kreativitás fejlesztése.</p>

## AJÁNLÁS

A modul a háromszög és négyszög fogalmát vizsgálja az összehasonlító geometria módszerével, síkon és gömbön.

Ezek az órákon sok olyan síkbeli tapasztalatot elevenítünk fel, amelyekkel már az alsó tagozaton is találkoztak a gyerekek, és építünk az előző modulokban szerzett ismeretekre. A megfigyeléseket kiterjesztjük a gömbre. Tudatosítjuk a megfigyeléseket, s ezzel a háromszögek és a négyszögek szerkesztését készítjük elő.

A modul témakörei: a háromszög fogalma, a háromszög alkotása, szerkesztése oldalaiból, és négyszögek alkotása, szerkesztése.

Mivel két gömbi pontot általában két különböző főkörívvel köthetünk össze (lásd a 0522. „Távolság és távolságmérés síkon és gömbön” c. modult), három különböző gömbi ponthoz nemcsak egy, hanem több háromszöget is szerkeszthetünk. Ezt a jelenséget a gyerekek narancsba, almába szúrt fogpiszkálók és gumikarika (pl. befőttes gumi) segítségével nagyon jól szemléltethetik. Az így kapott alakzatok valóban gömbháromszögek, hiszen oldalaik gömbi főkörívek, ugyanúgy, ahogyan a síkháromszög oldalai egyenes szakaszok; de itt már nem feltétlenül érvényes a háromszög-egyenlőtlenség. Ha viszont két csúcs között mindig a rövidebbik főkörívet választjuk, akkor a sík háromszögekkel sokkal inkább rokon Euler-féle („rendes”) gömbháromszögekhez jutunk. Ezekre már igaz a háromszög-egyenlőtlenség.

A gömbháromszög szerkesztése három oldalából lényegében ugyanúgy megy, mint a síkháromszögeknél. Jó alkalom ez a gömbi szerkesztőeszközökkel, mindenekelőtt a gömbi körzővel való ismerkedésre.

A gyerekek mindegyik óra alatt kb. 4 fős csoportokra bomlanak. Lehetőség szerint heterogén csoportokat alkotnak. Az alapvető munkaforma a kiscsoportos munka (kooperatív módszerek is). Frontális és egyéni munkát is alkalmazunk. A tevékenység egyik legfontosabb része a kiscsoporton belüli, egyenrangú partnerek, diáktársak között kialakuló vita. Hagyjuk a vitát kibontakozni! Akkor zárjuk le a csoportokon belüli, egy-egy témával kapcsolatos beszélgetéseket, vitákat, ha a gyerekek már kialakították saját álláspontjukat. Ebben az esetben is, ha csak lehet, hangsúlyozzuk, hogy az általunk közölt változat nem az egyetlen lehetséges út, hanem emberi megállapodás kérdése.

## TÁMOGATÓRENDSZER

Lénárt István: Nem-euklideszi kalandok a rajzgömbön. Múzsák Kiadó, 1999.

Írólap. Szívószál, nagyméretű gobelin-tű, cérna, olló, másolópapír, körző, vonalzó, Babylon-készlet, sík- és térmértani modellező készlet, Lénárt-féle rajzgömb készlet, gyümölcsök, földgömb, atlasz.

Megjegyzés az eszközökkel kapcsolatban:

A kísérletek során gyümölcsök is szerepelnek. Egyetértünk azzal a felfogással, hogy semmilyen élelmiszert nem szabad elpocsékolni, étkezésre alkalmatlanná tenni. A modulban leírt kísérletek azonban nem csökkentik a felhasznált gyümölcsök étkezésre való alkalmasságát, hiszen késsel szeleteljük őket, vagy fogpiszkálót szúrunk beléjük. A gyerekek minden veszély nélkül fogyaszthatják az otthonról hozott és az órán ilyen módon felhasznált gyümölcsöket.

## ÉRTÉKELÉS

A tanulók csoportos és egyéni munkájának megfigyelése. Folyamatos ellenőrzéshez kapcsolódó szóbeli értékelés.

Dicsérendő, ha a gyerek tanári sugalmazás nélkül is vállalkozik arra, hogy az egyik geometriában felmerült ötletet a másik geometriában alkalmazza, esetleg megpróbálja tisztázni a kétféle geometria egymáshoz való viszonyát. Jutalmazzuk a gondolkodás bátorságát, önállóságát, még akkor is, ha (nem hanyagságból vagy felületességből fakadó, hanem az alkotó gondolkodás lényegéhez tartozó) tévedéshez vezetett!

Beadandó írásbeli házi feladatok írásos értékelése.

Az eszközhasználat és ismeretek diagnosztizáló felmérése.

# MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
<b>I. Síkháromszögek alkotása</b>			
1.	Háromszögek előállítása hajtogatással, nyírással	Összehasonlító-, megfigyelőképesség	Írólap, olló, 1. Feladatlap 1.
2.	Háromszögek alkotása különböző alakú háromszögekből	Konstruktivitás, kombinativitás, megfigyelőképesség	Sík- és térmért. modellezőkészlet, 1. feladatlap 2., 1. tanári melléklet (háromszögekártyák)
3.	Háromszögek előállítása szívószáלבól, hurkapálcából	Alkotó gondolkodás	Szívószál, nagyméretű gobelin-tű, cérna, olló, hurkapálca, 1. Feladatlap 3.
4.	A körző használata; mintázatok készítése	Alkotó gondolkodás	Körző, vonalzó telefon, 1. Feladatlap 4.
<b>II. Síkháromszögek tulajdonságai</b>			
1.	Háromszögek előállítása szívószáלבól, szerkesztésük a három oldal ismeretében; az oldalak közötti összefüggések megfigyelése	Alkotás, Összehasonlító-, megfigyelőképesség	Szívószál, nagyméretű gobelin-tű, cérna, olló, körző, vonalzó, 1. Feladatlap 5-7.
2.	Egyenlőszárú és egyenlő oldalú háromszögek hajtogatása, szerkesztése	Alkotó gondolkodás Szövegértés, szabálykövetés	Írólap, olló, körző, vonalzó, 1. Feladatlap 8-14.
<b>III. Gömbháromszögek</b>			
1.	Általános gömbháromszögek alkotása három pont összekötésével	Alkotó gondolkodás, kombinatorikus gondolkodás, megfigyelőképesség	narancs, fogpiszkálók, gumigyűrű, rajzgömb, gömbi szerkesztőeszközök, írólap, vonalzó, 2. Feladatlap 1-3.
2.	Gömbháromszögek alkotása főkörívekből	Kombinatorikus gondolkodás, megfigyelőképesség	Rajzgömb, gömbi szerkesztőeszközök, rajzgömb föliák, 2. Feladatlap 4., 2. tanári melléklet

<b>IV. Euler-féle gömbháromszögek</b>			
1.	„Igazi” (Euler-féle) gömbháromszögek; háromszög-egyenlőtlenség a gömbön	Összehasonlító-, megfigyelőképesség	Rajzgömb, 2. Feladatlap 5-10.

<b>V. Szabályos háromszögek tanulmányozása síkon és gömbön</b>			
1.	Egyenlő oldalú (szabályos) háromszögek vizsgálata a síkon	Alkotás, összehasonlító-, megfigyelőképesség	Szívószál, gobelin-tű, cérna, olló, sík- és térmértani modellezőkészlet, lyukas tábla, körző, vonalzó, 3. feladatlap 1-4.
2.	Egyenlő oldalú (szabályos) háromszögek vizsgálata a gömbön	Összehasonlítás, megfigyelőképesség, lényeglátás	Rajzgömb, gömbi szerkesztőeszközök, rajzgömb fóliák, 3. Feladatlap 5-10.

<b>VI. Sokszögek alkotása, tulajdonságaik</b>			
1.	Parkettázás különféle alakú sokszögekkel	Megfigyelőkészség, alkotás, válogatás	Sík- és térmértani modellezőkészlet, 4. Flap 1.,2.
2.	A négyszögek tulajdonságai	Rendszerezés, induktív következtetés	4. Feladatlap 3., 3. tanári melléklet (négyszög-kártyák), 4. tanári melléklet (szempontkártyák)
3.	Négyszögek alkotása	Kombinativitás, becslés, mérés, rendszerezés	Papírlap, szívószál, lyukas tábla, színes fóliák, 4. feladatlap 4., 5. tanári melléklet

<b>VII. Síkbeli négyzet szerkesztése, tulajdonságai</b>			
1.	Négyzet előállítás	Alkotóképesség	Papírlap, szívószál, négyzetrácsos papír, síkbeli szerkesztő-eszközök, 5. Feladatlap 1.
2.	A négyzetet meghatározó tulajdonságok	Definiálás	síkbeli szerkesztőeszközök, 5. Feladatlap 2-4.

<b>VIII. Rendszerezés, gyakorlás, diagnosztizáló felmérés</b>			
1.	A Felmérő feladatlap megírása		Felmérés
2.	Feladatgyűjtemény		lyukas tábla, pálcikák, befőttes gumi, 2 db különböző színű dobókocka, 1. tanári melléklet

# A FELDOLGOZÁS MENETE

## I. Síkháromszögek alkotása

Alsó tagozaton a gyerekek már megfogalmazták a síkidomok egybevágóságát: „ugyanolyan alakú és ugyanolyan méretű”. Az egybevágóságot a síkidomok egymásra helyezésével ellenőrizték. Ugyancsak szereztek elemi tapasztalatot a háromszög oldalai közötti összefüggésről és a síkidomok tengelyes szimmetriájáról. Ennek az órának a célja ezeknek a tapasztalatoknak a felelevenítése, a háromszögek megfigyelt tulajdonságainak tudatosítása. Az 1. Feladatlap alapján dolgozzanak a gyerekek.

### 1. Háromszögek előállítása hajtogatással, nyírással

A háromszögek tulajdonságainak megismerése érdekében alkottassunk a gyerekekkel különböző alakú háromszögeket.

Papírból: hajtogatással, nyírással (1. feladatlap 1.)

Javaslat: Előzetesen megfogalmazott tulajdonságokkal rendelkező háromszögeket hozzanak létre a gyerekek. Például: a háromszögnek

- legyen 2 egyenlő oldala;
- legyen 2 egyenlő szöge;
- legyen legalább két egyenlő oldala;
- legyen legalább két egyenlő szöge;
- legyen szimmetriatengelye!

A gyerekek tapasztalhatják, hogy bármelyik feltétel alapján létrehozott háromszögre igaz másik két tulajdonság is, ezek a tulajdonságok együtt járnak.

Készítsenek egy-egy fajtából több egybevágó háromszöget, közöttük több egyenlőszárú derékszögűt és egyenlőszárú 120 fokos háromszöget, valamint nem egyenlőszárú derékszögű háromszöget is. Ezeket a következő feladathoz fogjuk felhasználni.

### 1. FELADATLAP

**1. Hajtogatással vagy nyírással készítsetek a feltételeknek megfelelő háromszögeket!**

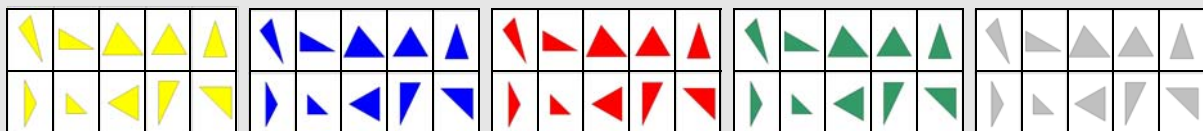
A háromszögnek

- legyenek egyenlő oldalai;
- legyenek egyenlő szögei;
- legyen szimmetriatengelye;
- legyen derékszöge,
- legyen tompaszöge!

### 2. Háromszögek alkotása különböző alakú háromszögekből

Kisebb egybevágó háromszögekből kirakással (1. feladatlap 2.): sík- és térmértani modellezőkészletből. Használhatják az **1. tanári melléklet** háromszögeit is.

**1. tanári melléklet** – lásd e fájl végén és a modul eszközei közt is!



Javaslat: válasszanak a párok egyforma alakú (egybevágó) háromszögeket, és bíztassuk őket, hogy rakjanak ki ezekből különböző alakú háromszögeket.

Tevékenység közben a gyerekek megfigyelhetik, hogy

**a)** 2 egybevágó háromszögből akkor rakható ki újabb háromszög, ha az eredeti háromszög derékszögű,

– egyenlő szárú háromszög esetén 1,

– nem egyenlő szárú háromszög esetén 2 megoldás van.

**b)** 3 egybevágó háromszögből is kirakható háromszög (szabályos), ha az eredeti egyenlő szárú, és van egy 120 fokos szöge.

**c)** 4 egybevágó háromszögből mindig kirakható az eredetihez hasonló háromszög.

Néhány perces tevékenység után beszéljük meg a tapasztaltakat.

**2. Párokban dolgozzatok!** A kiválasztott egyforma háromszögekből próbáljatok meg kirakni újakat! Figyeljétek meg a kirakásokat! Hány egyforma háromszögből lehet egy újabb háromszöget kirakni?

### 3. Háromszögek előállítása szívószálból, hurkapálcából

Háromszögek alkotása az oldalak ismeretében: szívószálból, hurkapálcából (1. feladatlap 3.)

Szervezési feladat: Adjunk a gyerekeknek csoportonként három különböző színű szívószálat, mindegyikből 7-8 darabot. (A különböző színek különböző hosszúságúak legyenek.) Egy-egy csoportnak adjunk olyan szívószálakat, hogy a három különböző színűből ne lehessen háromszöget alkotni.

– Az lesz a feladatuk, hogy fűzzenek különböző alakú háromszögeket a szívószálakból.

Bíztassuk őket, hogy keressék meg az összes lehetséges különböző alakú háromszöget!

– A feladatot adjuk fel úgy is, hogy hurkapálcából állítsák elő a háromszögeket.

– A csoportok vizsgálják meg a megalkotott háromszögeiket.

– A csoportok rajzolják fel (vagy ragasszák fel) a megalkotott háromszögeiket egy A3-as papírlapra.

Ezt követően osztályszinten egyeztessék a tapasztalatokat.

– Összegyűjtjük, a táblára felrakhatjuk, majd megfogalmazzuk a tapasztalatokat:

– 3 szívószálból vagy nem fűzhető háromszög, vagy csak egyféle (az összefűzött háromszög átfordítható)

– 3 egyforma hosszúságú szívószálból mindig alkotható háromszög

Itt még ne kerüljön sor a háromszög oldalai közötti egyenlőtlenség megfogalmazására: a tapasztalatgyűjtést folytatjuk, és a következő órán mondjuk ki.

Itt helyezük arra a hangsúlyt, hogy az egybevágóság fogalmát bevezessük. Ezzel a fogalommal már alsóban is találkoztak. Azt mondhatjuk, hogy az egyforma szívószálból összefűzött háromszögeket egybevágónak nevezzük, hiszen egymásra lehet illeszteni őket.

– A hurkapálcás feladat megoldásánál az hoz más tapasztalatot, hogy a három különböző hosszúságú pálcából – ha alkotható háromszög -, akkor két olyan különböző külsejű háromszög alkotható, amelyekben az oldalak fordított sorrendben követik egymást – ellentétes a körüljárásuk.

Ezek különbözőségéről–egyezőségéről dönteniük kell.

Megbeszélhetjük, hogy ezeket is érdemes egyformának, egybevágónak tekinteni, hiszen ezeket is egymásra lehet tenni. Kérjük a gyerekektől ötleteket arra, hogy a hurkapálcából



készített háromszögek egybevágóságát hogyan ellenőrizhetnénk. (Például: ragasszuk össze a pálcákat, vagy rajzoljuk át papírra, vágjuk ki, és helyezzük úgy egymásra őket.) Esetleg lehet házi feladat, hogy vágjanak ki összehajtott papírból egybevágó formákat.

3.

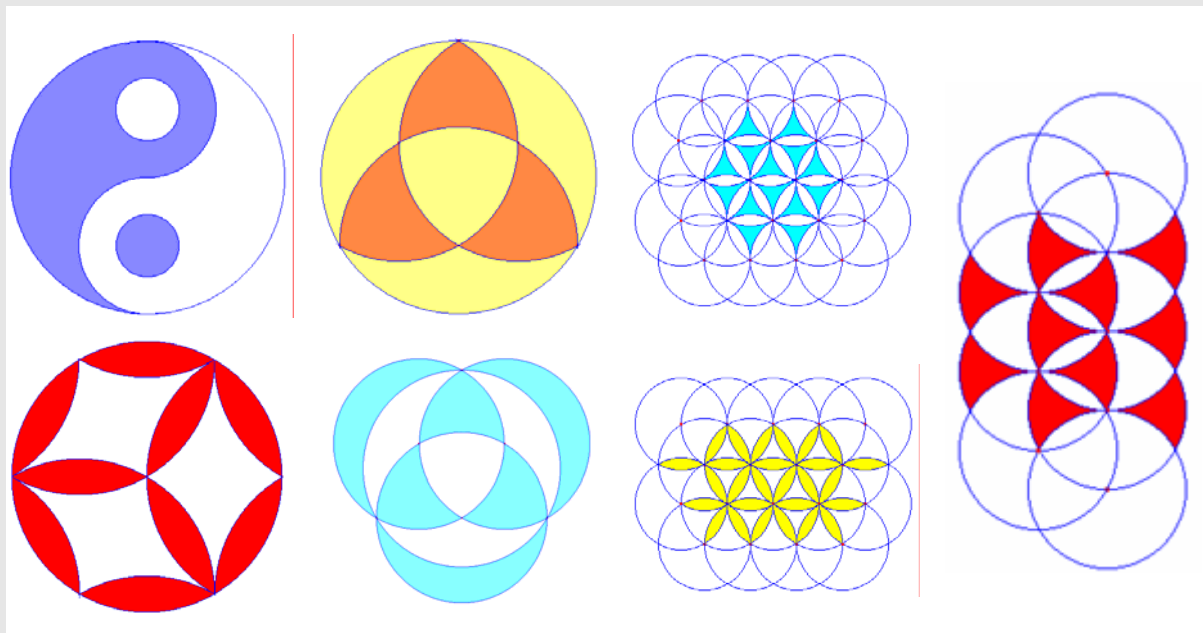
- a) Csoportonként kaptok szívószál darabkákat (sokat), fűztek belőlük minél többféle háromszöget!
- b) Hurkapálcika darabokból állítsatok elő háromszögeket!

#### 4. A körző használata; mintázatok készítése

A körzővel s a hozzá kapcsolódó szóhasználattal az előző modul már megismertette a gyerekeket. Itt sima és négyzetrácsos lapon különböző mintázatok készítése közben gyakorolják mindkettőt.

- A pontos szóhasználatra szorításban segít a „telefonos” vagy „háttal”: egymásnak úgy diktálják a mintamásolás lépéseit, hogy a rajzoló nem láthatja azt.
- A tanár által a táblán elkezdett mintában megfigyelik a szabályszerűségeket, megfogalmazzák, a fűzetbe másolják és folytatják. Maguk is elkezdhetnek mintát. Szívesen vetélkednek minél nehezebb feladványok kitalálásában.

Mutatunk néhány szép mintát:



- A tanár a kész minta néhány metszéspontját betűzi, egyes tartományokat beszínez.
- (Játszhatjuk továbbadó stafétában is; a mintarajzolás minden lépését más gyerek diktálja.)

- Mondjatok igaz állításokat a táblán látható ábra alapján!

Például: minden piros háromszögnek két egyenlő hosszúságú oldala van.

A tanár által megjelölt pontok az  $O$  ponttól egyenlő távolságra vannak.

Van olyan pont, amelynek a távolsága nagyobb az  $O$  ponttól, mint az  $A$  pont távolsága.

A piros háromszög egyik csúcsa egyenlő távolságra van a szemben lévő oldalának két végpontjától.

Házi feladatként szerkesszenek írólapon, vagy négyzetrácsos lapon körökből álló mintát, színezzék ki. A legszebbek kerüljenek a faliújságra. (1. feladatlap 4. feladat)

Ötlet: Tervezhetnek nagyobb körbe szép mintákat, az igazán jól sikerülteket elkészíthetik üvegmatrica festékből, ez jól mutat a terem ablakán.

