
SZORZATOK SZÁMÍTÁSA ÉS BECSLÉSE; MARADÉKOS OSZTÁS

20. modul

KÉSZÍTETTE: C. NEMÉNYI ESZTER

MODULLEÍRÁS

A modul célja	Az ezres számkörben való tájékozottság mélyítése. A 0-ra végződő számokkal végzett műveletekhez (összeadás, kivonás, egyjegyű számmal való szorzás) felhasznált analógiák alapjának megértetése. A becslés, közelítés jogosultságának elfogadtatása. Becslőképesség alapozása.
Időkeret	4 óra
Ajánlott korosztály	8–9 évesek; 3. osztály; 17–18. hét
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: keresttantervi NAT szerint: környezeti nevelés, énkép, önismeret, tanulás Kompetenciaerület szerint: szociális és környezeti. Szűkebb környezetben: saját programcsomagunkon belül: 9–12., 15–18. modul. Ajánlott megelőző tevékenységek: az ezres számkör számaival való ismerkedés; a számrendszeres, helyiértékes alak értelmezése, gyakorlása; a műveletek értelmezése és számolási eljárások a százaskörben, összeadás, kivonás pontosan 0-ra végződő háromjegyűek körében, és közelítéssel százaskör és tízesek kerekítés szerint. Kerek tízesek szorzása egyjegyűvel, a megfelelő osztások; szorzások a tényezők szorzatra, illetve összegre bontásával.
A képességfejlesztés fókuszai	Számlálás, számolás Analógiás gondolkodás Mennyiségi következtetés Valószínűségi szemlélet Tudatos és akaratlagos emlékezés Összefüggés-felismerés.

AJÁNLÁS

A közvetlenül megelőző modul szerint haladva foglalkozhattunk a kerek tízesek egyjegyűvel való szorzásával, s a megfelelő egyjegyűvel való egyenlő részekre osztással, a kerek kétjegyűvel való bennfoglaló osztással. Ez arra az analógiás gondolkodásra támaszkodik, amely a kerek tízeseket tízesek darabszámaival megjelenítve látatja, s ez által a kisegyszeregy eseteit közvetlenül tudjuk alkalmazni. (Például a 60 hétszeresét 6 tízes hétszereseként képzeljük el, ami 7-szer 6 tízes, 42 tízes.)

Az elmúlt két órában két műveleti tulajdonság tapasztalati megerősítésére is sort keríthettünk, és fel is használtuk nagyobb számokon értelmezett szorzások elvégzésére. A két tulajdonság (a disztributivitás és az asszociativitás) arra ad lehetőséget, hogy egy nagyobb tényezőt szorzatra, vagy számok összegére bontsunk, és két vagy több szorzás összekapcsolásával, vagy szorzatok összegeként jussunk az eredeti szorzathoz. (Pl. a $15 \cdot 24$ kiszámítható úgy, hogy a 15 négyszeresét hatszorozzuk, vagy nyolcszorosát háromszorozzuk, de kiszámítható úgy is, hogy a tízszeresét, meg a tízszeresét, meg a négyszeresét adjuk össze. Vagy a tényezők megcserélésével számolhatjuk a 24 tízszeresének és ötszörösének összegeként, vagy ötszörösének háromszorosaként...)

A tízszeresítés nagyon látványos eredményhez vezet, könnyű megtanulni, hogy „csak egy 0-t kell a szám végére írni”. Azonban érdemes azt is megértetni a gyerekekkel, hogy ennek a formai érdekességnek mi a tartalmi háttere, mi az oka. Ezt szolgálják azok a tevékenységek, amelyek az érték szerinti többszörözéssel kapcsolatosak. (Pl. a 3 db kétforintos és 4 tízes összegét nemcsak úgy tízszeresíthetjük, hogy 30 db kétforintost és 40 tízest veszünk, hanem úgy is, hogy minden egyes érme helyett tízszer értékesebb érmét veszünk: a 3 kettes helyett 3 húszast, a 4 tízes helyett 4 százast.) Más-más számrendszerben is hasonlóan végezhető az alapszámmal való szorzás; a formai megfelelés segítheti az általánosítható ismeret kialakulását.

A most következő órákon szükséges ez utóbbi gondolat erősítése; ehhez, és a fentebbi műveleti tulajdonságokhoz tudjuk kapcsolni a kerek tízesekkel, a 10 többszörösével, pl. 20-szal, 30-cal való szorzás egyik módját. A felcserélhetőség gyakorlati ismerete már feljogosíthatna bennünket arra, hogy ha egyjegyűvel tudunk szorozni kerek kétjegyű számot, akkor kerek kétjegyűvel is tudunk szorozni egyjegyűt. Azonban a tulajdonság általános érvényességét még sokszor kell megerősítenünk a gyerekek gondolkodásában, nem hivatkozhatunk rá automatikusan minden további esetben. Emellett mivel maga a két-két szorzás értelme nem azonos (ha az eredménye meg is egyezik), szükséges az értelmezés alapján eljutni a kiszámításokhoz, hogy majd saját tapasztalat szerint mondhassák ki maguknak a gyerekek: „ami igaz volt a kis számok körében, igaznak találtuk a nagyobbak közt is”.

A szorzás, osztás műveletek (is) monoton függvények. Ez azt a „kiszámíthatóságot”, „megbízhatóságot” jelenti, hogy a szorzat meghatározott módon függ a tényezők nagyságától, és a hányados is meghatározott módon függ az osztandó, illetve osztó nagyságától. Például ha tízszer nagyobb számot szorzunk ugyanannyival, akkor a szorzat is tízszer nagyobb lesz. Ha tízszer többet osztunk ugyanannyi felé, akkor tízszer több jut egy részbe. Ha tízszer többet akarunk adni mindenkinek ugyanannyiból, akkor tízszer kevesebb embernek jut. Ezt a műveleti tulajdonságot egy az előzőektől különböző gondolati úton hasznosíthatják a gyerekek a nagyobb számokkal végzett szorzásokban, osztásokban.

Részben a műveleti monotonitás gyakorlati ismeretére, értésére, részben a kerek számokkal megismert számolási eljárásokra támaszkodik a műveletek előre becslése. A becslést – az összeadáshoz, kivonáshoz hasonlóan – kerekített számokkal végzett számításokra építjük. Eleinte a becslés technikájának kialakítása idején olyan feladatokkal foglalkozunk, amelyekben a közelítő számítások jól közelítik a pontos eredményt. Később azonban találkozniuk kell a gyerekeknek azzal, hogy az ilyen módon végzett becslések nagyon pontatlanok is lehetnek, hogy felkeltsük az igényt a finomítás iránt.

TÁMOGATÓRENDSZER

C. Neményi Eszter–Wéber Anikó: *Kézikönyv a matematika 3. osztályos anyagának tanításához*. Nemzeti Tankönyvkiadó – Budapesti Tanítóképző Főiskola, Budapest, 103–113. old.

C. Neményi Eszter–Dr. R. Szendrei Julianna: *A számolás tanítása; Tantárgypedagógiai füzetek*; ELTE TÓFK kiadványa, Budapest
Kapcsoló könyv a matematika differenciált tanításához–tanulásához, Budapest, Országos Közoktatási Intézet KOMP-csoport, 2001.

ÉRTÉKELÉS

A modulban **figyeljük**

- a műveletek értelmezésének kialakultságát;
- a szorzás és osztás tulajdonságainak, kapcsolatainak gyakorlati ismeretét, alkalmazását;
- a megismert számolási eljárások megértését, alkalmazásának fejlődését;
- az önellenőrzés igényének alakulását;
- a szövegértést;
- a becslés technikájának ismeretét;
- a becslés jogosultságának elfogadását;
- a véletlenről formálódó gondolkodás helyességét.

Értékeléseink során az előre megjelölt szempontokat célszerű kiemelni. Az ellenőrzés szempontjai közül nem mindegyik lehet az értékelés alapja, hiszen a még nem tudatosított, de már működni indult alkalmazásokért nem tehető felelőssé a gyerek. Továbbra is értékeljük a feladatvállalást, a munkában való részvételt, az egymás segítségét, a már tudatosított ismeretek alkalmazását, az önellenőrzésre való törekvést, a szóbeli megnyilvánulások pontosságát, nyelvi helyességét, az írásbeli munka rendezettségét, szépségét, és értékeljük a tanult ismeretekben, készségekben való fejlődést, s a befektetett munkát.

A teljesítmények szummatív értékelésére még nem kerülhet sor.

MODULVÁZLAT

Időterv: 1. óra kb. I./1. és II./1–5.
 2. óra kb. II./6–12.
 3. óra kb. II./13–18
 4. óra kb. II./19–25.

	Lépések, tevékenységek (a mellékletekben részletesen kifejtve)	Kiemelt készségek, képességek	Célcsoport / A differenciálás lehetőségei	Tanulásszervezés		Eszköz (mellékletben: a feladatok, gyűjtemények, tananyag- tartalmak)
				Munkaformák	Módszerek	
I. Ráhangolódás, a feldolgozás előkészítése						
	1. Számlálás a kettes számrendszerben (Sorba állított székek a helyiértékek; a számok rajzos megjelenítése.)	rendszeralkotás, számlálás	egész osztály	közös	tevékenyked- tetés, bemutatás	székek
II. Az új tartalom feldolgozása						
	1. Különféle számrendszerekben az alapszámmal való szorzás; a helyiérték-táblázatban való balra lépés. a) Hosszúságok többszörözése b) Pénzérmeikkel	rendszerlátás, analógiás gondolkodás, számlálás, számolás	egész osztály	egyéni, csoportos	tevékenyked- tetés, bemutatás	színesrúd- készlet, játékpénz; A 9. melléklet fóliája
	2. Szorzás kerek tízesekkel; a házi feladat ellenőrzése Szorzás: a szorzó tényező szorzatra bontása (Két változásra bontás)		egész osztály	frontálisan irányított egyéni, csoportos	tevékenyked- tetés	abakusz és minden gyereknek piros-kék korongkészlet, abakusz- táblával (Ak/18.) (2. melléklet), 1. feladatlap

	Lépések, tevékenységek (a mellékletekben részletesen kifejtve)	Kiemelt készségek, képességek	Célcsoport / A differenciálás lehetőségei	Tanulásszervezés		Eszköz (mellékletben: a feladatok, gyűjtemények, tananyag- tartalmak)
				Munkaformák	Módszerek	
	3. Szorzás, osztás gyakorlása: a) Kerek tízesek szorzása egyjegyűvel; 0-ra végződő háromjegyű számok egyenlő részekre osztása egyjegyűvel, és bennfoglaló osztás kerek tízesekkel b) Szorzás kerek tízesekkel két lépésben, osztás kerek tízesekkel két lépésben	induktív és deduktív lépések	egész osztály	egyéni	értelmezés, megbeszélés; ellenőrzés	1. feladatlap
	4. Szöveges feladat	szövegértés, matematizálás; modellépítés	egész osztály	frontálisan irányított egyéni	értelmezés, megbeszélés	színesrúd- készlet; A 15. modul 13. lépéséhez készült szívószál-lánc; kisautó
	5. Házi feladat: szorzatok összehasonlítása	ítélőképesség	egész osztály	egyéni	értelmezés	2. feladatlap 1. feladata
	6. A házi feladat megbeszélése	számolás, ismeretek alkalmazása	egész osztály	egyéni, közös	tanulói ma- gyarázat, ellenőrzés	–
	7. Disztributivitás; az egyik tényező összeg-, különbség-alakra bontása. Kis kétjegyű számokkal való szorzás.	számolás, ismeretek alkalmazása, kép-értelmezés, induktív lépések	egész osztály	frontálisan irányított egyéni	tevékenyked- tetés	2. feladatlap, 2. feladata
	8. Szöveges feladat; többféle megoldás keresése	számolás, ismeretek alkalmazása, szövegértelmezés	egész osztály	frontális	beszélgetés, elemzés, vita	–
	9. Szöveges feladat: a közelítő szorzat elfogadtatása	számolás, becslés, szövegértelmezés, mennyiségi következtetés	egész osztály	frontális	beszélgetés, elemzés	–

