
PONTHALMAZOK

Két pont, két ponthalmaz, pont és egyenes távolságának meghatározása

Készítette: Jakucs Erika, Makara Ágnes

MODULLEÍRÁS

A modul célja	A távolság fogalma: két pont, két ponthalmaz, pont és egyenes távolságának meghatározása. Ponttól, egyenestől illetve szakasztól egyenlő távoli pontok keresése.
Időkeret	6 óra
Ajánlott korosztály	5. osztály
Modulkapcsolódási pontok	<p><i>Tágabb környezetben:</i> fizika, kémia, képzőművészetek</p> <p><i>Szűkebb környezetben:</i> megelőzi: 052 Ponthalmazok I., követi: Adott tulajdonságú ponthalmazok, mértani helyek keresése</p> <p><i>Ajánlott megelőző tevékenységek:</i> Amelyik tevékenységi formát választjuk, annak megfelelő órátípus jó, ha megelőzi ezeket az órákat, hogy a munkaforma kivitelezése ne akadozzon, a gyerekek figyelve teljes egészében a kísérletekre, a gondolkodásra fordítódják.</p> <p>Szükség van némi gyakorlatra a <i>halmazműveletekben</i>, a logikai és és <i>vagy</i> műveletekben.</p> <p><i>Ajánlott követő tevékenységek:</i> Ugyanezen kérdések vizsgálata térben, esetleg gömbfelületen (0574. modul). Az itt megtanultak alkalmazása szerkesztésekben, később mértani hely keresésével kapcsolatos problémák feldolgozásában.</p>
A képességfejlesztés fókuszai	<p><i>Kommunikációs képességek:</i> szövegértés kompetencia, matematikai nyelvhasználat. A megfigyelések saját nyelven történő megfogalmazása, majd a matematikai szöfűzés elsajátítása, adekvát használata.</p> <p><i>Gondolkodási képességek:</i> Logikai gondolkodás (állítások összekötése <i>és-sel, vagy-gyal</i>), kombinativitás (összes eset keresése), rendszerezés (a lehetséges esetek rendszerezése, a különbözőek és egyezők szétválogatása).</p> <p><i>Indukció, dedukció:</i> A kísérletek során végzett megfigyelések alapján sejtések megfogalmazása, ezek ellenőrzése, érvelések.</p> <p><i>Személyiségfejlesztés:</i> vitahelyzetben a türelem, a tolerancia fejlesztése, csoportmunkában az együttműködési készség fejlesztése.</p>

AJÁNLÁS

A feldolgozást kétféle módon végezhetjük. Ha elegendő helyünk van (például tornaterem, udvar, aula esetleg színházterem), akkor a gyerekek maguk lehetnek a pontok, fejükre helyezett csákó, hajpánt, szalag (fejdísz) jelzi a színüket: piros, kék vagy zöld. Ezek az órák akkor sikeresek, ha a gyerekeket hozzászoktatjuk matematika órán is a csoportos mozgáshoz egy előkészítő óra keretében. Ennek az előkészítő órának a témája tetszőleges lehet.

Ha nincs lehetőség ilyen mozgásos órát tartani, ugyanezeket a problémákat vethetjük fel úgy, hogy a gyerekek a padon dolgoznak piros-kék korongokkal, melyekhez maguk készítettek zöld-fehéreket is. Ez esetben a már elfogadott változat szerint a táblán is elhelyezhetünk színes mágneseket, vagy egyéb módon szemléltetett pontokat.

A mozgással vagy korongok kirakásával szerzett tapasztalatokat a következő órán rögzítik a gyerekek a füzetükben körző és vonalzó segítségével. (Nem törvényszerű, hogy 2-3 mozgásos órát kövessen 2-3 „füzetes” óra, sőt szerencsésebb, ha ezek váltakoznak: minden mozgásos órát egy a tapasztaltakat felelevenítő, rögzítő óra követ. Így az új ismeretek felfedezése, ismétlése, lejegyzése egységbe forr, s csak erre épül a következő tapasztalatok begyűjtése.)

Szemléletünk legfontosabb ismérvei, melyek alapján e témát feldolgoztuk:

- A matematika legtöbb szeletét felfedeztetni akarjuk és NEM bemutatni.
- Ennek megfelelően a végsőkig ragaszkodjunk ahhoz, hogy az állításokat, és a definíciókat helyes formájukban a tanulók fogalmazzák meg.
- Teremtünk kísérleti helyzeteket, melyek során a gyerekeket állásfoglalásra szorítjuk, vitákat provokálunk – pókerarccal - anélkül, hogy saját álláspontunkat tanítványaink elé táránk.
- Minden vitában finomítjuk, pontosítjuk, árnyaljuk a gyerekek nyelvhasználatát, és toleranciára neveljük őket azáltal, hogy érvelés közben gyakran felszabaduló indulataikat féken tartjuk, de közben véleményeiket állandóan ütköztetjük.
- A nyelvhasználat finomításánál ügyeljünk arra, hogy a pontos, szakszerű szövegezést csak akkor „adjuk szájukba”, amikor már saját nyelvükön megfogalmazták a lényegét, mert ekkor fejükben már megjelent a fogalom, vagy állítás tartalma, a nyelvi megformálást ehhez a MEGSZÜLETETT TARTALOMHOZ társítjuk. Ha ezt a sorrendet elvettjük, akkor magoltatunk, s a jelentés nélkül megjegyzett szövegek nyom nélkül tűnnek el a feledés útvesztőjében.
- A kísérleti helyzetekben gyakran tevékenykedtetünk, írásbeliségben sok színt használunk – mi magunk a táblán, írásvetítőn, applikációinkon, s ugyanezt várjuk el tanítványainktól is, amikor a füzetben dolgoznak. (Ennek pszichológiai háttere, hogy mind a manuális, mind a vizuális emlékezet gyorsabbá és mélyebbé teszi a bevésést, ezzel munkánk hatékonyságát javítja.)

TÁMOGATÓRENDSZER

Piros-kék és zöld-fehér korongok, tanári és diák-készlet, szerkesztő eszközök, csomagolópapír, vagy A3-as lapok, blue-tec Zsinórok. Mérőszalag és fejdísz vagy korongok minden gyereknél. Írásvetítő.

ÉRTÉKELÉS

Az egyéni és csoportos munka megfigyelése alapján szóbeli értékelés. Az írásos, rajzolásos feladatok folyamatos ellenőrzéséhez kapcsolódó szóbeli értékelés. Beadandó írásbeli házi feladatok írásos értékelése. Ismeretek számonkérése felmérő dolgozattal.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képeségek	Eszközök, Feladatok
I. A távolság fogalmának megalkotása			
1.	A gyerekek felkészítése a csoportmunkára		Mérőszalag és fejdísz vagy korongok minden gyereknél
2.	Két pont távolsága fogalmának felidézése	Mérés, adatok értékelése, emlékezet, matematikai nyelv használata	Mérőszalag és fejdísz vagy korongok minden gyereknél 1. feladatlap 1.
3.	Két ponthalmaz távolsága – A fogalom kialakítása	Mérés, adatok értékelése, kommunikációs képesség	Mérőszalag és fejdísz vagy korongok minden gyereknél, 1. feladatlap 2, 3.
II. Egy feltételnek eleget tevő pontok halmaza			
1.	A kör, mint ponthalmaz	Mérés, adatok értékelése, kommunikációs képesség, matematikai nyelv használata	Mérőszalag és fejdísz vagy korongok minden gyereknél 2. feladatlap 1., 2.
2.	Pont és egyenes távolsága	Mérés, adatok értékelése, kommunikációs képesség, matematikai nyelv használata	Mérőszalag és fejdísz vagy korongok minden gyereknél 2. feladatlap 3.
3.	Adott egyenestől egyenlő távoli pontok keresése; a párhuzamos egyenespár fogalma	Mérés, adatok értékelése, kommunikációs képesség, matematikai nyelv használata	Mérőszalag és fejdísz, zsinór, korongok, 2. feladatlap 4., 5.
4.	Két feltételnek megfelelő pontok keresése	Mérés, adatok értékelése, kommunikációs képesség, matematikai nyelv használata Együttműködési készség	Mérőszalag és fejdísz, zsinórok vagy korongok minden gyereknél 2. feladatlap 6., 7.

III. A távolság fogalmának mélyítése			
1.	Az előző órák tapasztalatainak erősítése	Rendszerezés	Füzet
	A távolság fogalmának kiterjesztése gömbre	Deduktív lépések	Rajzgömb-készlet 3. feladatlap
IV. Kör és egyenes kölcsönös helyzete			
1.	Összetett alakzatoktól egyenlő távoli pontok keresése	Kísérletezés, érvelés	Piros-kék korongok, tanári és diák-készlet, szerkesztő eszközök, csomagoló-papír, vagy A3-as lapok, blue-tec, 4. feladatlap 1-5.
2.	Egyenes és kör kölcsönös helyzete	Diszkusszió, matematikai nyelv használata, rendszerezés	Csomagolópapír, füzet 4. feladatlap 6.
V. Két kör kölcsönös helyzete; több feltételnek eleget tevő pontok keresése			
1.	A tapasztalatok rögzítése		
2.	Két kör kölcsönös helyzete	Diszkusszió, rendszerezés, indukció-dedukció	Kartonból kivágott körlapok, füzet 5. feladatlap 1.
3.	Több feltételnek megfelelő pontok keresése	Rendszerezés	Füzet, körző, vonalzó
VI. Az eddigi ismeretek mobilizálása			
1.	A feltételek változásának hatása	Diszkusszió	Körző, vonalzó, mérőszalag 5. feladatlap 2.

A FELDOLGOZÁS MENETE

I. A távolság fogalmának megalkotása

I-II. óra – „mozgásos” – alkalmas helyszínen a gyerekek mérnek és beszélnek, füzet nincs náluk. Ha nincs elegendő hely a mozgással való feldolgozásra, akkor a padon korongokkal végzett tevékenységekkel jutnak tapasztalatokhoz a tanulók.

1. A gyerekek felkészítése csoportmunkára

Az órát a gyerekek „mozgásos” tevékenységével terveztük, de a feladatok megoldhatók piros-kék, illetve fehér- zöld korongokkal is. Ekkor a korongok pontokat jelképeznek.

A többnyire csoportmunkában javasolt tanulói tevékenységeket ehhez igazítva Feladatlapokban fogalmaztuk meg, és a tanári útmutatóban a megfelelő feladatszámot jeleztük.

Szervezési feladatok:

- alkalmas helyszínt választunk, ahol a gyerekek nagyobb távolságokat is mérni tudnak, és könnyen mozoghatnak;
- piros, kék és zöld fejdíszet osztunk ki a gyerekeknek, mindegyik színből közel egyforma számút;
- mérőszalagokat és zsinórt készítünk elő.

Ha korongokkal végzik a gyerekek a feladatokat, akkor szükség van páronként 20 db piros-kék korongra, ugyanennyi fehér-zöld korongra (ezt a gyerekekkel házi feladatként erre az órára elkészíttetjük), és csoportonként 2 db hurkapálcára.

A feladatok csoportos megoldását a tanár vezetésével frontálisan megbeszéljük, s a helyes megoldásokat írásvetítővel bemutatjuk.

2. Két pont távolsága fogalmának felidézése

Felelevenítjük a TÁVOLSÁG fogalmával kapcsolatos eddigi ismereteket. (0522. Távolság és távolságmérés síkon és gömbön).

Tanár: „Hogyan határozzuk meg két pont távolságát a síkon? És a gömbön?”

„Milyen mértékegységeket használunk távolságmérésre?”

A gyerekek az eszközök előkészítésével felkészülnek a munkára, és felidéznek korábbi ismereteiket.

A tanár kiválaszt két tanulót, kb. 5 m távolságra állítja őket, majd a többiek közül kér meg valakit, mérje le e kettő távolságát! (1. feladatlap 1. feladat.)

„Hová tegyük a mérőszalagot? A két gyereknek melyik pontját jelöljük ki?”

Végezzünk sok mérést, és

- vegyük ezeknek az átlagát;
- válasszuk ki közülük a legnagyobbat;
- válasszuk ki közülük a legkisebbet!

A felkért tanuló a közben zajló vitában kialakuló módszerekkel mér (lehet több kísérlet, több gyerek által végrehajtva).

Fontos, hogy a gyerekek érezzék, hogy egyértelmű megállapodásra van szükség.

1. FELADATLAP

1. Milyen messze van egymástól a két gyerek? Mérd meg mérőszalaggal a gyerekek távolságát!



3. Két pontthalmaz távolsága – A fogalom kialakítása

A gyerekek felteszik fejdíszüket. A tanár felkéri a *pirosakat*, helyezkedjenek el egy „pacni”-ban – esetleg piros zsinórral kerítsék is körül magukat. Hasonlóképp a *kékek* is – a két pontthalmaznak most ne legyen közös része. Megállapodunk a gyerekekkel, hogy ők most piros ill. kék PONTOK. Elhelyezkedés után a foltokat képző gyerekek lekucorodnak. Ezután a tanár felkéri a *zöldeket*, végezzenek méréseket: azt szeretnénk megtudni, milyen messze van a piros folt a kéktől? (1. feladatlap 2. feladat.)

A zöldek mérnek, s közben a tanár irányításával megvitatják, majd megfogalmazzák, mit értünk két pontthalmaz távolságán.

Egy piros és egy kék gyereket megkérünk, hogy fogják meg egymás kezét, a zsinórokat is ennek megfelelően igazítjuk. Most milyen messze van a piros folt a kéktől? (1. feladatlap 3. feladat.)

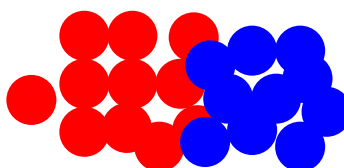
Mivel most a legrövidebb szakasz a két halmaz pontjai közt 0 hosszúságú, ezért a két pontthalmaz távolsága is 0. Megfogalmazzatjuk a gyerekekkel: **ha két halmaznak van közös pontja, akkor távolságuk 0.**

2. Rakj ki a padra 10 piros és 10 kék korongot az ábra szerinti elrendezésben! Nevezzük a piros korongokat „piros pontoknak”, a kék korongokat pedig „kék pontoknak”!



Mérd meg, milyen messze van a piros pontokból álló „folt” a kék pontokból álló folttól”!

3. A korongokat most így helyezd el! Most milyen messze van a piros pontokból álló „folt” a kék pontokból álló „folttól”?



II. Egy feltételnek eleget tevő pontok halmaza

1. A kör, mint ponthalmaz

Kiválasztunk egy gyereket. A *pirosakat* felkérjük, helyezkedjenek el 1,5 m távolságra a kijelölt ponttól (gyerektől). 2. feladatlap 1. feladat.

A tanulók mérnek, majd elhelyezkedés után lekucorodnak. (Esetleg egy kijelölt *rendező* helyreigazításokat tehet, ha hibás mérési módszert lát.)