4. Sima és négyzetrácsos papírra tervezetek különböző mintázatokat csak körző használatával!

## II. Síkháromszögek tulajdonságai

### 1. Háromszögek előállítását szívószálból, szerkesztésük a három oldal ismeretében; az oldalak közötti összefüggések megfigyelése

Ezen az órán folytatjuk a háromszögek előállítását, de most továbbmegyünk: az oldalak közötti összefüggések tudatos megfigyeltetésével és a háromszög-egyenlőtlenség megfogalmazásával. Az 1. feladatlappal dolgozunk most is. Oldjuk meg az 5. feladatot tanári vezetéssel!

5. Szívószálból vágj le egy 5, 7 és 8 cm-es darabot, és varrj belőlük háromszöget! Mit gondolsz, stabil lesz-e a megvarrt háromszög?  
Tudnál-e ugyanekkora szívószálakból másfajta háromszöget készíteni?

A háromszögek megvarrása előtt jósolni fogunk:

– Vajon a megvarrt háromszögek alakja mindenkinél ugyanolyan lesz-e, vagy függ-e majd attól, hogy hogyan tesszük le az asztalra?

Fejlehardtés szavazással jósolnak. Álláspontok: igen, nem, fogalmam sincs. (Általában megoszlanak a vélemények, így mindig vannak, akik meglepődnek az eredményen, és vannak, akik büszkéek előrelátásukra.)

A szavazás eredményét – csak a válaszok számát – a tanár a táblára jegyzi.

Szervezési feladat:

A gyerekek párokba szerveződnek, a párok együtt készítik egy-egy háromszöget, feladatonként szerepet cserélve: egyikük tartja a szívószálakat, miközben a másik csomóz.

– Megállapítják, hogy a háromszög stabil, alakját a három oldal hossza meghatározza.

Problémafelvetés: Meg tudnánk-e szerkeszteni vonalzóval, körzővel a füzetünkbe olyan háromszöget, amelynek megadjuk az oldalhosszát?

A 6. feladatot tanári vezetéssel, frontálisan oldjuk meg.

6. Háromszöget szeretnénk szerkeszteni 6 cm, 5 cm és 4 cm hosszú oldalakkal! Tervezd el, hogyan szerkesszük! Készíts vázlatot, színessel rajzold a különböző oldalakat! A 6 cm-es oldal zöld, az 5 cm-es oldal kék, a 4 cm-es oldal piros legyen!

A tanár a táblára vázlatot készít, melyen az oldalakat különböző színnel jelöli: piros = 4 cm, kék = 5 cm, zöld = 6 cm.

A kezdőlépést javasolják a gyerekek!

Vegyünk fel egy 6 cm hosszú szakaszt, ez lesz a háromszög zölddel jelölt oldala. Ezzel a háromszögnek már két csúcsát ismerjük, csak a harmadik hiányzik.

– Mit árul el a piros oldal hossza a hiányzó csúcs helyéről?

Azt, hogy a meglévő oldal egyik végpontjától 4 cm-re van, ezért rajta van a csúcs körül írt 4 cm sugarú körön. Rajzoljuk meg a kört.

– Mit árul el a kék oldal hossza a hiányzó csúcs helyéről?

Azt, hogy a másik végponttól 5 cm-re van, ezért a másik csúcs körül írt 5 cm sugarú körön is rajta van, tehát ezeknek a köröknek a metszéspontja.

A gyerekek a füzetükben követik a táblai eseményeket. Befejezik a szerkesztést.

**Problémafelvetés:** Füzzetek háromszöget 3 cm, 5 cm és 8 cm hosszúságú szívoszálból. A gyerekek megállapítják, hogy nem lehet. Ezt követően folytatjuk a 7. feladattal.

7. Próbáljunk megszerkeszteni egy olyan háromszöget, amelynek oldalai 3 cm, 5 cm és 8 cm hosszúak! Mit tapasztalsz? **Nem szerkeszthető meg.**

A 7. feladatban hasonlóan dolgozunk (szavazástól szerkesztésig) 3 cm, 5 cm és 8 cm-es adatokkal.

Kísérletezés során megfogalmazzák a háromszög-egyenlőtlenséget.

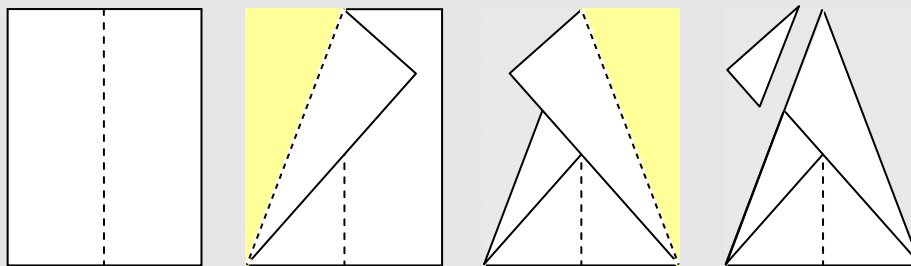
„Három szakaszból csak akkor szerkeszthető háromszög, ha bármelyik kettő együtt hosszabb a harmadiknál.”

## 2. Egyenlőszárú és egyenlő oldalú háromszögek hajtogatása, szerkesztése

Oldjuk meg az 1. Feladatlap 8. feladatát!

8. Készíts írólapból egyenlő szárú háromszöget hajtogatással!

A tanár hajtogasson A4-es lapból, a gyerekek útmutatásai szerint. A gyerekek hajtogatnak, megfogalmazzák a lépéseket, egyenlőszárú háromszög készül.



Az 1. Feladatlap 9. feladat közös megoldásakor a tanár továbbra is az előzőek leírásában látható módon segít kérdéseivel. A táblán szerkeszt, a gyerekek útmutatásai szerint. Ők pedig szerkesztenek a füzetben.

9.

a) Szerkessz olyan egyenlőszárú háromszöget, amelynek alapja 6 cm, szárjai 4 cm-esek! A szárakat kézzel rajzold!

Próbáljuk meg elképzelni, milyen lenne a háromszög, ha szárjai 9 cm-esek!

Különböző elképzeléseknek adnak hangot, vannak akik látják, hogy ez hegyesszögű lesz, szemben a megszerkesztett tompaszögűvel.

**b)** Készíts vázlatot, milyen lenne az a háromszög, amelynek alapja 6 cm és szárai 9 cm-esek! Szerkeszd ezt a háromszöget is az előzőleg megszerkesztett háromszöggel közös alapra, az alap egyenesének ugyanarra az oldalára! Ennek a háromszögnek a szárait pirossal rajzold!

**c)** Hasonlítsd össze a két háromszöget! Fogalmazd meg, miben egyeznek meg, és miben különböznek! **A 9 cm-es szárú háromszög hegyesszögű, a 4 cm-es szárú tompaszögű.**

**d)** Mekkora lehet annak az egyenlőszárú háromszögnek a szára, amelynek ugyanez az alapja, és csúcsa a piros és kék szárok közé eső síkrészben van?  **$4 \text{ cm} < \text{szár hossza} < 9 \text{ cm}$**

Általában először konkrét számokat mondanak, ekkor kérjük még, még, addig, amíg maguktól nem általánosítanak. Jóslataik után megszerkesztik ugyanazon az ábrán, az alap egyenesének ugyanabban a félsíkjában: a szár 4 cm-nél nagyobb, de 9 cm-nél kisebb. A szárokat zölddel rajzolják át!

Új tanári kérdés: rögzítettük az alapot, a szárokat változtatjuk. Mekkora lehet a szár?  
Az első válasz általában az, hogy bármekkora, mígnem kiderül, hogy csak 3 cm-nél nagyobb.

Mit lehet itt még észrevenni? A háromszögek szárcsúcsainak helyére gondoljanak.

**A csúcsok mind az alap szakaszelező merőlegesén vannak, mert egyenlő távol vannak az alap két végpontjától.**

Oldjuk meg az 1. feladatlapon 10-13. feladatait!

**10.** Szerkessz egyenlőszárú háromszöget, amelynek egyik oldala 5 cm, a másik oldala 3 cm!

**Két lehetőség.**

A 10. feladattal fontos pillanathoz értünk: hány megoldása van egy szerkesztési feladatnak? Ha nincsenek helyhez kötött adatok, akkor az egybevágókat nem tekintjük különbözőeknek, ezért nincs 4, csak 2 megoldás. Ez nehéz eleinte, mindig újra tisztázni kell.

**Két megoldást találunk, mert a szárok és alap között kétféleképp oszthatjuk ki a számadatokat.**

**11.** Írólapból hajtogass egyenlő oldalú háromszöget!

A 11. feladat megoldásához a tanár A4-es lapot vesz elő, és hajtogat a gyerekek útmutatásai szerint.

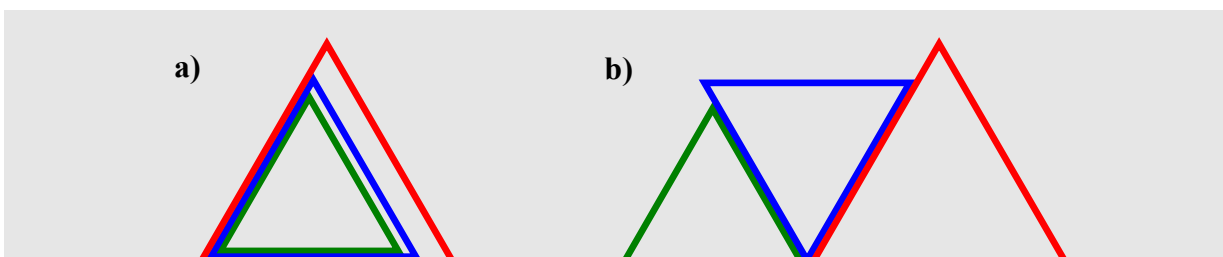
A gyerekek írólapot hajtogatnak, és megfogalmazzák a lépéseket, egyenlő oldalú háromszög készül. Nem könnyű, elakadnak.

Megvárja, míg elakadnak, ekkor szívószálakat vetet elő. Következzék a 12. feladat!

**12.** Készíts zöld, kék és piros szívószálból egyenlő oldalú háromszögeket! A háromszögek oldalhossza különbözzön!

**a)** Illeszd egymásra a három háromszöget egy közös csúccsal! Mit veszel észre? **szögei egyenlők**

**b)** Ezután illeszd egymás mellé a három háromszöget egy közös csúccsal! Mit veszel észre? **szögei egy egyenesre illeszthetők**

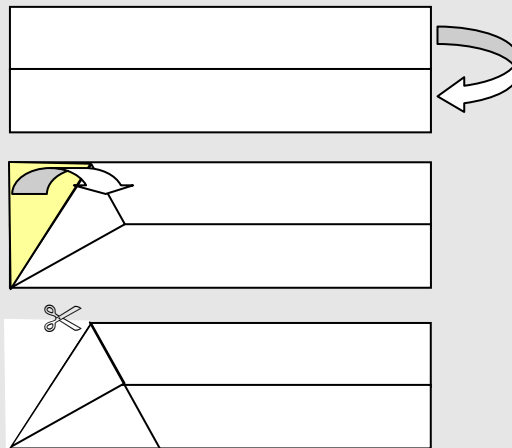


A feladatban a gyerekek sok észrevétele közt először erre várunk: **Mindegyik háromszögnek egyformák a szögei.** Másodjára pedig erre: **Egy egyenesre illeszthető a három egyforma szög.** Ez segít a hajtogatás megoldásában (11. feladat): három nagyjából egyenlő részre hajtjuk az egyenesszöget, így készül egy szöge a háromszögnek, a folytatást már kitalálják a gyerekek.

Mutassuk meg, hogyan hajtogatható téglalapról pontosabb módszerrel szabályos háromszög! Továbbra is A4-es lapból hajtogatunk, a gyerekek írólapból.

Ez a módszer nem a szögek egyenlőségén, hanem az oldalak egyenlőségén alapul; valamint az egyenlőszárú háromszög 9. feladatban látott tulajdonságán, hogy a szárcsúcs az alap felező merőlegesén van (és az egyenlő oldalú háromszög is egyenlőszárú).

A gyerekek követik a tanári utasításokat, majd méréssel ellenőrzik, hogy a hajtogatással létrehozott háromszög egyenlő oldalú.



**13. Szerkessz egyenlő oldalú háromszöget, melynek oldala 3 cm hosszú!**

Házi feladatként adhatjuk a 14. feladatot, egyenlő oldalú háromszögekből álló parketta szerkesztését, amelyet színezzenek is ki, egy teljes írólapnyit. A legszebbek kerüljenek a faliújságra.

**14. Szerkessz egyenlő oldalú háromszögekből álló parkettát, és színezd ki!**

### III. Gömbháromszögek

#### 1. Általános gömbháromszögek alkotása három pont összekötésével

A 2. feladatlap szerint dolgozunk.

Problémafelvetés: Hogyan állíthatunk elő háromszöget a gömbön? Mi a közös jellemzője a csúcsoknak illetve az oldalaknak?

Szerzessünk tapasztalatot a gyerekekkel egy szem narancs, három fogpiszkáló és egy gumigyűrű használatával!

A gyerekek a síkfelületen már megismert módon gömbháromszöget állítanak elő a három fogpiszkáló „körbekerítésével”. Ilyen módon azt a gömbháromszöget kapják, amit a síkbeli tapasztalatok alapján leginkább várnak a gömbön. (2. feladatlap 1-2. feladat)

Az eddig megszerzett tapasztalatok alapján várhatjuk a felvetett problémára a helyes választ:

**Három pont, amelyek nincsenek egy főkörön, háromszöget határoz meg.****A háromszög oldalai gömbi egyeneseken vannak.**

Ha valaki nem a „szokványos” háromszöget állítja elő, vitassák meg a gyerekek, az is jó megoldás-e. Hagyjuk, hogy elhangozzanak érvek és ellenérvek. A döntést a háromszögtől elvárt tulajdonságok teljesülésének belátása hozza meg.

Ha mindenki a „szokványos” háromszöget feszíti ki, kérjük meg a gyerekeket, hogy csoportban vizsgálják meg azt az esetet, amikor a három pont közül két pont átellenesen helyezkedik el (például sarkpontok), egy pedig valahol „középen” (az egyenlítőn). Ez a speciális eset nagy eséllyel hozza elő a többféle megoldás lehetőségét.

Ezután térjünk vissza a korábban kitűzött pontok esetére.

A narancsba szúrt három fogpiszkáló, mint három csúcs, hány lehetséges gömbháromszöget határoz meg?

Erre a kérdésre a narancson és a gömbön szerzett tapasztalatok alapján adhatják meg a választ. A három csúcs közül az egyiket változatlanul „kívülről”, de a másik kettőt „belülről” kerülik meg a befőttes gumival, és a befőttes gumit „hátról” körbevezetik a narancson. Így újabb, feszesre húzott oldalú alakzatot kapnak.

Ez is háromszög, mert a háromszögekre vonatkozó feltételeket teljesíti: három csúcs közötti főkörívekből, vagyis gömbi egyenes darabokból szerkesztettünk zárt alakzatot.

Három csúcs tehát nemcsak egyetlenegy gömbháromszöget határoz meg! A gyerekek megpróbálnak ugyanazzal a három csúccsal többféle esetet előállítani.

A narancs után térjünk át a gömbre, és szereztessünk hasonló tapasztalatot a gömbre rajzolással is!

Miközben a gyerekek gömbi főkörökön haladva összekötik a megjelölt pontokat, különböző háromszögeket állítanak elő.

Ha változatlanul csak a „szokványos” háromszöghöz jutnak el: vessük fel a kérdést: Gömbháromszög-e ez a furcsa alakzat? (Jobb oldalt.)



A lényeg: a gyerekeknek tevékenység közben átértékelődik a háromszögfogalmuk!

Gyorsabban haladók számára:

Három rögzített csúccsal összesen hány gömbháromszöget lehet előállítani (2. Feladatlap 3. feladat)?

Ha az oldalak önátmetszését megengedjük, nyolcat, ha kizárjuk, négyet. (Kombinatorikához is kapcsolódó geometriai kísérletezés.)

## 2. Gömbháromszögek alkotása főkörívekből

A 2. feladatlap 4. feladat megoldásakor a gyerekek az alábbi kártyákból csoportonként választanak egyet (**2. tanári melléklet**), és a kártya szerint dolgoznak.

**2. tanári melléklet** – lásd e fájl végén és a modul eszközei közt is!

<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
50 gömbi lépés 40 gömbi lépés 30 gömbi lépés	50 gömbi lépés 50 gömbi lépés 30 gömbi lépés	90 gömbi lépés 90 gömbi lépés 90 gömbi lépés	50 gömbi lépés 50 gömbi lépés 100 gömbi lépés
<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>
70 gömbi lépés 80 gömbi lépés 160 gömbi lépés	180 gömbi lépés 110 gömbi lépés 60 gömbi lépés	270 gömbi lépés 90 gömbi lépés 60 gömbi lépés	60 gömbi lépés 60 gömbi lépés 60 gömbi lépés

Minden csoportban rajzoljanak három gömbföliára egy-egy főkör-darabot (gömbi szakaszt) a gömbi vonalzóval. A 3 föliát illesszék úgy a gömbjükre, hogy azok háromszöget alkossanak.

Ha elkészültek, tanulmányozzuk a „műveket”. Tegyük fel a kérdést:

Melyek hasonlítanak legjobban a síkbeli háromszögekhez?

A gyerekek várhatóan az A, B, C, H gömbi idomokat fogják megjelölni.

## 2. FELADATLAP

**1.** Csoportban dolgoztok. Szúrjatok három fogpiszkálót a narancsba úgy, hogy azok ne legyenek egy főkörön! Legyenek ezek a pontok egy háromszög csúcspontjai. Feszítsetek ki háromszöget a gumigyűrűvel! Hasonlítsátok össze, milyen háromszöget hoztak létre a csoportok!

**2.** Rajzoljatok papírlapra három olyan pontot, amelyek nem illeszkednek ugyanarra az egyenesre! Kössétek össze a pontokat vonalzóval! Milyen alakzatot kaptatok? Hányféle ilyen alakzatot határoz meg ez a három pont? **Egy lehetőség van.**

**3.** Hányféle gömbháromszöget határoz meg a narancsba szúrt három fogpiszkáló?

**Ha az oldalak önmetszését megengedjük, nyolcat, ha kizárjuk, négyet. (Kombinatorikához is kapcsolódó geometriai kísérletezés.)**

**4.** Csoportonként válasszatok egyet a felkínált kártyákból! A gömbi vonalzó és körző segítségével a választott kártya szerint szerkesszettek gömbi háromszöget!

## IV. Euler-féle gömbháromszögek

### 1. „Igazi” (Euler-féle) gömbháromszögek; háromszög-egyenlőtlenség a gömbön

Problémafelvetés: Érvényes-e a gömbön is a háromszögek oldalaira vonatkozó egyenlőtlenség: két oldal hosszának összege nagyobb-e a harmadiknál?

A „furcsa” háromszög azonnal megmutatja, hogy a háromszög-egyenlőtlenség itt nem mindig igaz. (2. Feladatlap 6. feladat)



Mikor igaz?

Ha a csúcsokat a rövidebbik főkörív, azaz a gömbi távolság-ív köti össze (amerre a repülőgép repül). Ekkor a három csúcs csak egyetlen gömbháromszöget határoz meg, és igaz a háromszög-egyenlőtlenség.

Ellenőrizték néhány háromszög oldalainak megméréseivel!

A gyerekek a gömbön megrajzolnak néhány „szokványos” (Euler-féle) háromszöget, a gömbvonalzó skálája mentén megméri az oldalak hosszát gömbi lépésekben, gömbi távolságegységekben. Ellenőrzik a háromszög-egyenlőtlenség teljesülését.



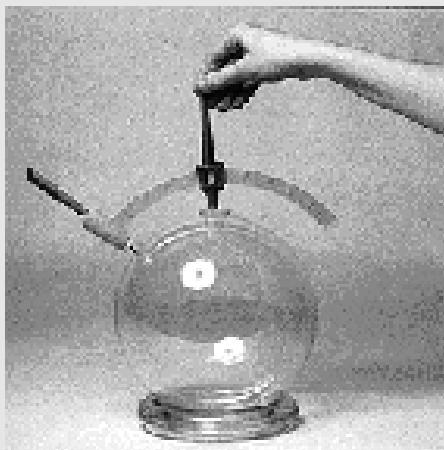
Megjegyzés:

A „fok” kifejezést gömbi távolság esetében kerüljük, mert ezzel megzavarhatjuk a gyerekeket. Használjuk a „gömbi lépés” kifejezést! Csak a gömbi szög mérésénél használjuk a „fok” szót.