	Lépések, tevékenységek (a mellékletekben részletesen kifejtve)	Kiemelt készségek, képességek	Célcsoport / A differenciálás lehetőségei	Tanulásszervezés		Eszköz (mellékletben: a feladatok, gyűjtemények, tananyag- tartalmak)
				Munkaformák	Módszerek	
	10. Szorzat közelítő számítása az egyik vagy mindkét tényező kerekítésével	szövegértés, mennyiségi következtetés, számolás	egész osztály	frontális	megbeszélés	centiméter- beosztású mérőszalag, másodperc- mutató óra
	11. Bontott alakú számok sorbarendezése	becslés, számolás, mennyiségi következtetés	egész osztály	csoportos	vita, érvelés, megbeszélés	kártya-készle- tek (3. mellék- let)
	12. Házi feladat: szorzatok összehasonlítása	szövegértelmezés, számolás	egész osztály	egyéni	–	a 2. feladatlap 3. feladata
	13. Szorzatok becslése: keresd a szorzatot!	becslés, számolás	egész osztály	egyéni vagy csoportos, majd közös	megbeszélés, vita, ellenőrzés	szorzatkártya- készlet (4. melléklet)
	14. A házi feladatok ellenőrzése	szövegértés, számolás, megítélés	egész osztály	közös	megbeszélés, vita, ellenőrzés	A 2. feladatlap 3. feladata
	15. Szorzat közelítő számítása az egyik, vagy mindkét tényező kerekítésével	problémamegoldás	egész osztály	egyéni és közös	mérés, bemutató, közlés, megbeszélés	papírcsíkok, ragasztószalag, mérőszalag, zsebszámoló- gép
	16. Szöveges feladat, amely hiányos szorzásra (osztásra) vezet; a hányados becslése	szövegértés, becslés, számolás	egész osztály	egyéni és közös	ismeretek alkalmazása	zsebszámoló- gép
	17. A hányados becslése számfeladatokban	szövegértés, becslés, számolás	egész osztály	egyéni és közös	ismeretek alkalmazása; megbeszélés	zsebszámoló- gép

	Lépések, tevékenységek (a mellékletekben részletesen kifejtve)	Kiemelt készségek, képességek	Célcsoport / A differenciálás lehetőségei	Tanulásszervezés		Eszköz (mellékletben: a feladatok, gyűjtemények, tananyag- tartalmak)
				Munkaformák	Módszerek	
	18. Házi feladat: ellenőrzési módok gyűjtése	menyiségi következtetés, ismeretek alkalmazása	egész osztály	egyéni		–
	19. Szorzatok becslése: hibajavítás (nagyságviszonyok és utolsó számjegyek)	becslés, számolás, ismeretek alkalmazása	egész osztály	egyéni és közös	megbeszélés, vita, érvelés	–
	20. A házi feladat megbeszélése: ellenőrzési módok	ismeretek alkalmazása, számolás	egész osztály	közös	megbeszélés	–
	21. Az osztás kétféle monotonitása: a) azonos osztó; hogyan függ a hányados az osztandótól? (Gépjáték) b) azonos osztandó; hogyan függ a hányados az osztótól? c) hogyan marad változatlan a hányados? (Igaz-e a nagyobb számok körében, amit a kisebbek körében tapasztalunk?)	számolás, becslés, összefüggés-felismerés, indukciós és dedukciós lépések, szövegértés, matematizálás, problémamegoldás		egyéni, csoportos, közös frontálisan irányított egyéni	egyéni tapasztalatgyűjtés, elemzés, megbeszélés, ellenőrzés	3. feladatlap, 1-, 2-, 3-, 4-, 5- és 10 literes edény
	22. Szöveges probléma-felvetés; maradékos osztás; egy hamis analógia „leleplezése” (Igaz-e a nagyobb számok körében, amit a kisebbek körében tapasztalunk?)	szövegértés, analógiás gondolkodás, számolás	egész osztály	közös	megbeszélés, vita	–
C	23. Gyakorlás: bennfoglaló osztás kerek tízesekkel, egyesekkel: maradék nélkül vagy maradékkal	számolás, analógiás gondolkodás	a megértésben előbbre járók	páros	gyakorlás	páros számtáblázat (19. modul 1. melléklete)
B	23. Gyakorlás: bennfoglaló osztás kerek tízesekkel, egyesekkel: maradék nélkül vagy maradékkal	számolás, analógiás gondolkodás	a megértésben elmaradottabbak	egyéni és kis-csoportos	tevékenykedtetés	játékpénz, 4. feladatlap

	Lépések, tevékenységek (a mellékletekben részletesen kifejtve)	Kiemelt készségek, képességek	Célcsoport / A differenciálás lehetőségei	Tanulásszervezés		Eszköz (mellékletben: a feladatok, gyűjtemények, tananyag- tartalmak)
				Munkaformák	Módszerek	
	24. Célszámoló játék a szorzó becslésére	számolás, becslés, közelítés, mennyiségi következtetések	egész osztály	közös	játékos gya- korlás	zsebszámoló- gép, korongok 1 doboz/tanuló
	25. Házi feladat: szorzat alakú számok közelítő helye ötvenesével beosztott számegegyenesen	számolás, becslés, közelítés	egész osztály	egyéni	gyakorlás	–

A FELDOLGOZÁS MENETE

Az alábbi, részletes leírás célja elsősorban egyféle minta bemutatása. Nem lehet és nem szabad kötelező jellegű előírásnak tekinteni. A pedagógus legjobb belátása szerint dönthet a részletek felhasználásáról, módosításáról vagy újabb variációk kidolgozásáról.

Szorzatok számítása és becslése; maradékos osztás	
I. Ráhangolódás, a feldolgozás előkészítése	
Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>1. Számlálás a kettes számrendszerben (A számok rajzos megjelenítése; a sorba állított székek helyei felelnek meg a helyiértékeknek.) Szervezés: csoportos elrendezés. Az osztály elé kikészített egy sorba öt széket, amelyekre kiültet egy-egy tanulót. A többiek a helyükön ülnek. „Amit itt láttok, az egy számláló gép. Amelyik székről feláll valaki, az számít, amelyiken ülnek, az nem. Így lehet vele számlálni: Az ajtó felőli székről feláll az első gyerek, ez 1-et jelent. Ha ő is leül, 0-t mutat a gép. Ha a második székről áll fel az ott ülő gyerek, ő már 2-t ér. – mutatja. – Be tudjuk-e állítani a 3-at?” „Takarékoskodjunk! Nem lehetne az első két gyerek segítségével beállítani a 3-at?” „Mennyit érjen akkor a harmadik szék?” „Állítsuk be az 5-öt!” „A 6-ot hogy mutatja a gép?” „Hogy mutat a gép 7-et?” „És 8-at?”</p> <p>„Számláljon most egyesével a gép előlről!” 0 1 2 ... „Mit gondoltok, hogy ez az 5-billentyűs számláló gép meddig tud elszámolni hasonlóan?”</p>	<p>Csoportokba szerveződnek, a kijelölt gyerekek kiülnek a székekre az osztállyal szembe fordulva.</p> <p>Bemutatják a gyerekek, amit a tanító mond. (Esetleg megérintheti egy „gépkezelő” annak a gyereknek a hátát, akinek fel kell állnia.) Lehet, hogy valaki azt javasolja, hogy a harmadik helyen álljon fel az ott ülő tanuló. Az első és második gyerek felállítása: $1 + 2 = 3$ 4-et.</p> <p>Első és harmadik gyerek felállítása. Második és harmadik gyerek áll. Az első három gyerek áll. Az első három gyerekkel már nem tudják beállítani. Próbálkozás után derüljön ki, hogy fel kell állítani a negyedik helyen ülő gyereket: ő egyedül jelezze a 8-at.</p> <p>Mindenki ül. Az első áll, a többi ül. Csak a második áll, a többi ül. ... Tippelnek. Valószínűleg túl kicsi számokat mondanak, hiszen nem látják még át a helyiértékenkénti kétszereződést. A tippelések állásfoglalás azonban kíváncsibbakká, figyelmesebbé teheti őket a folytatásra.</p>

8 után is folytatják; az első négy hely segítségével eljutnak 15-ig. Az ötödik szék értékét tehát 16-nak választhatják.

„Mennyit is érnek külön-külön az álló gyerekek?” – egyenként felállítja őket az osztály felől nézve jobbról balra haladva, és felidézteti külön-külön az értéküket.

„Meddig tudunk elszámolni a gépünkkel, ha ezt az ötödik billentyűt is használjuk?”

Mivel az első négy hely segítségével 0-tól 15-ig minden egyes számot hozzáilleszhetnek a 16-hoz, ezért egészen 31-ig el tud számolni a „gép” az első öt helye segítségével. (Magyarázat helyett fontos, hogy megfelelő tempóban haladjanak a gyerekek, egyesével tovább 32-ig, és fedezzék fel maguk, hogy a következő hely értéke ismét éppen kétszer akkora lesz, mint a megelőző.)

Felvethetjük, hogy egy 10-billentyűs számlológéppel meddig tudnánk továbbszámolni. Lehetséges, hogy nem fogja mindenki átlátni, de valószínű, hogy többen rácsodálkoznak: a tíz hely értéke együtt 1023.

Bemutatja az 1. melléklet első rajzát (még letakarva a megfelelő álló vonalakkal és karikákkal jelzett számrendszeres szám-alakokat), amelyen minden sorban azokat a helyeket jelöltük meg színessel, ahol éppen áll a gyerek.

– „Nézzétek! Lerajzoltam a gép billentyűit, színeztem azokat a helyeket, ahol felállt a gyerek.” – egyenként mutatja a sorokat.

– Megrajzoltam úgy is (mutatja a melléklet 2. rajzát), hogy a 2-es széket kétszer szélesebbre rajzoltam, mint az egyest, a 4-est négyszer szélesebbre, a 8-ast nyolcszor szélesebbre, a 16-ost 16-szor szélesebbre, de már a 32-est nem tudtam elég szélesre rajzolni.

Megfigyelteti ezt a szép nagyobbodó ritmust, de nem szükséges időt szánni a nagyon mély értelmezésére. (Akit megragad a látvány, az viszont haszonnal készíthet hasonlót a füzetébe.)

„Akinek van kedve, készíthet ilyen mintát a füzetébe, vagy nagyobb lapra színezéssel.”