Mondjatok igaz állításokat arról, hogyan most elhelyezkedtetek!

Azt szeretnénk hallani, hogy körvonal mentén. Ha nem jön magától, a tanár segítsen.

Feszítsünk ki piros zsinórt a piros gyerekek által reprezentált kör mentén!

Különböző megállapításokat hallunk. Jussanak el a gyerekek addig, hogy **adott ponttól egyenlő távolságra levő pontok a síkban mind egy körvonalon ülnek.**

Kérjük meg a gyerekeket, hogy a zöldek helyezkedjenek el a kijelölt ponttól 1,5 m-nél közelebb, a *kékek* pedig 1,5 m-nél távolabb. Tanár: Mondjatok igaz állításokat, hogyan helyezkedtek el! 2. feladatlap 2. feladat.

Mérnek – elhelyezkednek – lekucorodnak

E kísérlet végét az jelzi, ha a gyerekek látják, és az ügyesebbek megfogalmazzák, hogy **adott ponttól adott távolságra levő pontok a síkban egy körvonalat alkotnak, a kör belső pontjai közelebb, a külsők távolabb vannak a megadott ponttól.**

2. FELADATLAP

1. Tegyé ki egy fehér korongot (fehér pont)! A fehér ponttól 15 cm-re helyezd el a piros pontokat! Mondj igaz állításokat a piros pontok elhelyezkedéséről!

2. Helyezd el a zöld korongokat (zöld pontokat) úgy, hogy a fehér ponttól 15 cm-nél közelebb legyenek! A kékeket úgy rakd le, hogy a fehér ponttól 15 cm-nél távolabb legyenek! Mondj igaz állításokat arról, hogyan helyezkednek el a zöld, és hogyan a kék pontok!

2. Pont és egyenes távolsága

Két gyerek feszítsen ki egy zsinórt, ez egyenest szemléltet. Egy önkéntes helyezkedjen el az egyenesen kívül (nem túl messze) bárhol. A tanár megkéri a gyerekeket, hogy mérijék meg a pont távolságát az egyenestől!

Tanár: Hogyan mérted?

(Több gyerektől is megkérdezzük, együtt választjuk ki a helyeset – ti. azt, amelyik megfelel a közösen megalkotott TÁVOLSÁG fogalomnak.)

Segítő kérdés lehet: Miben is állapotunk meg, mit nevezünk távolságnak? Melyik helyzetben mértük a *legrövidebbet*?) 2. feladatlap 3. feladat.

Mérnek, vitáznak, jussunk el addig, hogy megfogalmazzák pont és egyenes távolságát!

(Például: a pontból az egyenes felé merőlegesen megyek, és ezt az utat mérem.)

Ha már megfogalmazták saját botladozó nyelvükön a lényegét, csak akkor segítsünk a tömör, pontos szövegezésben: **pont és egyenes távolsága „a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hossza”.**

3. Tegyé ki a padra egy hurkapálcát, és képzelj azt, hogy ez egy egyenes! Helyezz el egy fehér pontot az egyenes (hurkapálca) mellé! Mérd meg a pont távolságát az egyenestől! Hogyan mérted?

3. Adott egyenestől egyenlő távoli pontok keresése; a párhuzamos egyenespár fogalma

A piros pontok helyezkedjenek el az egyestől 1,5 m távolságra! A tanár kijelöl egy rendezőt, ő az egyetlen tanuló, akinek joga van hozzászólni ahhoz, ahogy mások mérnek, a többi diák csak a saját feladatával foglalkozhat. 2. feladatlap 4. feladat.

Tanár: Hogyan mértél?

Hol helyezkednek el a piros pontok? Ha az összes megfelelő pontot beszínezhetnénk pirosra, mit látnánk?

Mérnek, a rendező igyekszik a nem mérőlegesen mérőket tetten érni és kiigazítani. A beszélgetés során kiderül, hogy a *piros* pontok két egyenes mentén találhatók. Nehézséget szokott okozni az „egyenes vége” – nem győzzük eleget hangsúlyozni, hogy az egyenes akkor is „tovább halad”, ha mi nem jelenítjük meg. El kell képzelni.

Az összes pont az adott egyenessel párhuzamos egyenespárt alkot, melyek között középen halad az eredeti egyenes.

Most arra kérjük a zöldeket, hogy helyezkedjenek el az egyenestől több mint 1,5 m-re, a kékeket pedig, hogy kevesebb, mint 1,5 m-nyire telepedjenek le.

Fogalmazzátok meg, mit látunk! A piros egyenespár *sávjának* belsejében kék, kívül zöld gyerekek ülnek, ezt meg is fogalmazzák. 2. feladatlap 5. feladat.

Házi feladatnak adhatjuk a 2. Feladatlap 8. feladatát.

4. A piros pontokat tedd le az egyenestől 15 cm távolságra! Hogyan helyezkednek el a piros pontok?

5. A kék pontokat helyezd el úgy, hogy az egyenestől (hurkapálcától) kevesebb, mint 15 cm-re, a zöldeket pedig úgy, hogy az egyenestől több mint 15 cm távolságra legyenek!

Fogalmazd meg, mit láatsz!

4. Két feltételnek megfelelő pontok keresése

Figyelem! Nehéz feladat következik, a csoportok egymást segítik:

Kiválasztunk egy gyereket, ő az ADOTT PONT. Kifeszítünk egy zsinórt, ez az ADOTT EGYENES. A pontot megkérjük, hogy helyezkedjen el az adott egyenestől 2 m-re. A zöldek feladata úgy elhelyezkedni, hogy az egyeneshez is, a ponthoz is 2 m-nél közelebb legyenek. 2. feladatlap 6. feladat.

Tanár: Jelöljük pirossal az egyenestől éppen 2 m-re lévő pontokat. Milyen pontokat célszerű ezután megjelölni kékkel?

Rögzítik az egyenest, és elfoglalja helyét az adott pont.

A pirosak álljanak az egyenestől 2 m-re, a kékek a ponttól 2 m-re.

Ha szóban megállapodtunk, kinek mi a dolga, akkor először csak a pirosak, aztán csak a kékek és legvégül a zöldek helyezkedjenek el.

Tanár: Mit látunk?

Az adott egyenestől 2 m-re egy párhuzamos egyenespár látható piros színnel.

A pont körül egy 2 m sugarú körön látjuk a kék pontokat.

A piros egyenes levág a körből egy félkört, abban ülnek a zöld pontok.

Kérjük meg ezután a valamelyik gyereket, hogy vegye le a fejdíszét és válasszon a „síkon” egy másik helyet magának. Miután kiválasztotta, megkérdezzük, hogyan helyezkedik el a ponthoz és az egyeneshez képest. Például: az egyeneshez 2 méternél közelebb, de a ponttól 2 méternél távolabb.....

Gyengébb képességű osztályban ezt érdemes minél több gyerekkel eljátszani.

Ezután következhetnek olyan kérések, hogy előre megmondjuk egy vállalkozó kedű gyerekeknek, hogyan helyezkedjen el a ponthoz illetve az egyeneshez képest.
Például: A ponttól legyél 2 méternél távolabb, de az egyenestől éppen 2 méterre,...

Tanár: Figyelem! Nehéz feladat következik, a csoportok egymást segítik:
Mindenki visszkapja az eredeti fejdíszét, és visszaáll az eredeti helyére. Tehát:
Az adott egyenestől 2 m-re egy párhuzamos egyenespár látható piros színnel.
A pont körül egy 2 m sugarú körön látjuk a kék pontokat.
A piros egyenes levág a körből egy félkört, abban ülnek a zöld pontok.
Meg fogom kérni a pontot, hogy induljon el lassan távolodva az egyenestől.
Hogyan változik a zöld pontok helyzete?

Tanár: Óvatosan induljatok el. (ha a helyzet drámaivá válna: Álljatok meg, hogy megbeszéljük!

A kéknek együtt kell mozogni az adott ponttal, a zöldeknek meg a kékhez kell igazodni.

Ahogy távolodik a pont, a zöldeknek egyre kevesebb a helyük, végül nem marad zöld pont.

Tanár: Mikor tűnik el az utolsó zöld pont? 2. feladatlap 7. feladat.

Akkor, amikor az adott pont 4 m-re van az adott egyenestől.

(Megjegyzés: A feladat előkészíti a következő modult, két feltételnek eleget tevő pontok keresésével foglalkozik. Ezt jó mozgással eljátszani, testükkel érzik a változtatást.)

Házi feladat: 2. feladatlap 8.

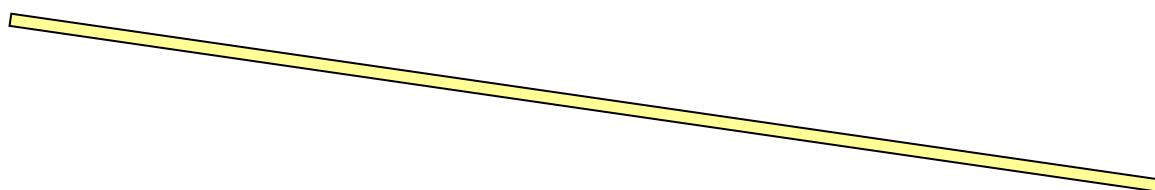
(A gyerekek jelentős része csak elszigetelt pontokat ábrázol, mert elsősorban arra emlékszik, amit eljátszottunk, csak a legügyesebbek rajzolják meg a teljes kört, teljes egyenest stb.)

6. Vegyél elő egy fehér korongot (fehér pont)! Ez a „kiválasztott” pont.

Tegyél a padodra egy hurkapálcát, és képzelj azt, hogy ez egy egyenes! Helyezd el a fehér pontot az egyenestől 10 cm-re!

Helyezd el a zöld korongokon megjelölt pontokat úgy, hogy az egyeneshez is és a fehér ponthoz is közelebb legyenek, mint 10 cm! Ez a zöldek birodalma.

Helyezd el a piros pontokat az egyenestől 10 cm távolságra, a kék pontokat a fehér ponttól 10 cm távolságra! Figyeld meg, ezekhez képest hol találhatóak a zöld pontok!



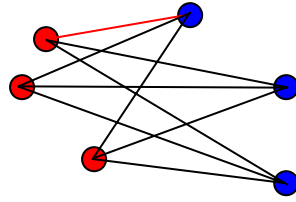
7. A fehér pont lassan távolodik az egyenestől. A többi pont együtt mozog vele úgy, hogy közben teljesüljön a zöldekre, hogy a fehér ponthoz és az egyeneshez is közelebb legyenek, mint 10 cm.

Figyeld meg, mi történik!

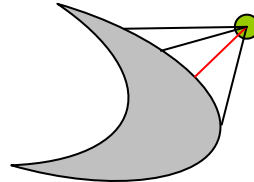
EMLÉKEZTETŐ:

Két pont távolsága az őket összekötő szakasz hossza.

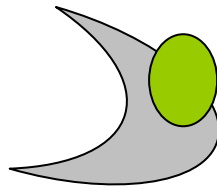
Pontokból álló „foltok” távolsága (ezt úgy is szokás mondani: ponthalmazok távolsága) a két halmaz pontjait egyenként összekötő szakaszok közül a legrövidebb szakasz hossza.



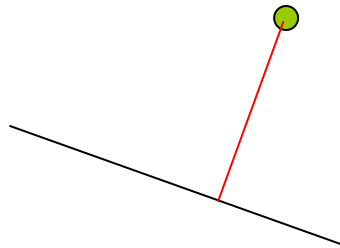
Egy pont távolsága a ponthalmaztól az összekötő szakaszok közül a legrövidebb szakasz hossza.



Ha két ponthalmaznak van közös pontja, akkor távolságuk 0.



A pont távolsága az egyenestől: a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hossza.



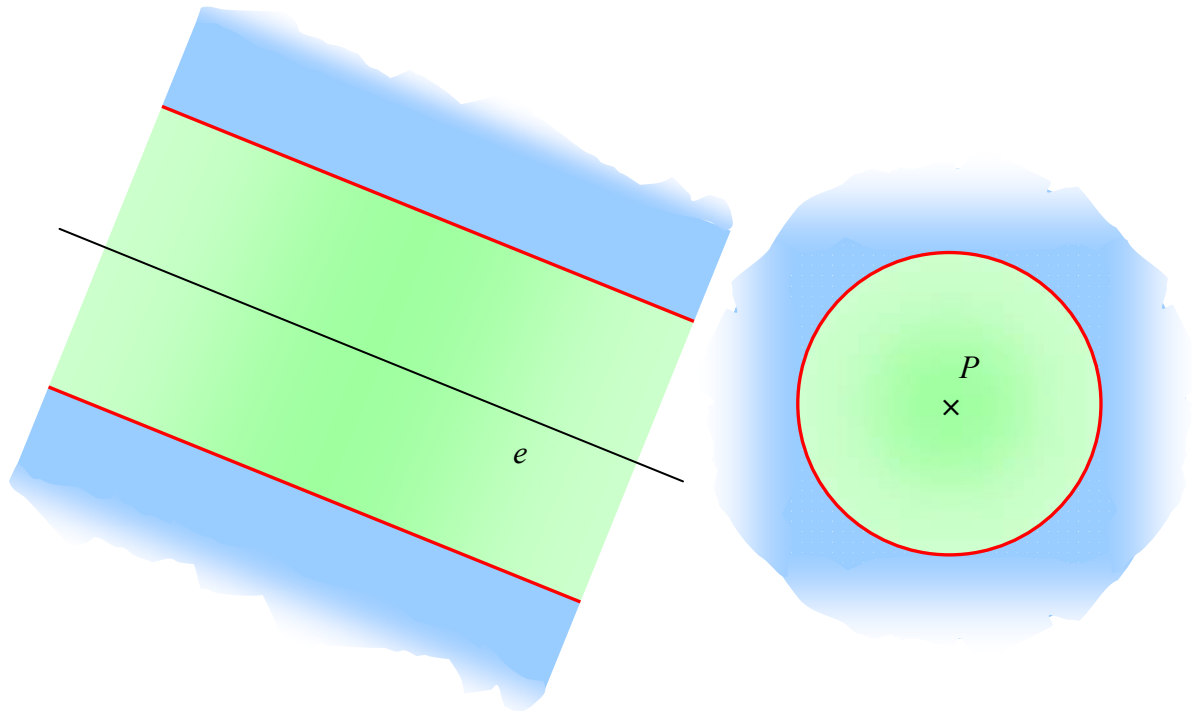
8.

a) Színezd a síkon

pirosra az e egyenestől 2 cm távolságra lévő pontokat;

kékre azokat a pontokat, amelyek e -től 2 cm-nél nagyobb távolságban vannak;

zöldre azokat a pontokat, amelyek e -től 2 cm-nél kisebb távolságra vannak!

