
PONTHALMAZOK

Ponthalmazok vizsgálata térben

Készítette: Jakucs Erika, Makara Ágnes

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Ponthalmazok vizsgálata térben. Analógiák keresése síkon, gömbön és térben.
Időkeret	1 óra
Ajánlott korosztály	5. osztály
Modulkapcsolódási pontok	<p><i>Szűkebb környezetben:</i> Távolságmérés síkon és gömbön, szögmérés síkon és gömbön, térgeometria, testek.</p> <p><i>Ajánlott megelőző tevékenységek:</i> Pont, egyenes, sík, főkör, gömb fogalmának manuális és verbális ismerete, a Lénárt-féle rajzgömb-készlet használata.</p> <p><i>Ajánlott követő tevékenységek:</i> Szerkesztési feladatok megoldása gömbön, további analógiák keresése az újabb ismeretekhez kapcsolódóan térben is, gömbön is.</p>
A képességfejlesztés fókuszai	Térsejtellet, térérzékelés. Analógiás gondolkodási képesség. Következtetés, általánosítás – specializálás. Összehasonlítás. Kreativitás. Együttműködési készség, türelem, tolerancia

AJÁNLÁS

Sík és gömb összehasonlítását 4 fős csoportokban végezzük, ezeken belül a gyerekek párokba rendeződnek, és egy-egy pár dolgozik a síkon, ill. a gömbön. Problémánként szerepet cserélnek, és megvitatják mindkét felületen tapasztaltakat. Közös álláspontot alakítanak ki, és csak akkor kapnak szólásjogot, ha ezt képviselik. A tanár a problémafelvető szerepét játssza, és a csoportokat „mélyvízbe löki”: frontális kérdésekkel csak akkor segíti a munkát, ha az teljesen megfeneklett. A csoportok között sétálva vitázik, kételkedik, segít, ahol kell. Egy-egy ponthalmaz típust tárgyalunk síkon, térben, gömbön, s bár ez itt ez megmarad a „rácsodálkozás” szintjén, mégis fontos tapasztalatokat szerezhetnek a gyerekek, fejlődik analógiás gondolkodásuk és térsejtelésük.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Rajzgömb-készlet, síkfólia, henger, alma vagy marcipángolyó, kés, uborka, tányér, másolópapír – kártya, henger síkmetszetei – tanári modell, méréshez zsinór, síktükör, Babylon.

ÉRTÉKELÉS

A gyerekek tevékenységei alapján szóbeli értékelést adunk a munkavégzések során folyamatosan.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszközök, Feladatok
I. Analógiák keresése síkon és gömbön, síkon és térben			
1.	Ponttól illetve egyenestől egyenlő távoli pontok keresése (analógia síkon és térben: gömb és henger, mint ponthalmazok; sík és gömb kölcsönös helyzete)	Összehasonlító-képesség	Rajzgömb- készlet, síkfólia, henger, alma vagy marcipángolyó, kés, uborka, tányér, másolópapír, kártya, henger síkmetszetei (tanári modell)
2.	Ponttól illetve főkörtől egyenlő távoli pontok keresése gömbön (analógia síkon és gömbön: gömbi (kis) kör)	Összehasonlító-képesség	Rajzgömb-készlet, síkfólia
3.	Két ponttól egyenlő távoli pontok keresése (Sík – Tér: szakaszfelező merőleges sík; Sík – Gömb: szakaszfelező merőleges főkör)	Összehasonlító-képesség	Rajzgömb-készlet, síkfólia csoportonként külön, zsinór méréshez, tükör, Babylon 1. feladatlap

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. Analógiák keresése síkon és gömbön, síkon és térben

1. Ponttól illetve egyenestől egyenlő távoli pontok keresése

A tanár elmondja a gyerekeknek, hogy amit eddig megvizsgáltak a síkon, azt, vagy legalábbis egy részét a gömbfelületen és a térben is megvizsgálják. Elvárja a gyerekektől, hogy kérdéseket vessenek fel, közben átismélik a megismert sík- és gömbi fogalmakat.

Először a térben vessük fel kérdéseinket.