Szerkesszünk „igazi” (Euler-) háromszögeket gömbi körzővel és vonalzóval, előre adott gömbi szakaszból (2. Feladatlap 7-10. feladatok)!

Melyik adatokból lehet „szokványos” különböző oldalú háromszöget rajzolni a gömbre?

7. feladat: javasoljuk 30, 45, 60, 90 gömbi lépés hosszú zsinetek levágását: azok kifeszítésével kereshetik a közel jó megoldásokat.





8. feladat: a gyerekek először próbálkozással jelölnék ki olyan gömbháromszögeket, amelyek oldalai körülbelül: 30, 45, 60 gömbi lépés; 45, 60, 90 gömbi lépés.

Ezután gömbi vonalzóval és körzővel szerkesztik meg ezeket a gömbháromszögeket, pontosan azokat a szerkesztési lépéseket követve, amelyeket a síkháromszög esetében megismertek.

10. feladat: a gyerekek felmérnek egy tetszőleges hosszúságú gömbi szakaszt a félgömbfólia pereme mentén. Ennek két végpontjában a szögmérő segítségével felmérnek két, azonos (Északi- vagy Déli-) sarkpont felé mutató derékszöveget, majd főköríveket húznak egészen a sarkpontig, és máris kész az a gömbháromszög, melynek egyik oldala a tetszőlegesen választott szakasz hosszának felel meg, másik két oldala 90 gömbi lépés, 90 gömbi lépés oldalhosszúságú.

Attól függően, hogy a két, 90 gömbi lépés hosszúságú oldalakon kívüli harmadik oldal rövidebb vagy hosszabb-e 180 gömbi lépésnél, kapnak "igazi", azaz Euler-féle, illetve nem-Euler-féle háromszöget.

(Igen jó alkalom arra, hogy a gyerekek ismerkedjenek a gömbi vonalzóval és körzővel. A gömbi körzőt a síkbelihez sokban hasonló módon használhatják. Első lépésben kijelölik a gömbfelületen a majdani kör középpontját. Erre a középpontra helyezik rá a központkeresőt (amit ők szívesebben neveznek ufónak), úgy, hogy az ufó közepén található lyuk kerüljön a középpont fölé. A filctollról leveszik a zárókupakot, és a tollat szorosan a tolltartó fejbe illesztik. Beállítják a körző ívén a megfelelő gömbi körsugarat. A körzőtest műanyag hegyét (a síkbeli körző tőhegyének megfelelő részt) az ufóba illesztik, és megrajzolják a kört, enyhén döntve, kicsit lassabban, mint a síkon szokásos. Ha valahol a körző megugrik, kihagy egy ívet, nyugodtan visszamehetnek a körzővel, pótolni a hiányzó részt. Használat után a tollat kivesszik, és a kupakot kattanásig visszanyomják, hogy a toll ki ne száradjon.

Ha sikerül egy kört megrajzolniuk, akkor a sikerélmény hatására szívesen rajzolnak koncentrikus köröket. Ezeket felhasználhatják földrajzi koordináta-rendszer rajzolására, ha néhány hosszúsági kört, meridiánt is felrajzolnak a gömbre.)

Keressenek a gyerekek a földrajzi koordináta-rendszerben gömbháromszögeket – Euler-félét is, és másfélét is (2. feladatlap 9. feladat).

Fontos szempont: az Egyenlítőn kívül más szélességi kör (például a Ráktérítő) nem lehet háromszög-oldal, hiszen a Ráktérítő nem gömbi-főkörív, hanem gömbi kiskör, tehát gömbi görbe vonal.

A padtársak ellenőrzik egymás gömbháromszögeit: valóban gömbi főkörök alkotják-e az oldalakat.

A földgömb koordináta-rendszerén felfedezett „rendes” (Euler-féle) háromszögek közül néhányat a gyerekek szerkesszenek meg a gömbön.

Feladat: Szerkesszettek ilyen háromszögeket gömbi vonalzó és körző nélkül, csak a félgömbfólia széle és gömbi szögmérő használatával!

Néhány gömbi háromszög kijelöléséhez használhatunk földgömböt is!



5. Három szakasz a síkban minden esetben meghatároz-e egy háromszöget? Fogalmazzd meg, mit tapasztaltunk a síkban! **Nem. Fenn kell álljon a háromszög-egyenlőtlenség.**

6. A gömbön jelöljétek meg három olyan pontot, amelyek nem illeszkednek ugyanarra a főkörre. Kössétek össze a pontokat főkörívvel, így alkossatok többféle háromszöget! Érvényes-e a gömbön is a síkbeli háromszögek oldalaira vonatkozó egyenlőtlenség? Gondolatotokat ellenőrizték néhány háromszög oldalainak megméréseivel!

**Nem mindig. A rövidebbik főkörívvel összekötött csúcsú (Euler-) gömbháromszögekre igaz.**

7. Zsinegből vágjatok le 30, 45, 60, 90 gömbi távolságegység (gömbi lépés) hosszúságú darabokat! Ezeket feszítsétek a gömbre, úgy alkossatok „igazi” háromszögeket!

8. Gömbi vonalzó és körző segítségével szerkesszettek háromszögeket, melyeknek oldalai:

- a) 30, 45, 60 gömbi lépés (gömbi távolságegység);
- b) 45, 60, 90 gömbi lépés!

9. Keressetek a földrajzi koordináta- rendszerben gömbháromszöget! Párban dolgozzatok, ellenőrizték egymás munkáját!

**Az Egyenlítőn kívül más szélességi kör (például a Ráktérítő) nem lehet háromszög-oldal, hiszen a Ráktérítő nem gömbi-főkörív, hanem gömbi kiskör.**

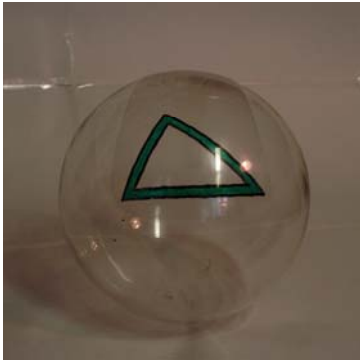
10. Szerkesszettek gömbháromszögeket gömbi vonalzó és körző nélkül, csak a félgömbfólia széle és a gömbi szögmérő használható.

**Tetsz. hosszú gömbi szakasz a félgömbfólia pereme mentén → két végpontjába a szögmérő segítségével két, azonos (É- ill. D-) sarkpont felé mutató derékszög → főkörívek a sarkpontig.**

## EMLÉKEZTETŐ

A síkon három, nem egy egyenesre rajzolt pont egyértelműen meghatároz egy háromszöget. A síkbeli háromszög oldalaira igaz, hogy bármely kettő összege nagyobb a harmadiknál. (Ezt szokás háromszög-egyenlőtlenségnek nevezni.)

A gömbön három pont sokféle módon összeköthető főkörívvel.



Ez „igazi” (Euler-féle) gömbháromszög.



Ezt az alakzatot nem tekintjük háromszögnek a gömbön.

Az „igazi” (Euler-féle) gömbháromszögek oldalaira is teljesül, hogy bármely kettőnek az összege nagyobb a harmadiknál.

## V. Szabályos háromszögek tanulmányozása síkon és gömbön

Ebben a részben a gyerekek próbálkozással szereznek tapasztalatot és fogalmazzák meg sejtésüket.

A 3. feladatlap szerint dolgozunk.

Ennek az órának az anyaga teljes egészében ismétlés, nagyon hasznos lehet abban, hogy a gyerekek ismeretei mélyüljenek, matematikai gondolkodásuk fejlődjön.

### 1. Egyenlő oldalú (szabályos) háromszögek vizsgálata a síkon

Fűzzenek a gyerekek különböző háromszöget szívószáלבól!

Kétféle méretű szívószálat adjunk a kezükbe, például: 4 és 6 cm-es darabokat, mindegyikből többet! Válogassák ki a megalkotott háromszögek közül, amelyekre igazak az állítások:

- egyenlőszárú (van két egyenlő hosszú oldala);
- mindegyik oldala egyenlő hosszú.

Csoportmunkában próbálják az összes – alábbi lehetőségek szerinti – megoldást megadni:

4 cm, 4 cm, 4 cm; 4 cm, 4 cm, 6 cm; 4 cm, 6 cm, 6 cm; 6 cm, 6 cm, 6 cm.

Tapasztalják, hogy

- mindegyik háromszögre igaz, hogy egyenlőszárú;
- két háromszögre igaz, hogy egyenlő oldalú.

Csoportban dolgozzanak. Minden csoportnak osztunk ki A4-es lapokat, arra dolgozzanak. Először közösen beszéljék meg, hogyan lehet a feladatot megoldani, majd külön-külön is végezzék el a szerkesztést. Ha elkészültek, kiemelő tollal rajzolják át a keletkezett ábrák közül

azt, amelyik a legjobban sikerült. Ezeket minden csoport kiteheti a táblára. Ezután válaszoljanak a kérdésekre, amelyet diákkvartettel ellenőrizhetünk.

Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszögeket!

– Próbáljatok a képhez hasonló ábrát létrehozni! Induljatok a 8 cm oldalhosszú háromszögtől, és szerkesszetek kisebb és nagyobb háromszögeket is (3. Feladatlap 1. feladat)!

A feladat kérdéseit vitával döntsék el, kísérletekkel válaszolják meg!

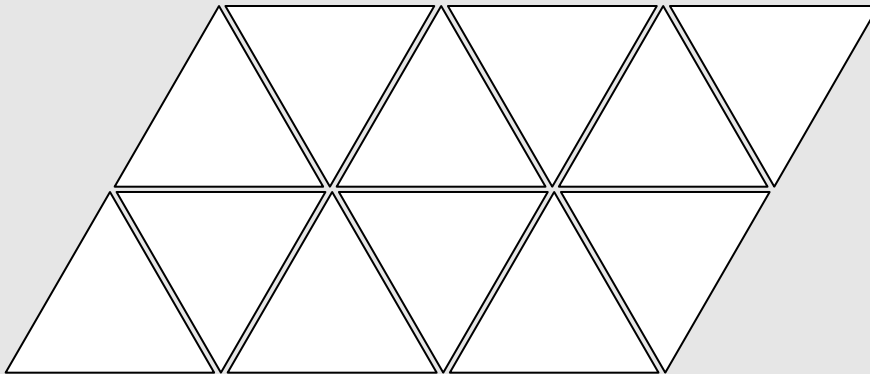
Összegzésként mondjuk ki: ezeket a háromszögeket szabályos háromszögeknek nevezzük.

– Készítsetek parkettát!

A szögmérésben bizonytalankodó gyerekeknek adjunk a kezébe a sík- és térmértani modellezőkészletből egybevágó szabályos háromszöglapokat, és ők végezzenek a síkon parkettázásokat.

– Figyeljétek meg, hogy a háromszög 3 szöge éppen egyenesszöget alkot (3. feladatlap 2. feladat).

A létrehozott parketta színezése szép mintát eredményezhet, de közben fontos megfigyeléseket tehetnek más sokszögekkel kapcsolatban is!



A gyorsabban haladókkal tapasztaltathatjuk, hogy lyukas táblán nem feszíthető ki szabályos háromszög (3. feladatlap 3-4. feladat).

Hasonlóan, négyzethálóra sem rajzolható olyan szabályos háromszög, amelynek a csúcsai rácspontokon vannak.

Javasoljuk a gyerekeknek: tervezzenek olyan hálót, amelyre könnyen tudnak szabályos háromszögeket rajzolni! Szabályos háromszögekből készíthető ilyen vonal- vagy pontháló.

### 3. FELADATLAP

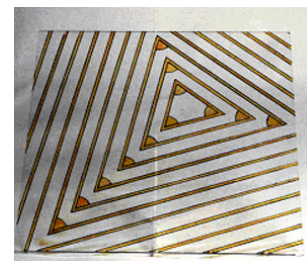
1. Próbálj a képhez hasonló ábrát létrehozni!

Jelölj meg egy pontot, és ebből indíts olyan egyeneseket, amelyek egymással páronként 120 fokos szöget zárnak be!

Szúrd a körződet a pontba, nyisd szét, és jelöld ezt a távolságot az egyeneseiden! Kösd össze ezeket a pontokat – egy szabályos háromszöget kapsz.

Változtass a körzőnyíláson, és így is végezd el az előbbi szerkesztést!

Ezt ismételd meg néhányszor!



Miben egyeznek meg ezek a háromszögek? **szögek nagyságában, 3 szimmetriatengelyükben**

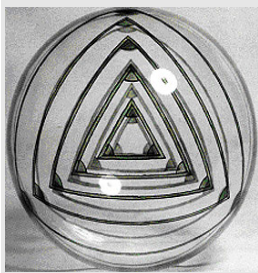
Mennyi a szögek összege az egyes háromszögekben? Mérd!  $180^\circ$   
 Miben különböznek ezek a háromszögek? **az oldalak hosszában**  
 Mennyi az oldalak összege az egyes háromszögekben? **nagyobb oldal esetén nagyobb**  
 Mennyi lehet a lehető legkisebb háromszögben az oldalak összege?  
**egész kicsi, „közel a 0-hoz”**  
 És a lehető legnagyobb háromszögben? **bármilyen nagynál lehet még nagyobbat rajzolni**

2. Parkettázd a síkot a modellező készlet egybevágó egyenlő oldalú háromszögeivel!

3. Próbálj lyukas táblán egyenlő oldalú (szabályos) háromszögeket létrehozni!  
**Nem feszíthető ki szabályos háromszög.**

4. Tervezzetek olyan vonal- vagy ponthálót, amelyre könnyen tudnánk szabályos háromszögeket rajzolni!  
**Szabályos háromszögekből készített vonal- vagy pontháló.**

## 2. Egyenlő oldalú (szabályos) háromszögek vizsgálata a gömbön



Az órára készüléskor készítsük el a szabályos gömbháromszög-család fóliáit azoknak a gyerekeknek a számára, akik még nem szerkesztenek ügyesen a gömbön (3. Feladatlap 5-8. feladat)! Ha fóliára alkoholos tollal felrajzolunk két-három szabályos gömbháromszöget, és ollóval kivágjuk őket, úgy, hogy a határvonalak láthatóak maradjanak, akkor éveken át használható, a gyerekek által körülrajzolható gömbi háromszög-sablonokat kapunk.

Problémafelvetés:

Mit gondoltok, a síkbeli szabályos háromszögeknél megfigyelt tulajdonságok közül melyek igazak a gömbi egyenlő oldalú háromszögekre?

A vélemények ütköztetése után adjuk a gyerekek kezébe a tanító által megrajzolt egyenlő oldalú háromszögeket ábrázoló fóliát, és méréssel győződjenek meg a gyerekek a vitában elhangzott állítások igazságáról vagy hamisságáról!

További kérdések, amelyeket vitával, kísérletekkel döntsenek el:

- Mit mondhatunk az oldalak összegéről, hogyan változik az egyes háromszögekben?
- Mekkora a szögek ezekben a háromszögekben?

A gyerekek vitájában várható az oldalak egyenlő hosszúságára és a szögek egyenlő méretére utaló érvelés és ezek ellenkezője is.

Minél hevesebb a vita, annál nagyobb lelkesedéssel állnak hozzá a méréssel történő ellenőrzéshez. Megméri a gömbháromszögek oldalait gömbi vonalzóval, szögeit gömbi szögmérővel.

Tapasztalják, hogy nemcsak az oldalak mérete, de a szögek nagysága is változik. Méréssel tapasztalják meg, hogy ahogyan egyre nagyobb háromszögek szögeit mérjük meg, a szögek is nőnek. Itt tehát a szögek nem ugyanakkora: nagyobb háromszöghöz nagyobb szög tartozik. Nagyobb oldal esetén nagyobb az oldalak összege is. A szögnagyság a valószínű méreteknél körülbelül  $65^\circ$  és  $90^\circ$  között változik. Ha valaki  $60^\circ$ -nál kisebbet mért, nagyon hibásan mért!

Bízzuk rá a szabályos gömbháromszög-család megalkotását azokra a gyerekekre, akik ügyesen dolgoznak a gömbi szerkesztőeszközökkel! Ha a gyerekek már képesek a gömbi körzőt használni, akkor gömbi körzővel és vonalzóval a síkbelihez hasonló módon

szerkeszthetnek szabályos gömbháromszöget, körülbelül 70 illetve 100 gömbi lépés hosszúságú oldalakkal.

Ha csak a gömbi vonalzókat kezelik biztonságosan, akkor kérjük meg őket, hogy az összeillesztés főköre mentén mérjenek fel körülbelül 70 gömbi lépés hosszúságú szakaszt. Ugyanezt mérjék fel két gömbfólia peremére is. Ezután a két félgömbfóliának a gömbön való mozgatásával, próbálgatással állítsanak elő szabályos gömbháromszöget, jelöljék ki a harmadik csúcsot, vegyék le a félgömbfóliákat, és a gömbvonalzó segítségével szerkesszék meg a szabályos háromszöget, majd mérjék meg a szögeit. Ugyanezt ismételjék körülbelül 120 gömbi lépés hosszúságú oldallal is (3. Feladatlap 9-10. feladat)!

Néhány szabályos háromszög létrehozása után végezzenek az oldalakra és a szögekre vonatkozó mérést, és tapasztalják meg, hogy nagyobb oldalú háromszögben nagyobb az oldalak összege is, és nagyobbak a szögek is.

**5. Szerkessz a gömbre egyenlő oldalú háromszöget!**

**6. Jelölj meg a gömbön egy pontot, és ebből indíts olyan főköröket, amelyek egymással páronként 120 fokos szöget zárnak be!**

Szúrd a körződet a pontba, nyisd szét, és jelöld ezt a távolságot a főköreiden! Kösd össze ezeket a pontokat – egy gömbháromszöget kapsz.

Változtass a körző nyitását, és így is végezd el az előbbi szerkesztést!

Ezt ismételd meg néhányszor!

**7. Figyeld meg az így szerkesztett háromszögeket!**

Miben egyeznek meg ezek a háromszögek? **3 szimmetriatengelyükben**

Mennyi a szögek összege az egyes háromszögekben? Mérj!

**mérhetően kb.  $195^\circ$  és  $540^\circ$  között**

Miben különböznek ezek a háromszögek?

**az oldalak hosszában, a szögek nagyságában**

Mennyi az oldalak összege az egyes háromszögekben?

**nagyobb oldal esetén nagyobb**

Mennyi lehet a lehető legkisebb háromszögben az oldalak összege?

**egész kicsi, „közel a 0-hoz”**

És a lehető legnagyobb háromszögben?

**360 gömbi lépés**

**8. Mit gondoltok, a síkbeli szabályos háromszögeknél megfigyelt tulajdonságok közül melyek igazak a gömbi egyenlő oldalú háromszögekre?**

**egyenlő oldalak, egyenlő szögek, 3 szimmetriatengely, amelyek oldalfelező merőlegesek is, az oldalfelező pontokat összekötő háromszög is szabályos (de kisebb szögekkel)**



**9.** Rajzolj fel olyan háromszögeket a gömbre, amelyeknek egy, két, három derékszögük van! Hány szimmetriatengelyük van?

**1 derékszög: lehet 1 tengely; 2 derékszög: van 1 tengely; 3 derékszög: van 3 tengely**

Rajzolj meg kettőt, és jelöld meg a metszéspontjukat! Kösd össze ezt a pontot a háromszög három csúcsával! Hány háromszögre bontottad az eredeti háromszöget? **három háromszögre**

Mekkora ezeknek a háromszögeknek a szögei?  **$45^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $120^\circ$**

Mennyi a szögek összege ezekben a háromszögekben?  **$210^\circ$**

Szabályosak-e ezek a háromszögek? **nem szabályosak, csak egyenlőszárúak**

**10.** Rajzolj fel egy háromszor derékszögű háromszöget a gömbre! Jelöld meg az oldalain a felezőpontokat! Kösd össze ezeket a felezőpontokat más színű tollal!