II. Az új tartalom feldolgozása	
Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>1. Különbféle számrendszerekben az alapszámmal való szorzás; a helyiérték-táblázatban való balra lépés</p> <p>a) Hosszúságok többszörözése</p> <p><i>Szervezés:</i> A színesrúd-készlet előkészítése.</p> <p>1. Kétszerezés a kettes számrendszerben</p> <p>„Vegyétek elő a fehér kockákat, ennek a hosszával fogunk mérni, azaz ez ér 1-et. Készítsétek elő azokat a rudakat, amelyek így 2-t, 4-et, 8-at illetve 16-ot érnek! A többit most nem használjuk.”</p> <p>„Hosszúságokat fogunk most kétszerezni. Egy-egy hosszúság kirakásához próbáljátok mindig a lehető legkevesebb rudat felhasználni! Például hogyan tudtok 5-ös hosszú utat építeni?”</p> <p>„Hagyjátok magatok előtt ezt az utat a két rúd felhasználásával, és tegyétek alá a kétszeresét! Ismét a lehető legkevesebb rudat használjátok.”</p> <p>„Hogyan sikerült kirakni az 5-ös hosszúság kétszeresét?”</p> <p>„Ez alá tegyétek ki a 10 kétszeresét is!”</p> <p>„Maradjanak a kirakások előttek: minden csoportban, egy példányban.”</p> <p>„Tegyétek ki a 3-at, annak a kétszeresét, annak a kétszeresét és alá annak is a kétszeresét! Ellenőrizzétek csoporton belül a kirakásokat, aztán ez a négy hosszúság is egy példányban maradjon az asztalon!”</p> <p>„Most az 1-gyel indulva tegyétek sorra alá a kétszeresét, annak a kétszeresét, annak a kétszeresét... ameddig lehet!”</p> <p>„Rakjátok ki a 7-et!”</p> <p>„Meg tudjátok-e jósolni, hogy hány rúdból fog állni a 7 kétszerese és annak a kétszerese?”</p> <p>Háromszorozás a hármas számrendszerben</p> <p>„A fehér rudak maradjanak előttek, a többit tegyétek el! Vegyétek elő a világoskék és a sötétkék rudakat!”</p> <p>„Ezekkel a rudakkal háromszorozni fogjuk a hosszúságokat. Most is az a szabály, hogy minden hosszúságot a lehető legkevesebb rúddal kell kirakni. Tegyétek ki a 7-et, alá a háromszorosát!”</p>	<p>Előkészítik a fehér, rózsaszín, piros, bordó és barna rudakat.</p> <p>Ki lehet rakni 5 fehérrel, 1 rózsaszínnel és 3 fehérrel, 2 rózsaszínnel és 1 fehérrel, és kirakható 1 pirossal és 1 fehérrel. Ezek közül az utolsó esetben használtuk a legkevesebb rudat: csak 2-t.</p> <p>A 10-et 1 nyolccsal és 1 kettessel, azaz 1 bordóval és 1 rózsaszínnel tudtam kirakni.</p> <p>A 20-hoz 1 tizenhatos és 1 négyes kellett.</p> <p>Mindenki elkészíti a kirakásokat (szükség szerint egymás munkáját segítve); ellenőrzik és megvitatják, hogy helyesen oldották-e meg a feladatot, aztán egy példányban megőrzik a négy hosszúságot egymás alatt. (Rózsaszín és fehér; piros és rózsaszín; bordó és piros; barna és bordó.)</p> <p>Ennek a feladatnak a megoldása a legegyszerűbb: egy-egy rúddal jelenítik meg ezeket a hosszúságokat: 1 fehér az 1, 1 rózsaszín a 2, 1 piros a 4, 1 bordó a 8 és 1 barna a 16.</p> <p>Piros, rózsaszín és fehér összetoldásával kapják.</p> <p>Aki ráértett már a kétszerezés „trükkjére”, az kitalálhatja, hogy a 14 és a 28 is 3–3 szomszédos méretű rúddal jeleníthető meg, hiszen ha mindegyik rudat kétszerezére cserélik, akkor az együttes hosszúság is kétszeresre nő.</p> <p>A rudak előkészítése során megfigyelhetik, hogy most a kisebb rudak háromszorosa a következő hosszúságú rúd.</p> <p>A 7-es hosszúság kirakásakor 2 világoskék és 1 fehér rúd teljesíti a feltételt. Ennek a háromszorosát 2 sötétkék és 1 világoskék rúddal lehet megjeleníteni.</p>

Tegyetek ki többféle számot és háromszorosukat: a 4-et és háromszorosát; az 5-öt és háromszorosát, a 8-at és háromszorosát, az 1-et, a háromszorosát, és annak is a háromszorosát!

Ellenőrzés során nemcsak a rudak leolvasására kerül sor, hanem a tanító megfogalmaztat egyéb megfigyeléseket is, a háromszorozás egyszerűsítő módját, (minden rúd helyett a háromszor hosszabb rúd használatát).

b) Pénzermékkel

Tízszerzés a tízes számrendszerben

Szervezés: a gyerekekkel előkészített a játékpénzeiket, az írásvetítőre kiteszi a demonstrációs pénzermékkel a következő összegeket, és a helyiérték-táblázatot (9. melléklet).

	Ezer	100	10	1
A	-10			
B	-10			
C	-10			
D	-10			

„A táblán látható pénztárcákban levő pénzt nem kell kitennetek, hanem mind-egyiknek a tízszeresét rakjátok ki magatok előtt az asztalon! Osszátok meg a feladatokat magatok között, de figyeljetek egymásra, és segítsetek okosan annak, akinek kell!”

A csoportok egyre önállóbban, saját tempóban végezhetik a kirakásokat és háromszorozásokat, amelyekkel ismét tapasztalatot szereznek az érték szerinti többszörözéshez.

A csoportokban, egymás közt megosztva a négy pénzösszeg tízszerzését, elkészítik a kirakásokat, és egymás munkáját ellenőrizve megvitathatják a megoldások helyességét, magyarázhatják egymásnak a tízszerzés egyes módját.

Közös ellenőrzésként feldiktáltatja a táblai pénzösszegek „leltárát” a helyiérték-táblázatba, mindegyik alá a tízszeres összeg leltárát.

A táblázatból leolvastatja a számok és tízszeresük összefüggését: minden számjegy megmaradt ugyanabban a sorrendben, de mindegyik egy hellyel balra tolódott, mert minden értémet tízszer értékesebb érmére cseréltek.

2. Szorzás kerek tízesekkel; a házi feladat ellenőrzése
Szorzás: a szorzó tényező szorzatra bontása (két változásra bontás)
a) Pénzekkel elképzelve

Szervezés: A házi feladat előkészítése. A 10. melléklet fóliája; az üres táblázatba beleírhatja a házi feladat kiinduló számait és tízszeresüket: 32 – 320; 48 – 480, 51 – 510, 17 – 170, 29 – 290. (Lásd lejjebb.)

„Milyen számításokat végeztetek el?” – Először az eredményeket ellenőrzik, felírva a táblára (akár jó, akár nem jó a számítás eredménye).

„Hogyan számoltatok?”

Ez esetben a jobb oldali táblázat megfelelő sora felé mutasson háromszorozó nyíl, és így írjuk be a sorba a 960-at.

Ez utóbbi esetet úgy jelölhetjük, hogy az első sor mellé írjuk a $\cdot 3$ értékű nyilat, és a jobb oldali táblázat első sorába a 32 háromszorosát, a 96-ot.

	Ezer	100	10	1	
$\cdot 10$ ↻			3	2	$\cdot 3$ →
			3	2	
$\cdot 10$ ↻			4	8	$\cdot 3$ →
			4	8	
$\cdot 10$ ↻			5	1	
			5	1	0
$\cdot 10$ ↻			1	7	
			1	7	0
			2	9	
			2	9	0

Megnevezik, hány forint van az egyes pénztárcákban; ez hány (száz) tízes és hány egyes, aztán a tízszeresük értékét, és azt, hogy ez hány (ezres) száz, tízes, egyes.

A kiszólitott gyerek a füzete alapján kitölti a bal oldali táblázatot.

$32 \cdot 30 = 960$
 $48 \cdot 20 = 960$
 $51 \cdot 20 = 1020$
 $29 \cdot 30 = 870$

Elmondják a számítás módját.

Valószínűleg többen használták fel az induló számok tízszeresének ismeretét, pl. $32 \cdot 30 = 32 \cdot 10 \cdot 3$.

Másképpen is használhatták: pl. $320 + 320 + 320$ alakban is számolhattak. De számolhatott valaki úgy is, hogy a 32 háromszorosát tízszerelte:

$32 \cdot 3 = 96$, és $96 \cdot 10 = 960$

Megfogalmaztatja a kétféle eljárást, ahogyan kerek tízesekkel szoroztak.

b) Abakusszal

Szervezés: A demonstrációs abakusz kikészítése, a korongok és az abakusz-tábla (Ak/18.) (2. melléklet) előkészítése.

– Számlálás egyesével az abakuszon 23-ig, hogy két esetben kelljen a 9 egyes korongot 1 tízesre becserélni

– Számlálás tízesével 10-től 230-ig, hogy két esetben kelljen a 9 tízes korongot 1 századra becserélni.

– Számok megjelenítése az abakuszon: 267, 802, 140, 555

– Kétjegyű szám szorzása kerek tízesrel két lépésben

„A következő feladatot négyen osszátok meg egymás közt! Egy gyerek a 23-at tegye ki az abakuszon. A tőle jobbra ülő ennek a számnak a 10-szeresét, a balra ülő az első szám 3-szorosát, a szemben ülő pedig az első szám 30-szorosát!”

A kapcsolat ellenőrzését kérheti (ha ez öntevékenyen nem valósult meg): „a szomszédok hasonlítsák össze a számaikat!”

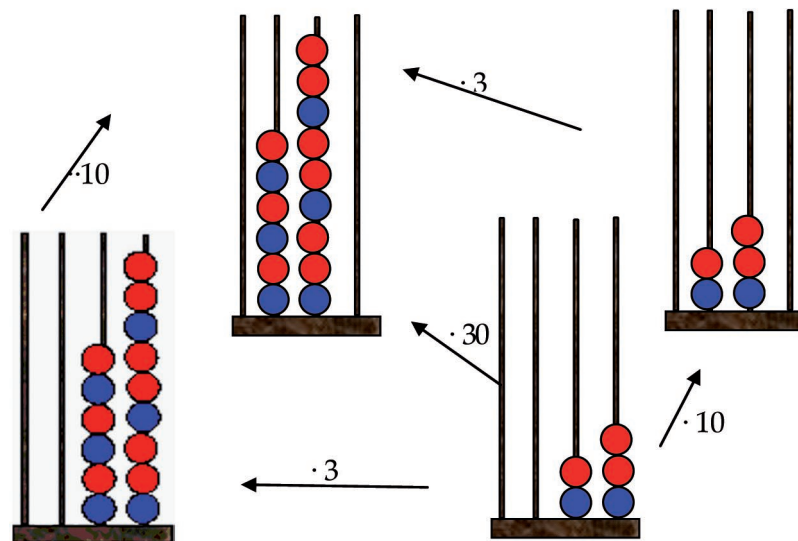
Megfogalmaztatja több gyerekekkel is a tapasztaltakat.

Leolvastatja a megjelenített számok kapcsolatát többféleképpen:

Pl. 40-nel úgy szorozhattak, hogy a négyszerest tízszerették, vagy úgy, hogy a tízszerest négyszerették.

A demonstrációs abakuszon egy gyerek mozgatja a golyókat, a többiek a helyükön végzik a korongok mozgatását.

A 4-4 gyerek együtt gondolkodik: egymást ellenőrizve jelenítik meg a számokat. A szám 30-szorosának előállításában mindkét szomszédja segítheti a megjelenítést: vagy a 3-szorost tízszerezi, vagy a 10-szerest háromszorozza. A megoldás során tudatosíthatják ezt a kapcsolatot.



A 23 tízszerese a 230, a 230 tizede a 23. A 23-nak a 3-szorosa a 69, a 69 harmada a 23. A 230-nak a 3-szorosa a 690, a 690 harmada a 230. A 23-nak a 30-szorosa a 690, a 690 harmincad része a 23.