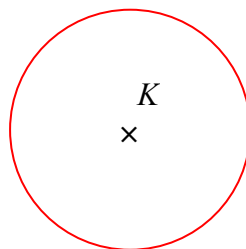


b) Színezd a síkon

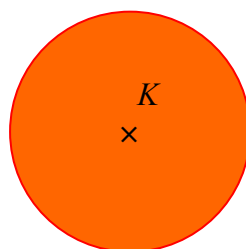
pirosra a P ponttól 2 cm távolságra lévő pontokat;
 kékre azokat a pontokat, amelyek P -től 2 cm-nél nagyobb távolságra vannak;
 zöldre azokat a pontokat, amelyek P -től 2 cm-nél kisebb távolságra vannak!

EMLÉKEZTETŐ:

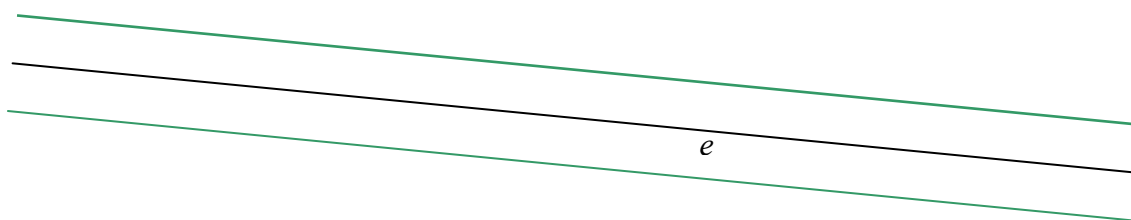
A síkban egy adott ponttól megadott, egyenlő távolságra lévő pontok egy körvonalat alkotnak. (A sík adott pontja a kör középpontja: K . Az adott távolságot a kör sugarának nevezzük, és r betűvel szokás jelölni.)



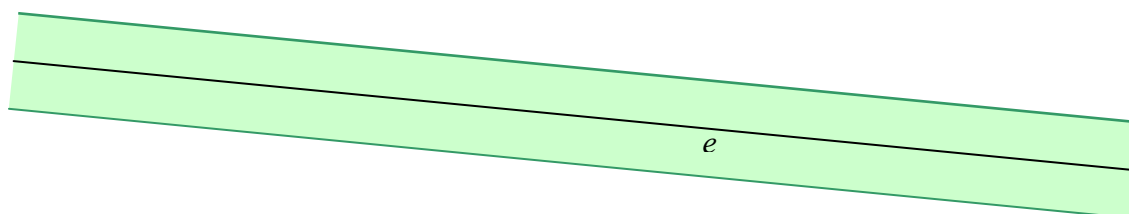
Azok a síkbeli pontok, amelyek a kör középpontjától a megadott távolságnál nincsenek messzebb, körlapot alkotnak.



Adott egyenestől adott távolságra lévő pontok a síkban az adott egyenessel párhuzamos egyenespárt alkotnak, amelyek között közepén halad az eredeti egyenes.



Azok a pontok, melyek egy egyenestől egy megadott távolságnál nincsenek messzebb, egy **síksávot** alkotnak.



III. A távolság fogalmának mélyítése

1. Az előző órák tapasztalatainak erősítése

A házi feladat ellenőrzésekor sétáljunk végig, nézzük meg az összes füzetet, hogy képet kapjunk arról, az osztályból hány gyerek értette meg beszélgetésünk során az „összes ilyen pont egy körvonalat alkot, amely...” típusú megállapításainkat!

A gyerekek bemutatják a táblán rajzaikat.

A házi feladat kapcsán az előző óra összes kérdését újra felvetjük, a táblára felrajzoljuk – felrajzoltatjuk a megoldásokat.

1. Újra megfogalmazzuk a gyerekekkel:

Milyen vonalon vannak adott ponttól adott távolságra lévő pontok a síkban?

Adott ponttól adott távolságra levő pontok a síkban egy körvonalat alkotnak, a körlap belső pontjai közelebb, a körvonalon kívül eső pontok távolabb vannak a megadott ponttól, mint a kör sugara..

Táblai körzővel elkészítjük az „összes pontról” szóló ábrát.

Körzővel, színes ceruzával elkészítik füzetükben a helyes ábrát.

2. Újra megfogalmazzuk a gyerekekkel:

Milyen alakzatot alkotnak adott egyenestől adott távolságra lévő pontok a síkban?

Adott egyenestől adott távolságra levő pontok a síkban egy párhuzamos egyenes párt alkotnak.

Táblai vonalzóval elkészítjük az „összes pontról” szóló ábrát.

Vonalzóval, színes ceruzával elkészítik füzetükben a helyes ábrát.

2. A távolság fogalmának kiterjesztése gömbre

A távolságfogalom mélyítése miatt fontos a következő feladatokat feldolgozni.

Gömbfelületen dolgozunk tovább. Felidézzük két pont távolságára vonatkozó ismereteinket, az ehhez kapcsolódó földrajzi kísérletet (két város távolsága).

Felidézzük előző órai tanulmányainkból pont és egyenes távolságát.

Tanár: Mit nevezünk két pont távolságának síkon és gömbön?

Hogyan mérnéd meg a gömbön egy pont és egy főkör távolságát?

Fogalmazz meg olyan földrajzi kérdést, melynek ez a matematikai tartalma! Végezd el a mérést!

A gyerekek a gömbi kísérletekhez bevezetett 4 fős csoportokban dolgoznak. A síkbeli és a gömbi tapasztalatokat csoportokon belül megvitatják. Egy csoporton belül két gömbi mérést végeznek: egy földrajzi jellegűt (például: milyen messze van az Egyenlítőtől Budapest? – ezt maguk választják) és egy „sima” gömböt (csupasz gömbön felvesznek egy főkört, és egy pontot, megméri ezek távolságát). 3. feladatlap 1. feladat.

Tanár: Rajzoljatok olyan pont-főkör párt, amelyek esetében nem egyértelmű, hogy melyik főkör mentén mérjük távolságukat!

Keressetek földrajzi példákat erre az esetre! (A pont a főkör pólusa.)

Várjuk meg, amíg a gyerekek észreveszik, hogy egy ponton át (ha az nem a pólus) KÉT irányban mérhetünk adott főkörre merőlegesen, ezek közül a rövidebbet választjuk távolságnak.

A kísérletek elvégzése után beszámolnak, a felmerülő kérdéseket megvitatjuk:

a) A pont és a főkör távolsága 0, ha a pont a főkörön van

b) A pont távolságát a főkörre merőleges főkör mentén mérjük. DE EZ NEM MINDIG EGYÉRTELMŰ.

SÍK ÉS GÖMB összehasonlító kísérlet következik, a csoportok egyidejűleg keressék a választ a két felületen: 3. feladatlap 2. feladat

Adott egy egyenes illetve főkör, a neve e , és adott egy rá merőleges egyenes illetve főkör, neve m . Az m vonalon a talpponttól távolodva (előbb csak az egyik, majd a másik irányban) szalad az M nevű pont, ami egy mókus. Minden ponton megáll, megméri távolságát az elhagyott e egyenestől, és e távolság FELEZŐPONTJÁN letesz egy szem mogyorót (nagyon sok mogyorója van). Tanár: Színezd pirosra a sík/gömb olyan pontjait, ahová mogyoró kerül, ha a mókus fáradhatatlanul és hibátlanul dolgozik.

(Ha van rá lehetőségünk, használjuk hozzá valamelyik számítógépes programot! CD-n Cabri-hoz Mókus nevű file. A Cabri Geometria II. programba a Mókus.fig nevű file-t, jelöljük ki az F pontot, és kapcsoljuk be a nyomkövetést! Ezt az utolsó előtti ikon legördítésével érhetjük el. Mozgassuk vagy animáljuk az M pontot! Az F pont pirosra festi az egyenest.)

Elvégzik a kísérletet mindkét felületen, majd beszámolnak tapasztalataikról:

Síkon a merőleges m egyenes minden pontja piros lett, a pont távolodásakor a felezőpont vele együtt távolodik.

Gömbön NEM így van, amikor a mókus éppen a pólusba ér, akkor a felezőpont félúton van a pólushoz, eddig húzott piros nyomot, majd ahogy a mókus átlépi a pólust, a távolságot a másik irányban mérjük, ezért a mogyorópont „átugrik” a másik oldalra, és ott húz piros nyomot.

Az óra további részében alkalmazzuk az itt megtanultakat, válogassunk a Feladatgyűjteményből (1. feladat). Minden probléma megbeszélésekor újra-újra foglalmazzuk meg a gyerekekkel a vizsgált ponthalmaz tulajdonságait!

3. FELADATLAP

1.

a) Állapítsd meg földgömb segítségével, hogy milyen messze van az Egyenlítőtől Budapest! Budapest a 47. szélességi körön van az északi féltekén. Így az Egyenlítőig 43 szélességi kör a távolsága; gömbi távolságegységben mérve: 43 g.t.e. A Földgömb két szélességi köre közötti távolság kb. 110 km, ezért Budapest az Egyenlítőtől kb. 4330 km-re van.

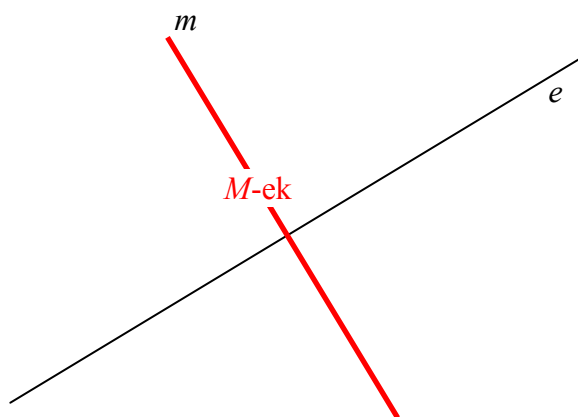
b) Rajzolj a gömbre egy főkört és egy pontot! Hogyan mérnéd meg a pont és a főkör távolságát? Végezd el a mérést!

c) Rajzolj olyan pont-főkör párt a gömbre, melyek esetében nem egyértelmű, hogy melyik főkör mentén mérjük távolságukat! Keressetek földrajzi példákat erre az esetre!

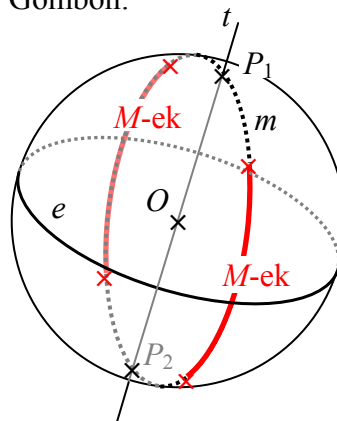
2. Keresd a pontok helyét síkon és gömbön!

Adott egy egyenes illetve főkör, a neve e , és adott egy rá merőleges egyenes illetve főkör, neve m . Az m vonalon a talpponttól távolodva (előbb csak az egyik, majd a másik irányban) szalad az M nevű pont, amely egy mókus. Minden ponton megáll, megméri távolságát az elhagyott e egyenestől, és e távolság FELEZŐPONTJÁN letesz egy szem mogyorót (nagyon sok mogyorója van.) Színezd pirosra a sík illetve gömb olyan pontjait, ahová mogyoró kerül, ha a mókus fáradhatatlanul és hibátlanul dolgozik!

Síkon:



Gömbön:

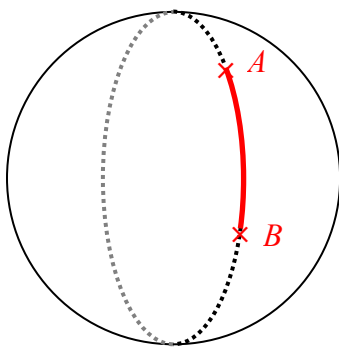


EMLÉKEZTETŐ:

Két pont távolsága a gömbön: az őket összekötő rövidebbik főkörív hossza.

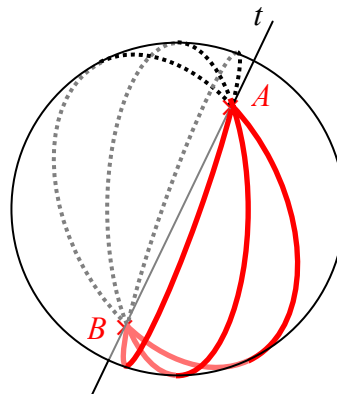
Ha a két pont nem átellenes, akkor:

- az összekötő főkörív egyértelmű;
- a távolság rövidebb, mint fél főkörhossz.



Ha a két pont átellenes, akkor:

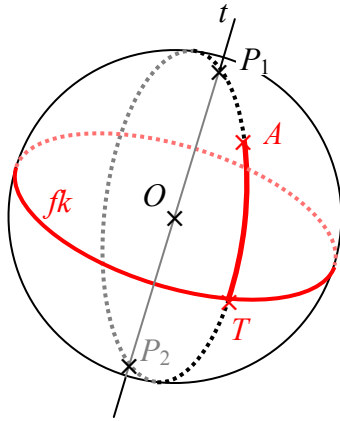
- az összekötő főkörív nem egyértelmű;
- a távolság éppen fél főkörhossz.



Pont és főkör távolsága: a ponton áthaladó, a főkörre merőleges főkörön mért ívhossz.

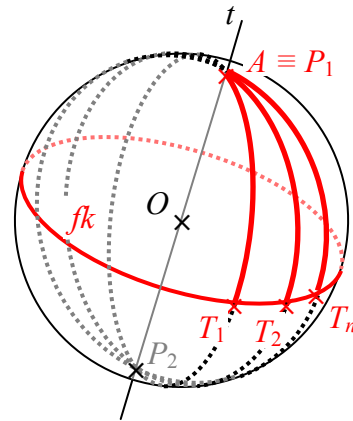
Ha a pont nem póluspontja a főkörnek, akkor:

- az összekötő főkörív egyértelmű;
- a távolság rövidebb, mint negyed főkörhossz.
(0, ha a pont a főkörön van.)



Ha a pont póluspontja a főkörnek, akkor:

- az összekötő főkörív nem egyértelmű;
- a távolság éppen negyed főkörhossz.



IV. Kör és egyenes kölcsönös helyzete

1. Összetett alakzatoktól egyenlő távoli pontok keresése

Az óra bevezető részében átismétljük a TÁVOLSÁG fogalmával kapcsolatos eddigi ismereteinket. Kis cédulákra felírhatjuk a kérdéseket. Mindegyik csoport húz egyet, megbeszéljük a választ, amelyet egy gyerek ismertet a csoportból (két pont, két ponthalmaz, pont és egyenes távolsága, ponttól ill. egyenestől egyenlő távoli pontok).

A gyerekek ismétlik, gyakorolják az eddig tanultakat.

a) Helyezkedjenek el a pirosak egy „folt”-ban, és jelöljünk ki egy adott pontot a kékék közül. Tanár: Milyen messze van a kék pont a piros ponthalmaztól?

A pontot a folttal összekötő szakaszok közül a legrövidebbet választják.

b) Kijelöl egy ADOTT SZAKASZT (rúd, seprűnyél stb. megfelel).