Hány háromszögre bontottad szét az eredeti háromszöget?

Vannak-e egyfomák közöttük?

Vannak-e szabályosak közöttük?

**Megoldás: Négy háromszöget kaptunk. Az eredeti háromszög csúcsainál levő három háromszög egyforma, de nem szabályos; a középső viszont szabályos, amit a gyerekek akár az oldalak, akár a szögek lemérésével ellenőrizhetnek. A szabályos háromszög szögei közelítőleg  $70$  fokosak. Érdekes összehasonlítás adódik, ha ugyanezt a kísérletet szabályos síkháromszöggel is elvégzik. Ott mind a négy háromszög egyforma, és mind szabályos.**

## VI. Sokszögek alkotása, tulajdonságaik

### 1. Parkettázás különféle alakú sokszögekkel

A Tanulói munkafüzet 4. Feladatlapja szerint dolgozunk.

A sokszögek válogatása aszerint, hogy parkettázható-e velük a sík: 4. Feladatlap 1. feladat. Annak belátása, hogy adott sokszöggel miért parkettázható a sík, és egy másikkal miért nem.

Szervezési feladat: a sík- és térmértani modellezőkészlet egyforma alakú lapjainak kiosztása a pároknak.

Várható véleménykülönbségek: konkáv négyszöggel és általános konvex négyszöggel való parkettázhatóság.

Kirakással győződjünk meg elképzeléseinkről, és egy-egy lap felhasználásával A4-es lapra rajzolással is készítsünk parkettamintákat! Olyan parkettamintákat hozzanak létre a gyerekek, amelyeket hasonló elrendezésben folytatni lehet.

A tanár a tanulói tevékenységeket megfigyeli, szükség esetén segít.

## 4. FELADATLAP

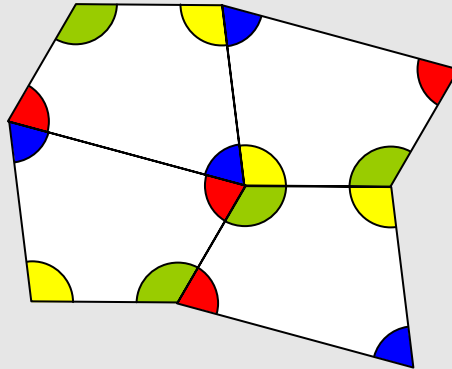
**1.** A sík- és térmértani modellezőkészlet egyforma alakú lapjaival dolgoztok. Melyik sokszöggel parkettázható a sík?

**Parkettázható a sík:**  
háromszögek bármelyikével;  
négyzetek bármelyikével;  
szimmetrikus hatszögekkel.

**Nem parkettázható a sík:**  
szabályos ötszöggel;  
szabályos nyolcszöggel.

Parkettaminta rajzolása általános négyszöggel: 4. feladatlap 2. feladat.

Szervezési feladat: 4 db négyszög és 1 db A4-es lap kiosztása a pároknak.  
 Négy lap kirakásával egy lehetséges minta megkezdése, lerajzolása és folytatása rajzban.  
 A parkettázás lehetőségének megvitatása, bemutatása.  
 Annak beláttatása, hogy a megkezdett parkettaminta akármeddig folytatható.  
 A parkettázás közben tapasztalatot szereznek a gyerekek arról, hogy a négyszög négy szögének egymás mellé illesztésével teljesszöget tudunk kirakni.

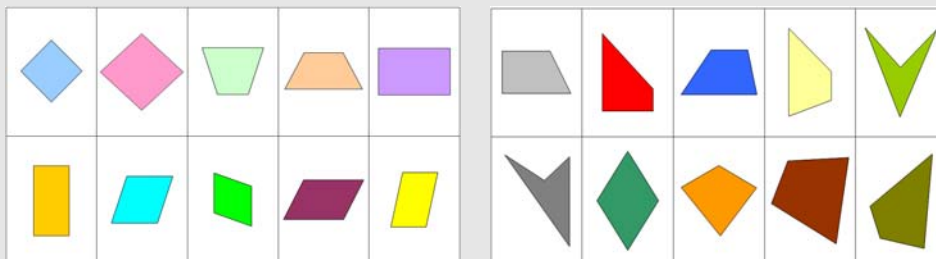


2. Rajzolj parkettamintát! Négy lap kirakásával kezdj el egy lehetséges parkettamintát, rajzold le, és folytasd néhány további elem megalkotásával!

## 2. A négyszögek tulajdonságai

Szervezési feladat: csoportonként 1 kártyakészlet (3. tanári melléklet, négyszögekártyák) szétosztása a 4 fős csoportoknak.

3. tanári melléklet – lásd e fájl végén és a modul eszközei közt is!



A játék szabálya a feladatban olvasható.

A játék során a gyerekek megfogalmazzák a négyszögek lehetséges tulajdonságait, például: Van párhuzamos oldalpárja; Legalább 2 derékszöge van; Minden oldala egyenlő...

3. Játék a négyszögekártyákkal. 4 fős csoportokban játsszatok!

A játék szabálya:

A játékosok egymás után egy tulajdonság megnevezésével lapot kérnek a következő játékostól. Ha neki van ilyen tulajdonságú lapja, azt át kell adni. Ilyenkor a kérő játékos leteheti ezt a lapot és a saját lapjai közül azt, ami ezzel a tulajdonsággal rendelkezik. A játék során egy tulajdonság csak egyszer hangozhat el.

A játék nyertese, aki a leghamarabb le tudja rakni a saját lapjait, vagy aki a játék végén a legtöbb párt gyűjtötte össze

Négyszögek válogatása választott szempont szerint a 3. tanári melléklet (négyszögekártyák) és a 4. tanári melléklet (szempontkártyák) készleteivel.



**4. tanári melléklet** – lásd e fájl végén és a modul eszközei közt is!

<b>Van párhuzamos oldalpárja</b>	<b>Átlói merőlegesen egymásra</b>	<b>Minden oldala egyenlő</b>
<b>Van derékszöge</b>	<b>Átlói felezik egymást</b>	<b>2-2 oldala párhuzamos</b>
<b>Van szimmetriatengelye</b>	<b>Minden szöge egyenlő</b>	<b>Nem minden oldala egyenlő</b>

Válasszanak a csoportok két válogatási szempontot a csoportonként kiosztott **4. tanári melléklet** kártyakészletéből, és ennek alapján válogassák szét a **3. tanári melléklet** kártyakészletének lapjait kétszer kétfelé. A csoport egy tagja az asztalnál marad, és visszakeveri a halmazt meghatározó címkéket a többi közé. Ezután a csoportok vándorolnak. Feladatuk kiválasztani a válogatás alapját képező címkéket.

A gyerekek kétféle tevékenységet végeznek:

- Kétszer kétfelé válogatnak választott szempontok szerint;
- Felismerik a válogatás szempontjait.

Ezáltal fejlődik halmazszemléletük, azonosító és megkülönböztető képességük.

### 3. Négyszögek alkotása

#### **Négyszögek előállítás**

##### Szervezési feladatok:

A gyerekek 4 fős csoportokban dolgozzanak. Osszunk szét csoportonként kb. 5 db szívószálát. Vágjanak le ezekből 3 cm, 4 cm, 5 cm és 6 cm-es darabokat.

- Fűzzenek ezekből minél többféle négyszöget.
- Csoportosítsák a megalkotott négyszögeket saját szempontjaik szerint. (Javasoljunk vizsgálódási szempontokat: oldalak hosszúsága, szimmetriatulajdonságuk szerint, van-e derékszöge, mind a négy szöge derékszög-e, a felfűzés sorrendje befolyásolja-e, hogy milyen a négyszög alakja, vannak-e egybevágó négyszögek, vannak-e téglalapok, vannak-e négyzetek...)
- Építsenek hurkapálcikákból is négyszögeket.

Eközben elég, ha kiderül, hogy egy négyszöget nem határoznak meg az oldalai, hogy hogyan lehet téglalapot építeni két-két egyenlő hosszú szívószálból, és ha egy ilyen téglalapban az egyik szöget megváltoztatjuk, akkor elárulhatjuk, hogy olyan alakzatot kapunk, aminek az oldalai párhuzamosak, és amit **paralelogramm**ának nevezünk.

Ugyanezt eljátszhatjuk a négyzettel is, és akkor eljuthatunk a **rombusz** megnevezéséhez.

- Az előbbi feladatok megbeszélése után adhatjuk feladatul, hogy a szívószálakból, hurkapálcikákból előállított négyszögeket állítsák elő sávok metszeteként is.

(Általánosságban a paralelogrammák oldalainak párhuzamosságával, szögeik tulajdonságával, egyenlőségével, szimmetriáikkal itt még nem érdemes foglalkozunk. Most csak annyi a cél, hogy az előállítás során tapasztaltakat megfigyeljék a gyerekek.)

A válogatásokat követően hangsúlyt helyezünk az alkotásokra és a megnevezésekre különféle tevékenységek szervezésével (4. Feladatlap 4. feladat).

##### Szervezési feladatok:

4 fős csoportok számára adjunk

- tépett papírlapot; – 2-3 szívószálat;
  - lyukas táblát; – legalább 2-féle színű fóliát.
  - A feladat különböző tulajdonságú négyszögek alkotása.
- A feladatok kiosztásához a csoportok mindegyike húzzon egyet az 5. tanári melléklet kártyái közül!

**5. tanári melléklet** –  
lásd e fájl végén és a modul  
eszközei közt is!

<b>1. csoport:</b>	<b>3. csoport:</b>
papírlapból: 2-2 oldala párhuzamos szívószálból: 2-2 szomszédos oldala egyenlő hosszú lyukas táblán: egyetlen szimmetriatengelye nem az átlója színes fóliákból: minden szöge egyenlő	papírlapból: átlói merőlegesen egymásra szívószálból: 2 oldala egyenlő hosszú és párhuzamos lyukas táblán: átlói egyenlő hosszúak színes fóliákból: 2-2 szomszédos szöge egyenlő szöget alkot
<b>2. csoport:</b>	<b>4. csoport:</b>
papírlapból: 1 párhuzamos oldalpárja van szívószálból: minden oldala egyenlő hosszú lyukas táblán: egyik átlójára szimmetrikus színes fóliákból: 2-2 szemközti szöge egyenlő	papírlapból: 2 szomszédos szöge derékszög szívószálból: 2 átlója egyenlő hosszú lyukas táblán: átlói felezik egymást színes fóliákból: van két szemközti szöge, amely egyenlő
<b>5. csoport:</b>	
papírlapból: egyik átlója merőlegesen felezi a másikat szívószálból: 2-2 szemközti oldala egyenlő hosszú lyukas táblán: legalább 3 derékszöge van színes fóliákból: van olyan oldal, amelyen fekvő szögeket egymás mellé téve, azok egyenlő szöget alkotnak	

A 4 fős csoportokban a gyerekek megbeszélik a négyszögek előállításának módját, megosztják a munkát, létrehozzák az alakzatokat, és csoportban ellenőrzik, hogy a létrehozott alakzatok megfelelnek-e a feltételeknek.

Az elkészült alakzatok válogatása, a tulajdonságok kiemelése, a megfogalmazott feltétel szükségességének illetve elégségességének ellenőrzése más feltétel teljesüléséhez frontális beszélgetéssel történik.

**4. Négyszögek alkotása.** A 4 fős csoportok mindegyike választ a felkínáltak közül egy kártyát, s az azon lévő utasítás szerint a csoport tagjai egy-egy négyszöget alkotnak.

## VII. Síkbeli négyzet szerkesztése, tulajdonságai

### 1. Négyzet előállítása

Ezek a tevékenységek már az előző modulban is megjelentek, azonban gyakorlásukat változatlanul fontos feladatnak tartjuk. Az ismert tevékenységek újjakkal való bővítése során tovább mélyülnek az ismeretek.

#### Négyzet előállítása hajtogatással, szívószálból, pontrácson

Csoportmunkában állítsanak elő a gyerekek négyzetet (5. feladatlap 1. feladat)!

A négyzet előállítása során a gyerekek a négyzet különböző tulajdonságait használják fel:

- téglalapról hajtogatással: a négyzet olyan téglalap, amely szimmetrikus egyik átlójára, vagy szomszédos oldalai is egyenlő hosszúak;
- szívószálból: a négyzet egy egyenlő oldalú négyszög (rombusz), amelynek van derékszöge;
- négyzetrácsos papíron: a négyzet olyan négyszög, amelynek minden oldala és minden szöge egyenlő, vagy átlói merőlegesen felezik egymást és egyenlők.

## 5. FELADATLAP

**1. Csoportban dolgozzatok! Állítsatok elő négyzetet:**

- téglalapról hajtogatással;
- szívószálból;
- négyzetrácsos papíron!

### A négyzet szerkesztése

Problémafelvetés: hogyan lehet síkbeli egyenes és derékszögű vonalzóval és síkbeli körzővel téglalapot rajzolni?

– Szerkesszettek olyan téglalapot, amelynek oldalai 10cm és 7cm hosszúságúak!

A gyerekek megrajzolnak egy 10 cm hosszú egyenes szakaszt, a két végpontjában merőlegeseket állítanak, mindkettőre rámérik a 7 cm-t, és az így kapott végpontokat összekötik. Lemérik a negyedik oldalt, arra is 10 cm-t kapnak, ha jól dolgoztak.

Milyen alakzatot kapunk, ha a téglalapunknak minden oldala egyforma?

– Szerkesszettek egy ilyen négyszöget, legyen az oldala 8 cm hosszú!

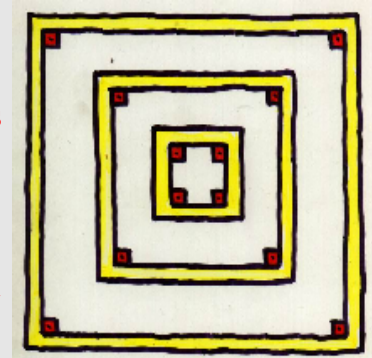
A gyerekek megrajzolnak egy kb. 8 cm hosszú egyenes szakaszt, a két végpontjában merőlegeseket állítanak, mindkettőn lemérik ugyanazt a távolságot, és az így kapott végpontokat összekötik. Lemérik a negyedik oldalt: ugyanakkora, mint a másik három. Lemérik a szögeket: mindegyik derékszög. Ez tehát szabályos síknégyszög, vagyis négyzet.

– Mondjatok még igaz állításokat erről az alakzatról szóforgóban!

Szemben fekvő oldalai párhuzamosak egymással; stb.

– Próbáljatok további négyzeteket rajzolni úgy, hogy a képen látható mintát kapjátok!

A gyerekek megrajzolják a már megszerkesztett négyzet átlóit és meg is hosszabbítják a csúcsokon túl is. Tetszőlegesen választanak egy távolságot, amelyet a metszéspontból felmérnek mindegyik átlóra (mindkét irányban), és a kapott pontokat összekötik. Így vagy olyan négyzetet szerkesztenek, amelyik „bekapta”, vagyis belsejében tartalmazza az első négyzetet, vagy olyant, amely az első négyzeten belül van.



Megméri a négyzetek oldalait és szögeit. Állításokat gyűjtenek: az oldalakra; a szögekre; az átlókra; a szimmetriára vonatkozóan.

## 2. A négyzetet meghatározó tulajdonságok

A négyzetet meghatározó tulajdonságok kiválogatása, tudatosítása feladatlap megoldásával, önálló munkában (5. feladatlap 2., 3. feladat). A feladatok megoldása során felmérhetjük, hogy biztos ismeretük van-e a gyerekeknek a négyzet fogalmáról.

A feladatlap 4. feladatát adjuk házi feladatnak. Következő órán beszéljük meg.

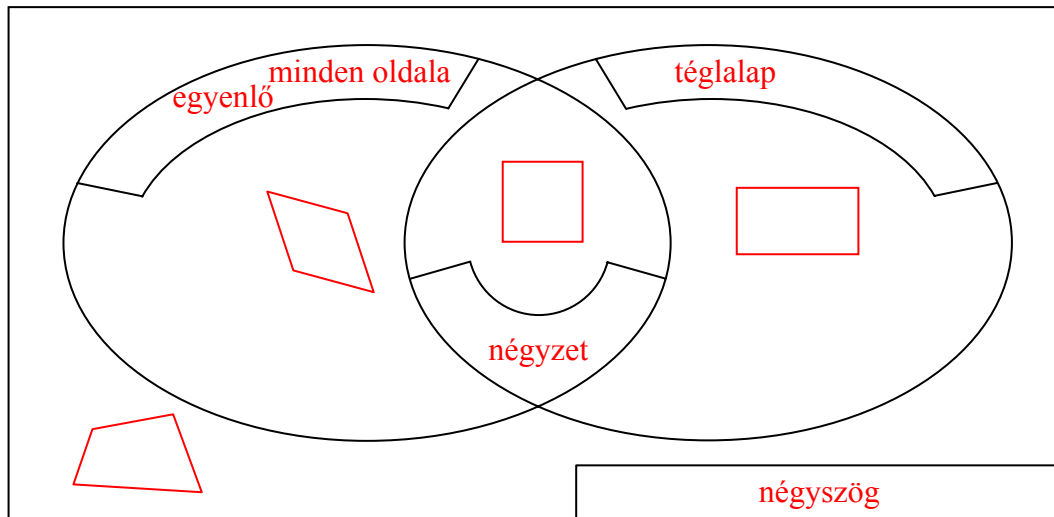
### 2. Melyik igaz? Karikázd be!

A kezemben tartok egy négyszöget.

- a) Ez egy téglalap és minden oldala egyenlő hosszú. Tehát ez egy négyzet. **igaz**
- b) A négyszög átlói merőlegesen felezik egymást. Tehát ez egy négyzet. **lehet rombusz**
- c) A négyszögnek nincs négy szimmetriatengelye, de minden oldala egyenlő, sőt az átlói merőlegesen felezik egymást. Tehát ez egy négyzet. **ez rombusz**
- d) A négyszög szemközti oldalai párhuzamosak és minden oldala egyenlő hosszú. Tehát ez egy négyzet **lehet rombusz**
- e) A négyszög átlói egyenlő hosszúak és merőlegesen egymásra. Tehát ez egy négyzet. **lehet általános négyszög**

### 3. Helyezd el a címkéket a diagramon!

Négyszög, négyzet, minden oldala egyenlő hosszú, téglalap.



Rajzolj mindegyik tartományba odaillő alakzatot!

#### 4. Szerkessz téglalapot

- 3 cm és 4 cm hosszú szakaszokból;
- 5 cm oldalakkal;
- 3 cm és 5 cm legyen a két-két szemközti oldala;
- minden oldala 5 cm hosszúságú legyen!

## VIII. Rendszerezés, gyakorlás, diagnosztizáló felmérés

### 1. A felmérő feladatlap megírása

## FELMÉRÉS

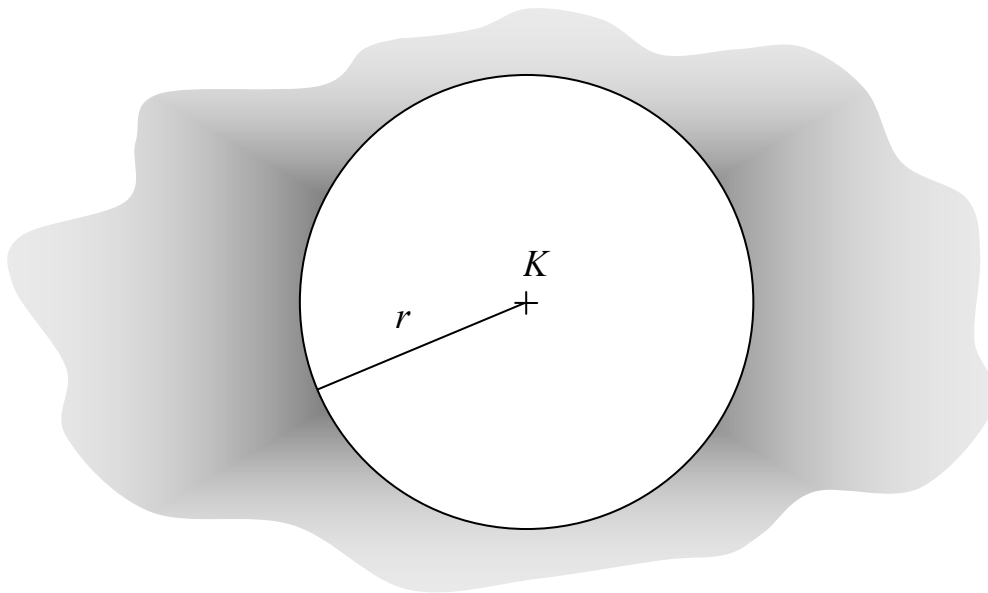
Név: \_\_\_\_\_

5. évfolyam, Ponthalmazok

## A CSOPORT

1. Rajzolj vonalzóval egy egyenest! Színezd kékre azokat a pontokat, amelyeknek az egyenestől mért távolsága legalább 1 cm, de legfeljebb 3 cm!