<p>Az első tanuló jelenítse meg a 840-et! A tőle balra ülő ennek a tizedrészét, a jobbra ülő a negyedét, a szemben ülő a negyvened részét!</p> <p>Az 1. feladatlap 1. feladatát megoldatja önálló munkában. Szükség szerint segít.</p>	<p>.</p> <p>Az első feladathoz hasonlóan, együttműködve megjelenítik a számokat, aztán leolvassák mindkét irányban a számpárok kapcsolatait.</p>
<p>3. Szorzás, osztás gyakorlása: a) Kerek tízesek szorzása egyjegyűvel; 0-ra végződő háromjegyű számok egyenlő részekre osztása egyjegyűvel, és bennfoglaló osztás kerek tízesekkel Az 1. feladatlap 2. feladatát megoldatja önálló munkában. A segítségre szorulóknak elsősorban az eszközhasználatot biztosítjuk, de szükség esetén ebben is támogatjuk őket. b) Szorzás kerek tízesekkel két lépésben, osztás kerek tízesekkel két lépésben Az 1. feladatlap (3. melléklet) 3. feladatát megoldatja önálló munkában. Szükség szerint segít. Mindkét feladat ellenőrzése során megfogalmaztatja a megoldás módját, hogy tudatosodjon a tízesek számával való gondolkodás, és a szorzás két lépésre bontása.</p>	<p>Egyéni feladatmegoldás.</p>
<p>4. Szöveges feladat <i>Szervezés: szívószál-lánc, színesrúd-készlet</i> „Az iskola énekkara Zalaegerszegről a 450 km-re levő Debrecenbe indult a kórusversenyre. Óránként átlagosan 60 km-t tettek meg. Milyen messze voltak Debrecentől az indulás után 1, 2, 3, 4... óra múlva?” Beszélgetést kezdeményez a kórusversenyről. Utána a beszélgetést az utazással kapcsolatos kérdésekre tereli. Ilyen gondolatokat indíthat el: – Mivel utazhattak? – Mennyi az a 450 km? – Mit jelent vajon az, hogy óránként „átlagosan” tettek meg?</p>	<p>– A döntés alapja olyan kérdések meggondolása, hogy pl. sok vagy kevés a 60 km óránként? Aki személyautóval megy, mennyit haladhat óránként? Aki vonattal utazik? Gyalog, kerékpárral, motorkerékpárral...? – Viszonyítsák ismert távolságokhoz: pl. idézzenek fel ismert utakat, amelyek kb. 1 km-esek, olyan kirándulást, amelyen kb. 15-20 km-t tettek meg. Jelenítsék meg a 15 km-t pl. egy citromsárga rúddal, és mérjenek ki akkora távolságot, ami ez esetben a 450 km-nek felel meg! (30 km-nek a narancssárga rúd hossza felel meg ez esetben, 45 km-nek 15 cm hosszúság, tehát a 450 km-nek másfél méter.) A következtetés lépéseit megjelenítő rudak maradjanak a gyerekek előtt!</p>

– A szó értelmezésében valószínűleg segítenünk kell a gyerekeknek. „Néha gyorsabban, máskor lassabban mehet, esetleg közben meg is állhat, de 1 óra múlva kb. 60 km-re lesz az indulástól, 2 óra múlva kb. ...?
– Játsszuk el ezt az utazást a kijelölt utunkon!”

Ne figyelmeztessük a gyerekeket, hanem ők vegyék észre, hogy a 60 km-t is ki kell mérni!

„Írjuk táblázatba az adatokat!”

A gyerekekkel közösen elkészíti a következő táblázatot; vagy ha a gyerekek figyelmeztetik rá, hogy nem az óránként megtett út a kérdés, hanem, hogy Debrecentől milyen távol vannak 1, 2, 3... óra múlva, akkor a harmadik sorral kiegészített táblázatot.

Eltelt idő (óra)	1	2	3	4	5	6	7	8
Megtett út (km)	60	120	180	240	300	360	420	480

Ha nem figyeltek fel rá a gyerekek, hogy az eredeti kérdés nem a megtett útra vonatkozik, hanem a hátralevőre, akkor rákérdez:
„Ezt kérdezte a feladat?”

Kiegészítik a táblázatot a harmadik sorral:

Eltelt idő (óra)	1	2	3	4	5	6	7	8
Megtett út (km)	60	120	180	240	300	360	420	480
Hátralevő út (km)	390	330	270	210	150	90	30	?

A táblázat egyes adathármasait visszaolvastatja, és kéri, hogy a színes rudakon mutassák is, amiről beszélnek.

„Mít mond a táblázat? Mi ez a 210?”

„Honnan lehet tudni, hogy mikor voltak 30 km-re a célponttól?”

120 km-re, 3 óra alatt kb. 180 km-t tesz meg...

Kisautóval vagy akár egy gyufásdobozzal induljon egy vállalkozó gyerek az „úton” – miközben mondjuk, hogy eltelt egy óra; eltelt 2 óra...

A 60 km-nek, a 15 km négyszeresének most 2 narancssárga rúd hossza felel meg, a citromsárga négyszerese. Így, 20 cm-enként jelölve az utat, lejátsszák a haladást: eltelik 1 óra – eddig jutottak; eltelik 2 óra – eddig jutottak...
– mutathatják a szívószál-láncon.

Füzetbe rajzolják a táblázatot, és kitöltik az eljátszott történetnek megfelelően,

...illetve jelzik a tanítónak, hogy a kérdés az volt, hogy Debrecentől milyen messze vannak egy-egy óra elteltével, s ez esetben a harmadik sorral kiegészített táblázat kerül a füzetbe.

Felidézik az eredeti kérdést: „Milyen messze voltak Debrecentől az indulás után 1, 2, 3, 4... óra múlva?” – Kijelölik hozzá a teljes út hosszát.

Esetleg csak a kiegészítés során veszik észre, hogy 8 óra alatt már túljutottak volna Debrecenen, tehát a hetedik után csak fél órát kell még menniük.

210 km-re vannak Debrecentől akkor, amikor 4 óra eltelt az indulástól, tehát kb. 240 km-t tettek meg Zalaegerszegtől. – Aki leolvassa, mutatja a megfelelő adatokat, s egy másik tanuló a rudakon vagy a mérőszalagon a hozzájuk tartozó pontot, illetve távolságokat.

Hasonlóan visszaolvassák az adatokat, és mutatják a rudas (mérőszalagos) modellen a helyzetet.

Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>5. Házi feladat: szorzatok összehasonlítása „A 2. feladatlap 1. feladatát oldjátok meg otthon! Nézzétek meg, mit kér a feladat!”</p> <p>Szeretném majd hallani, hogy hogyan okoskodtatok!</p>	<p>Eloolvassák magukban a feladatot. Az a kérés, hogy lehetőleg ne számoljuk ki, hanem anélkül próbáljunk dönteni, melyik szám a nagyobb.</p>

2. óra

<p>6. A házi feladat megbeszélése A szorzatok nagyság szerinti összehasonlítása: melyik nagyobb. Indokoltatás.</p>	<p>A szorzatok összehasonlításánál alkalmazott összefüggések, eljárások tudatosítása. Pl. annak felismerése, hogy amikor a 4-et 6-tal, aztán még 5-tel szorozzuk, akkor 30-cal szorzunk, ezért az első két szám egyenlő. Vagy, hogy az 50 tizennyolcszorosa kiszámítható a kétszeresének a kilencszerezéseként. A felső sor harmadik számpárja közül a bal oldali a nagyobb, mert ott a 24 ($4 \cdot 6$) és 15 szorzata áll, a jobb oldalon pedig a 24 14-szerese. Stb.</p>
<p>7. Disztributivitás; az egyik tényező összeg-, különbség-alakra bontása. Kis kétjegyű számokkal való szorzás. a) Szorzatok felbontása kép alapján A 2. feladatlap 2. feladatát értelmezteti, aztán egyéni, önálló munkára hagyja.</p> <p>Ellenőrzésként értelmezteti a leírt alakokat és a számítást. Pl. a $15 \cdot 21 = (15 \cdot 10) + (15 \cdot 10) + 15$ felírást:</p> <p>Vagy a $15 \cdot 21 = (10 \cdot 21) + (5 \cdot 21)$ felírást:</p> <p>b) Szorzatok felbontása szorzatok összegére elképzelt kép alapján „Szeretném, ha hasonlóan képzelnétek el a következő szorzásokat is: azaz egy nagy terem köveire gondolnátok. Próbáljátok elgondolni, hogyan lehetne ügyesen felbontani, hogy könnyű legyen a számolás! (Nem kell kiszámítani, csak a felbontást írjátok le! A zárójeleket ne felejtsetek el kiírni!)” Egy példát értelmeztet vállalkozó gyerekekkel:</p>	<p>Egy vállalkozó tanuló bemutatja az első feladaton, hogy az összes kő számát milyen két szorzat összegeként mutatja az ábra. A vastag vonalakkal, illetve színekkel tagolt táblák köveinek számát leolvassák szorzatok összegeként, a lejegyzésben zárójelekkel fejezve ki az összetartozást.</p> <p>Minden sorban 15 kő van. A felső 10 sorban tízszer 15, azaz 150, a következő 10-ben ismét tízszer 15, azaz 150, az utolsóban még 15. Ez együtt 315. 21 sor van. Először csak a 10–10 kőből álló sorokat számítottam, ezekben huszonegyszer 10 kő van, ez 210, aztán az 5–5 kőből álló sorokat, ez huszonegyszer 5, ami éppen a fele a huszonegyszer 10-nek, azaz 105. $210 + 105 = 315$.</p>

„Pl. hogyan lehetne számolni, ha azt kérdezem: mennyi a 32 tizenötszöröse?”

„Hogyan írhatjuk ezt fel?”

„Lehet másképpen is gondolkodni?”

Egyenként diktálja, és közben fel is írja a táblára a következő műveleteket, aztán egyenként ellenőrzik a megoldásokat, hogy szükség esetén a következő feladathoz segítséget jelentsen a megelőző értelmezés:

$$23 \cdot 13 =$$

$$45 \cdot 14 =$$

$$60 \cdot 18 =$$

$$80 \cdot 12 =$$

8. Szöveges feladat; többféle megoldás keresése

„Több mindent tanultunk már a nagyobb számok szorzásáról. Szeretném, ha egyeseken használnátok ezt a szöveges feladatok megoldásában is. Az első szöveges feladat így szól:

Az alsó tagozatos gyerekeknek bábszínházi előadást szerveztek az iskolában. Az elsőből 12, a másodikból 17, a harmadikból 8, a negyedikből pedig csak 3 gyerek jelentkezett. A jegyek ára egységesen 30 Ft volt. Hány forintot kellett fizetnie az iskolának?”

Várja a gyerekek első meglátásait a történetről.

Jegyezzük fel az adatokat, amelyek fontosak a kérdés eldöntéséhez!

A táblára így kerülnek fel az adatok:

1 jegy ára: 30 Ft

Jegyek száma: 12, 17, 8, 3.

„Hogyan gondolkodtok?”

Elképzelek egy termet, amelyben minden sorban 32 kő van, és 15 ilyen sor van. Számolhatok úgy, hogy kiszámítom a 10 sorban levő kövek számát, aztán hozzáadom a többi 5 sorban levő követ.

Felírja: $32 \cdot 15 = (32 \cdot 10) + (32 \cdot 5)$

Úgy is lehetne, hogy először a 30 kőből álló sorokat nézzük, és hozzávesszük a 2 kőből állókat. Azaz a tizenötször 30-at és a tizenötször 2-t adjuk össze.

Felírja az előbbi alá: $32 \cdot 15 = (30 \cdot 15) + (2 \cdot 15)$

Leírják a szorzásokat, és egyenként elkészítik a megfelelő bontást. A felírás ellenőrzéséhez mindegyik esetben felidézik az elképzelt képet.

Meghallgatják a feladatot.

A szoktatásuk szerint tehetnek megjegyzéseket a történettel kapcsolatban; beszélhetnek arról, hogy ők voltak-e már bábszínházban, mit láttak.

Elmondhatják, hogy a 30 Ft egy jegy áráként szerintük nagyon kevés, és hogy valószínűleg csoportos kedvezményt jelent ez az ár. Lehet, hogy észrevételezik azt is, hogy a nagyobbak már kevésbé érdeklődnek a bábszínház iránt.