– Mi a körnek megfelelő alakzat? Vagyis: hol helyezkednek el azok a pontok a térben, amelyek egy megadott ponttól adott távolságra vannak?

Megfogalmazzák, mi a kör, majd ugyanazt a ponthalmazt térben, megállapítják, hogy ez gömb.

Tisztázzák az elnevezéseket, valamint a gömbfelület és a gömbtest fogalmát.

– Van egy gömbfelületem és egy síkom a térben, többet nem árulok el róluk. Milyen helyzetek képzelhetők el?

A beszélgetés közben a gyerekek modelleznek

A tanár is modellez, síkfóliát és a gömbkészlet félgömbfóliáit használja. Megbeszéli az átmérősík által keletkező metszet szerepét – a főkör fogalmát felelevenítik.

(Emlékeztetve az első félév „széletelős” kísérletére, maguktól is veszik az almát/marcipángolyót – széletelik, felmutatják a másolópapír-kártyával a helyzeteket.)

Szelő, érintő, idegen (nincs a gömbnek és a síknak közös pontja.). A síkmetszet mindig kör, vagy egyetlen pont (érintési pont). – Ezek a fogalmak verbálisan csak említés szintjén kerülnek elő, a későbbi évek feladata a fogalmak kialakítása, az elnevezések megtanítása.

A tanár a beszélgetést irányítja. Megmutatja, hogy a kör, mint ponthalmaz speciális esete, leszűkítése a gömbnek. Ha a térben egy adott ponttól adott távolságra levő pontok halmazát tekintjük, majd szűkebbre zárjuk látásunkat: síklakókká válunk, akkor e gömbnek csupán egy metszetét látjuk, s ez nem más, mint ebben a síkban az adott ponttól adott távoli pontok halmaza, azaz egy kör.

Vizsgálódhatnak arról is, hogy mitől függ ennek a körnek a sugara, mely esetben egyenlő a gömb sugarával – egy kis diszkusszió. A beszélgetésben felmerülő helyzeteket az átlátszó fóliával és a gömbfóliával a tanár modellezi.

Ötlet: A síkfólia lehet színes iratgyűjtő, a félgömb-fóliából pedig ollóval kisebb alapkörű darabot vágunk. Elkészíthetünk egy olyan modellt, amely az alapkörrel koncentrikus 2-3 kör mentén szét van szelve gömbövekre, és egy gömbsüvegre, ezeket cellulux darabok fogják össze, mikor, melyiket használjuk a szemléltetéshez.

A gömb tárgyalásához hasonlóan vezeti le a hengerfelülettel illetve a hengertesttel való ismerkedést. A lehetséges síkmetszetek modellezése előtt tipplistát vesz fel [fejlehardt](#) szavazással, csak ezután végzik el a kísérleteket. Modellje el van dugva, hogy a gyerekek csak akkor lássák, amikor már saját kísérleteiket elvégezték.

A hengerfelület és hengertest megtalálása és megkülönböztetése után szavazásos tippelés következik. Ezután tányéron késsel széletelik az uborkát. A csoportok közösen kialakítják álláspontjukat, elkészítik a modelleket, és csak ekkor kérhetnek szót. Képviselőjük elmondja a

csoport véleményét, miközben egy másik csoporttag szemléltet a modellekkel. A csoportok közötti vita az osztály egyetértésével zárul, ezután kerül elő a tanári „elegáns” modell.

A tanár a gömbihez hasonló beszélgetést kezdeményez, aktívabb részvételt várva a gyerekektől.

Akik meglátják az analógiát, azok meg tudják fogalmazni, hogy, a párhuzamos egyenespár, mint ponthalmaz a térből a síkra korlátozása, szűkítése a hengerfelületnek, mint ponthalmaznak, persze nem ezekkel a kifejezésekkel.

2. Ponttól illetve főkörtől egyenlő távoli pontok keresése gömbön

Szervezés: csoportonként 2 fő képviseli a síkot, 2 fő a gömböt (a következő problémánál csere).