2. Jellemezd az ábra beszínezett részén lévő pontokat! A  $K$  betű a kör középpontját jelöli, a kör sugara  $r = 3$  cm.



A szürke színű pontok a kör középpontjától ..... vannak.

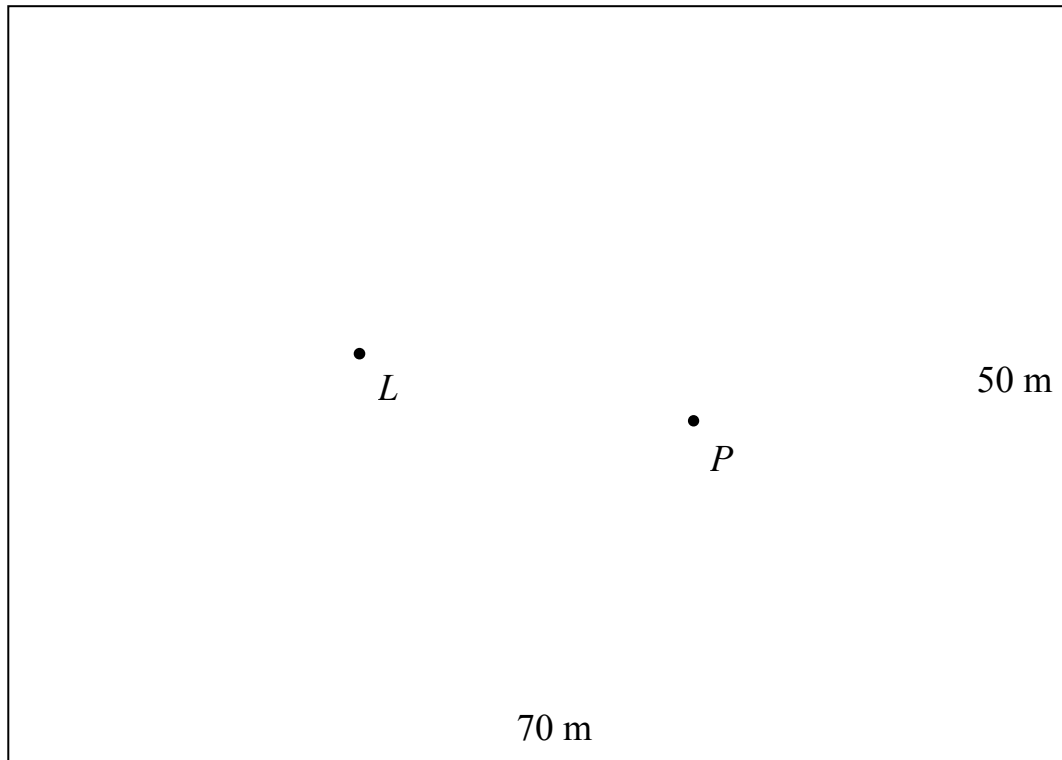
**3.** Rajzolj vonalzóval egy egyenest, jelöld  $e$ -vel. Az egyenestől 3 cm-re jelöld ki egy pontot, jelöld  $P$ -vel.

- a) Jelöld sárgával az  $e$  egyenestől legalább 1 cm-re levő pontok helyét!
- b) Jelöld késsel a  $P$  ponttól legfeljebb 5 cm-re lévő pontok helyét!

c) Mondj igaz állításokat azokról a pontokról, amelyeket sárgával és késsel is beszíneztél!

d) Mi jellemző a fehéren maradt rész pontjaira?

4. A rajzon egy kert kicsinyített mását látod. Ami a rajzon 1 cm, az a valóságban 5 m. Két olyan locsolót teszünk le, amelyek körbe-körbe forogva öntözik a virágokat. Mindkettő 15 méteres sugárban szórja a vizet. (Az ábrán  $L$  és  $P$  betűkkel jelöltük a locsolófejeket.) Színezd be zölddel az ábrán azt a részt, ami a legtöbb vizet kapja, és szürkére, ami szárazon marad!



5. Szerkessz 4 cm oldalú négyzetet!

Pontszám:

Osztályzat:

## FELMÉRÉS

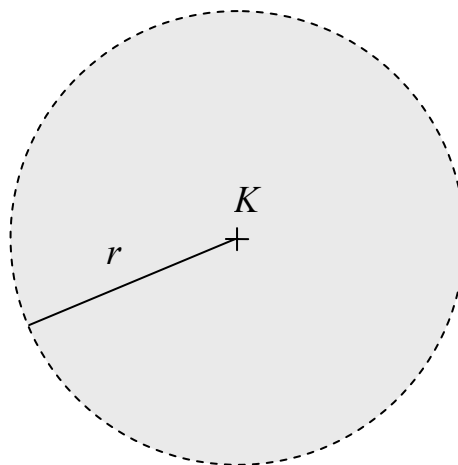
Név: \_\_\_\_\_

5. évfolyam, Ponthalmazok

## B CSOPORT

1. Rajzolj vonalzóval egy egyenest! Színezd kékre azokat a pontokat, amelyeknek az egyenestől mért távolsága legalább 3 cm!

2. Jellemezd az ábra beszínezett részén lévő pontokat! A  $K$  betű a kör középpontját jelöli, a kör sugara  $r = 3$  cm.



A szürke színű pontok a kör középpontjától ..... vannak.



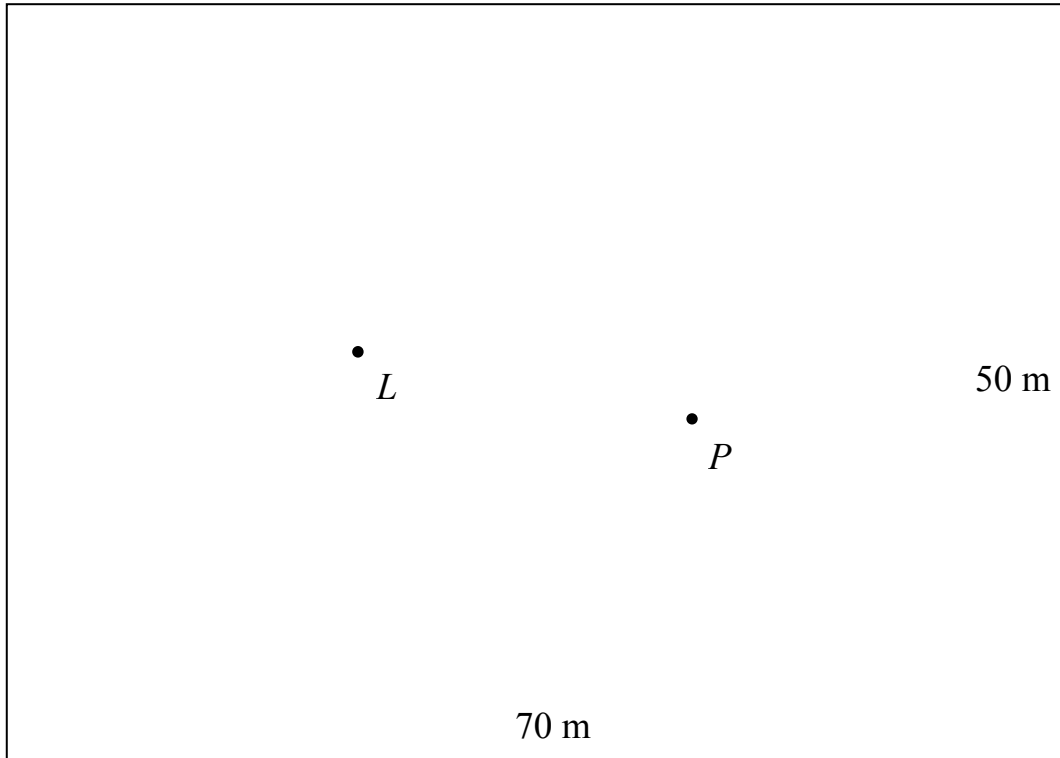
**3.** Rajzolj vonalzóval egy egyenest, jelöld  $e$ -vel. Az egyenestől 3 cm-re jelöld ki egy pontot, jelöld  $P$ -vel.

- a) Jelöld sárgával az  $e$  egyenestől legalább 2 cm-re levő pontok helyét!
- b) Jelöld késsel a  $P$  ponttól legfeljebb 4 cm-re lévő pontok helyét!

c) Mondj igaz állításokat azokról a pontokról, amelyeket sárgával és késsel is beszíneztél!

d) Mi jellemző a fehérén maradt rész pontjaira?

4. A rajzon egy kert kicsinyített mását látod. Ami a rajzon 1 cm, az a valóságban 5 m. Két olyan reflektort teszünk le, amelyek körbe-körbe forogva világítanak a kertben. Mindkettő 15 méteres sugárban világítja be a növényeket. (Az ábrán  $L$  és  $P$  betűkkel jelöltük a reflektorokat.) Színezd be zölddel az ábrán azt a részt, amit mindkét reflektor megvilágít, és szürkére, ami sötétben marad!



5. Szerkessz olyan téglalapot, amelynek oldalai 4 cm és 5 cm hosszúságúak!

Pontszám:

Osztályzat:

FELMÉRÉS (MEGOLDÁSOK)

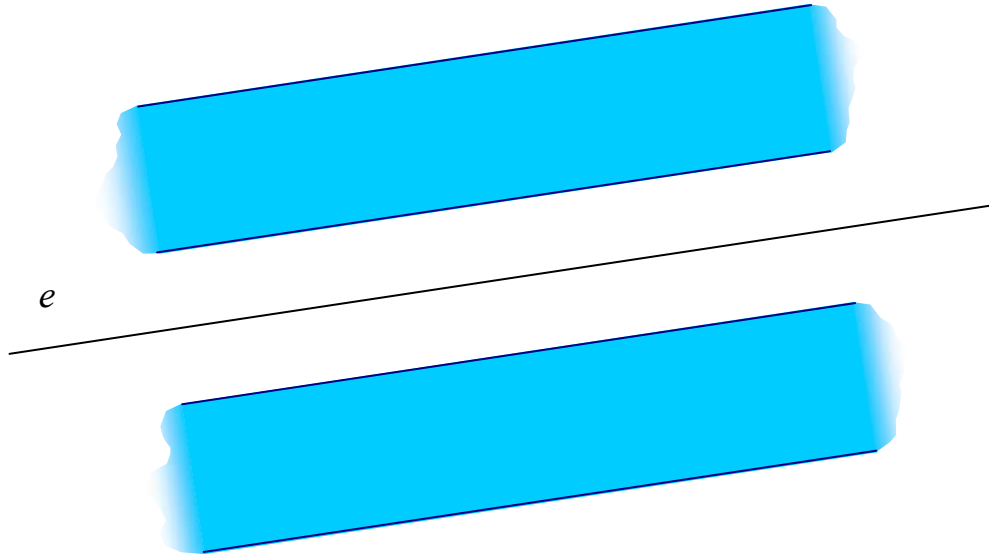
Név: \_\_\_\_\_

5. évfolyam, Ponthalmazok

## A CSOPORT

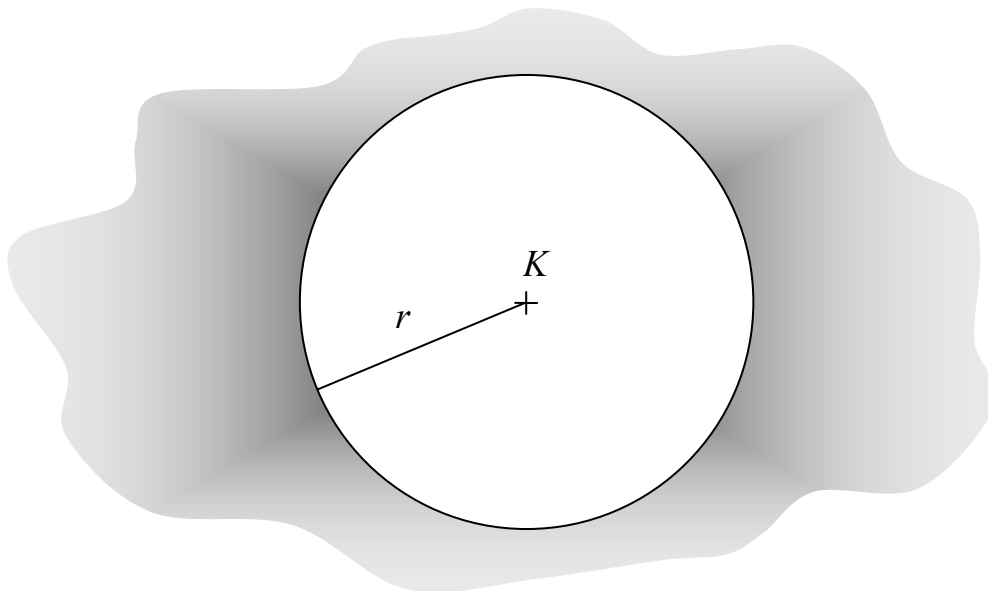
1. Rajzolj vonalzóval egy egyenest! Színezd kékre azokat a pontokat, amelyeknek az egyenestől mért távolsága legalább 1 cm, de legfeljebb 3 cm!

3 pont



2. Jellemezd az ábra beszínezett részén lévő pontokat! A  $K$  betű a kör középpontját jelöli, a kör sugara  $r = 3$  cm.

2 pont

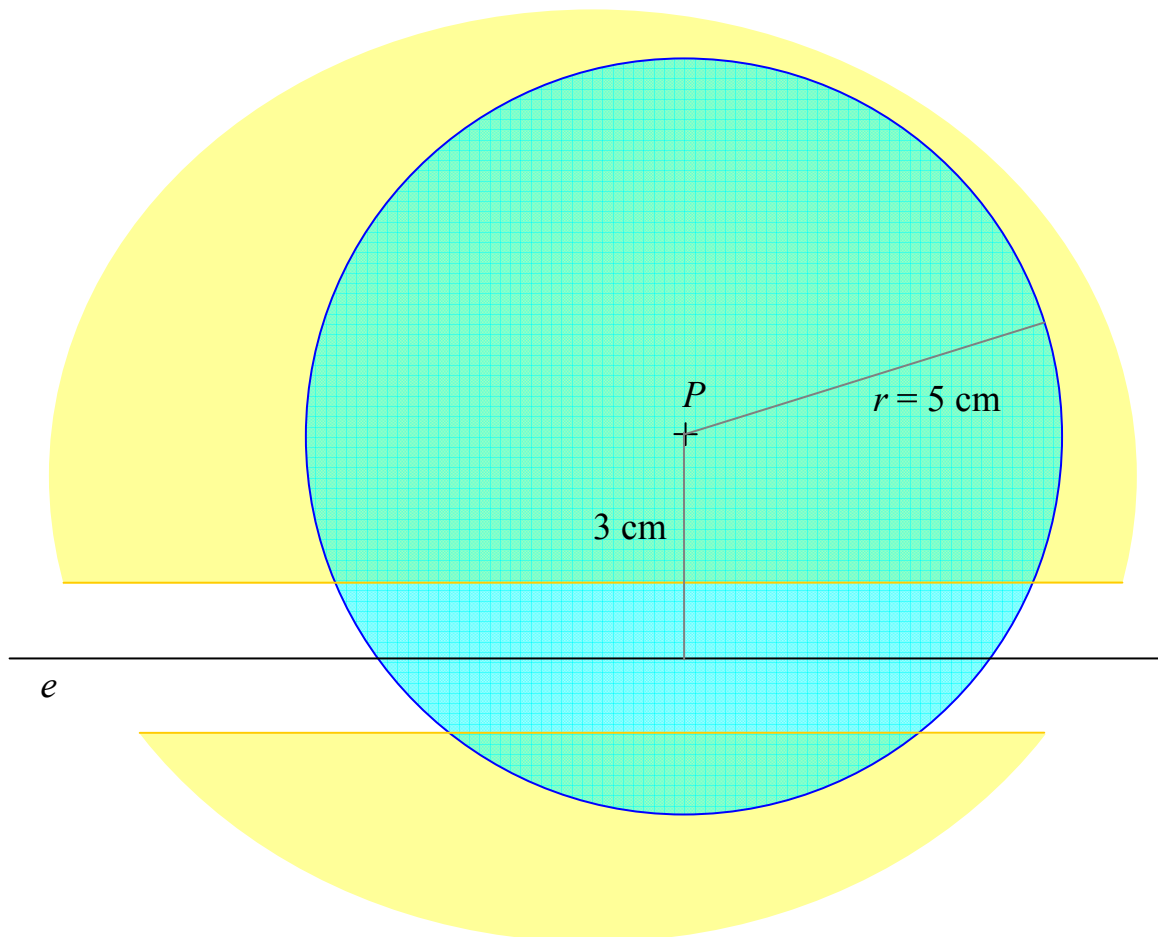


A szürke színű pontok a kör középpontjától legalább 3 cm távolságra vannak.

3. Rajzolj vonalzóval egy egyenest, jelöld  $e$ -vel. Az egyenestől 3 cm-re jelöld ki egy pontot, jelöld  $P$ -vel.

a) Jelöld sárgával az  $e$  egyenestől legalább 1 cm-re levő pontok helyét! **1 pont**

b) Jelöld kékkel a  $P$  ponttól legfeljebb 5 cm-re levő pontok helyét! **1 pont**



c) Mondj igaz állításokat azokról a pontokról, amelyeket sárgával és kékkel is beszíneztél!

**2 pont**

Az egyenestől legalább 1 cm-re, a  $P$  ponttól legfeljebb 5 cm-re vannak.

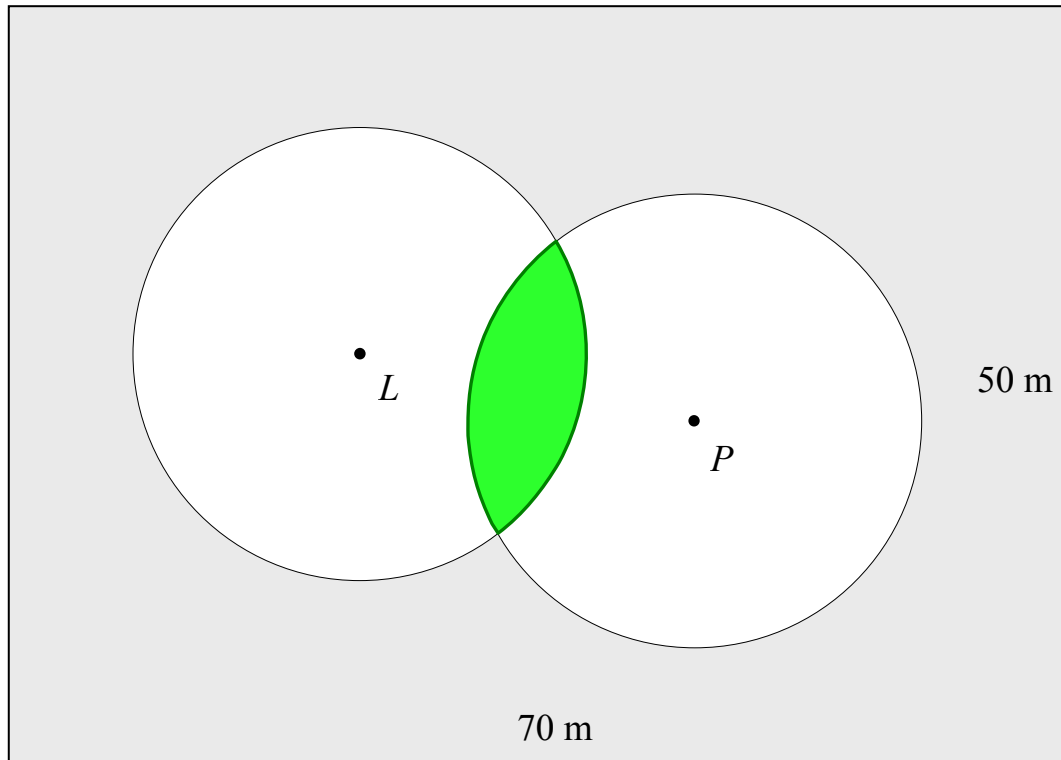
d) Mi jellemző a fehéren maradt rész pontjaira?