Tanár: Mindenki helyezkedjen el a szakasztól 1,5 m távolságra!

(akkora szakaszt válasszunk, hogy mindenki elférjen, de elég „sűrűn” kelljen állniuk ahhoz, hogy a szakasz két végére is jussanak gyerekek). 4. feladatlap 1., 2. feladat. Kérdezzük meg több gyerektől is, hogy ő hogyan mért. Olyantól is, aki a párhuzamos részen áll, olyantól is, aki a félkör részen.

Mérnek, közben vitáznak.

A pontot és az adott szakaszt összekötő szakaszok közül a legrövidebbet választják.

Mérés után lekuporodnak nagyjából foci pályára alakzatban.

Körülírják, hogy alakult ki a „foci pályára”. Nehezen szokott menni annak a sávnak a meghatározása, amelyben a szakasztól, mint egyenestől mérünk, míg a két szélső félsíkban a szakasz végpontjaitól, mint pontoktól. Ne erőltessük, ez még ráér a következő „füzetes” órán. Itt elég, ha ki-ki elmondja, hogy: én az egyenestől mértem merőlegesen; én a Pisti ponttól mértem; a „foci pályára” két párhuzamos szakaszból és két félkörből illeszthető össze. A szakaszok az adott szakasszal egyenlő hosszúak, a körök középpontjai a végpontok, sugara 1,5 m. (A 2. feladat lehet házi feladat.)

c) Kijelöl egy adott pontot és megkéri a pirosakat, álljanak 1,5 m-re a ponttól, és a piros zsinórral érzékeltessék, hol helyezkedik el az összes ilyen tulajdonságú pont.

A pirosak elhelyezkednek egy 1,5 m sugarú kör mentén, és kifeszítenek a piros zsinórból egy kört.

Tanár: A kék pontok a körvonalról fél m távolságra helyezkedjenek el!

A kékek a piros körrel koncentrikus 2 m sugarú kör mentén ülnek le, és lehet, hogy a belső, 1 m sugarú körre is rátalálnak.

Tanár: Hogyan mértél? Az egyenes, amely mentén mértél hogyan áll?

A középponton megy át.

Tanár: Megtaláltuk-e az összes kék pontot?

A kék pontok két kört alkotnak, ezek középpontja az adott pont, sugara 1, illetve 2 m.

A 4. feladatlap 3. feladata lehet házi feladat.

d) A tanár megkéri a *zöldeket*, hogy álljanak be a két kék körvonal közé.

Tanár: Milyen tulajdonságúak a zöld pontok? (Ha nem kapjuk meg mindkét választ, kérdezzünk rá a másokra.) 4. feladatlap 4. feladat lehet házi feladat.

A piros körvonalról mért távolságuk kevesebb, mint fél m.

Az adott ponttól mért távolságuk 1 m-nél több, de 2 m-nél kevesebb.

e) Most a zöldek formáljanak egy négyzetet, melynek oldalhossza 2 m. Helyezkedjenek el a kékek a négyzet határvonalától 1 m távolságra. A pirosak segíthetnek. (A tanár hagyja a vitában eldönteni a gyerekeknek, hogyan kell a csúcsoknál mérni – képesek rá.) 4. feladatlap 5. feladat.

Tanár: Hogyan néz ki a kék alakzat? Melyek azok a részei, amelyeket pontosan ismersz? A kékek mérnek, párhuzamosok mentén elhelyezkednek – kívül, a csúcsok környékén vita alakul ki.

A szakasz – foci-pálya részletes megbeszélésével előkészítettük ezt a feladatot, a gyerekek egy része felismeri, hogy a csúcsoknál körívek jelennek meg.

Ha a négyzet középpontját nem találják meg, csak miután vélhetően az összes pontot kibeszéltük, akkor kérdezzünk rá újból: Minden pontot megtaláltunk? Ha ez a kérdés sem hat: Én még tudok egyet! Erre már akad szemfüles, aki rátalál a négyzet középpontjára.

Házi feladat lehet: Rajzold meg az órai feladatokat emlékezetből!

4. FELADATLAP

1. Tegyétek ki a padra a hurkapálcát! Ez most egy szakaszt jelent. A korongokon pontokat jelöltünk. A piros pontokat úgy helyezd el, hogy a szakasztól 10 cm távolságra legyenek! Fogalmazd meg, milyen formát alkotnak a piros pontok! **„foci-pálya”**

2. Adott egy szakasz (legyen 4 cm hosszú). Színezd pirosra azokat a pontokat, amelyek e szakasztól 1,5 cm távolságra vannak!

3. Nyisd ki a körződet 10 cm-re, és rajzolj papírlapra kört! (Ne felejtse el megjelölni a középpontját!) Helyezz el kék pontokat úgy, hogy a körvonalról 3 cm-re legyenek! **7 cm illetve 13 cm sugarú koncentrikus körök**

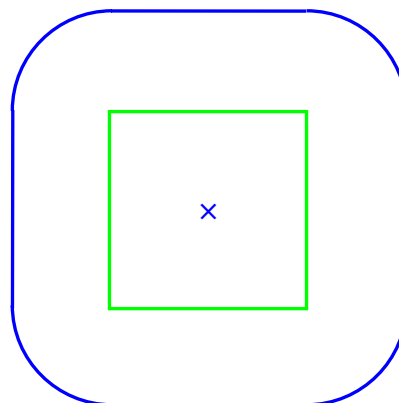
Hogyan mérted ki a kék pontok helyét?

Hogyan helyezkednek el a kék pontok?

Keress az elhelyezésre több lehetőséget!

4. (Előző feladat folytatása) Helyezz el zöld pontokat a kék pontok vonala közé! Milyen tulajdonságúak a zöld pontok? **A körvonalról 3 cm-nél közelebb vannak.**

5. Zöld pontokból rakj ki egy kb. 12 cm oldalú négyzetet! A kék pontokat úgy helyezd el, hogy a négyzet vonalától 6 cm-re legyenek! Hogy néz ki a kék alakzat? **A kék pontok által alkotott alakzatot úgy kapjuk meg, hogy a négyzet csúcsaiba 6 cm sugárral negyedköröket rajzolunk, a négyzet oldalaitól 6 cm távolságra lévő párhuzamosokat, így „lekerékített sarkú” négyzetet kapunk.** Melyek azok a részek, amiket pontosan ismersz? Minden pontot megtaláltál? **A négyzet belsejében is van egy ilyen tulajdonságú pont: a négyzet középpontja.**



2. Egyenes és kör kölcsönös helyzete

Minden csoportnak kiosztunk egy csomagolópapírt és hozzá kap egy feladatot a 4. feladatlap 6. feladatában leírtak közül.

A gyerekek a feladatban lévő utasításoknak megfelelően dolgoznak a csomagolópapírra. Ezután a csomagolópapíron elkészült munkákat mutassák be egymásnak a csoportok. Beszéljük meg a gyerekekkel, hogy egy egyenes és egy kör lehet metsző, szelő, vagy érintő helyzetben egymáshoz képest. Kerüljenek fel a csomagolópapírokra a megfelelő elnevezések. Vegyék észre és fogalmazzuk meg, hogy ha az egyenes és a kör érinti egymást, akkor az érintési pont az egyenesnek a középponthoz legközelebb eső pontja. Azzal összekötve éppen merőleges lesz az egyenesre.

Ezután oldják meg a gyerekek a 4. feladatlap 7. feladatát! (Házi feladatnak is adható.)

Házi feladatként kérjük, hogy mindenki vágjon ki, átlátszó fóliából – lehet színes műanyagdosszié, sütőpapír, de lehetőleg ne puha celofánpapír – két színes kört. Az egyik lehet például piros, 4 cm sugarú, a másik kék, 6 cm sugarú. Jelöljék be a középpontokat is.

6.

1. csoport:

Rajzolj a csomagolópapírodra egy egyenest és tőle 10 cm távolságban egy pontot. Rajzolj a pont körül 6 cm sugarú kört. Színezd az egyenes pontjait!

- Kékre azokat, amelyek a kör középpontjától 6 cm-nél távolabb vannak,
- Zöldre azokat, amelyek a kör középpontjától 6 cm-nél közelebb vannak,
- Pirosra azokat, amelyek a kör középpontjától éppen 6 cm távolságra vannak.
- Jelöld az egyenesen azt a pontot, ami a kör középpontjához legközelebb van és nevezd T -nek!

Ha elkészültetek a színezéssel, válaszoljatok a következő kérdésekre:

Mennyi az egyenes és a kör középpontjának a távolsága? **10 cm**

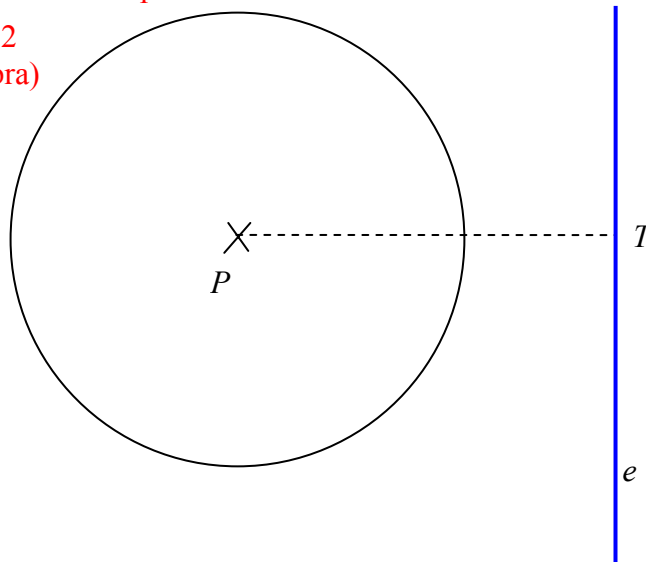
Mennyi az egyenes és a kör távolsága? **4 cm**

Hány közös pontja van az egyenesnek és a körnek? **0**

Hol helyezkedik el a T pont a metszéspontokhoz képest? **Nincs metszéspont.**

Kösd össze ceruzával a kör középpontját a kör és egyenes metszéspontjaival. Milyen alakzatot kapsz így? **Nincs metszéspont.**

Megoldás: (1 : 2
méretarányú ábra)



2. csoport:

Rajzolj a csomagolópapírodra egy egyenest és tőle 5 cm távolságban egy pontot. Rajzolj a pont körül 6 cm sugarú kört. Színezd az egyenes pontjait!

- Kékre azokat, amelyek a kör középpontjától 6 cm-nél távolabb vannak,
- Zöldre azokat, amelyek a kör középpontjától 6 cm-nél közelebb vannak,
- Pirosra azokat, amelyek a kör középpontjától éppen 6 cm távolságra vannak.
- Jelöld az egyenesen azt a pontot, ami a kör középpontjához legközelebb van és nevezd T -nek!

Ha elkészültetek a színezéssel, válaszoljatok a következő kérdésekre:

Mennyi az egyenes és a kör középpontjának a távolsága? **5 cm**

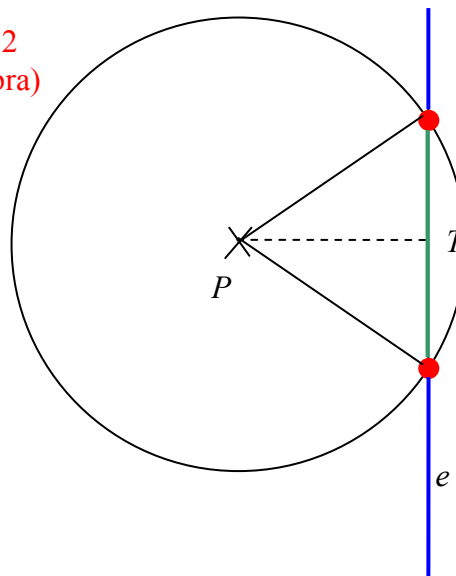
Mennyi az egyenes és a kör távolsága? **0 cm**

Hány közös pontja van az egyenesnek és a körnek? **2**

Hol helyezkedik el a T pont a metszéspontokhoz képest? **A két pont szakaszfelező pontján.**

Kösd össze ceruzával a kör középpontját a kör és egyenes metszéspontjaival. Milyen alakzatot kaptál így? **Egyenlőszárú háromszöget.**

Megoldás: (1 : 2
méretarányú ábra)



3. csoport:

Rajzolj a csomagolópapírodra egy egyenest és tőle 6 cm távolságban egy pontot. Rajzolj a pont körül 6 cm sugarú kört. Színezd az egyenes pontjait!

- Kékre azokat, amelyek a kör középpontjától 6 cm-nél távolabb vannak,
- Zöldre azokat, amelyek a kör középpontjától 6 cm-nél közelebb vannak,
- Pirosra azokat, amelyek a kör középpontjától éppen 6 cm távolságra vannak.
- Jelöld az egyenesen azt a pontot, ami a kör középpontjához legközelebb van és nevezd T -nek!

Ha elkészültetek a színezéssel, válaszoljatok a következő kérdésekre:

Mennyi az egyenes és a kör középpontjának a távolsága? **6 cm**

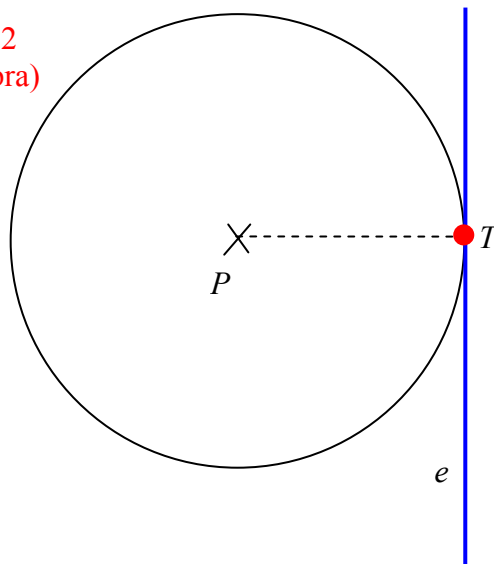
Mennyi az egyenes és a kör távolsága? **0 cm**

Hány közös pontja van az egyenesnek és a körnek? **1**

Hol helyezkedik el a T pont a metszéspontokhoz képest? **Rajta van.**

Kösd össze ceruzával a kör középpontját a kör és egyenes metszéspontjaival. Milyen alakzatot kaptál így? **Szakaszt.**

Megoldás: (1 : 2
méretarányú ábra)



4. csoport:

Rajzolj a csomagolópapírodra egy egyenest és tőle 5 cm távolságban egy pontot. Rajzolj a pont körül 10 cm sugarú kört. Színezd az egyenes pontjait!

- Kékre azokat, amelyek a kör középpontjától 10 cm-nél távolabb vannak,
- Zöldre azokat, amelyek a kör középpontjától 10 cm-nél közelebb vannak,
- Pirosra azokat, amelyek a kör középpontjától éppen 10 cm távolságra vannak.
- Jelöld az egyenesen azt a pontot, ami a kör középpontjához legközelebb van és nevezd T -nek!