1. Adott ponttól adott távoli pontok keresése a gömbön (Gömbi (kis) kör, amelynek középpontja egy adott pont és/vagy annak átellenese, sugara az adott távolság. E sugár a negyed főkör hosszánál kisebb. Ha éppen negyed főkörnyi, akkor a kiskör helyett főkört nyerünk ponthalmazként.)

– Keressétek meg a síkon és a gömbön azokat a pontokat, amelyek egy megadott ponttól egyenlő adott távolságra vannak!

A „síkosok” előnyben vannak, hiszen a kérdésekre adandó válaszok már ismertek kell legyenek számukra. Ezért övék a kezdeményezés szerepe. Felelevenítik, hogyan is gondolkodtunk erről a kérdéstről a síkon, közben a gömbösök lefordítják az elhangzottakat gömbre, és megkezdik a rajzolást, pontgyűjtést, kísérletezést. A csoport együttes döntéssel kérhet tanári segítséget.

A tanár útmutatásai alapján csoportonként dolgoznak, közös álláspontot alakítanak ki, ha ez megszületett, tájékoztatják a tanárt, vagy az erre felhatalmazott segítőt. Ezután kaphatják meg a következő problémát.

2. Adott főkörtől adott távolságra lévő pontok a gömbön (Két kiskör, ezek középpontja a főkörhöz tartozó két pólus, sugara az adott távolságot egészíti ki negyed főkörre. E két kiskör közötti tartományt nem sávnak, hanem gömbövénynek hívjuk, és a síkbéli sáv gömbi analógja. A (kis) körök síkja párhuzamos az adott főkör síkjával.)

Az órát a tanár frontális összefoglalóval zárja. Az összegyűlt tapasztalatokat a gyerekek fogalmazzák meg.

3. Két ponttól egyenlő távoli pontok keresése

A csoportokon belüli párok között ismét szerepeket osztunk szét, a tér tárgyalása csoporton belül egységes. A Síkbéli tapasztalatokat itt frontálisan is összegyűjthetjük, ezzel a feldolgozási idő csoportonként kevésbé lesz eltérő.

Felidézik a síkbéli tapasztalatgyűjtés módját, eredményét, indoklását. Visszalapoznak a füzetben egy szakaszfelező merőleges ábrájához, és most tükörrel ellenőrzik.

Megfogalmazzák, hogy a teret hajtogatni nem tudjuk, ezért most is a tükör segíthet majd az ellenőrzésben.

A térre vonatkozó kérdéshez irányított beszélgetéssel vezetjük rá a gyerekeket, hogyan kísérletezzenek.

Az ellenőrzéshez építhetünk Babylonból egy golyó és 3 pálca segítségével térszögletet (pl. egy kockasarkot) két példányban. Ezeket a tükörsíkra szimmetrikusan elhelyezve átnézve a tükrön látjuk, hogy a túlsó oldali pálkákat az innensők visszaverődő képe fedi, amiből azt

tudjuk, hogy a tükör síkjának a pálcákkal megjelölt pontjai a Babylon-golyóktól egyenlő távolságúak. Így segíthetjük a szakaszfelező merőleges sík fogalmának kialakítását.

A sík és gömb összehasonlító kísérletet az előző módon, a párok közötti szerepcserével végezzük.

Elvégzik a kísérletet, megállapítják, hogy a gömbön is van szakaszfelező merőleges főkör, és ugyanúgy szerkeszthető, mint a síkon. Esetleg észreveszik, hogy szakasz és a komplementer szakasz felezője egyezik.

1. FELADATLAP

1. Minden részfeladathoz külön ábrát készíts! Szerkeszd meg, vagy vázlatosan rajzold meg a megoldásokat síkon, majd fogalmazd meg a megoldás térbeli analógiáját!