**2 pont**

Az egyeneshez közelebb vannak 1 cm-nél, és a  $P$  ponttól távolabb vannak 5 cm-nél.

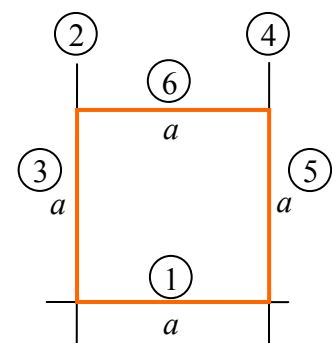
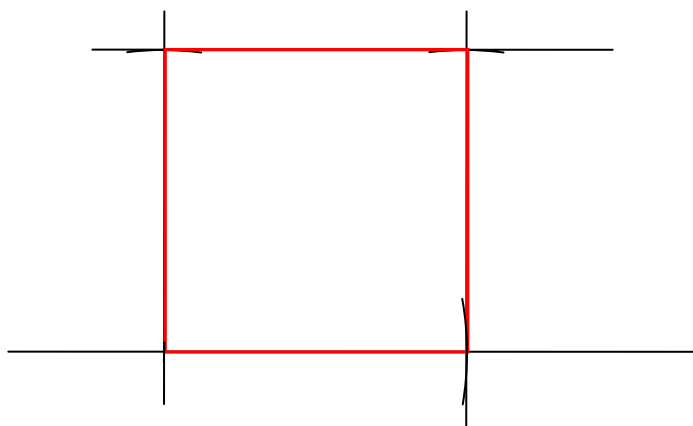
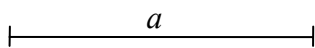
4. A rajzon egy kert kicsinyített mását látod. Ami a rajzon 1 cm, az a valóságban 5 m. Két olyan locsolót teszünk le, amelyek körbe-körbe forogva öntözik a virágokat. Mindkettő 15 méteres sugárban szórja a vizet. (Az ábrán  $L$  és  $P$  betűkkel jelöltük a locsolófejeket.) Színezd be zölddel az ábrán azt a részt, ami a legtöbb vizet kapja, és szürkére, ami szárazon marad!

4 pont



5. Szerkessz 4 cm oldalú négyzetet!

3 pont



Pontszám:

Osztályzat:

FELMÉRÉS (MEGOLDÁSOK)

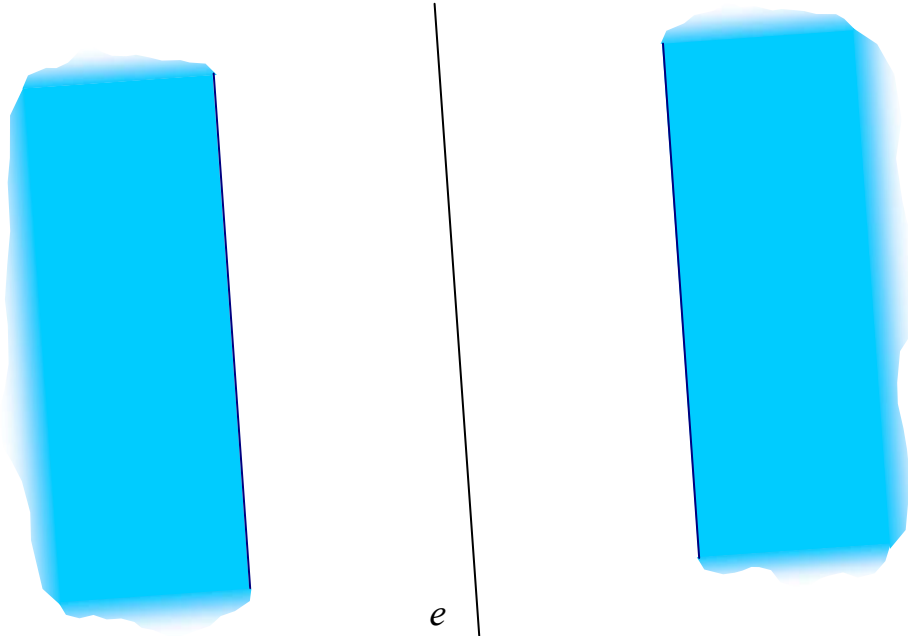
Név: \_\_\_\_\_

5. évfolyam, Ponthalmazok

## B CSOPORT

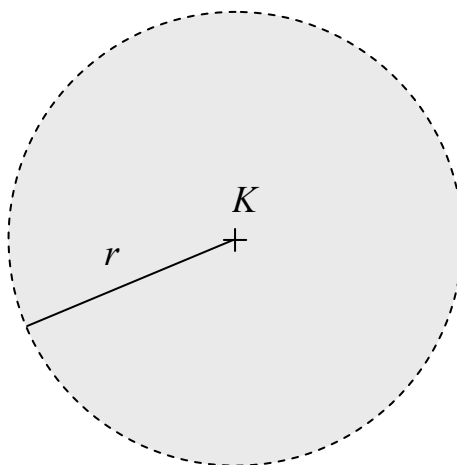
1. Rajzolj vonalzóval egy egyenest! Színezd kékre azokat a pontokat, amelyeknek az egyenestől mért távolsága legalább 3 cm!

3 pont



2. Jellemezd az ábra beszínezett részén lévő pontokat! A  $K$  betű a kör középpontját jelöli, a kör sugara  $r = 3$  cm.

2 pont

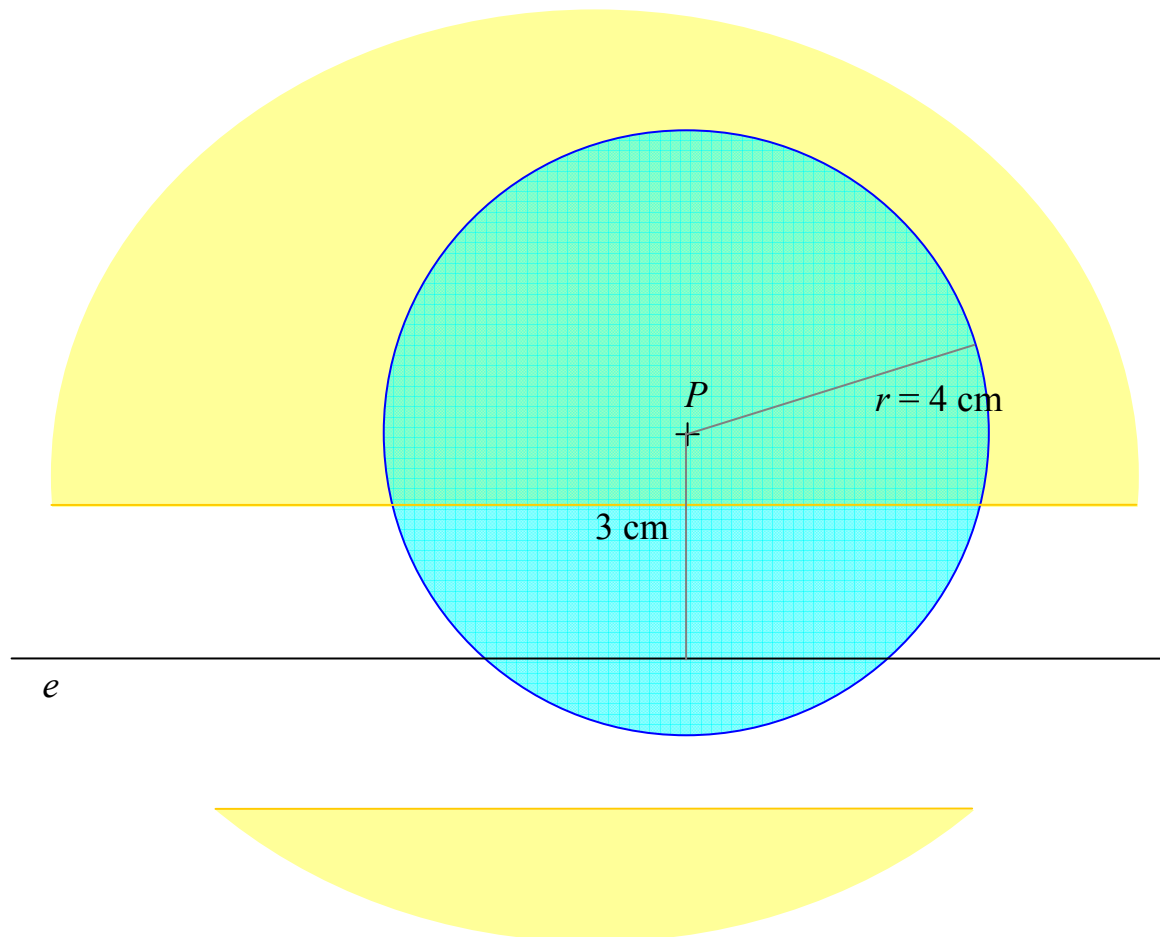


A szürke színű pontok a kör középpontjától 3 cm-nél közelebb vannak.

3. Rajzolj vonalzóval egy egyenest, jelöld  $e$ -vel. Az egyenestől 3 cm-re jelöld ki egy pontot, jelöld  $P$ -vel.

a) Jelöld sárgával az  $e$  egyenestől legalább 2 cm-re levő pontok helyét! **1 pont**

b) Jelöld kékkel a  $P$  ponttól legfeljebb 4 cm-re lévő pontok helyét! **1 pont**



c) Mondj igaz állításokat azokról a pontokról, amelyeket sárgával és kékkel is beszíneztél!

**2 pont**

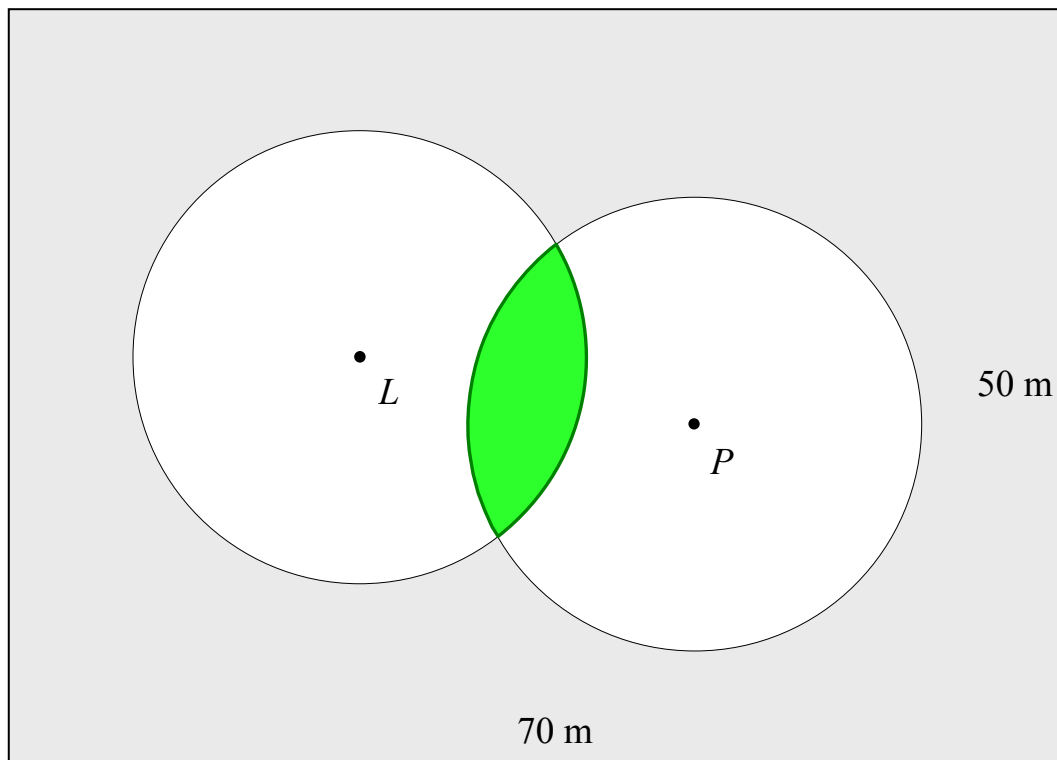
A sárgával és kékkel is beszínezett pontok távolsága az egyenestől legalább 2 cm és a  $P$  ponttól legfeljebb 4 cm távolságra vannak.

d) Mi jellemző a fehéren maradt rész pontjaira?

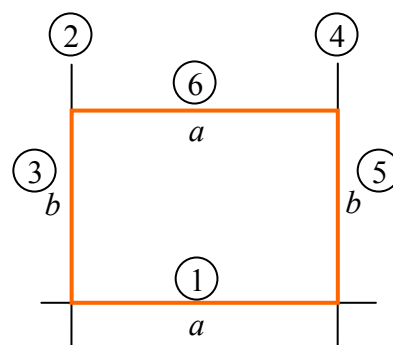
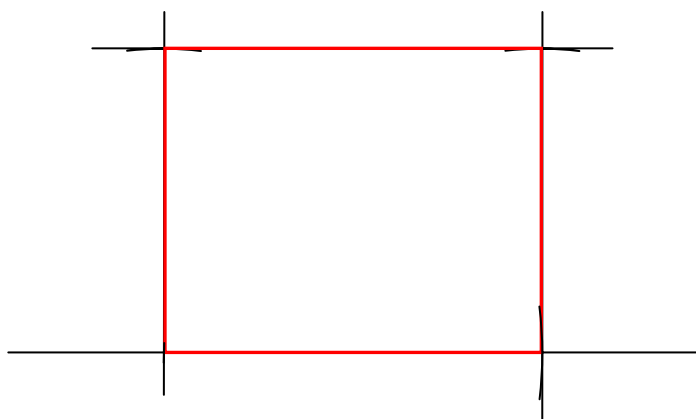
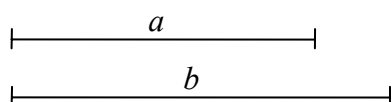
**2 pont**

A fehéren maradt részen lévő pontok az egyeneshez közelebb vannak 2 cm-nél, és a  $P$  ponttól távolabb vannak 4 cm-nél.

4. A rajzon egy kert kicsinyített mását látod. Ami a rajzon 1 cm, az a valóságban 5 m. Két olyan reflektort teszünk le, amelyek körbe-körbe forogva világítanak a kertben. Mindkettő 15 méteres sugárban világítja be a növényeket. (Az ábrán  $L$  és  $P$  betűkkel jelöltük a reflektorokat.) Színezd be zölddel az ábrán azt a részt, amit mindkét reflektor megvilágít, és szürkére, ami sötétben marad!

**4 pont**

5. Szerkessz olyan téglalapot, amelynek oldalai 4 cm és 5 cm hosszúságúak!

**3 pont**

Pontszám:

Osztályzat:



## FELADATGYŰJTEMÉNY

### 1. Párban játsszatok!

Szükség van egy lyukas táblára, pálcikákra, befőttes gumira, két különböző színű dobókockára (pl. piros és fekete).

Az egyik gyerek dob a piros kockával és a fekete kockával. A lyukas táblán a bal alsó sarokból indulva jobbra annyit lép, amennyit a piros kockával dobott, és onnan annyit fölfelé, amennyit a fekete kocka mutat, és ezt a helyet egy pálcikával megjelöli. Csere után a másik gyerek dob. Három dobás után ki-ki megvizsgálja, sikerül-e befőttes gumival háromszöget kifeszítenie a saját pálcikájukra. Akinek ez sikerül, pontot kap.

Játék közben szokják a gyerekek a pontok koordinátákkal történő megadását, valamint tapasztalatot szereznek arról, hogy három pont akkor határoz meg háromszöget, ha azok nincsenek egy egyenesen.

### 2. Válogassátok szét a kártyakészlet háromszögeit valamilyen szempont szerint!

- Tartson meg mindenki egy lapot magának!
- A válogatást követően körforgással megfigyelitek más csoport válogatását, és a felismert válogatási szempontoknak megfelelően el kell helyeznetek a saját lapjaitok közül egyet.
- A körforgás végére visszaértek saját helyetekre, és ellenőriztek az elhelyezett lapokat!

A gyerekek 5 csoportban oldják meg a feladatot, az 1. tanári mellékletet (háromszögekártyák) használva.

### 3. Minden csoportnál 2, 4 és 5 cm hosszúságú hurkapálcák vannak, mindegyikből legalább 3.

Becsüljétek meg, hány különböző háromszöget tudtok ebből kirakni!

Gyűjtsétek táblázatba a lehetséges megoldásokat!

Kirakással ellenőriztétek, hogy milyen háromszögeket tudtatok megalkotni!

egyik oldal (cm)	másik oldal (cm)	harmadik oldal (cm)
2	2	2
<del>2</del>	<del>2</del>	<del>4</del>
<del>2</del>	<del>2</del>	<del>5</del>
2	4	4
2	4	5
2	5	5
4	4	4
4	4	5
4	5	5
5	5	5

Az áthúzottak is lehetséges adathármasok, de a háromszög-egyenlőtlenség nem-teljesülése miatt nem alkotható belőlük háromszög.

4. Szerkessz olyan háromszögeket, amelyek oldalai különböző hosszúságúak! Válassz a megadott oldalhosszak közül: 3 cm; 4 cm; 5 cm; 8 cm!

A szerkeszthető 2 háromszög oldaladatai: 3 cm; 4 cm; 5 cm ill. 4 cm; 5 cm; 8 cm.

5. Szerkessz egyenlőszárú háromszöget, amelynek oldalai

- a) 5 cm és 9 cm; két lehetőség  
 b) 5 cm és 10 cm; egy lehetőség  
 c) 5 cm és 6 cm hosszúak! két lehetőség

6. Szerkessz olyan háromszöget, amelynek oldalai cm-ekben mérve szomszédos páros egész számok, és kerülete

- a) 18 cm; 4 cm; 6 cm; 8 cm  
 b) 24 cm; 6 cm; 8 cm; 10 cm  
 c) 20 cm! nincs megoldás

7. Szerkessz téglalapot, amelynek oldalai cm-ben mérve egészek, és

- a) területe  $18 \text{ cm}^2$ ; 1 cm és 18 cm; 2 cm és 9 cm; 3 cm és 6 cm oldalú téglalapok  
 b) kerülete 18 cm! 1 cm és 8 cm; 2 cm és 7 cm; 3 cm és 6 cm; 4 cm és 5 cm oldalú téglalapok

8. Szerkessz olyan téglalapot, amelynek kerülete 24 cm, és egyik oldala 3-szorosa a másiknak!  
 9 cm és 3 cm oldalú téglalap

9. Dönts az állítások igazságáról! Döntésednek megfelelően írd I (igaz) vagy H (hamis) betűt a keretbe!

Egy háromszög bármely két oldalhosszának összege nagyobb a harmadik oldalnál.

I

Egy háromszög két oldalhosszának összege lehet egyenlő a harmadik oldallal.

H

Van olyan háromszög, melyben bármely két oldal hosszának összege nagyobb a harmadik oldalnál.

I

Nincs olyan háromszög, melyben két oldal hosszának összege kisebb a harmadik oldalnál.