Ha elkészültetek a színezéssel, válaszoljatok a következő kérdésekre:

Mennyi az egyenes és a kör középpontjának a távolsága? **5 cm.**

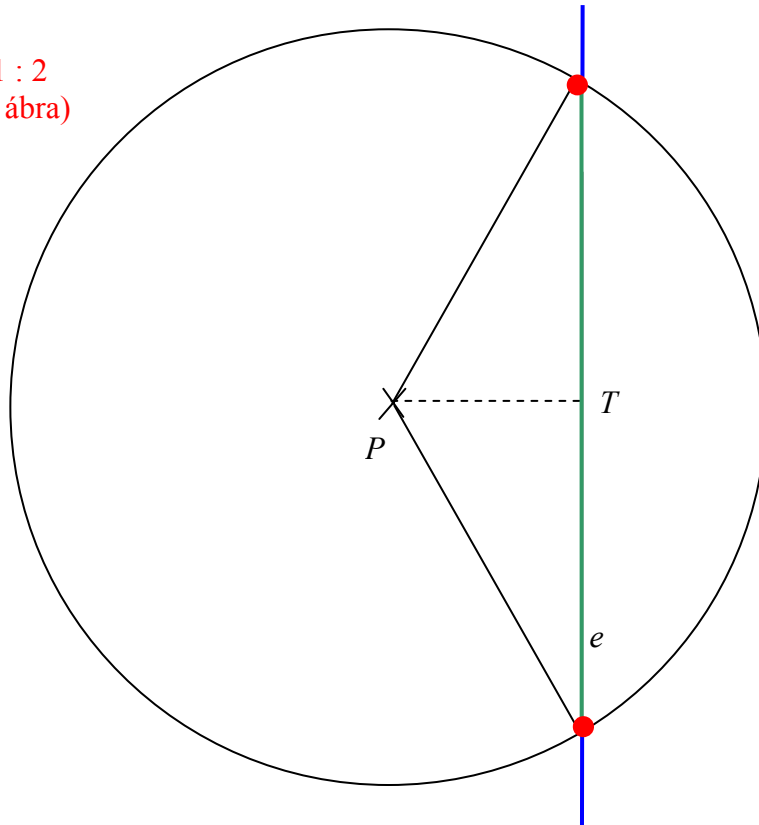
Mennyi az egyenes és a kör távolsága? **0 cm.**

Hány közös pontja van az egyenesnek és a körnek? **2.**

Hol helyezkedik el a T pont a metszéspontokhoz képest? **A két pontot összekötő szakasz felezőpontján.**

Kösd össze ceruzával a kör középpontját a kör és egyenes metszéspontjaival. Milyen alakzatot kapsz így? **Egyenlőszárú háromszöget.**

Megoldás: (1 : 2
méretarányú ábra)



5. csoport:

Rajzolj a csomagolópapírodra egy egyenest és tőle 10 cm távolságban egy pontot. Rajzolj a pont körül 10 cm sugarú kört. Színezd az egyenes pontjait!

- Kékre azokat, amelyek a kör középpontjától 10 cm-nél távolabb vannak,
- Zöldre azokat, amelyek a kör középpontjától 10 cm-nél közelebb vannak,
- Pirosra azokat, amelyek a kör középpontjától éppen 10 cm távolságra vannak.
- Jelöld az egyenesen azt a pontot, ami a kör középpontjához legközelebb van és nevezd T -nek!

Ha elkészültetek a színezéssel, válaszoljatok a következő kérdésekre:

Mennyi az egyenes és a kör középpontjának a távolsága? **10 cm.**

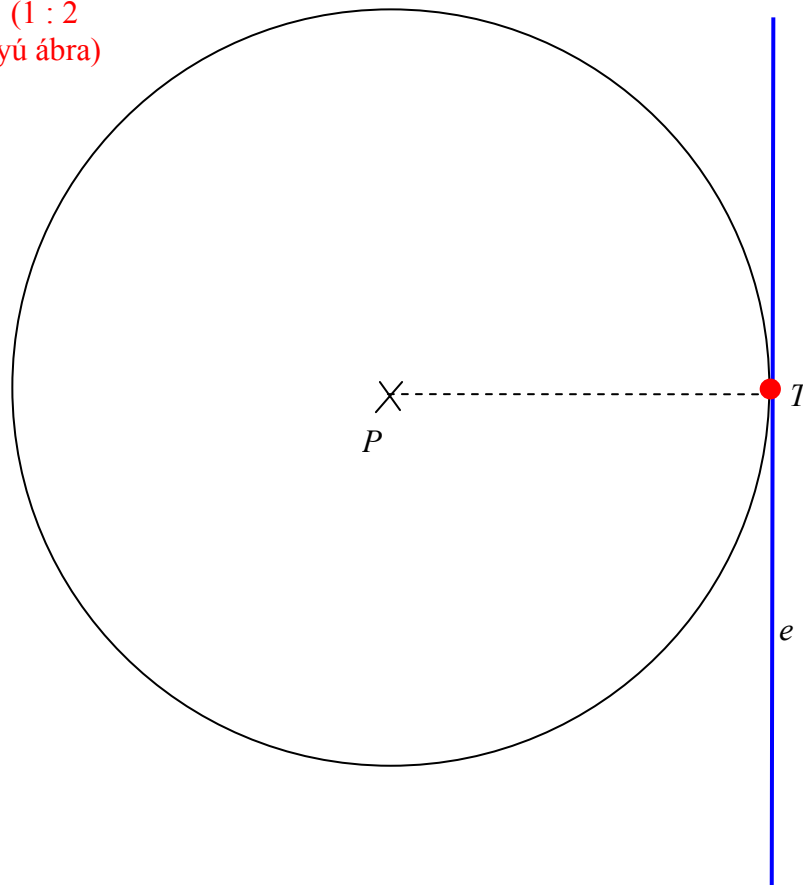
Mennyi az egyenes és a kör távolsága? **0**

Hány közös pontja van az egyenesnek és a körnek? **1**

Hol helyezkedik el a T pont a metszéspontokhoz képest? **Egybe esnek.**

Kösd össze ceruzával a kör középpontját a kör és egyenes metszéspontjaival. Milyen alakzatot kaptál így? **Szakaszt.**

**Megoldás: (1 : 2
méretarányú ábra)**



6. csoport:

Rajzolj a csomagolópapírodra egy egyenest és tőle 10 cm távolságban egy pontot. Rajzolj a pont körül 12 cm sugarú kört. Színezd az egyenes pontjait!

- Kékre azokat, amelyek a kör középpontjától 12 cm-nél távolabb vannak,
- Zöldre azokat, amelyek a kör középpontjától 12 cm-nél közelebb vannak,
- Pirosra azokat, amelyek a kör középpontjától éppen 12 cm távolságra vannak.
- Jelöld az egyenesen azt a pontot, ami a kör középpontjához legközelebb van és nevezd T -nek!

Ha elkészültetek a színezéssel, válaszoljatok a következő kérdésekre:

Mennyi az egyenes és a kör középpontjának a távolsága? **10 cm.**

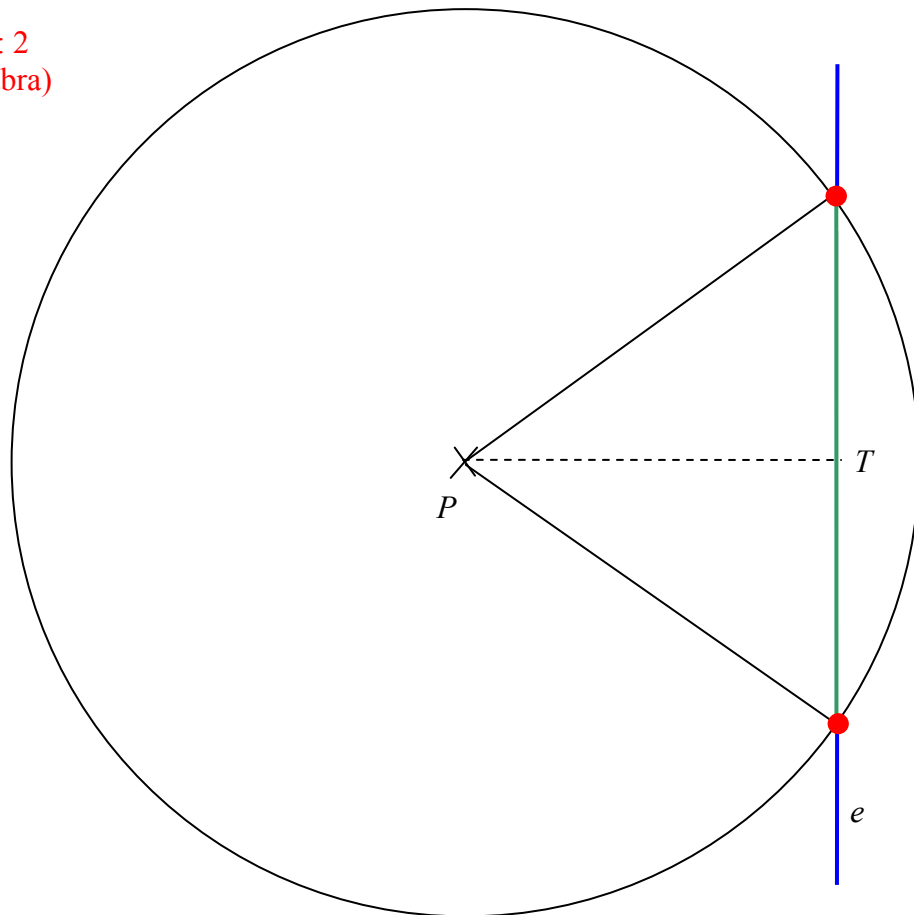
Mennyi az egyenes és a kör távolsága? **0.**

Hány közös pontja van az egyenesnek és a körnek? **2.**

Hol helyezkedik el a T pont a metszéspontokhoz képest? **A két pontot összekötő szakasz felezőpontján.**

Kösd össze ceruzával a kör középpontját a kör és egyenes metszéspontjaival. Milyen alakzatot kapsz így? **Egyenlőszárú háromszöget.**

**Megoldás: (1 : 2
méretarányú ábra)**



7. csoport:

Rajzolj a csomagolópapírodra egy egyenest és tőle 12 cm távolságban egy pontot. Rajzolj a pont körül 10 cm sugarú kört. Színezd az egyenes pontjait!

- Kékre azokat, amelyek a kör középpontjától 10 cm-nél távolabb vannak,
- Zöldre azokat, amelyek a kör középpontjától 10 cm-nél közelebb vannak,
- Pirosra azokat, amelyek a kör középpontjától éppen 10 cm távolságra vannak.
- Jelöld az egyenesen azt a pontot, ami a kör középpontjához legközelebb van és nevezd T -nek!

Ha elkészültetek a színezéssel, válaszoljatok a következő kérdésekre:

Mennyi az egyenes és a kör középpontjának a távolsága? **12 cm.**

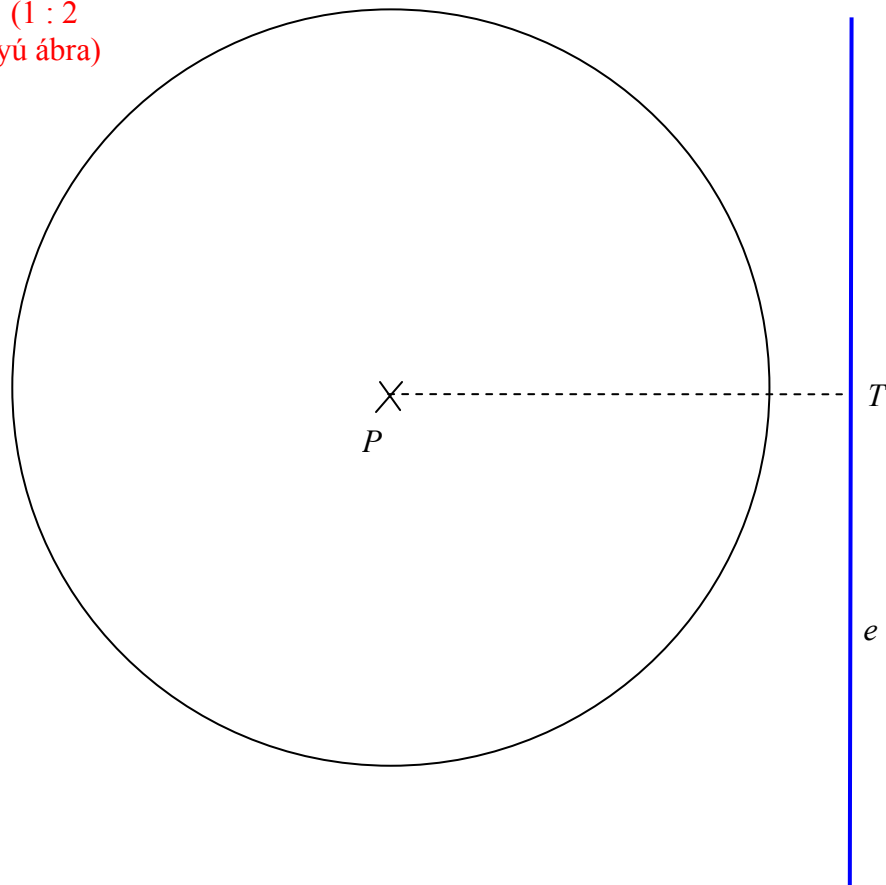
Mennyi az egyenes és a kör távolsága? **2 cm.**

Hány közös pontja van az egyenesnek és a körnek? **0.**

Hol helyezkedik el a T pont a metszéspontokhoz képest? **Nincsenek metszéspontok.**

Kösd össze ceruzával a kör középpontját a kör és egyenes metszéspontjaival. Milyen alakzatot kapsz így? **Nincsenek metszéspontok.**

Megoldás: (1 : 2
méretarányú ábra)



8. csoport:

Rajzolj a csomagolópapírodra egy egyenest és tőle 5 cm távolságban egy pontot. Rajzolj a pont körül 8 cm sugarú kört. Színezd az egyenes pontjait!

- Kékre azokat, amelyek a kör középpontjától 8 cm-nél távolabb vannak,
- Zöldre azokat, amelyek a kör középpontjától 8 cm-nél közelebb vannak,
- Pirosra azokat, amelyek a kör középpontjától éppen 8 cm távolságra vannak.
- Jelöld az egyenesen azt a pontot, ami a kör középpontjához legközelebb van és nevezd T -nek!

