A csoport

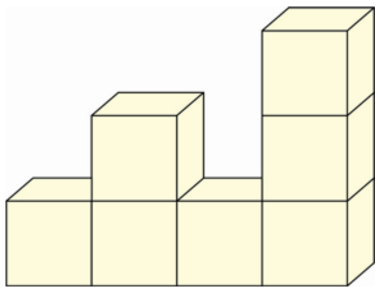
1. Egy 30 cm sugarú körszelet körívének hossza 120 cm. Mekkora a körív középponti szöge?
(3 pont)

2. Egy szabályos négyoldalú gúla alakú piramis magassága 76 méter, az alapél hossza 120 méter. Mekkora szöget zár be az alaplap az oldallappal? Készíts ábrát is!
(3 pont)

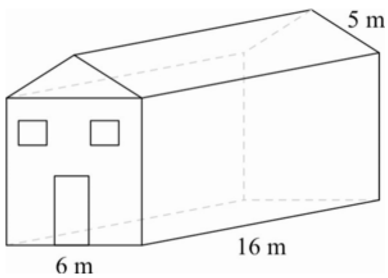
3. Egy alapjára állított kúpba a csúcsánál vizet öntünk. A kúp térfogatának hány %-át foglalja el a benne levő víz, ha a magasság feléig töltjük fel?
(4 pont)

4. Egy gömb alakú lufi felszíne 52 cm^2. Mennyivel lesz több a felszíne, ha a sugarát megduplázva felfújjuk (az alakja most is gömb lesz)? (3 pont)

5. Egy kis kocka éle 6 cm. Mekkora az ábrán látható, kis kockákból összerakott test felszíne? (3 pont)



6. Mekkora az ábrán látható ház tetőterének térfogata? A veszteségek miatt 5%-ot rászámolva hány m^2 cserepet kell vásárolni a tető befedéséhez? (8 pont)



7. Egy 120 cm élű fakockából olyan négyzet alapú egyenes csonkagúlát faragunk ki, amelynek alapéle megegyezik a kocka élével, fedőéle épp a kocka élének a fele, testmagassága pedig megegyezik a kocka élével.

a) A kocka térfogatának hány %-át kell eltávolítani?

b) Ennek a csonkagúlának a palástját lemezekből hegesztjük össze (hiányzik a fedőlap és az alaplap). Mennyi festék kell az alakzat lefestéséhez, ha azt kívül is, és belül is egy rétegben le szeretnénk festeni és 1 l festék 8 m^2-re elegendő? A lemez vastagságát tekintsük nullának! (14 pont)

B csoport

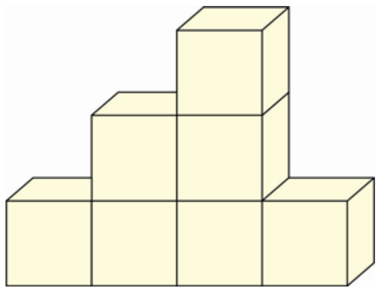
1. Egy 25 cm sugarú körszelet körívének hossza 60 cm. Mekkora a körív középponti szöge? (3 pont)

2. Egy szabályos négyoldalú gúla alakú piramis magassága 49 méter, az alapél hossza 77 méter. Mekkora szöget zár be az alaplap az oldallappal? Készíts ábrát is! (3 pont)

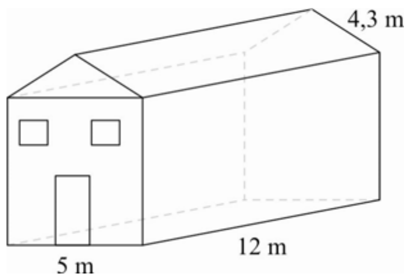
3. Egy alapjára állított kúpba a csúcsánál vizet öntünk. A kúp térfogatának hány %-át foglalja el a benne levő víz, ha a magasság kétharmadáig töltjük fel? (4 pont)