Feldiktálják a hallott adatokat: 1 jegy ára 30 Ft; 12, 17, 8 és 3 jegy.

Kétféle utat javasolhatnak; fontos mindkettőt végigmondani:

– Kiszámolhatjuk, hogy hány forintot szedtek be az 1. osztályban, mennyit a 2., 3., 4. osztályban, és ezeket összeadjuk.

– Úgy is gondolkodhatunk, hogy megállapítjuk, hány gyerek jelentkezett összesen, és így számoljuk, hogy ennyi jegy hány forintba kerül.

A kétféle módnak megfelelően táblázat készül:

Ennyi jegy:	12	17	8	3	$12+17+8+3$
Ennyibe kerül:	$30 \cdot 12$	$30 \cdot 17$	$30 \cdot 8$	$30 \cdot 3$	$30 \cdot (12+17+8+3)$ $(30 \cdot 12) + (30 \cdot 17) + (30 \cdot 8) + (30 \cdot 3)$

Számítsátok ki mindkétféleképpen! Beszéljétek meg a csoportban!

A csoportos megbeszélés után közösen is ellenőrzik a számításokat:

A másik út számítását is ellenőrzik:

Felelet a kérdésre? – Ezt is írtátok le!

9. Szöveges feladat: a közelítő szorzat elfogadtatása

„A következő szöveges feladatban az iskolai kirándulásról beszélnek nektek. Három buszban utaztak az alsós gyerekek a kirándulásra. Az egyik buszban 38 első és második osztályos tanuló utazott, a második buszban a két harmadik osztályból ültek be összesen 41-en, a harmadikban 36 negyedikes volt. Személyenként 13 Ft-ot kellett befizetni a múzeumlátogatásra. Klári néni bepillantott a dobozba, egy 500 forintost, két 200 forintost, meg 3-4 aprót (1–2 forintos érmét) látott benne. Azt mondta, hogy még nem fizetett mindenki. Igaza lehet-e?

Honnan tudhatta Klári néni, hogy még nem fizetett mindenki?

Miből gondolhatta, hogy kevés a kb. 900 Ft? Kiszámította, hogy mennyinek kellene lennie?

Ti hogyan becsülnétek meg, hogy mennyi pénzt kell befizetni?

Mire gondoltál, amikor azt mondtad, hogy 40-szer 13 Ft több mint 400? Hogyan gondolkodtál tovább?

Vajon a döntéshez elegendő-e ez a becslés, vagy pontosabban kell számolni?

A kétféle számítást egyénileg, önállóan végzik, aztán a csoportokban ellenőrzik, és megbeszélik egymás munkáját.

A 30 tizenkétszerese a 30 tízszerese, meg kétszerese: $300+60=360$.

A 30 tizenhétszerese $300+210=510$; (a hétszer 30 az hétszer 3 tízes, 21 tízes, azaz 210)

A 30 nyolcszorosa az a 3 tízes 8-szorosa, 24 tízes, 240

A 30 háromszorosa 90.

$360 + 210 + 240 + 90 = (360 + 240) + (510 + 90) = 600 + 600 = 1200$

Összesen $12 + 17 + 8 + 3$ jegyet vett az iskola, ez 40 jegy. A 40 jegy ára $30 \cdot 40$, azaz 1200 Ft.

1200 Ft-ot fizetett az iskola.

A történet meghallgatása után az első gondolataikat elmondják, majd a tanító irányítása szerint értelmezik és elemzik az információkat.

Úgy látta, hogy az a kb. 900 Ft kevés.

Lehet, hogy előre kiszámította, de lehet, hogy csak úgy körülbelül megbecsülte.

Kb. 40 gyerek van egy-egy buszhoz. Ha egy buszban mindenki fizetne, akkor 40-szer 13 Ft-ot adtak volna be, és ez több mint 400 Ft (520)

Arra, hogy a 40-szer 10-nél több a 40-szer 13.

A három buszban tehát több mint $400 + 400 + 400 = 1200$ forintnak kell összegyűlnie.

Várhatóan elfogadják, hogy most elég a közelítés, a becslés.

Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>10. Szorzat közelítő számítása az egyik, vagy mindkét tényező kerekítésével „Magatokról, testetek adatairól fogunk becsléseket végezni. – Miklós harmadik osztályos. Azt mesélte, hogy a kirándulás alatt láttak egy öreg tölgyet, amelyet csak négyen értek körül. Milyen vastag lehetett az a tölgy? Hány centiméteres lehetett kb. a körmérete?</p> <p>Mivel nem kell pontos adat, gondolkozzunk tovább 130 cm-rel. Mennyi a 130-nak a 4-szerese?</p> <p>– Hányat ver a szíved 5 perc alatt? (A pulzusszámlálást meg kell mutatni: a jobb kéz 4 ujjhegyét tesszük a bal kéz hüvelykujj fölötti „árokba”).</p> <p>Mitől függ, hogy milyen sokszor húzódik össze és tágul ki a szívünk? – Most tízszer guggoljatok le és álljatok fel, és azután is számoljátok meg, hogy hányat ver egy perc alatt a szívetek! Mennyit ver 5 perc alatt hasonló sportolás közben? – Nyugalmi helyzetben kb. mennyi idő alatt ver a szívetek 1000-et?</p> <p>– Mekkora az araszotok? Mindenki mérje le otthon centiméter-pontossággal, hogy hány centiméteres az arasa! Vágjatok két-két ilyen hosszú papírcsíkot, és írjátok rá a neveteket! Becsüljétek meg, hogy ha az osztályban mindenkinek az egyik papírcsíkját összetoldanánk, akkor kb. milyen hosszú papírcsíkot kapnánk! Ez az első házi feladat!</p>	<p>Körbeállnak négyen, egymás kezét megfogva vagy érintve, és megmutatják a fa közelítő vastagságát. Megbecslik, majd megméri, hogy milyen hosszú egy gyerek két középsőujj-hegye közti távolság, ha kitarja a karját. (Pl. 132 cm-nek adódik.) Olyan vastag volt a fa, hogy kb. négyszer 130 cm hosszú zsinórral lehetne körülkeríteni. $130 \cdot 4 = 130 + 130 + 130 + 130 = 520$. Tehát kb. 520 cm-es a tölgy körmérete. Mindenki megszámlálja, hogy 1 perc alatt mennyi a pulzusszáma.</p> <p>Ki-ki elmondja, hogy 1 perc alatt mennyit ver a szíve, és felírja, hogy 5 perc alatt kb. ötször ennyit. Pl. 1 perc alatt 72-t, 5 perc alatt kb. $70 \cdot 5 = 350$-et. Akié 1 perc alatt 76, az a 76-ot felfelé kerekítheti: 5 perc alatt kb. $80 \cdot 5$-öt, azaz kb. 400-at ver. Egészség, betegség, nyugalmi állapot, mozgás, izgalom...</p> <p>Hasonló számlálást és becslést végeznek a meghatározott mozgást követően. Az előbbi adattal megpróbálják „összehozni” az 1000-et. Lehet úgy, hogy pl. a 400-ból indulnak ki, és ebből következtetnek arra, hogy ha 5 perc alatt kb. 400-at ver, akkor 800-at 10 perc alatt, még 200-hoz pedig további 2-3 perc kell. Lehet úgy is, hogy az eredeti kerekített percenkénti pulzusszámot próbálgatják szorozni: pl. a 70 tízszerese 700, és még kb. a 4-5-szöröse kell, hogy 1000 legyen.</p>
<p>11. A szorzás monotonitása; bontott alakú számok sorbarendezése Szervezés: Kiosztja minden csoportnak az 3. melléklet kártyáit. Az a kérésem, hogy állítsátok balról jobbra növekvő sorba ezeket a számokat! Ha egyenlőket is találtok, azokat egymás alá rendezzétek úgy, hogy azért mindegyik jól látható legyen! Nem kell a számításokat elvégezni, ha anélkül is össze tudjátok hasonlítani őket!</p>	<p>A csoportokban meg is oszthatják a munkát: esetleg mindenki csak három számot hasonlít össze először, aztán „fésülik össze” a sorbarendezett számokat. Hasznos az is, ha közösen dolgoznak elejétől kezdve, és közben indokolják, miért tartják az egyik számot nagyobbnek, kisebbnek, vagy ugyanakkorának, mint a másikat.</p>

Ellenőrzéskor nem egy előre megoldott elrendezéssel vetik össze a gyerekek az elrendezéseiket, hanem elmagyarázzák döntéseiket, és magyarázatuk szerint végezzük a táblai rendezést:

120 – 9	24 · 5	8 · 18	2 · 21 · 4	(20 · 3) + (20 · 7)	21 · 4 · 3
	12 · 10	8 · 3 · 6	8 · 7 · 3		
	15 · 8	16 · 9			
		90 + (6·9)			

A kialakított sorrendben diktálják az egyenlő számokat, megmagyarázva, hogy ezek miért egyenlők, s az egyenlő számok közül választhatnak egyet-egyet, amelyekről legkönnyebb eldönteni, hogy melyik a nagyobb. Például a $8 \cdot 18$ és a $2 \cdot 21 \cdot 4$ összehasonlítása nem lenne nagyon egyszerű, de ha a $2 \cdot 21 \cdot 4$ szorzatban meglátják a $8 \cdot 21$ -et, vagy a $8 \cdot 18$ -ban a $8 \cdot 3 \cdot 6$ -ot, akkor könnyen dönthetnek, hogy a jobb oldali a nagyobb. ($8 \cdot 18 < 8 \cdot 21$, illetve $8 \cdot 3 \cdot 6 < 8 \cdot 7 \cdot 3$).

12. Házi feladat: szorzatok összehasonlítása

A 2. feladatlap 3. feladatát olvassátok el figyelmesen!
 Hogyan rendezték dobozokba a gyerekek a legóikat?

Írjátok le a feladatot számtannyelven, és válaszoljatok a kérdésre!
 Ez a második házi feladatotok. (Felidézteni, mi volt az első.)

Eloolvassák némán.

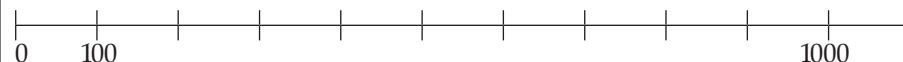
Legó-tornyokkal megmutatja egy vállalkozó gyerek, hogyan kell érteni a szövegben olvasott elrendezést.

3. óra

13. Szorzatok becslése: keresd a szorzatot!

A táblán egy százasával beosztott számegyenes rajza és 6 szám áll egy sorban, ezek alá fogják rendezni a gyerekek a kártyáikat:

„A táblán láttok hat számot. Jelöljétek meg a körülbelüli helyüket a számegyenesen!”



264	560	672	780	864	1000
-----	-----	-----	-----	-----	------

Szervezés: ezután minden gyerek (esetleg csak minden csoport) húz egyet a 4. melléklet összekevert kártyáiból.

A tanító tanítványainak fejlettségének ismeretében döntsön arról, hogy csak az egyszerűbb döntést igénylő kártyák közül enged-e húzni, vagy esetleg csak csoportonként kell egy-egy kártyáról döntenie, hogy egyrészt ne tartson túl sokáig (4-5 percnél tovább) ez a feladat, és valóban meglegyen a döntés alapja a gyerekek gondolkodásában.

A számok helyének jelölése közben elmondják, hogy mely két százas között van a helyük, mely százashoz közelebb, és a szakasz felezéspontja és végpontja közül melyikhez közelebb.