Ha elkészültetek a színezéssel, válaszoljatok a következő kérdésekre:

Mennyi az egyenes és a kör középpontjának a távolsága? **5 cm.**

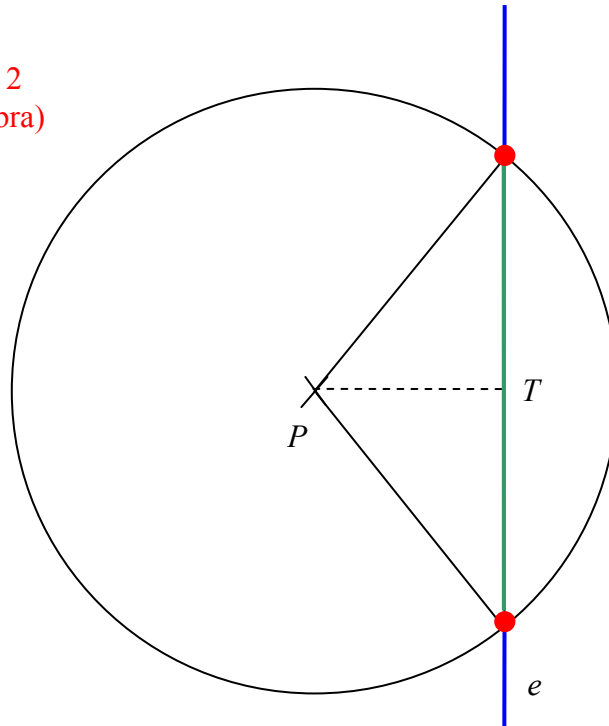
Mennyi az egyenes és a kör távolsága? **0.**

Hány közös pontja van az egyenesnek és a körnek? **2.**

Hol helyezkedik el a T pont a metszéspontokhoz képest? **A két pontot összekötő szakasz felezőpontján.**

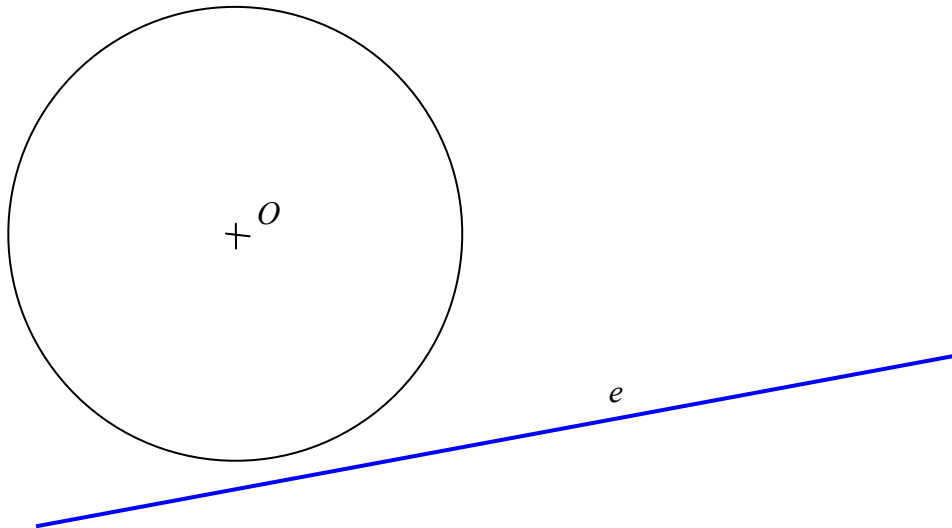
Kösd össze ceruzával a kör középpontját a kör és egyenes metszéspontjaival. Milyen alakzatot kapsz így? **Egyenlőszárú háromszöget.**

Megoldás: (1 : 2
méretarányú ábra)



7. Az alábbi ábrákon 3 cm sugarú köröket látsz. Minden ábrán színezd ki az egyenes pontjait:
 – kékre azokat, amelyek a kör középpontjától 3 cm-nél távolabb vannak;
 – zöldre azokat, amelyek a kör középpontjához 3 cm-nél közelebb vannak;
 – pirosra azokat, amelyek a kör középpontjától éppen 3 cm távolságra vannak!
 Ezután válaszolj a kérdésekre!

a)



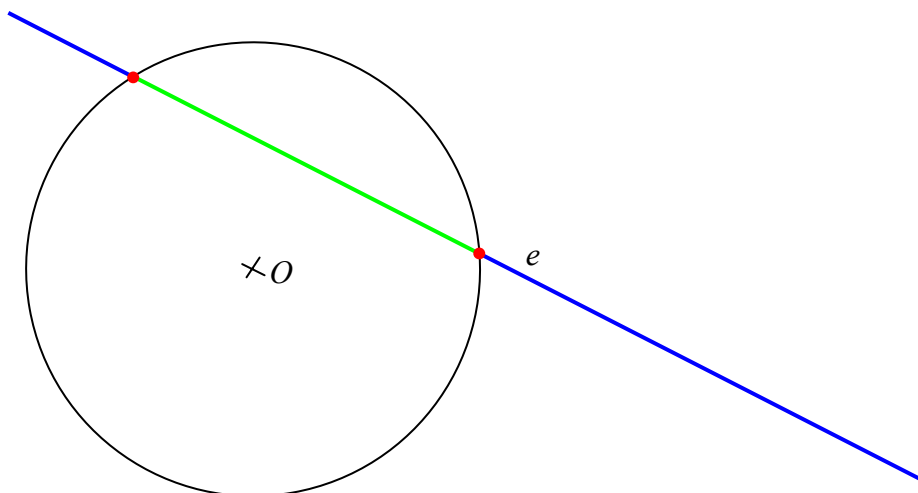
Mennyi az egyenes és a kör középpontjának a távolsága? **33 mm**

Mennyi az egyenes és a kör távolsága? **3 mm**

Hány közös pontja van az egyenesnek és a körnek? **0**

Az egyenes és a kör metszi vagy érinti egymást, vagy nincs közös pontjuk? **nincs közös pont**

b)



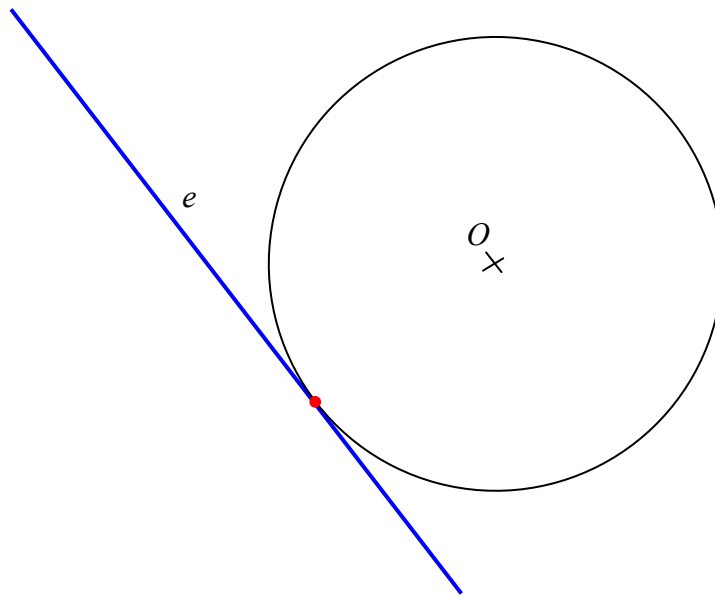
Mennyi az egyenes és a kör középpontjának a távolsága? **15 mm**

Mennyi az egyenes és a kör távolsága? **0 mm**

Hány közös pontja van az egyenesnek és a körnek? **2**

Az egyenes és a kör metszi vagy érinti egymást, vagy nincs közös pontjuk? **metszik egymást**

c)



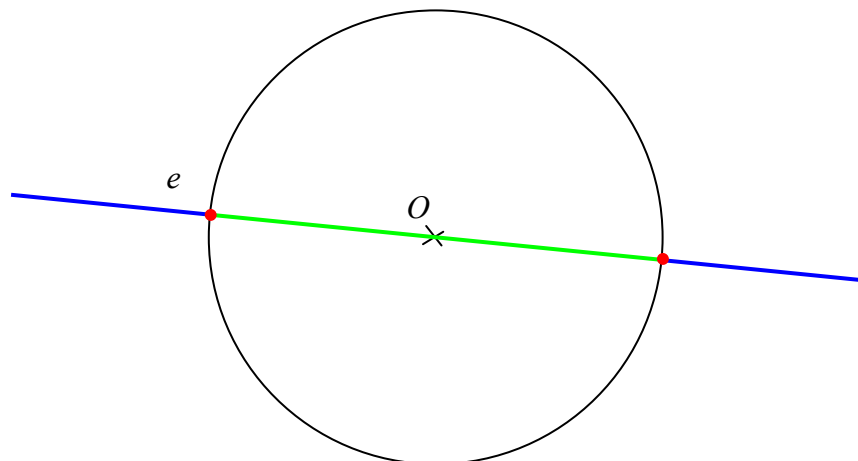
Mennyi az egyenes és a kör középpontjának a távolsága? **30 mm**

Mennyi az egyenes és a kör távolsága? **0 mm**

Hány közös pontja van az egyenesnek és a körnek? **1**

Az egyenes és a kör metszi vagy érinti egymást, vagy nincs közös pontjuk? **érintik egymást**

d)



Mennyi az egyenes és a kör középpontjának a távolsága? **0 mm**

Mennyi az egyenes és a kör távolsága? **0 mm**

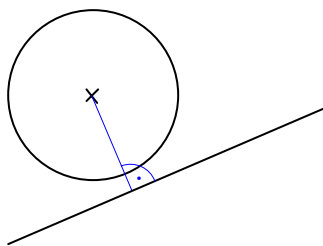
Hány közös pontja van az egyenesnek és a körnek? **2**

Az egyenes és a kör metszi vagy érinti egymást, vagy nincs közös pontjuk? **metszik egymást**

TUDNIVALÓ:

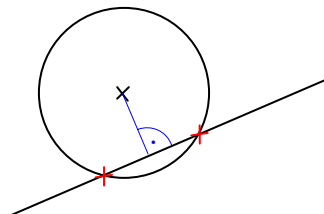
Egy egyenesnek és egy körnek 0, 1 vagy 2 közös pontja lehet.

0 közös pont:



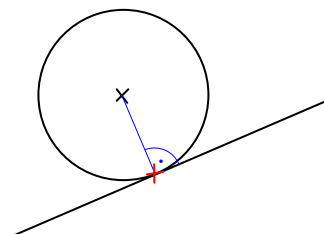
Az egyenes és a középpont távolsága nagyobb, mint a sugár.

2 közös pont:



Az ilyen egyenes neve: **szelő**.
A szelő és a középpont távolsága kisebb, mint a sugár.

1 közös pont:



Az ilyen egyenes neve: **érintő**.
Az érintő és a középpont távolsága éppen egyenlő a sugárral.

V. Két kör kölcsönös helyzete; több feltételnek eleget tevő pontok keresése

1. A tapasztalatok rögzítése

A házi feladat kapcsán az előző óra összes kérdését újra felvetjük, a táblára felrajzoljuk – felrajzoltatjuk a megoldásokat.

1. Újra megfogalmazzuk a gyerekekkel:

Tanár: Hogyan mérték? Milyen alakzathoz jutottak?

Gyerekek: ...én az egyenestől mértem merőlegesen; én a Pisti ponttól mértem; a „focipálya” két párhuzamos szakaszból és két félkörből illeszthető össze. A szakaszok az adott szakasszal egyenlő hosszúak, a körök középpontjai a végpontok, sugara 1,5 m.

Táblai körzővel elkészítjük az „összes pontról” szóló ábrát, közben kiderítjük, hol végződik a körív, hol kezdődik a szakasz?

Az adott szakasz végpontjaiban állítsunk merőlegeseket. Ezek között párhuzamos egyenespárt, ezeken kívül köríveket rajzolunk.

A 4. feladatlap 3. otthoni feladat ellenőrzésekor ismét megfogalmazzuk, hogy: Milyen alakzathoz jutottak?

A piros pontok egy körvonalat alkotnak, s az ettől adott távolságra levő pontok vele közös középpontú köröket alkotnak, egyet kívül, egyet belül, ezek a kék körök.

Legyenek a piros kör pontjai a középponttól 3 cm-re! A kék pontok a piros ponthalmaztól 2 cm-re!

Mi történik, ha növeljük a kék pontoknak a rögzített piros pontoktól való távolságát?

A kék körök közül a külső nő, a belső egyre kisebb lesz.

Meddig növelhetjük ezt a távolságot, hogy igaz legyen ez a megállapítás?

Amikor a 2 cm-es adat éppen 3 cm-re nőtt, akkor a belső kör egyetlen pont, utána pedig eltűnik.

2. Két kör kölcsönös helyzete

A házi feladatnak elkészített színes köröket elővetetjük a gyerekekkel, és kérjük, hogy rakják le egymáshoz képest minél több különféle helyzetben. Magyarazzuk meg, hogy most a pontos távolságok nem annyira érdekelnek bennünket, inkább a közös pontok számára figyeljenek. Kerüljenek fel a különböző lehetőségek a táblára is.

Ezek után a csoportok közös megbeszéléssel töltsék ki az 5. feladatlap 1. feladatának táblázatát, amit diákvertettel ellenőrizhetünk.

5. FELADATLAP

1. Tedd magad elé a 4 cm, illetve 6 cm sugarú köröket! Válassz egy távolságot a táblázat tetején megadott értékek közül, és tedd le a köröket úgy, hogy a középpontok távolsága megegyezzen a választott távolsággal! Ezután a megfelelő oszlopba írd be a válaszoknak megfelelő jeleket...

A középpontok távolsága	5 cm	10 cm	0 cm	1 cm	15 cm	2 cm
A két kör távolsága	0 cm	0 cm	2 cm	1 cm	5 cm	0 cm
Ha a két kör középpontjának távolsága egyenlő a sugarak összegével: = kisebb a sugarak összegénél: < nagyobb a sugarak összegénél: >	<	=	<	<	>	<
Ha a két kör középpontjának távolsága egyenlő a sugarak különbségével: = kisebb a sugarak különbségénél: < nagyobb a sugarak különbségénél: >	>	>	<	<	>	=
Ha a két kör érinti egymást: é ha a két kör metszi egymást: m ha nincs közös pontjuk: n	m	é	n	n	n	é
A közös pontok a középpontokat összekötő egyenesen vannak. ha igen: i ha nem: n	n	i				i

Füllentős játék

A táblázat alapján a csoportok készítsenek három állítást, melyekből egyik hamis, a másik kettő igaz.

3. Több feltételnek megfelelő pontok keresése

Az itt feldolgozandó feladattal a következő órai csoportmunkát készítjük elő. Minél részletesebben tárgyaljuk, annál önállóbb munkát remélhetünk.

A tanár kijelöl a táblán egy egyenest, s egy rá nem illeszkedő pontot ezzel:

„Az egyenes egy folyót, a pont egy kutat jelképez, ezek távolsága 3 km. Készítsetek ilyen ábrát a füzetben, melyben 1 cm a valóságban 1 km-t jelent.”