4. Egy gömb alakú lufi felszíne 22 cm^2. Mennyivel lesz több a felszíne, ha a sugarát megduplázva felfújjuk (az alakja most is gömb lesz)? (3 pont)

5. Egy kis kocka éle 3 cm. Mekkora az ábrán látható, kis kockákból összerakott test felszíne? (3 pont)



6. Mekkora az ábrán látható ház tetőterének térfogata? A veszteségek miatt 5%-ot rászámolva hány m^2 cserepet kell vásárolni a tető befedéséhez? (8 pont)



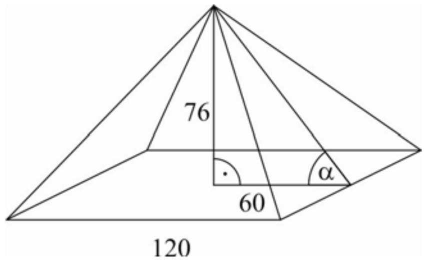
7. Egy 60 cm élű fakockából olyan négyzet alapú egyenes csonkagúlát faragunk ki, amelynek alapéle megegyezik a kocka élével, fedőéle épp a kocka élének a fele, testmagassága pedig megegyezik a kocka élével.

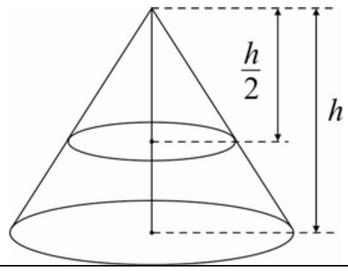
a) A kocka térfogatának hány %-át kell eltávolítani?

b) Ennek a csonkagúlának a palástját lemezekből hegesztjük össze (hiányzik a fedőlap és az alaplap). Mennyi festék kell az alakzat lefestéséhez, ha azt kívül is, és belül is egy rétegben le szeretnénk festeni és 1 l festék 8 m^2-re elegendő? A lemez vastagságát tekintsük nullának! (14 pont)

MEGOLDÁSOK
A csoport

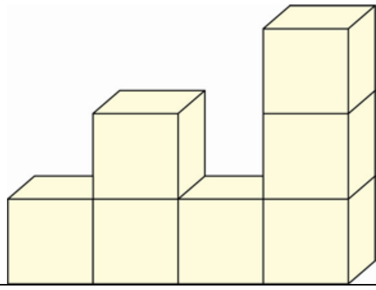
1. Egy 30 cm sugarú körszelet körívének hossza 120 cm. Mekkora a körív középponti szöge?	
A körív hossza egyenesen arányos a középponti szöggel, ezért	1 pont
$\alpha = \frac{i}{K} \cdot 360° = \frac{120}{2 \cdot 30 \cdot \pi} \cdot 360° \approx 229°$ a középponti szög.	2 pont
Összesen:	**3 pont**

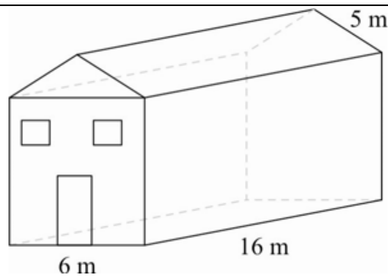
2. Egy szabályos négyoldalú gúla alakú piramis magassága 76 méter, az alapél hossza 120 méter. Mekkora szöget zár be az alaplap az oldallappal? Készíts ábrát is!	
Az ábra a szög helyes megjelölésével: 	1 pont
$\mathrm{tg}\alpha = \frac{76}{60} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 52° \quad (51{,}7°)$	2 pont
Összesen:	**3 pont**