<p>„Mindenki húzott egy számkártyát. Próbáljátok eldönteni, hogy a táblán látható számok közül melyik szám másik neve látható rajta. Némelyiket nem tudjuk pontosan kiszámítani, de ha ügyesen becsültök, megtalálhatjátok a helyét. Aki már tudja, el is helyezheti a táblára (celluxszal vagy más táblai ragasztóval). Aztán lehet tovább figyelni, hogy jó helyre került-e mindegyik szám, és szabad javítani.”</p> <p>Ha már néhány számot elhelyeztek, akkor ez esetenként segítséget jelenthet más döntéshez. Erre kis idő után fel is hívja a tanító a figyelmet.</p> <p>Amikor mindenki kitette a kártyáját, akkor egyenként ellenőrzik az egymás alá kitett számokat, és közösen meghallgatják az okoskodást.</p>	<p>Becslés vagy esetenként pontos számítás szerint elhelyezik a számkártyáikat.</p> <p>Elmondják döntéseik alapját. Ha rájönnek tévedésükre, most is javíthatnak. A döntés lehet egyszerű, ha kerek tízessel szoroztak: két lépésre bontják a szorzást, és így is lehet pontos a számítás. Ha azonban mindkét tényező teljes kétjegyű, vagy háromjegyűt kell egyjegyűvel szorozni, akkor közelítő számítást végezhetnek. Pl. a $18 \cdot 48$-at közelíthetik $20 \cdot 50$-nel, s megállapíthatják, hogy ennél (az 1000-nél) kisebb ez a szám. Közelíthetik $18 \cdot 50$-nel, és így azt is látják, hogy a 900-nál is kisebb, de már nem nagyon sokkal. Lehet a döntés alapja az is, ha a $96 \cdot 9$-hez viszonyítják a $18 \cdot 48$-at, ahol az egyik szám kétszerese, a másik szám fele az itt szereplő számoknak.</p> <p>Azt is felhasználhatják a gyerekek, ha felismerik, hogy ez a szám nem végződhet 0-ra.</p>
<p>14. A házi feladat megbeszélése, ellenőrzése</p> <p>A feladatlapon kapott feladat megoldását elmondatja egy tanulóval: hogyan gondolkodott, milyen módon írta le a legő-elemek számát, és hogyan döntött a kérdéstről.</p> <p>A beszámolóhoz előzetesen megfogalmaz két megfigyelni való szempontot a többi tanulónak: „Helyesen döntött-e a kérdéstről, és mennyire érthetően magyarázta el a megoldását?”</p> <p>Kéri a többi gyerek véleményét, és közösen értékeli az elmondottakat a megoldás helyességéről és az elmondás érthetőségéről.</p>	<p>Egy kiválasztott gyerek beszámol a feladat megoldásáról:</p> <p>Tamás $10 \cdot 8 \cdot 9$ elemet tett a dobozába, Jancsi $12 \cdot 6 \cdot 10$ elemet. A két szám egyenlő, mert a $8 \cdot 9 = 12 \cdot 6$, és mindkét esetben 10-zel kell szorozni a 72-t. Úgy is lehet gondolkodni, hogy a 80-at szorozom 9-cel, ez kilencszer 8 tízes, 72 tízes, ami 720, és a 12-t szorozom 60-nal, ez pedig a hatszor 12 tízszerese, ami szintén 720. Tehát ugyanannyi legő-elemet tettek a dobozaikba.</p>
<p>15. Szorzat közelítő számítása az egyik vagy mindkét tényező kerekítésével</p> <p><i>Szervezés:</i> mindenki kiválasztja az araszmérete szerint levágott egyik papírcsíkját, ezeket összetoldják, és így összeragasztják. Saját cm-pontossággal mért adatukat felírják a táblára, sorban, egymás mellé. (Aki elmulasztotta, az a tanuló pótlólag vágja le a saját arasz-méretét képviselő csíkot, és mérje meg cm-pontossággal.)</p> <p>„Hogyan tudnánk jó becslést adni arra, hogy kb. milyen hosszú lett ez az összeragasztott papírcsík?”</p>	<p>Összetoldják a papírcsíkokat, és feljegyzik az araszméretüket a táblára.</p>

Ezt az utolsónak leírt ötletet használjuk fel arra, hogy megbeszéljük, hogyan lehetne kiválasztani a közepes nagyságút!

„Van még egy papírcsik nálatok. Rendezzük el ezeket nagyság szerint növekvő sorba, úgy könnyen kiválaszthatjuk a középsőt!”

„Próbáljuk megbecsülni úgy, hogy mindkét számot egy kerek tízessel helyettesítjük, olyannal, ami közel van hozzá!”

„Nézzük meg a csíkot: elég jó becslésnek látjátok a 300 cm-t?”
„Mérjük is meg!”

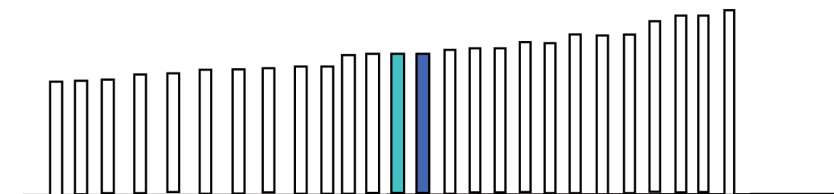
„Zsebszámológéppel számoljuk ki pontosan a szorzatot!”

(A becslés akkor lesz így elég jó, ha a két tényezőt ellenkező irányban változtatja a kerekítés, és a kisebb számot kevésbé változtatja meg, mint a nagyobbat. Ha a gyakorlati példa nem ilyen, akkor a közelítés módja nem nagyon fogja meggyőzni a gyerekeket a kerekítés jogosságáról. Ez esetben azt javasoljuk, hogy csak a nagyobb számot kerekítsük, azt szorozzuk pontosan a kisebb számmal, és állapítsuk meg, hogy milyen irányban tér el becslésünk a pontos szorzattól!)

Többféle ötletre számíthatunk:

- Adjuk össze ezeket a felírt adatokat!
- Közelítő pontossággal adjuk össze őket, pl. úgy, hogy összeválogatjuk azokat, amelyek kb. kerek tízest adnak, és aztán csak a tízesekkel számolunk.
- Ha csak becsülni kell, akkor válasszunk ki találmra egyet az adatok közül, és szorozzuk az osztály tanulóinak számával!
- Egy közepes nagyságút szorozzunk az osztálylétszámmal, illetve a jelenlévők számával

A gyerekek a másik csíkot növekvő sorba rendezik,



...és páratlan adat esetén a középsőt, páros sok adat esetén a két középső közül (amelyek esetleg különbözhetnek is) az egyiket választják az összes hosszúság „képviselőjeként”, és azt megméri.

Ezt az adatot szorozzák az osztálylétszámmal.

Pl. $13 \text{ cm} \cdot 26$

Ez lehet: $10 \text{ cm} \cdot 30 = 300 \text{ cm}$.

Megméri cm-pontossággal, és megbeszéli, hogy mennyivel tér el a számított eredménytől. Megállapítják az eltérés okát: egyrészt nem biztos, hogy az összes araszt helyettesítve a középsővel ugyanolyan hosszú csíkot kapnánk, hiszen az araszok különbözők. Másrészt a becslés csak közelítés.


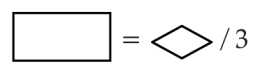
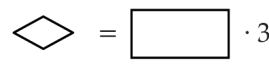
Zsebszámológéppel számolnak, összevetik a mért eredménnyel és becslésükkel.

<p>„Becsüljétek meg a következő szorzatokat!”</p> <p>– Kb. mennyi a $53 \cdot 18$? Minden becslés után következzen a zsebszámológépes ellenőrzés!</p> <p>– Kb. mennyi a $67 \cdot 11$?</p> <p>– Kb. mennyi a $38 \cdot 21$?</p> <p>– Kb. mennyi a $74 \cdot 9$?</p>	<p>$53 \cdot 18 \approx 50 \cdot 20 = 1000$ (954)</p> <p>$67 \cdot 11 \approx 70 \cdot 10 = 700$ (737)</p> <p>$38 \cdot 21 \approx 40 \cdot 20 = 800$ (798)</p> <p>$74 \cdot 9 \approx 70 \cdot 10 = 700$ (666)</p>
<p>16. Szöveges feladat, amely hiányos szorzásra (osztásra) vezet; a hányados becslése.</p> <p>„Karcsi szíve percenként 72-t ver. Azt mondta, hogy hosszabb ideig számolta, és 650 dobbanást számlált. Mennyi idő telhetett el ez alatt?”</p> <p>„Más számfeladattal is le tudjuk írni a kérdést?”</p> <p>Próbáljátok megbecsülni, kb. hány 72-es teszi ki a 650-et!</p> <p>A becslült érték mellett a gondolkodásukról is adjanak számot a gyerekek. Annál jobb, mennél többféle okoskodás elhangozhat.</p> <p>„Dani azt figyelte, hogy az alvó kismacska 1 perc alatt 24-et lélegzett. Mit gondoltok, kb. hány perc alatt lélegzett 1000-et?”</p>	<p>Az elmúlt órai tapasztalatok felelevenítése után várható, hogy könnyen átlátják: azt kell megállapítani, hogy hányszor 72 lehet a 650. Ennek megfogalmazása után nyitott mondattal is leírják a kérdést:</p> <p>$72 \cdot \boxed{} = 650$</p> <p>Az előbbi hiányos szorzást bennfoglaló osztásként is értelmezhetik: $650 : 72 =$</p> <p>A becslést segítheti az előbbi lépés utolsó számfeladata. Erre való támaszkodás nélkül gondolkodhatnak úgy, hogy 70-esével lépegetve megközelítik a 650-et. Arra is gondolhatnak, hogy a 10-szer 72, az 720, ennél 70-nel (majdnem 72-vel) kisebb a 650, tehát a 72-nek kb. 9-szerese a 650.</p> <p>A kérdésre szóban adják meg a feleletet: Kb. 9 percig számolta Karcsi a pulzusát.</p> <p>Ismét értelmezik a kérdést, nyitott mondatot és osztás-feladatot írnak róla, és elvégzik a becslést. (Pl. a 24 négyszerese közel 100, valamivel több, mint 40-szerese az 1000.) Végül válaszolnak a kérdésre.</p>

Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>17. A hányados becslése számfeladatokban Az előbbi feladatokhoz hasonlóan gondolkodhattok tovább. Próbáljátok megbecsülni az osztások eredményét! Táblára írja a számfeladatokat: 450 : 88 ≈ 720 : 83 ≈ 370 : 61 ≈ 264 / 3 ≈ 600 / 8 ≈ 544 / 7 ≈ Ellenőrzés során a becsült hányadosok mellett arról is beszámoltatjuk a gyereket, hogy hogyan gondolkodtak. Ez után számolja ki egy gyerek zsebszámológéppel, hogy mennyire közelíti meg a hányadossal való visszaszorzás az osztandót. (Ne osztást végezzenek a géppel, mert a tizedestört-eredményt nehezen értelmeznék még!)</p>	<p>Füzetükbe írják a számfeladatokat, és megbecslik a hányadost. Azt a számfeladatot is leírják, amellyel közelítenek. Pl. 450 : 88 ≈ 450 : 90 = 5, vagy: 88 ≈ 90, és 90 · 5 = 450</p>
<p>18. Házi feladat: ellenőrzési módok gyűjtése „Megállapítottuk, hogy a 720-ban a 83 kb. 9-szer van meg. Pontosabban azt láttuk, hogy a 9-szer 83 közelebb van a 720-hoz, mint 8-szor 83. Szeretném, ha kitalálnátok többféle ellenőrzési módot arra, hogy igazoljuk állításunkat. Most nem kérek ötleteket, mindenki otthon próbálja bizonyítani, ahogy csak tudja!”</p>	