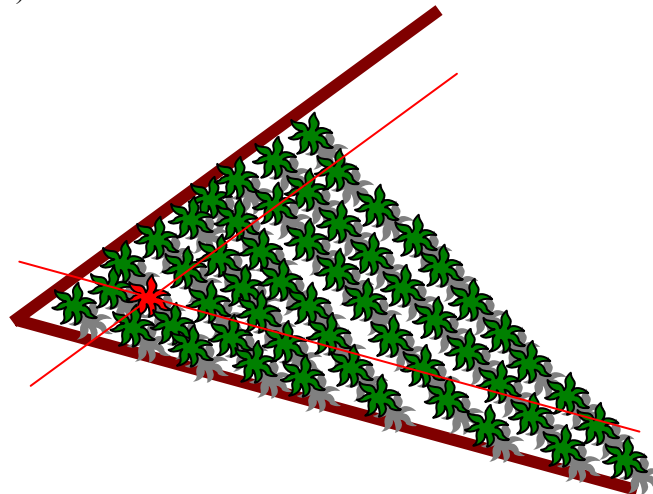
I

Van olyan háromszög, amelyben két oldal hosszának összege nem nagyobb a harmadik oldalnál.

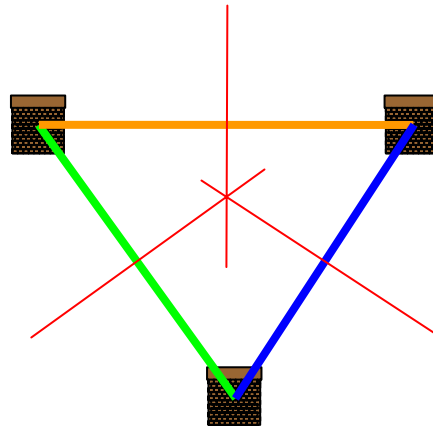
H

10. Az elvarázsolt erdőn csak akkor tudunk keresztül menni, ha betartjuk a szabályt.

A szabály a következő: Meg kell érinteni annak a fának a törzsét, amely az erdőt szegélyező két úttól 3 méterre van. Rajzold meg ennek a fának a helyét! (Ami a valóságban 1 méter, az a rajzodon 1 cm legyen!)

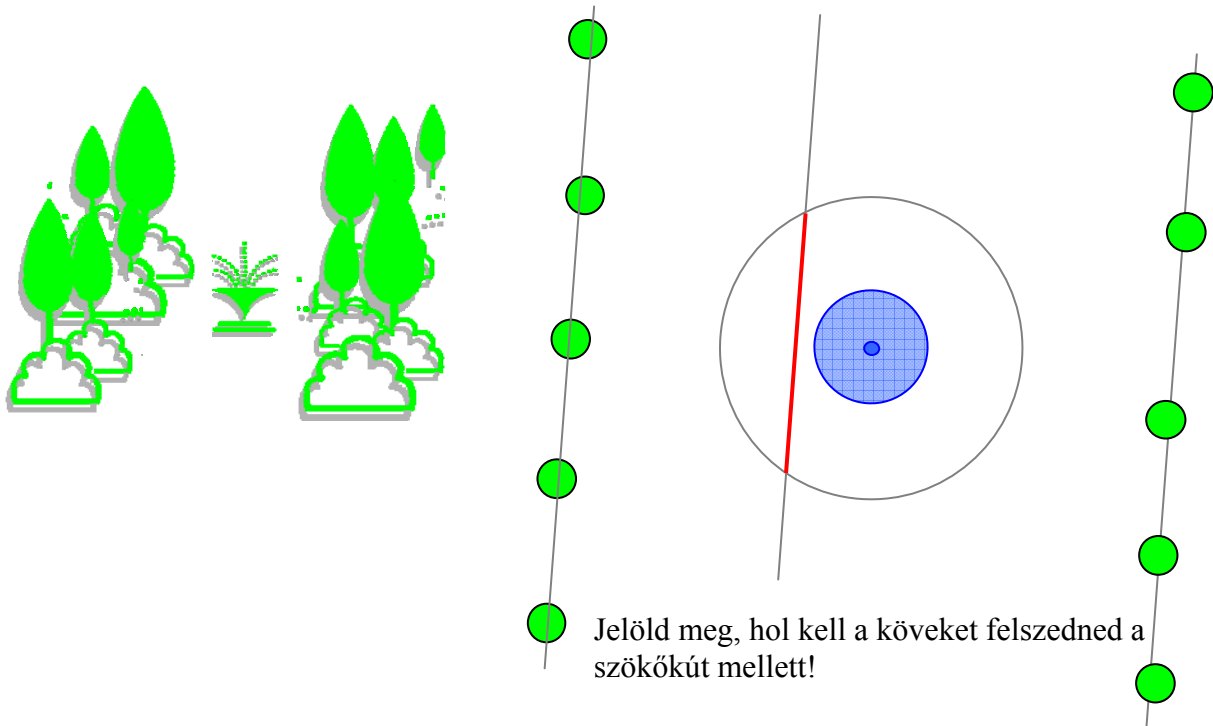


**11.** Ha az erdőből szerencsésen kijutottunk, akkor meg kell keresnünk azt a kútat, amely a három kismalac házától egyforma távolságra van. Papírra másold át a rajzot, és hajtogatással keresd meg a kút helyét!

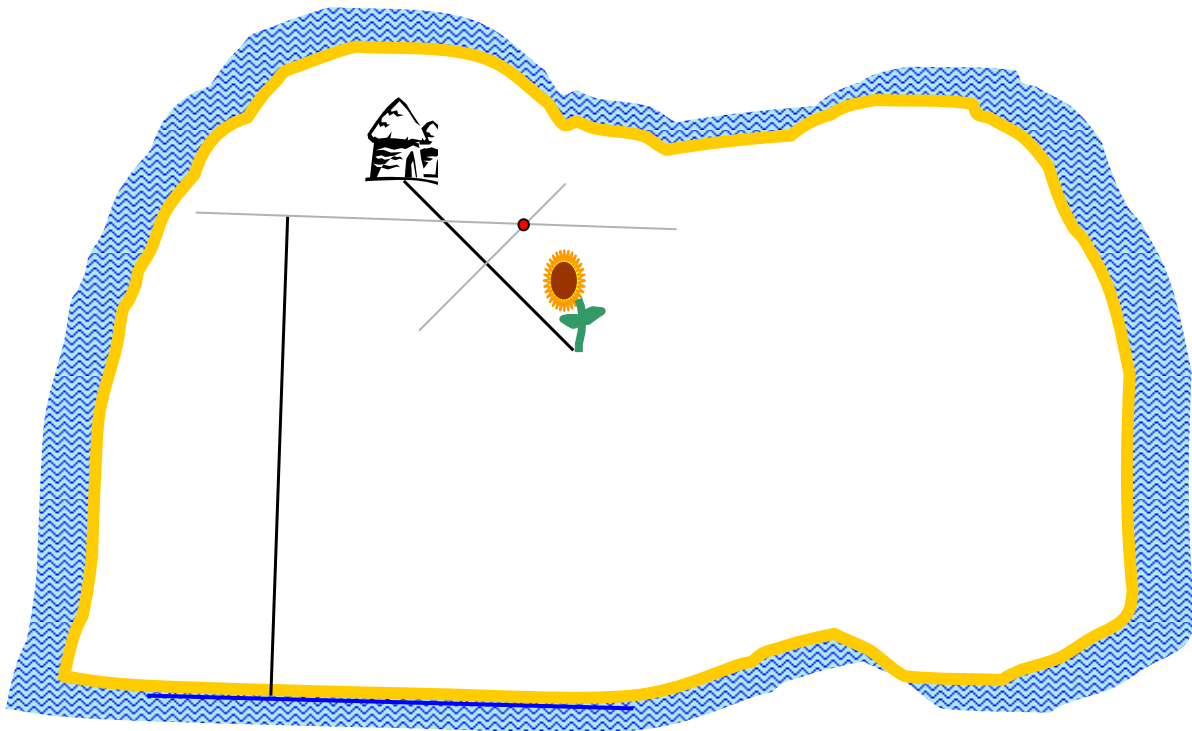


**12.** A képen két sétautat és egy szökőkútat látsz. A két fasor távolsága 8 m, a szökőkút egyenlő távolságra van mindkét fasortól. Azt a helyet kell megkeresned, amely a szökőkút közepéhez közelebb van 2 m-nél, és a baloldali fasortól 3 m-re van. Ott egy kő alatt találsz egy térképet.

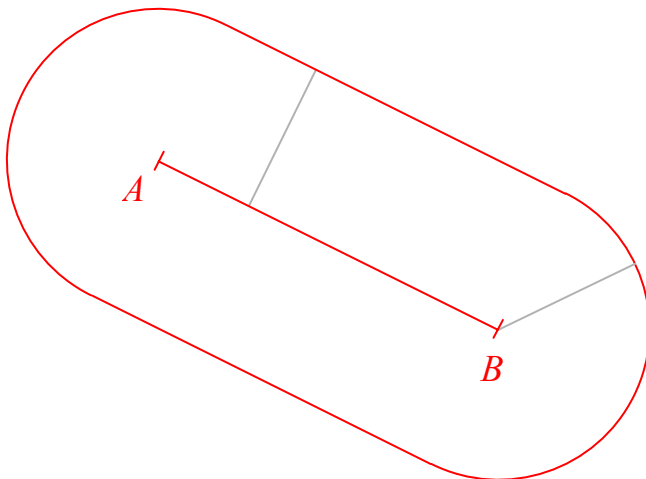
Helikopterrel a kert fölé szállva ezt látjuk  
(ami a valóságban 1 méter, az a rajzon 1 cm):



**13.** A térkép a Kincses szigetről készült. A kincs az elhagyott viskótól és a napraforgótól egyforma távolságra van, a déli tengerparttól pedig kétszer akkora távolságra, mint a viskó és a napraforgó távolsága. Találd meg a kincset!

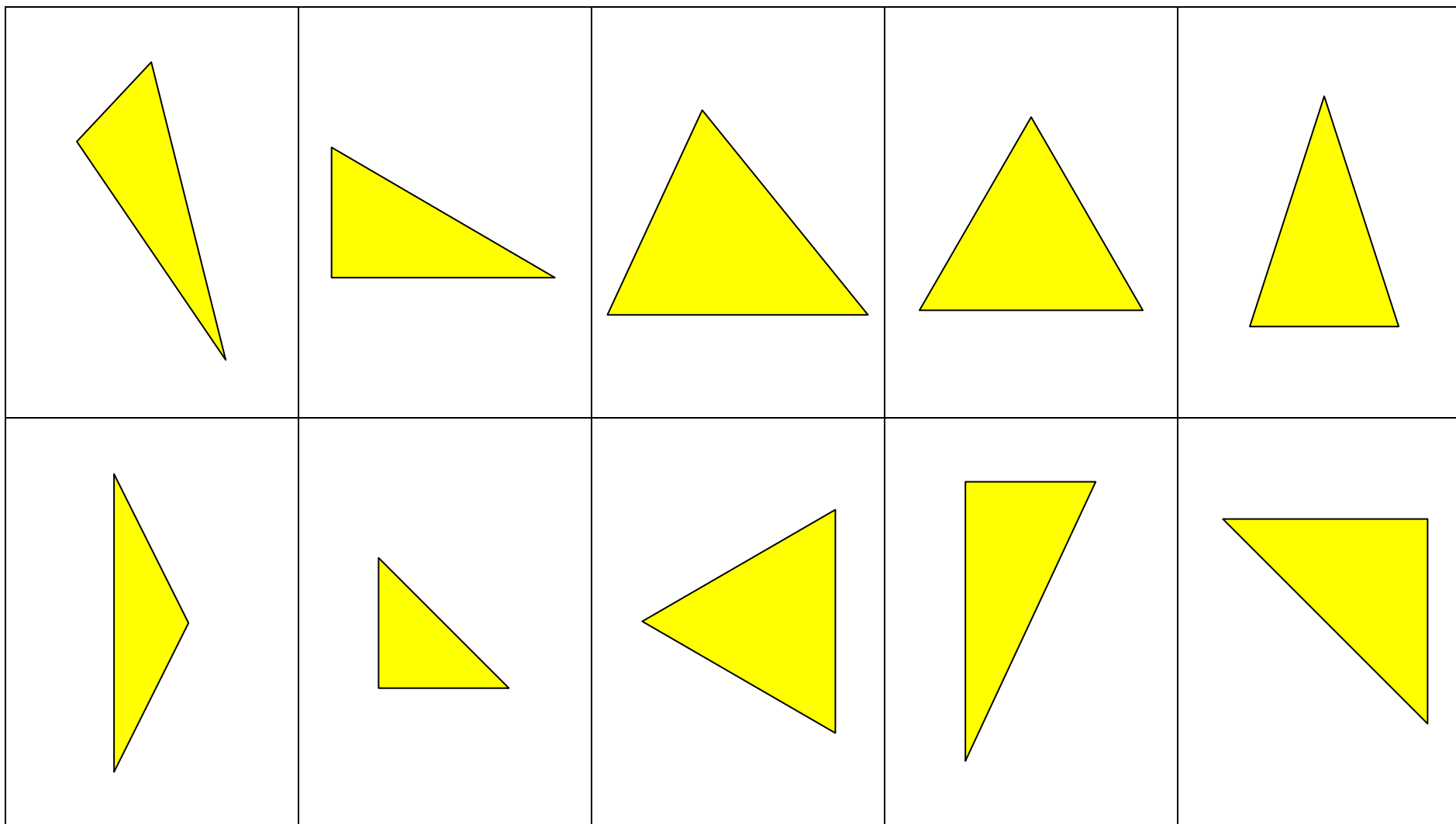


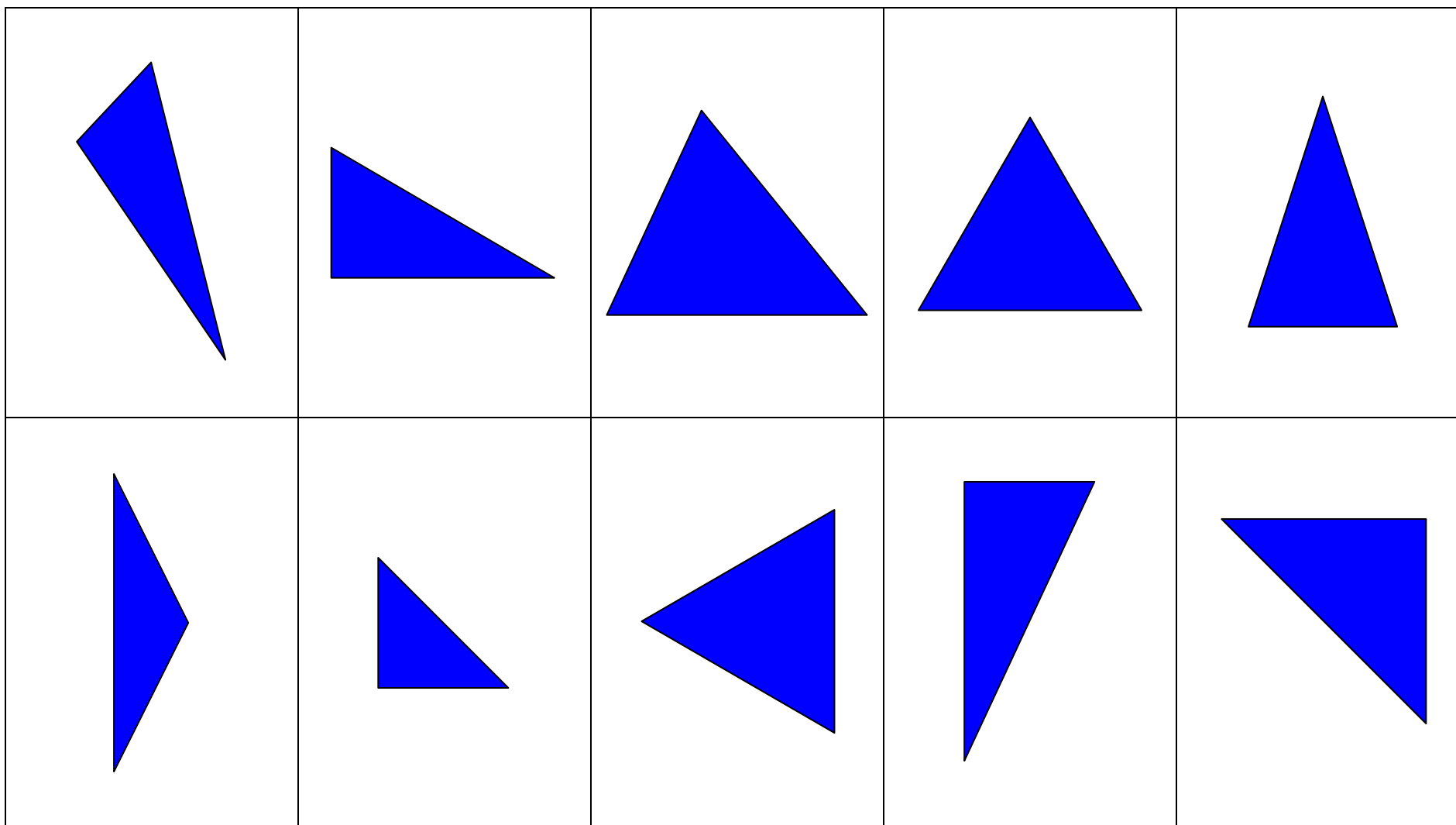
**14.** Rajzolj egy 5 cm-es szakaszt a papírodra! Keresd meg azokat a pontokat a papír síkjában, amelyek a szakasztól 2 centiméteres távolságra vannak!