3. Egy alapjára állított kúpba a csúcsánál vizet öntünk. A kúp térfogatának hány %-át foglalja el a benne levő víz, ha a magasság feléig töltjük fel?	
A felső kis kúp hasonló az eredeti nagy kúphoz. 	1 pont
A hasonlóság aránya 2.	1 pont
A hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbe, így a kis kúp térfogata a nagy kúp térfogatának nyolcada.	1 pont
A megtöltött térfogat a kúp térfogatának $\frac{7}{8}$ része, ami $\frac{7}{8} = 0{,}875$ miatt 87,5 %.	1 pont
Összesen:	**4 pont**

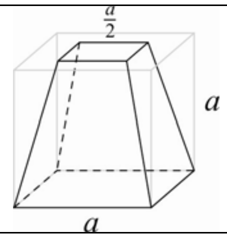
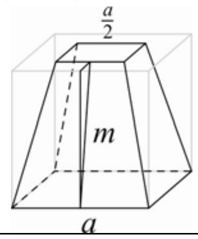
4. Egy gömb alakú lufi felszíne 52 cm^2. Mennyivel lesz több a felszíne, ha a sugarát megdupllázva felfújjuk (az alakja most is gömb lesz)?	
A két gömb hasonló egymáshoz, és hasonló testek felszínének aránya a hasonlóság arányának négyzete, így	1 pont

a lufi felszíne négyszeresére növekszik.	1 pont
A különbség $3 \cdot 52 = 156$ cm^2.	1 pont
Összesen:	**3 pont**

5. Egy kis kocka éle 6 cm. Mekkora az ábrán látható, kis kockákból összerakott test felszíne? 	
Egy oldallap területe $6^2 = 36$ cm^2.	1 pont
A testet határoló négyzetek száma: 30, így a felszín	1 pont
$30 \cdot 36 = 1080$ cm^2.	1 pont
Összesen:	**3 pont**
Megjegyzés: Ha a tanuló rosszul számolja össze a határoló négyzeteket, de a szorzást a rossz számolás eredményével helyesen végzi el, akkor 2 pont jár neki.	

6. Mekkora az ábrán látható ház tetőterének térfogata? A veszteségek miatt 5%-ot rászámolva hány m^2 cserepet kell vásárolni a tető befedéséhez? 	
A tető háromszög alapú hasáb, az alaplap (azaz a tető) magassága $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ m.	2 pont
Az alaplap területe $T = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$ (m^2),	1 pont
a hasáb térfogata $V = T \cdot m = 12 \cdot 16 = 192$ (m^3).	2 pont
A tető két téglalapból áll, a felszíne: $A = 2 \cdot 16 \cdot 5 = 160$ (m^2).	1 pont
A veszteséget rászámolva $160 \cdot 1{,}05 = 168$ m^2 cserép szükséges .	2 pont
Összesen:	**8 pont**

7. Egy 120 cm élű fakockából olyan négyzet alapú egyenes csonkagúlát faragunk ki, amelynek alapéle megegyezik a kocka élével, fedőéle épp a kocka élének a fele, testmagassága pedig megegyezik a kocka élével. a) A kocka térfogatának hány %-át kell eltávolítani? b) Ennek a csonkagúlának a palástját lemezekből hegesztjük össze (hiányzik a fedőlap és az alaplap). Mennyi festék kell az alakzat lefestéséhez, ha azt kívül is, és belül is egy rétegben le szeretnénk festeni és 1 l festék 8 m^2-re elegendő? A lemez vastagságát tekintsük nullának!	
A helyes ábra elkészítése (természetesen az is jó, ha konkrét távolságadatokat ír a tanuló az ábrára akár deciméterben, akár méterben):	1 pont