Vegyél fel a füzetedben egy P pontot, majd jelöld színessel azokat a pontokat, melyeknek a P -től mért távolsága

- a) legalább 2 cm; A P pont köré írt 2 cm sugarú körvonal és az azon kívüli pontok
- b) legfeljebb 3 mm; A P pont köré írt 3 mm sugarú körvonal és az azon belüli pontok
- c) 3 és fél cm-nél nem több; A P pont köré írt 3,5 cm sugarú körvonal és az azon belüli pontok
- d) 4 cm-nél kevesebb; A P pont köré írt 4 cm sugarú körvonal nem, csak az azon belüli pontok
- e) Pontosan 5 cm; A P pont köré írt 5 cm sugarú körvonal
- f) 4 cm vagy 3 cm; A P pont köré írt 2 cm és 3 cm sugarú koncentrikus körvonalak
- g) Kevesebb 3 cm-nél, és több 2 cm-nél; A P pont köré írt 2 cm és 3 cm sugarú koncentrikus körvonalak közötti pontok
- h) Nem kevesebb, mint 3 cm 2 mm, de nem több, mint 5 cm 2 mm; A P pont köré írt 3,2 cm és 5,2 cm sugarú koncentrikus körvonalak, és a közöttük lévő pontok
- i) Nem kevesebb 3 és fél cm-nél, viszont kevesebb 4 cm-nél; A P pont köré írt 3,5 cm és 4 cm sugarú koncentrikus körvonalak közötti pontok, és a 3,5 cm sugarú körvonal
- k) 2 cm, vagy 3 cm-nél nem kevesebb; A P pont köré írt 2 cm és 3 cm sugarú körvonalak és a 3 cm sugarú körvonalon kívüli pontok
- l) Legfeljebb 1 cm, vagy több, mint 2 cm; A P pont köré írt 1 cm sugarú körlap, és a 2 cm sugarú körvonalon kívüli pontok
- m) Legalább 2 cm és legfeljebb 3 cm; A P pont köré írt 2 cm és 3 cm sugarú koncentrikus körvonalak, és a köztük lévő terület
- n) Legalább 3 cm és legfeljebb 2 cm. **Ilyen pont nincs**

Minden részfeladatban fogalmazd meg a be nem színezett pontok közös tulajdonságát!

2. Rajzolj a füzetedbe egy egyenest, és az 1. feladatot oldd meg úgy, hogy a P pont helyett most ez az egyenes szerepel!

- a) Az e egyenessel párhuzamos tőle 2 cm távolságú egyenespár és az azon kívüli pontok.
- b) Az e egyenessel párhuzamos tőle 3 mm távolságú egyenespár és az azon belüli pontok.
- c) Az e egyenessel párhuzamos tőle 3,5 cm távolságú egyenespár és az azon belüli pontok.
- d) A 4 cm távolságú egyenespár nem, csak az azon belüli pontok.
- e) Az 5 cm távolságú egyenespár.
- f) A 3cm és 4 cm távolságú egyenespárok.
- g) A 3cm és 2 cm távolságú egyenespárok nem csak a közöttük lévő síksávok.
- h) A 3,2cm és 5,2 cm távolságú egyenespárok és a közöttük lévő síksávok.
- i) A 3,5 cm és 4 cm távolságú egyenespárok közti síksávok és a 3,5 cm távolságú egyenesek.
- k) A 2 cm és 3 cm távolságú egyenesek, és 3 cm távolságú egyenesen kívüli pontok.
- l) Az 1 cm távolságú egyenespár által alkotott síksáv és a 2 cm távolságú egyenespáron kívüli pontok.

- m) A 2 cm és 3 cm távolságú egyenespárok és a közöttük lévő síksávok.**
- n) Ilyen pont nincs**

3. Rajzolj 50 mm sugarú kört! Ennek belsejébe rajzolj 2 cm sugarú köröket!

a) Az összes ilyen kör középpontját színezd zöldre! Milyen közös tulajdonsága van a zöld pontoknak? A zöld pontok az eredeti kör középpontja köré írt 3 cm sugarú körlapon vannak.

b) Hogyan változik a zöld pontok halmaza, ha a kiskörök sugara nem 2 cm, hanem 3 cm? A zöld pontok az eredeti kör középpontja köré írt 2 cm sugarú körlapon vannak.

c) Rajzolj a belsejébe olyan köröket, melyek sugara 2 cm, és érintik a nagy kört! Színezd pirosra ezeknek a köröknek a középpontjait! A kört belülről érintő körök középpontjai egy 3 cm sugarú körön vannak, ennek a körnek a középpontja megegyezik az eredeti kör középpontjával.