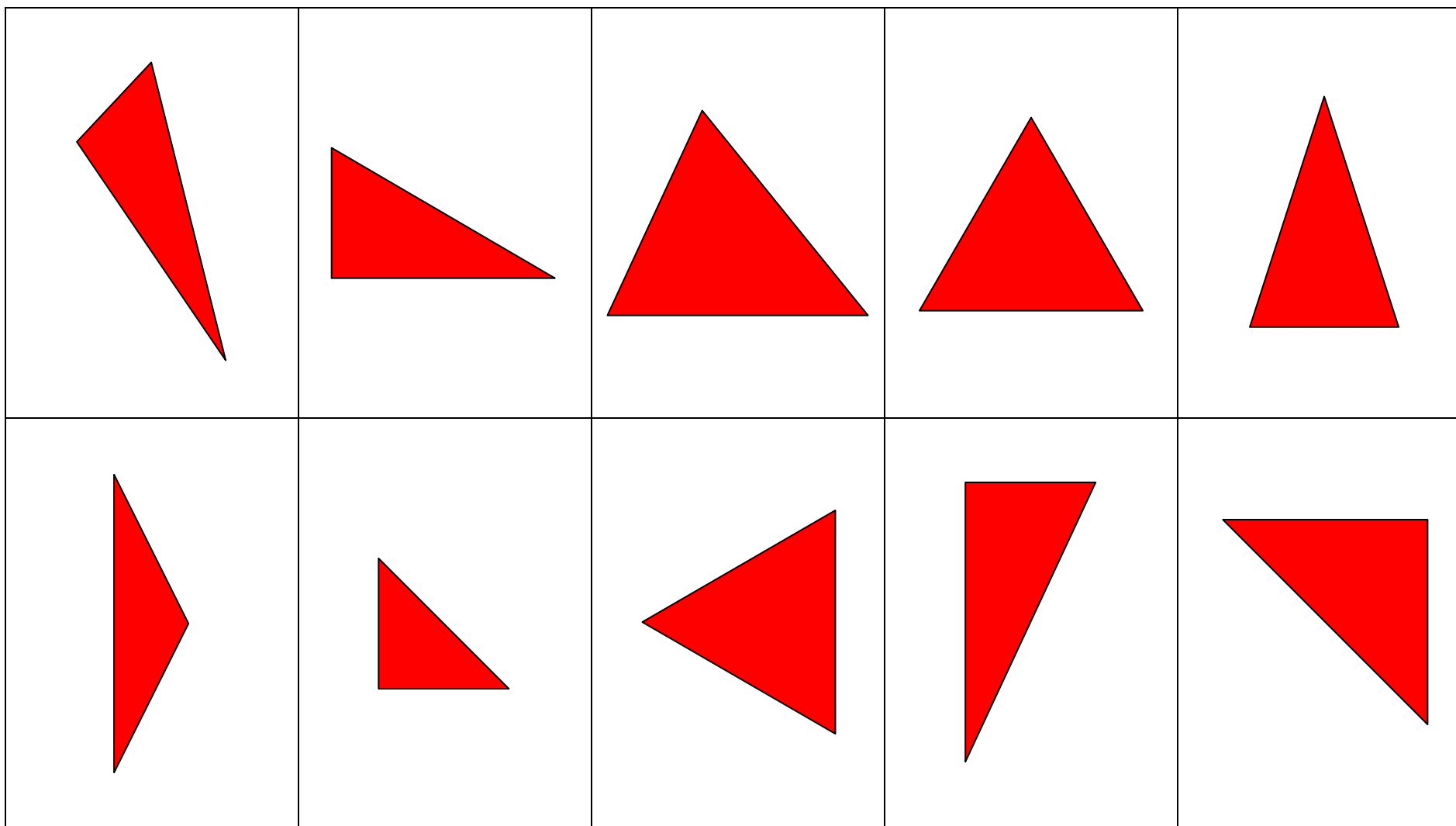


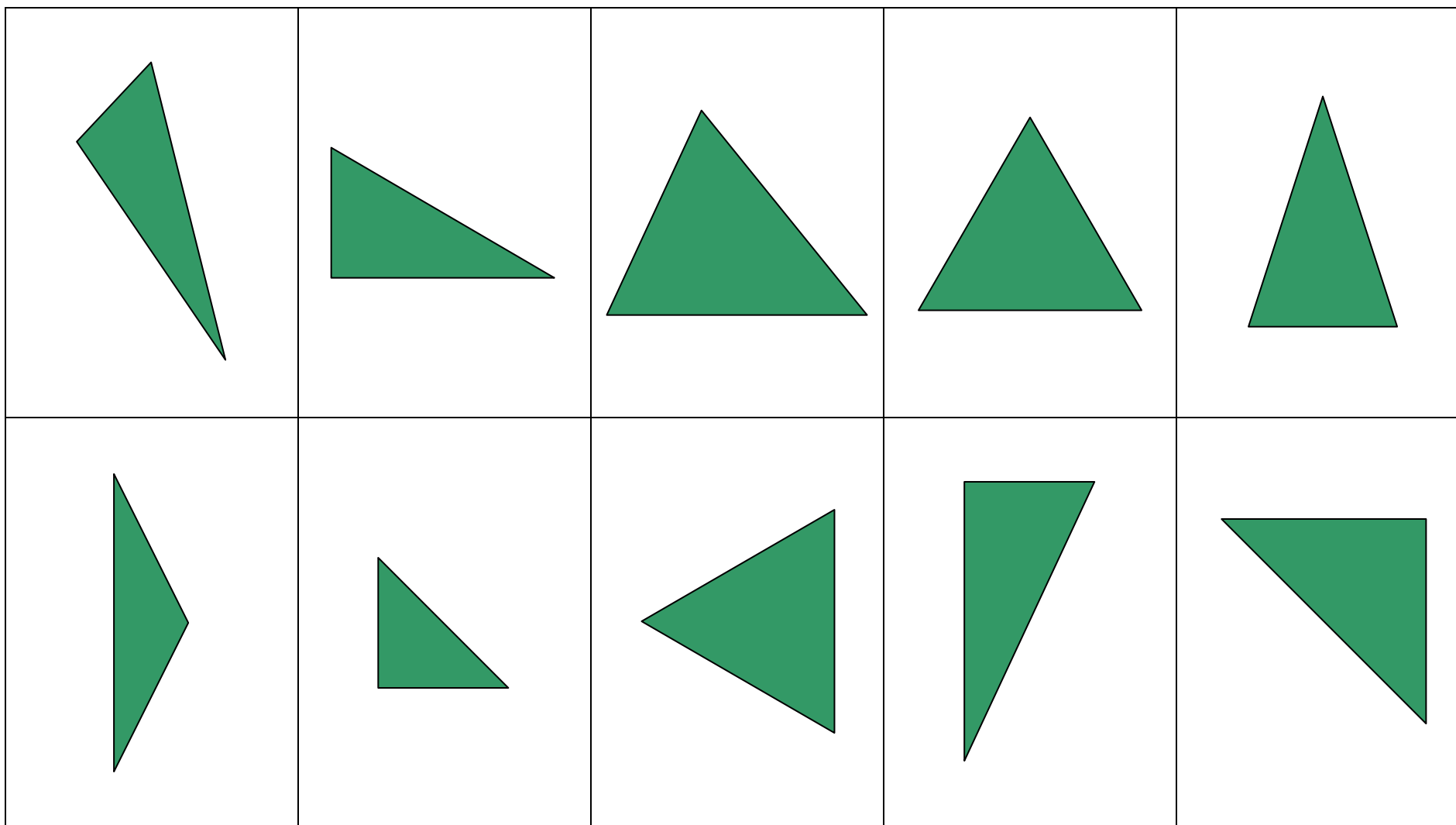
**0574 – 1. tanári melléklet, háromszögekártyák (50 db kártya)**

**Osztályonként 1 készlet (5×10 db, csoportonként különböző színű kártya) ebben a méretben kartonpapírra vagy műanyaglapra nyomva. Ki kell vágni a fekete vonalak mentén.**

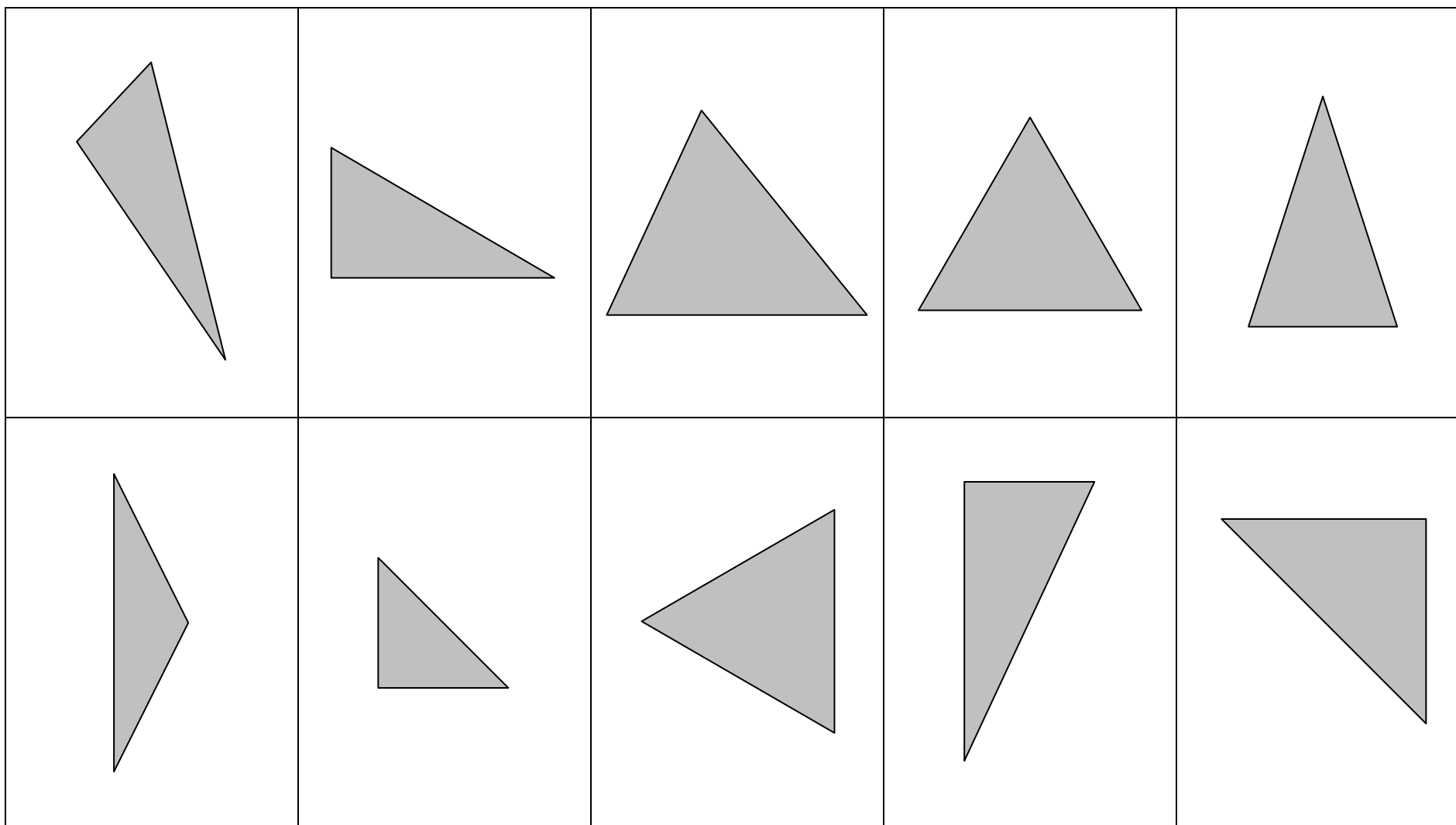












**0574 – 2. tanári melléklet**

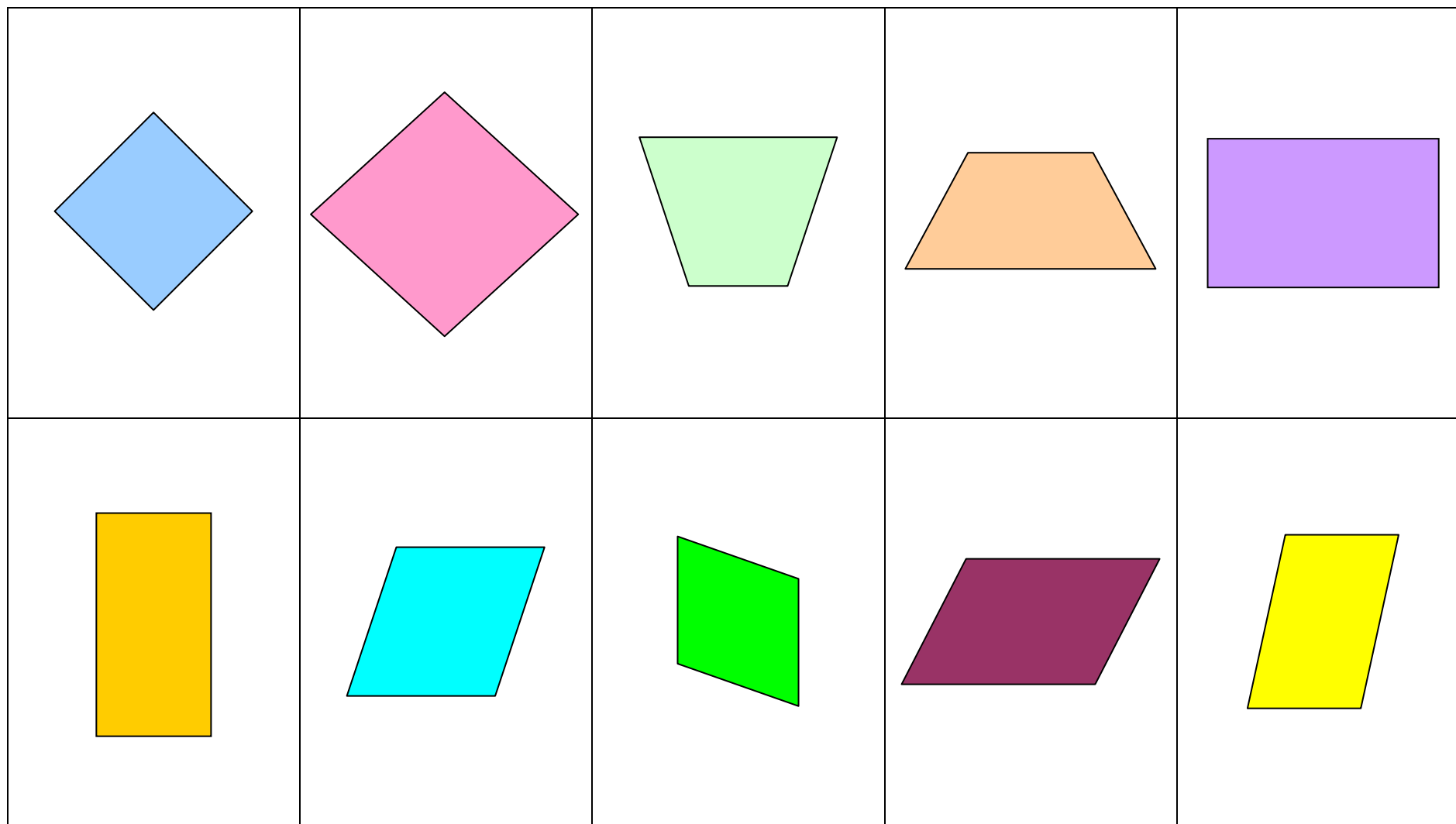
**Osztályonként 1 készlet (8 db kártya) ebben a méretben kartonpapírra nyomva. Ki kell vágni a fekete vonalak mentén.**

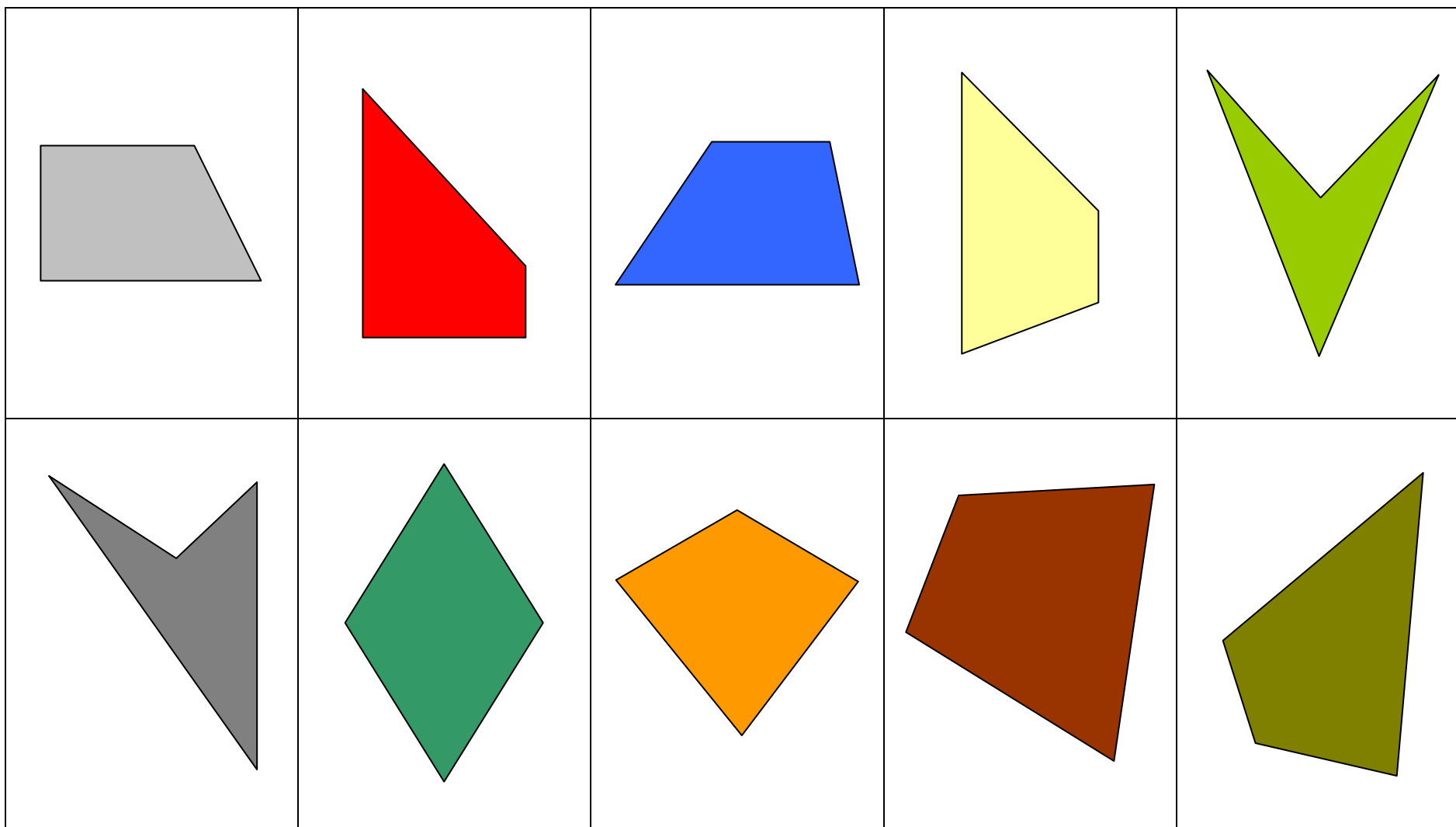
<p style="text-align: center;"><b>A</b></p> <p>50 gömbi lépés 40 gömbi lépés 30 gömbi lépés</p>	<p style="text-align: center;"><b>B</b></p> <p>50 gömbi lépés 50 gömbi lépés 30 gömbi lépés</p>	<p style="text-align: center;"><b>C</b></p> <p>90 gömbi lépés 90 gömbi lépés 90 gömbi lépés</p>	<p style="text-align: center;"><b>D</b></p> <p>50 gömbi lépés 50 gömbi lépés 100 gömbi lépés</p>
<p style="text-align: center;"><b>E</b></p> <p>70 gömbi lépés 80 gömbi lépés 160 gömbi lépés</p>	<p style="text-align: center;"><b>F</b></p> <p>180 gömbi lépés 110 gömbi lépés 60 gömbi lépés</p>	<p style="text-align: center;"><b>G</b></p> <p>270 gömbi lépés 90 gömbi lépés 60 gömbi lépés</p>	<p style="text-align: center;"><b>H</b></p> <p>60 gömbi lépés 60 gömbi lépés 60 gömbi lépés</p>

**0574 – 3. tanári melléklet, négyszögekártyák (20 db kártya)**

Osztályonként 7 készlet (csoportonként 1 készlet) ebben a méretben kartonpapírra vagy műanyaglapra nyomva.

Ki kell vágni a fekete vonalak mentén.





**0574 – 4. tanári melléklet, szempontkártyák (9 db kártya)**

Osztályonként 7 készlet (csoportonként 1 készlet) ebben a méretben kartonpapírra nyomva. Ki kell vágni a fekete vonalak mentén.

<b>Van párhuzamos oldalpárja</b>	<b>Átlói merőlegesen egymásra</b>	<b>Minden oldala egyenlő</b>
<b>Van derékszöge</b>	<b>Átlói felezik egymást</b>	<b>2-2 oldala párhuzamos</b>
<b>Van szimmetriatengelye</b>	<b>Minden szöge egyenlő</b>	<b>Nem minden oldala egyenlő</b>

**0574 – 5. tanári melléklet**

**Osztályonként 1 készlet (5 db kártya) ebben a méretben kartonpapírra nyomva. Ki kell vágni a fekete vonalak mentén.**

<p style="text-align: center;"><b>1. csoport:</b></p> <p>papírlapból: 2-2 oldala párhuzamos szívószáלבól: 2-2 szomszédos oldala egyenlő hosszú lyukas táblán: egyetlen szimmetriatengelye nem az átlója színes fóliákból: minden szöge egyenlő</p>	<p style="text-align: center;"><b>2. csoport:</b></p> <p>papírlapból: 1 párhuzamos oldalpárja van szívószáלבól: minden oldala egyenlő hosszú lyukas táblán: egyik átlójára szimmetrikus színes fóliákból: 2-2 szemközti szöge egyenlő</p>
<p style="text-align: center;"><b>3. csoport:</b></p> <p>papírlapból: átlói merőlegesek egymásra szívószáלבól: 2 oldala egyenlő hosszú és párhuzamos lyukas táblán: átlói egyenlő hosszúak színes fóliákból: 2-2 szomszédos szöge egyenlő szöget alkot</p>	<p style="text-align: center;"><b>4. csoport:</b></p> <p>papírlapból: 2 szomszédos szöge derékszög szívószáלבól: 2 átlója egyenlő hosszú lyukas táblán: átlói felezik egymást színes fóliákból: van két szemközti szöge, amely egyenlő</p>
<p style="text-align: center;"><b>5. csoport:</b></p> <p>papírlapból: egyik átlója merőlegesen felezi a másikat szívószáלבól: 2-2 szemközti oldala egyenlő hosszú lyukas táblán: legalább 3 derékszöge van színes fóliákból: van olyan oldal, amelyen fekvő szögeket egymás mellé téve, azok egyenlő szöget alkotnak</p>	