4. óra

<p>19. Szorzatok becslése: hibajavítás (nagyságviszonyok és utolsó számjegyek) <i>Szervezés:</i> a táblára írva a következő szorzatok: „Néhány szorzást írtam a táblára, nem tudom, mi a véleményetek róluk. Gondolkodjatok, azután beszéljétek meg a csoportokban!”</p> <p>66 · 15 = 995 158 · 4 = 732 94 · 7 = 433 219 · 3 = 657 72 · 12 = 644 47 · 18 = 946</p>	<p>Csoportokba rendeződnek. Megfigyelik a szorzásokat, ...és megbeszélik egymással, mi a véleményük. Amikor a csoportokban kialakult a vélemény, akkor közösen is megvitatják, hogy mely szorzás lehet helyes, melyek azok, amelyek biztosan hibásak. Az indoklásban hivatkozhatnak a megbecsült szorzat nagyságára. (Eszerint lehetne helyes a 66 · 15 = 995 és a 219 · 3 = 657 szorzás; a 158 · 4 inkább 600-közeli szám, a 94 · 7 nem 400 közelében, hanem 600 és 700 között van, a 72 · 12 biztosan nagyobb 700-nál, sőt 800-nál is, a 47 · 18 közel van a 940-hez, de azért annál kisebb.) A közelítés szerint jónak ígérkező eredmények közül a 66 · 15 két 0-ra végződő szám összege (66 10-szer, meg 66 5-ször) ezért nem lehet jó. Csak a 219 · 3 = 657 helyes; zsebszámológéppel ellenőrizhetik.</p>
---	--

Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>20. A házi feladatok megbeszélése Otthon is ellenőrzést folytattatok. Hogyan sikerült igazolni, hogy helyes volt a becslésünk: 720-ban a 83 kb. 9-szer van meg?</p>	<p>Elmondják ellenőrzési módszerüket. Folytathatott valaki sorozatot 83-asával lépegetve: 83, 166, 249, 332, 415, 498, 581, 664, 747, és megállapította, hogy a 664-től 56-tal tér el a 720, a 747-től pedig csak 27-tel. Pontos számítást is végezhetett valaki, ha a 83-at kettébontva szorozta 9-cel: $80 \cdot 9 = 720$ és $3 \cdot 9 = 27$; $720 + 27 = 747$, és hasonlóan felbontva szorozta a 83-at 8-cal. Végezhetett hasonlóan közelítő számítást: $80 \cdot 8 = 640$, és $80 \cdot 9 = 720$. A 83 kilencszereese ennél csak kilencszer 3-mal nagyobb. Lehetett a 720-tól visszafelé is lépegetni 83-asával, és így kiderül, hogy a 8. lépés után még 56 marad, és ez 27-tel kevesebb a 83-nál.</p>
<p>21. Az osztás kétféle monotonitása: a) azonos osztó; hogyan függ a hányados az osztandótól? (Gépjáték) „Most azt fogjuk megfigyelni, hogy lehet-e következtetni egy osztás alapján más osztás eredményére. Oldjátok meg a 3. feladatlap első három feladatát! Ezután a csoporttársak beszéljék meg a 2. és 3. feladatban feltett kérdést!”</p> <p>A csoportos megbeszélést közös ellenőrzés követi. Meghallgatjuk a megállapításokat, de ezeket az egyedi példákkal igazoltatjuk: „Mutasd be, amit mondtál!”</p> <p>„Az is igaz, hogy ha tízszer annyit osztunk 4-felé, akkor tízszer annyi jut egy részbe?”</p> <p>(Az általános igazság megsejtetése elég, egészen általános megfogalmazást nem várhatunk meg.)</p>	<p>Csoportokba szerveződés. Lehetőség szerint mindenki önállóan dolgozik, aztán a csoporton belül ellenőrzi a táblázatok kitöltését, a gép táblázatában követett szabály megfogalmazásait:</p> <div style="text-align: center;">    </div> <p>Végül megbeszélik a 2. és 3. feladatban feltett kérdést: Kétszer, háromszor, négyszer... nagyobb számnak a negyede is, harmada is kétszer, háromszor, négyszer nagyobb. Fele-, harmad-, negyedakkora számnak a negyede is harmada is fél-, harmad-, negyedakkora.</p> <p>Az állítás igazságát a leírt példák alapján mutatják be. Például a 12 negyede 3, a 24 negyede 6: kétszer akkora szám negyede is kétszer akkora (12 kétszerese 24, 3 kétszerese 6). Vagy a 48 négyszer akkora szám, mint a 12. A 48 harmada, a 16 is négyszer akkora, mint 12 harmada, a 4.</p> <p>Ezt is megmutatják egy-két esettel. Pl. a 20 negyede az 5, a 200 negyede az 50. Vagy a 60 negyede a 15, a 600 negyede 150.</p>

b) azonos osztandó; hogyan függ a hányados az osztótól?

Szervezés: előkészíti az edényeket: egy-egy fél, 1-, 2-, 3-, 4- és 5-literes üveget, és egy 10 literes kannát (esetleg még 1-2 más méretű edényt is).

„Laci bácsi méhész.”

– Beszélgetést kezdeményez a méhész munkájáról, a méhekről, a mézről. Kiemelheti, hogy milyen egészséges étel a méz. Felhasználásának néhány módjáról is kerülhet néhány szó.

„Az elmúlt évben szépen termett a méz. Laci bácsi 240 kilót 1 kilós üvegekbe mért szét. Másik 240 kilót 2 kilónként mért üvegekbe. Ismét 240 kilót 5-kilós adagokba mért szét, és 240 kilót 10 kilós bödönökbe.

Melyik méretű mézesedényből hányat tudott megtölteni?”

Két-két edényt felemelve a kiválasztottak közül (pl. az 1 és az 5 literest, aztán az 5 és a 10-literest, az 1 és a 10-literest), megkérdezi:

„Melyikből telhetett meg több a 240 kiló méz kimérésekor?”

„Fogalmazzuk át a kérdést a matematika nyelvére!”

„Írjuk le a kérdéseket mindkétféleképpen!”

A táblára is felírja:

$$1 \text{ kg} \cdot \square = 240 \text{ kg} \qquad 240 \text{ kg} : 1 \text{ kg} =$$

$$2 \text{ kg} \cdot \circ = 240 \text{ kg} \qquad 240 \text{ kg} : 2 \text{ kg} =$$

$$5 \text{ kg} \cdot \triangle = 240 \text{ kg} \qquad 240 \text{ kg} : 5 \text{ kg} =$$

$$10 \text{ kg} \cdot \text{pentagon} = 240 \text{ kg} \qquad 240 \text{ kg} : 10 \text{ kg} =$$

„Mindenki próbálja elképzelni, hogy mit kérdez a bal oldali nyitott mondat, és hogyan kérdezi ezt a jobb oldali! Ennek megfelelően próbáljatok válaszolni a kérdésekre!”

Elmondják ismereteiket, élményeiket a méhészettel, mézzel kapcsolatban.

A feladat értelmezéséhez kiválasztják a bemutatott edények közül azokat, amelyek a mondott méreteket képviselik: 1-, 2-, 5- és 10 literes edényeket. Megbeszéljük, hogy ezeket nem kell mézzel egészen teletölteni ahhoz, hogy 1, 2, 5, illetve 10 kiló méz legyen benne: 1 liter méz nehezebb 1 kilónál.

Először azt gondolják meg korábbi tapasztalataik alapján, hogy több kis edény kell ugyanannyi mézhez, mint amennyi nagy.

„Hányszor 1 kg a 240 kg? Hányszor 2 kg a 240 kg? Hányszor 5 kg a 240 kg? És hányszor 10 kg a 240 kg?”

Másképpen fogalmazva: A 240 kg-ban hányszor van meg az 1 kg, a 2 kg, az 5 kg, a 10 kg?

Leírják a tanítóval együtt,

...és eldöntik, hogy melyiket tudják könnyebben elképzelni: azt, hogy pl. 2 kg-ból hányat kell összeönteni (2 kg-ot mennyivel kell szorozni), hogy 240 kg legyen, vagy azt, hogy hány 2 kg-os adag van a 240 kg-ban.

Mintát kér a kétféle gondolkodásra.

Megvárja a megoldást, ellenőrzik az eredményeket, és meghallgat még 1-2 „okos-kodást”. Az 5 kilós adagok számát szorzással ellenőrizteti.

Ez után kéri, hogy figyeljék meg az osztásokat.

Szükség szerint kérdésekkel irányít:

„Hány 1-kilós adag van a 240 kg-ban?”

„Hány kétszer ekkora adag van a 240 kg-ban?”

„Hány 5-kilós adag van a 240 kg-ban?”

„Hány kétszer ekkora adag van a 240 kg-ban?”

„Hasonlítsátok össze az 1 kilós és a 10 kilós adagok számát!”

„Hasonlítsátok össze az 1 kilós és az 5 kilós adagok számát!”

(Ismét nem kell általános megfogalmazásra törekednünk, hiszen ehhez még nincs elegendő tapasztalat.)

„Tudtok-e gyorsan válaszolni arra a kérdésre, hogy ha 1 kilós adagokból 240 van a 240 kilóban, akkor vajon 3 kilós üvegekből mennyi telne meg?”

„Ha 120 kétkilós üveg telt meg a 240 kg-ból, akkor vajon hány 4 kilós telne meg ugyanennyi mézből?”

„Ha 80 háromkilós teszi ki a 240 kilót, akkor hány 6 kilós adag mérhető ki belőle?”

„Ha 120 kétkilós üveg telt meg a 240 kg-ból, akkor vajon hány 20 kilós telne meg ugyanennyi mézből?”

– Például én úgy gondolkodom, hogy kettesével lépegetve számolom, hány lépéssel jutok a 240-hez: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 – eddig 10-et léptem, és most tíz-lépésenként folytatom: (20), 40, 60, 80, 100) – ez már 50 lépés; 200-ig lesz még 50, aztán még kétszer tíz. Összesen 120.

– Én meg úgy tudom elképzelni, hogy mindegyik 10 kg-ban 5 kétkilós adag van, a 10-szer 10 kg-ban, azaz 100 kg-ban 10-szer 5 kétkilós adag, 200 kg-ban 20-szor 5 kétkilós adag, és a 40 kg-ban még 4-szer 5 kétkilós adag. Ez 120 kétkilós adag.

A 40 ötszöröse 200, a 8 ötszöröse 40, tehát $48 \cdot 5 = 240$.

Lehetőleg szabadon fogalmazzák meg megfigyeléseiket.

240.

120. Fele annyi, mint ahány 1 kilós.

48.

24. Fele annyi, mint ahány 5 kilós.

240 1 kilós és 24 10 kilós adag van a 240 kg-ban. A 10-szer nagyobb edényből tizedannyi telik meg, mint az 1 kilósból.

240 1 kilós és 48 5 kilós adag van a 240 kg-ban. A 240-nek az ötöde a 48.

Esetleg az is észrevehetik, hogy a bal oldalon álló szorzásokban ez az összefüggés úgy mutatkozik meg, hogy ha 2-szer, 5-ször, 10-szer nagyobb számot szorzunk, akkor fele, ötöde, tizede akkora számmal kell szorozni, hogy ugyanannyi legyen a szorzat.

Amennyiben kicsit általánosabban értik (megfogalmazatlanul) az összefüggést, akkor következtethetnek, hogy 80 üveg lesz tele: harmad annyi, mint az 1 kilósakból. Ha nincs a háttérben ez a látás, akkor újból végig kell járni a 3 kg-onkénti adagolást, és utána állapítják meg, hogy ez harmad annyi, mint ahány 1 kilós adag van a 240 kg-ban.

Fele annyi, mint a kétkilósból: 60. A 4 kg 60-szorosa 240 kg.

Fele annyi, mint a háromkilósból: 40. A 6 kg 40-szerese 240 kg.

12. Tizedannyi, mint a 2 kilósból.

c) hogyan marad változatlan a hányados?

(Igaz-e a nagyobb számok körében, amit a kisebbek körében tapasztalunk?)