Miután a gyerekek elkészítették rajzaikat, a tanár további feladatot ad:

„Juliska néni háza 2 km-re van a folyótól. Színezzétek pirosra azokat a pontokat, ahol Juliska néni háza állhat!”

Táblai piros korongokat helyeztetünk fel a gyerekekkel a „jó”-nak ítélt helyekre.

A tanár minden elhelyezett koronghoz indoklást kér, így sok gyerektől hangzik el lényegében ugyanaz a gondolat: „**Ez a pont a folyó egyenesétől 2 km-re van, az egyenesre merőlegesen mértem a távolságát.**”

A tanár következő kérdése:

Juliska néni háza a kúttól legalább két kilométerre van. Hol található azok a házhelyek (pontok), amelyek a kúttól éppen 2 km-re vannak?

A kút közepü, 2 km sugarú körön, de ennek vannak „rossz” pontjai, amik a folyóhoz közelebbiek 2 km-nél, vagy amelyek távolabbiak, mint 2 km.

A folyótól 2 km-re levő házhelyek a folyóval párhuzamos egyenesen vannak, de ennek az egyenesnek is van néhány pontja, ami nem jó, mert a kúthoz közelebb van.

Szedjük le azokat a korongokat, amik nem jók!

Ilyenféle megfogalmazásokat hallhatunk: Az egyenes addig jó, míg a körrel nem találkozik, onnan a körön haladjunk tovább, míg újra elérjük az egyenest, onnan ismét az egyenes pontjai jók kifelé.

Most eljutottunk oda, hogy szerkesztést tervezzünk!

A tanár felkéri a gyerekeket, tervezzék meg a szerkesztés lépéseit, közben a táblán vázlatosan rögzíti az elhangzó jó ötleteket. Ezután táblai eszközökkel lépésről lépésre megszerkeszti a keresett alakzatot.

A gyerekek a füzetben elkészítik ugyanazt a vázlatot, ami a táblán készül, ezután végzik el a szerkesztést.

VI. Az eddigi ismeretek mobilizálása

1. A feltételek változásának hatása

Differenciált csoportfoglalkozás. Az órát megelőzően: A gyerekeket 4-5 fős csoportokba osztjuk, vagy ők maguk szerveződnek ilyen csoportokba. Két szempont fontos:

- Kb. azonos képességűek kerüljenek egy csoportba
- Egymással jó kapcsolatuk legyen, hiszen együtt kell működniük

Az óra előtti szünetben a csoportmunkára alkalmassá tesszük a termet.

A tanár ismerteti az óra felépítését a gyerekekkel:

- Minden csoport más-más feladatot fog kapni, ezekben az a közös, hogy egy adott alakzattól egyenlő távolságra lévő pontokat kell megkeresnetek, különbözőek viszont az alakzatok.

- Készítsetek vázlatokat, vitassátok meg a szerkesztés módját, ha elakadtok, vagy ha megszületett az egyetértés, akkor hívhattok.

A tanár kiosztja a feladatokat (5. feladatlap 2. feladat), majd elvegyül a csoportok közt, segít, ahol kell. A tanulók pedig elkezdik a beszélgetést, a vitát, rajzolnak, színeznak, a tanár segítségét kérik, stb.

Adott egy pontthalmaz és 3 különböző távolság. A gyerekek feladata, színezni egy-egy színnel (piros, kék, zöld) az alakzattól adott távolságra lévő pontokat.

Azért szerepel 3-3 távolság, mert csoportonként egy kis diszkussziót is bújttunk a problémába: más-más színnel más-más alakzatok adódnak.

A helyes tervekkel és egyetértéssel rendelkező csapatoknak A/3-as lapokat vagy csomagoló papírokat osztunk, ezen készüljön a szerkesztés.

A csoportok közösen elkészítik szerkesztett ábrájukat, addig dolgoznak, míg a tanár által szabott idő engedi. Ezután műveiket a táblán rögzítik ragacsokkal (blue-tec), vagy mágnessel. Ha a csoportok többségében elkészültek, akkor az időt lejárnak nyilvánítjuk (előfordulhat, hogy a következő óra elejéből még 10-15 percre szükség van). Felszólítjuk a gyerekeket, hogy válasszanak csoportonként szószólót. Az ő dolga ismertetni az osztállyal a csoport feladatát és megoldását.

Kezdetét veszik az ismertetések.

A többiek vitathatnak, kérdezhetnek, a válaszadás, védekezés jogszerű sorrendje:

1. a szószóló
2. a csapattagok
3. bárki az osztályból
4. a tanár

A megbeszélés és esetleges javítások után az ábrák 1-2 hétig a tantermet díszíthetik.

Az órai munkát érdemes (elsősorban jutalmazva) értékelni! Szempontjaink: együttműködés, minél kevesebb segítség kérése, kivitelezés.

2.

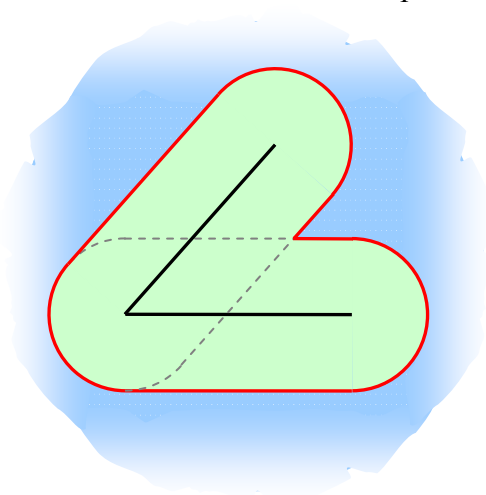
1. csoport:

Rajzolj a füzetedbe két olyan szakaszt, amelyek egy pontból indulnak, és mindkettő hossza 3 cm!

a) Színezd pirossal az alakzattól 1 cm távolságra lévő pontokat! **A szakaszokkal párhuzamosan 1-1 cm távolságra haladó szakaszok és a végpontok köré 1 cm sugárral rajzolt félkörívek együttese.**

b) Színezd kézzel az alakzattól 1 cm-nél távolabb lévő pontokat!

c) Színezd zölddel az alakzathoz 1 cm-nél közelebb lévő pontokat!

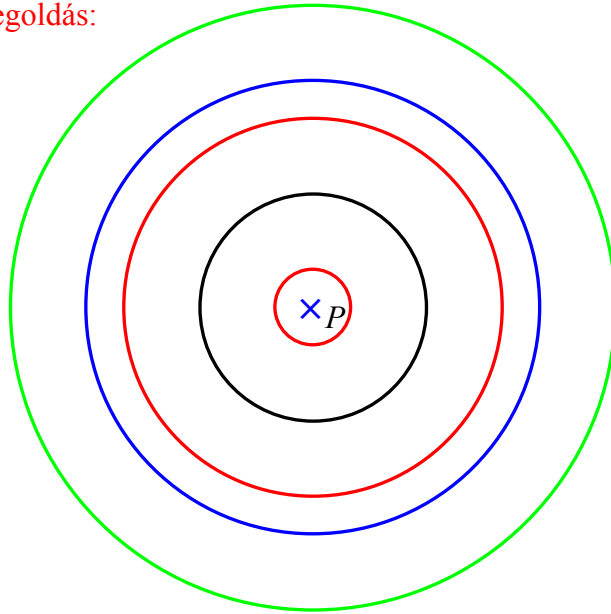


2. csoport:

Jelölj ki a füzetedben egy pontot, és a 3 cm-re kinyitott körződdel rajzolj egy kört!

- Színezd pirossal a körvonalától 2 cm távolságra lévő pontokat!
- Színezd kékkel a körvonalától 3 cm távolságra lévő pontokat!
- Színezd zölddel a körvonalától 5 cm távolságra lévő pontokat!

M = 1 : 2 méretarányú megoldás:

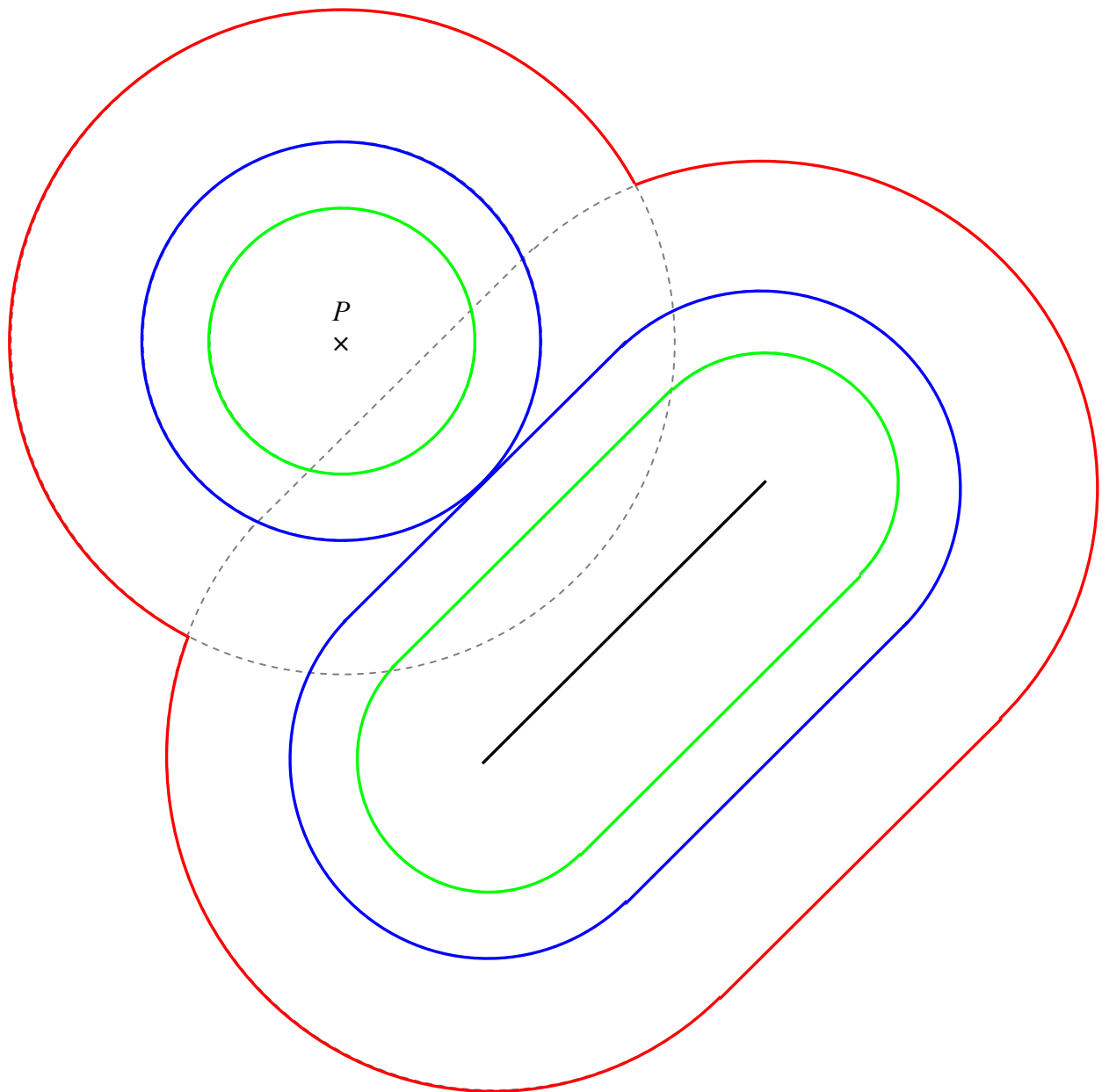


3. csoport:

A pont és a szakasz, amit a füzetedben látsz, egyetlen alakzat ebben a feladatban. Például egy szoborcsoport helyét jelölik felülről nézve. Színezd ki azokat a pontokat a síkon, amelyek ettől az alakzattól az alábbi, megadott távolságokra vannak:

Ha ez a távolság

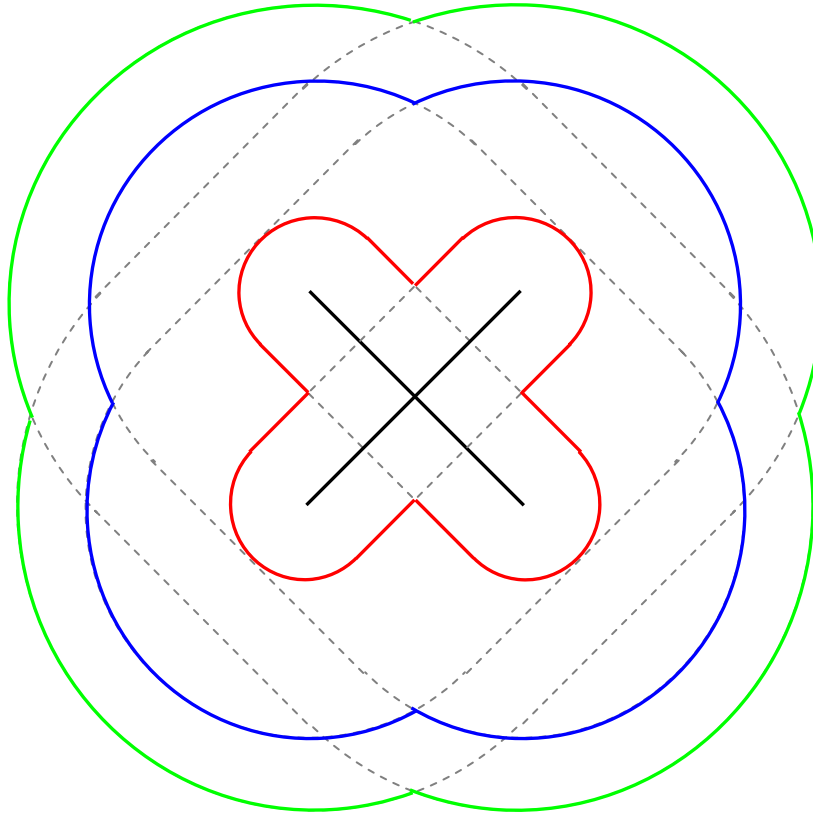
- 5 cm, akkor színezd a megfelelő pontokat pirosra;
- 3 cm, akkor színezz kézzel;
- 2 cm, akkor legyen zöld a pontok színe!

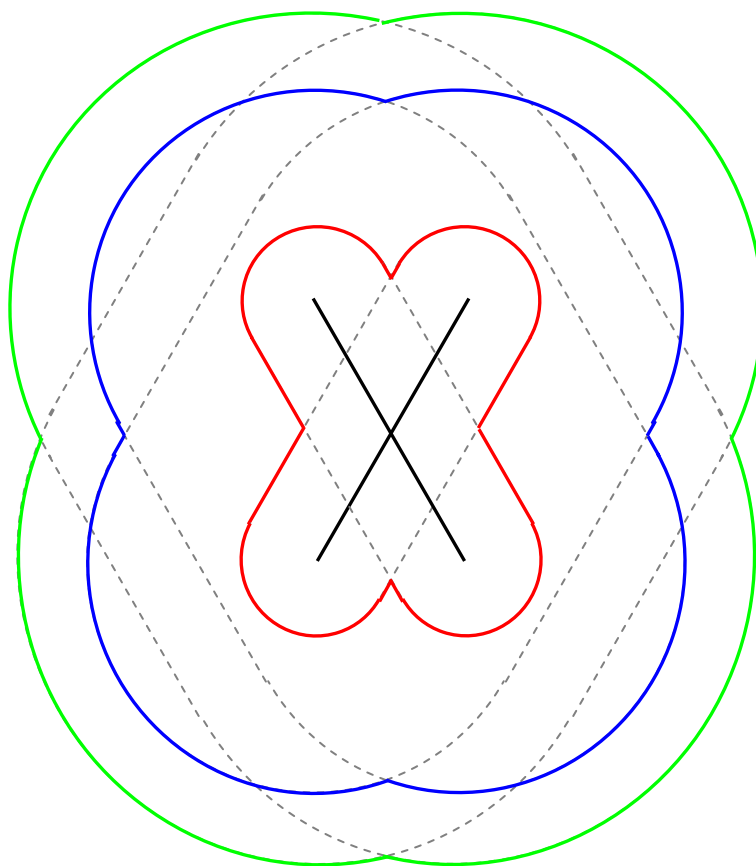


4. csoport:

Színezd a szakasztól adott távolságra lévő pontokat a síkon!

- Színezd pirossal a szakasztól 1 cm távolságra lévő pontokat!
- Színezd késsel a szakasztól 3 cm távolságra lévő pontokat!
- Színezd zölddel a szakasztól 4 cm távolságra lévő pontokat!

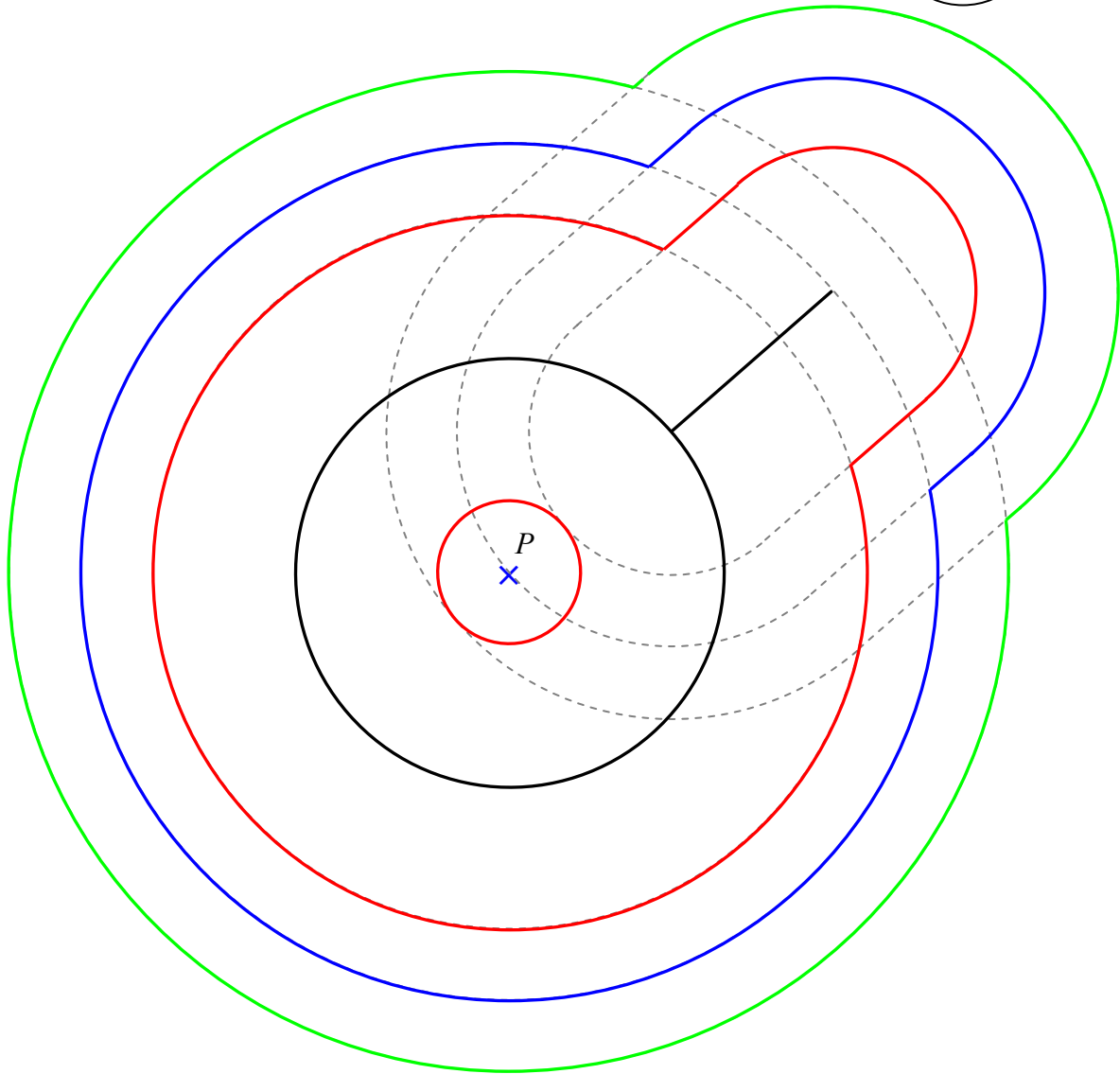




5. csoport:

Rajzolj a füzetedbe egy kört 3 cm-es körzőnyílással, és egy szakaszt, amelynek egyik végpontja a körvonalon van! (Segít az ábra!)

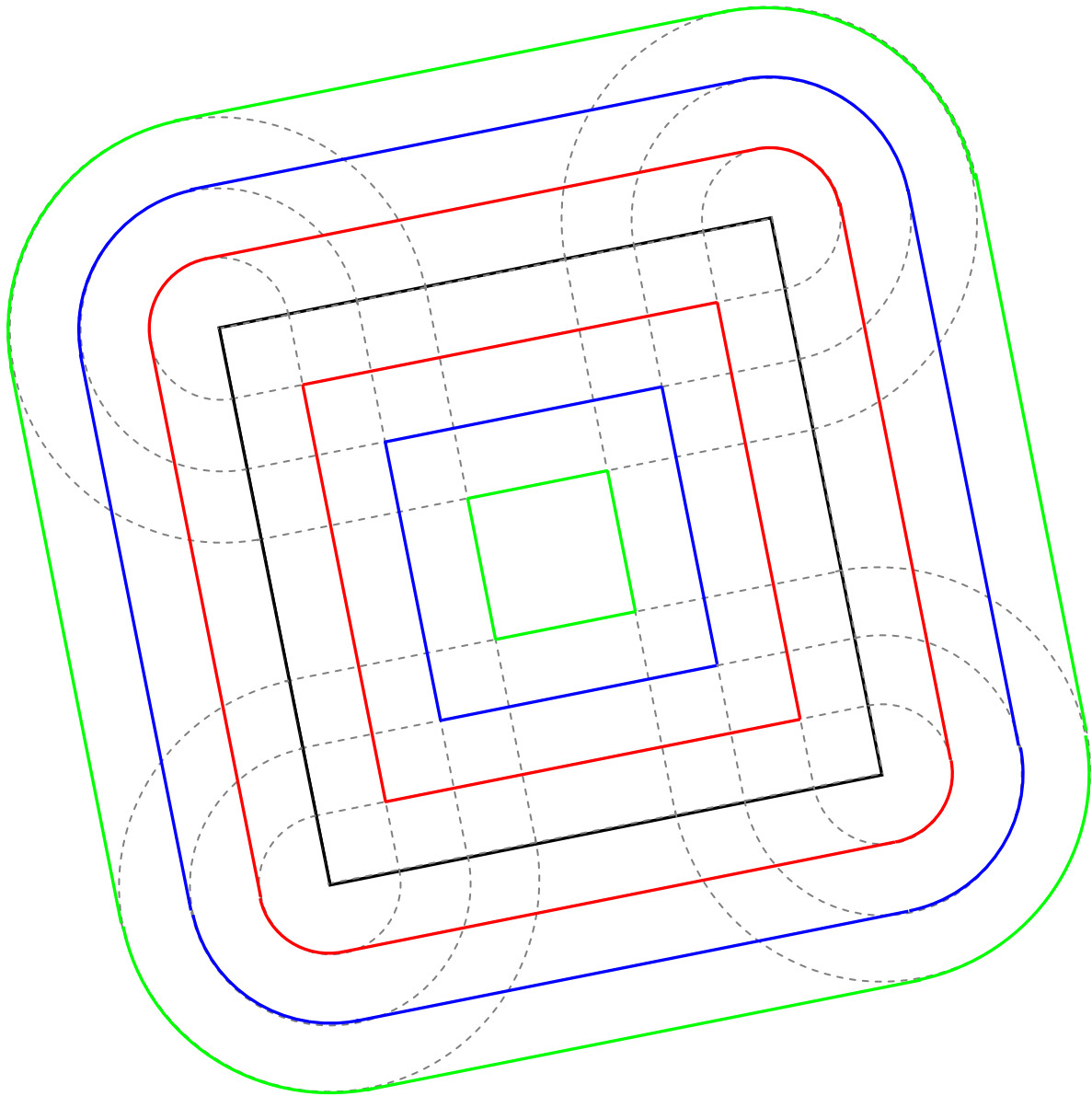
- Színezd pirossal az alakzattól 2 cm távolságra lévő pontokat!
- Színezd kékkel az alakzattól 3 cm távolságra lévő pontokat!
- Színezd zölddel az alakzattól 4 cm távolságra lévő pontokat!



6. csoport:

Színezd a síkon a négyzet határolóvonalától adott távolságra lévő pontokat:

- a) Pirossal színezd az 1 cm távolságra lévő pontokat!
- b) Kékkel színezd a 2 cm távolságra lévő pontokat!
- c) Zölddel színezd a 3 cm távolságra lévő pontokat!



FÜGGELÉK

Két pont távolsága kapcsán felmerülhet, hogy „légvonalban” mérünk. Ez alatt a gyerekek valóban egyenest értenek, és fel sem tűnik nekik a csúsztatás, mely itt rejtezik. Nem könnyen veszik észre - nagy földi távolságok említése válhat szükségessé a megértéshez -, hogy a „légvonal” nem egyenes, hanem görbe, leginkább körvonal. Itt a valóság és a matematikai sík elválik egymástól. Ragaszkodjunk annak megfogalmazásához, hogy két pont távolságát az őket összekötő *egyenes* mentén mérjük.

Két ponthalmaz távolsága az őket (pontjaikat) összekötő szakaszok közül a legrövidebb – *ha van ilyen*. Ez utóbbi hozzáfűzés matematikailag szükséges, módszertani szempontból inkább zavaró. Azokban a tanulócsoportokban, ahol a törtek nagyság szerinti sorba

rendezésekor például már látták, hogy az $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$, stb. sorozat elemei között nincs

legkisebb, nincs olyan, amelyik legközelebb áll a 0-hoz, ott ezt felidézve mutathatunk olyan esetet, amikor nincs legkisebb távolság. Ez azonban nem könnyű, ne terheljük vele feleslegesen olyan gyerekeket, akik erre „nem vevők”.

JÁTÉKOK

Staféta

Összefoglalás – ismétlés alkalmával igen hatékony. A gyerekek előre rögzített sorrendben (ülésrend szerint) igaz állításokat mondanak, stafétában. Aki olyat mond, amely már elhangzott, akár bővebb formában, vagy olyat, ami hamis, az kiesik. Ha nem tud újat, passzolva esik ki, gondolkodási idő nincs. A megvitatni való állításokat a táblán jegyezzük, helyettük újat kérünk, a vitára csak a játék után térünk vissza, hogy gyorsan pörögjön. Az utolsó néhány bennmaradót jutalmazzuk.

(Próbáljuk ki bátran! A játék a kollektív tudást hívja elő, megdöbbenve fogjuk tapasztalni, milyen sok állítást képesek felidézni rövid idő alatt tanítványaink. Amikor egy sémára nagyon sok állítás húzható rá, akkor abból 2-3 db-ot elfogadunk, aztán kijelentjük, hogy ebből a típusból nem kérünk többet, ilyenkor a kérdéses típus általánosítását megfogalmazzuk. Például: számelmélet fejezet végén – 0-tól indulva minden 2. szám 2-vel osztható – 0-tól indulva minden 3. szám 3-mal osztható – 0-tól indulva minden 4. szám 4-gyel osztható. Általánosítást kérünk. ...minden n -edik szám n -nel osztható).

Továbbadó változatban nem előre adott sorrendben, hanem a soron lévő gyerek szabad választása alapján megy tovább a szólás joga. A továbbadást jelképezheti „szólabda” – ez könnyű szivacs, vagy patchwork labda, melyet dobva a szót is a labdával adják.

„Telefonos”, vagy „háttal”

A szerkesztések gyakorlására jól használható játékos forma.

Önként vállalkozó (később bárki) adja az utasításokat háttal állva, vagy ülve a táblának, esetleg telefonkagylóval eljátszva, hogy vidékről beszél. A tanár szerkeszt, minden pontatlanságot kihasználva ügyetlenkedik. Később erre a szerepre is gyereket kérünk fel. Gondunk legyen rá, hogy a vígkedély ne kinevetésbe torkolljon, hanem vidám formában tanulás legyen az eredménye!

A játék igen gyorsan fejleszti mind a nyelvi készséget, mind a pontatlanságok feltárására irányuló figyelmet.

Fejlehtajós szavazás

Egy-egy kísérlet kimenetelét megjósoljuk. A jóslatokat tippeket összegyűjtjük a táblán, és eldöntendő kérdés formájában vetjük fel, hogy melyik következik majd be. A gyerekek fejüket lehajtva a padra kézfeltartással szavaznak, így a tekintélyesebbek véleménye nem befolyásolja a többieket, és mindenki állásfoglalásra kényszerül.

Ha csak egy lehetséges kimenetelről akarunk szavaztatni, akkor az álláspontok lehetnek: IGEN, bekövetkezik, NEM következik be, FOGALMAM SINCS. Ez utóbbit vegyük fel a választási lehetőségek közé, mert fontos, hogy megtanuljuk eldönteni, hogy valami nincs, vagy csak én nem tudom, hogy van-e. Amikor a gyerekek tippelték meg a lehetséges kimeneteleket, akkor erre nincs szükség.

A szavazati eredményeket csak számszerűen rögzítjük a táblán, ezután végezzük el a kísérleteket, majd a tapasztalatot összevetjük a jóslatokkal. Váratlan fordulatokat tapasztalhatunk.

A játék állásfoglalásra, előre elgondolásra kényszerít, fejleszti a feltételek áttekintésére való képességet, az előrelátást.