A 3. feladatlap 4. feladatának megoldatása önállóan.

A megoldások megbeszélését a következő kérdések irányítsák:

- „Miből tudtak többet adni, miből tudtak kevesebbet adni egy-egy gyereknek?”
- Hányszor annyi volt az alma, mint a körte? És minden gyereknek hányszor annyi almát adtak, mint körtét?
- Hányszor annyi dió volt, mint körte? Minden gyerek hányszor annyi diót kaphatott, mint körtét?
- Hasonlítsátok össze az aszalt szilvát és aogyorót is a körtével!

„Igaz-e a nagyobb számokra is, hogy ha kétszer, háromszor, négyszer... tízszer annyit osztunk szét, akkor kétszer, háromszor, négyszer... tízszer annyit adhatunk, hogy ugyanannyi embernek jusson?”

- Jusson most mindenkől 2 embernek!
 - Mennyit adjunk egynek-egynek 10-ből?
 - Mennyit adjunk 20-ból?
 - Mennyit adhatunk 100-ból?
 - 200-ból?
- Jusson mindenkől egyformán 4 embernek!
 - Mennyit adjunk 20-ból?
 - Mennyit adhatunk 40-ból?
 - 200-ból?
 - 400-ból?
 - 800-ból?

Nem tudod, hogy hányszor van meg a 200-ban a 8. Ki tudod-e egészíteni a következőket úgy, hogy biztosan igazat állítson mindegyik = jel? A táblára írja:

$$200 : 8 = 400 : \dots = 800 : \dots = 100 : \dots = 50 : \dots$$

Önállóan olvassák el, önállóan értelmezik (pl. a rajz kiegészítésével: a megfelelő színű korongok berajzolásával), és önállóan egészítik ki a számfeladatokat.

Legtöbbet az aszalt szilvából tudtak adni, mert abból volt a legtöbb, legkevesebbet körtéből, mert abból csak öt volt.

Kétszer annyiból kétszer annyit adhattak, így jutott mind az 5 csomagba egyenlően.

Négyszer annyi dióból négyszer annyit adhattak.

8-szor annyi volt az aszalt szilva, mint a körte, ezért 8-szor annyi jutott mindenkinek ebből, mint körtéből. Aogyoró 5-ször annyi, mint a körte, mindenkinek 5-ször annyi jutott belőle.

5-öt

10-et; kétszer annyit.

50-et; tízszer annyit, mint 10-ből.

100-at; kétszer annyit, mint 100-ból.

5-öt

10-et; kétszer annyit.

50-et; tízszer annyit, mint 10-ből.

100-at; kétszer annyit, mint 100-ból.

200-at.

A kiegészítéshez az előbbi összefüggés értésére van szükség. (A táblán végzik vállalkozó gyerekek.) Kiegészítés után azonban ellenőrizték visszaszorzással, hogy jól gondolták-e.

22. Szöveges problémafelvetés; maradékos osztás; egy hamis analógia „leleplezése”

(Igaz-e a nagyobb számok körében, amit a kisebbek körében tapasztalunk?)

„Laci bácsi mézéből megmaradt még 180 kiló. Ezt 4 kilós adagokba kezdte kimérni. Zsófi azon törte a fejét, hogy vajon hány ilyen üveg lett tele, és mennyi méze maradt.

Zsófi így okoskodott:

18 kg-ban a 4 kg megvan 4-szer, és marad 2 kg, tehát

180 kg-ban a 4 kg megvan 40-szer, és marad 20 kg.

– közben fel is írja a táblára a két osztást:

$$18 \text{ kg} : 4 \text{ kg} = 4 \text{ és marad } 2 \text{ kg}$$

$$180 \text{ kg} : 4 \text{ kg} = 40 \text{ és marad } 20 \text{ kg. –}$$

Mi a véleményetek Zsófi okoskodásáról?”

„És ha 40 kilós hordókba mérnénk ki a mézet?”

23. Gyakorlás: bennfoglaló osztás kerek tízesekkel, egyesekkel: maradék nélkül vagy maradékkal

Szervezés: előkészíteti a páros számtáblázatot (19. modul 1. melléklet), és egy-egy babszemet.

„Páros munka következik. Most csak 4-gyel és 40-nel fogunk osztani. Az egyik gyerek leejti a babszemet a bal oldali táblára, így választ ki egy számot. Elmondja, hogy ebben a számban hányszor van meg a 4. A társa ugyanerre a helyre teszi a babszemét a jobb oldali táblán, és kétféle osztást mond el: azt, hogy ebben a számban hányszor van meg a 40, és mennyi a maradék, meg azt is, hogy ebben a számban hányszor van meg a 4, és mennyi a maradék. Ez után cserével folytatódik az osztás: 4-gyel és 40-nel.”

Próbajáték:

Ha az idő engedi, és a gyerekek nem fáradtak nagyon el, akkor néhány menet után 5-tel és 50-nel osztást végezzenek hasonlóan.

A tanító segít, ahol szükséges, illetve átirányítja a másik csoportba azokat a gyerekeket, akik nehezen boldogulnak.

Azt kell felismerniük a gyerekeknek, hogy az okoskodás egyik része helyes: 10-szer annyiból 10-szer annyi 4-kilós adag telik. Másrészt azonban a „maradék” 20 kg még további 5 adagra elég, tehát valójában 45 db 4 kilós üveg lesz tele, és nem marad a 180 kg-ból semmi.

Akkor 4 hordó lenne tele, és 20 kg maradna még. Ez kevesebb a 40 kg-nál.

Az önállóbb, előbbre járó tanulók párokba rendeződnek, előkészítik a páros számtáblázatot, és egymást segítve, ellenőrizve dolgoznak.

A teendők meghallgatása után egy vállalkozó pár bemutatja az elmondottakat. Pl. a babszem a 37-re esett. Az első gyerek elmondja, hogy $37 : 4 = 9$, és marad 1, mert 9-szer 4 az 36, $36 + 1 = 37$. A szomszédja a 370-re teszi a babszemét, és azt mondja el, hogy 370-ben a 40 megvan 9-szer és marad 10, mert 9-szer 40 az 360, és $360 + 10 = 370$; és 370-ben a 4 megvan 90-szer, meg még 2-szer, és marad 2, mert 90-szer 4 az 360 és a 10-ben még 2-szer van meg a 4, és marad 2.

Tanítói tevékenység	Tanulói tevékenység
<p>23. Gyakorlás: bennfoglaló osztás kerek tízesekkel, egyesekkel: maradék nélkül vagy maradékkal <i>Szervezés:</i> 2-, 5- 10-, 20-, 50- és 100 forintos játékpénz-érméket készített elő, és önállóan megoldatja a 4. feladatlap feladatait.</p> <p>A másik csoport önálló munkája alatt figyeli ennek a csoportnak a feladatmegoldását, s ahol szükséges, ott segít. A megoldások megbeszélésénél meg is fogalmaztatja a gyerekekkel a megfigyeléseiket: tudatosítja, hogy a jobb oldalon ugyanazt tették ki tízesekkel, amit a bal oldalon egyesekkel (külön-külön mindegyik feladatnál konkrét számokkal).</p>	<p>A nehezebben számoló gyerekekkel, azokkal, akik az analógia alapját még kevésbé értették meg, a tanító fog együtt dolgozni. Amíg a másik csoporttal megbeszéli, és próbajátékkal értelmezi a teendőket, addig ebben a csoportban kikészítik a kért értéket, és kirakások segítségével megoldják a 4. feladatlap feladatait.</p> <p>Elmondják, hogy pl. a 17-et 8 kettessel és 1 egyessel tudták kirakni, a 170-et 8 húszszal és 1 tízessel. A 17-ben a 2 (egy) megvan 8-szor, és marad 1, a 170-ben a 20, azaz a 2 tízes megvan 8-szor, és marad 10, azaz 1 tízes.</p>
<p>24. Célbadobó játék a szorzó becslésére <i>Szervezés:</i> a gyerekekkel előveteti a korongokat: ezek lesznek a zsetonok. Felrajzol egy százasával beosztott számegyenes. Kijelöl egy szakaszt a számegyenesen: ez lesz a céltábla. Legyen ez először a 300 és 400 közti szakasz. Leolvastatja, hogy melyik két szám van a szakasz végpontjaiban, és kér néhány számot, amely rajta van a szakaszon. „Célba fogtok lőni. Megmondom, hogy honnan lőhettek, és a lövés most szorzással történik. Aki beletalál a céltáblába, nyer egy zsetont. Ha többször is beletalál más-más szorzóval, mindegyikért kap egy zsetont. A szorzást nem kell elvégezni, csak jó becslésre lesz szükség. A zsebszámológép fogja igazolni, hogy találtatok-e.” <i>Próbajáték:</i> „Induljatok most a 51-ről! Tudtok-e olyan számot mondani – ezzel lövünk célba –, ahányszor 51 már beletalál a céltáblába?” „Azt kérem, hogy írjátok le azokat a számokat, amelyekkel célba lőtök, aztán ellenőrizzük, hogy ki hányféleképpen talált bele a céltáblába! Az első sorozatot a 39-ről lőhetitek.”</p>	<p>A szakasz a 300 és 400 közötti szakasz. Rajta van pl. a 305, a 387, a 399, 301...</p> <p>Például a 6 jó: A hatszor 50 éppen 300, a hatszor 51 csak kicsivel nagyobb: 300 és 400 között van. Jó a 7 is: 7-szer 50 az 350, ennél csak 7-tel nagyobb az 51 hétszerese. (A 8 már nem jó!)</p>

<p>2-3 perc után ellenőrzik, hogy milyen számokat gyűjtöttek. Egy-két gyerek elmagyarázhatja, hogyan gondolkodott, aztán a zsebszámológéppel elvégzik a pontos számításokat.</p> <p>„A második sorozatban a 28-ról lőjete! Rajta!”</p> <p>Nem kell elvárnunk, hogy mindegyik jó számot megtalálják: nagyon jó, ha akár csak egy szorzóról is tudnak helyesen dönteni. A megbeszélésben meghallgatott indoklások azonban segítik a lassabban fejlődő tanulókat is a becslés végzésében.</p> <p>(Ha az idő engedi, indulhatnak még kisebb számról is, pl. a 22-ről; kijelölhetünk más százas hosszúságú szakaszt céltáblaként, és végezhetnek további becsléseket a gyerekek.)</p>	<p>A gyerekek megbecslik, hogy mely számokkal szorozhatják a 39-et, hogy a szorzat 300 és 400 közé essen. Felírják a jónak gondolt szorzókat.</p> <p>Valószínűleg most a 10 lesz a legbiztosabb szám, s talán azt is átlátják, hogy ennél nagyobb szám már nem lesz jó. A legkisebb jó számot pedig a 40 többszörözésével közelíthetik: a 40 hétszerese még kicsi (280), nyolcszorosa viszont 320, az adott szakaszra esik. Így megtalálhatják az összes jó szorzót: 8, 9 és 10.</p> <p>Most a legkisebb jó szám a 11 lesz, hiszen a 10-szer 28 még kicsi, de ha a 280-hoz még hozzáadnak 28-at, ez nagyobb a 300-nál. Innen pl. továbblépegetéssel is kideríthetik, hogy a 12-szerese, 13-szorosa, 14-szerese még kisebb 400-nál, de a 15-szöröse már nem.</p>
<p>25. Házi feladat: Szorzat alakú számok közelítő helye ötvenesével beosztott számegyenesen.</p> <p>Készítsetek számegyenest 0-tól 1000-ig ötvenesével beosztva! Jelöljétek meg rajta a következő számok közelítő helyét:</p> <p>67 · 12, 34 · 29; 26 · 9; 54 · 18; 43 · 7; 17 · 17; 105 · 3</p>	<p>Felírják a feladatot.</p>