	
a) A csonkagúla alapterülete $T = a^2$ $(= 14400\ \text{cm}^2)$, a fedőlap területe $t = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ $(= 3600\ \text{cm}^2)$.	2 pont
A csonkagúla térfogata $V = \frac{M}{3}\left(t + T + \sqrt{t \cdot T}\right) = \frac{a}{3}\left(a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{7}{12}a^3$ $(= 1008000\ \text{cm}^3)$.	2 pont
A hulladék $a^3 - V = \frac{5}{12}a^3$ $(= 720000\ \text{cm}^3)$, ami a kocka térfogatának	1 pont
$\frac{5}{12}$ része; $\frac{5}{12} \approx 0{,}42$ miatt kb. 42%.	1 pont
Megjegyzés: Akkor is jár a maximális pontszám, ha a tanuló konkrét számértékekkel kapja meg a helyes eredményt: $\frac{720000}{120^3} = \frac{720000}{1728000} \approx 0{,}42$.	
b) Az oldallapok trapézok, magasságuk Pitagorasz-tétellel meghatározható: 	
$m = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{16}a^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}a \approx 123{,}7$ (cm), a trapéz területe	2 pont
$T_{trapéz} = \frac{a+c}{2} \cdot m = \frac{3}{4}a \cdot \frac{\sqrt{17}}{4}a = \frac{3\sqrt{17}}{16}a^2 \approx 11132{,}4$ (cm^2), a felszín ennek négyszerese:	2 pont
$A = 4 \cdot T_{trapéz} \approx 44529{,}6\ \text{cm}^2 \approx 4{,}45\ \text{m}^2$.	1 pont
A szükséges festék mennyisége: $\frac{2 \cdot 4{,}5}{8} = 1{,}125$ liter. (4,45-tel 1,1125 l)	2 pont
Összesen:	**14 pont**

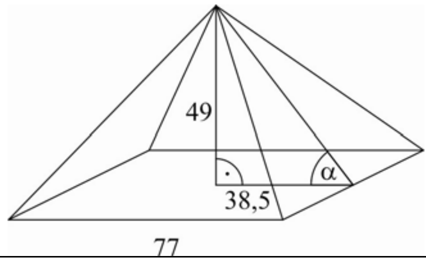
A dolgozatra kapható maximális pontszám:	**38 pont**

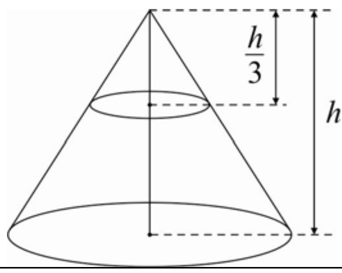
Javasolt ponthatárok:

33 – 38: jeles
26 – 32: jó
20 – 25: közepes
13 – 19: elégséges
0 – 12: elégtelen

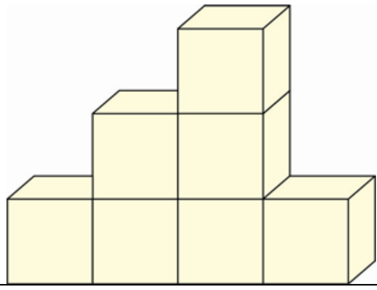
B csoport

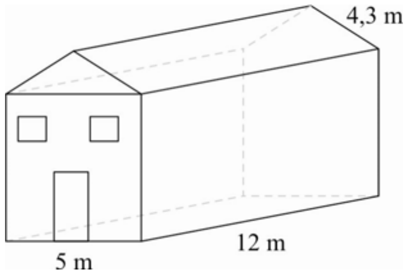
1. Egy 25 cm sugarú körszelet körívének hossza 60 cm. Mekkora a körív középponti szöge?	
A körív hossza egyenesen arányos a középponti szöggel, ezért	1 pont
$\alpha = \frac{i}{K} \cdot 360° = \frac{60}{2 \cdot 25 \cdot \pi} \cdot 360° \approx 137{,}5°$ a középponti szög.	2 pont
Összesen:	**3 pont**

2. Egy szabályos négyoldalú gúla alakú piramis magassága 49 méter, az alapél hossza 77 méter. Mekkora szöget zár be az alaplap az oldallappal? Készíts ábrát is!	
Az ábra a szög helyes megjelölésével: 	1 pont
$\mathrm{tg}\alpha = \frac{49}{38{,}5} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 52°$	2 pont
Összesen:	**3 pont**

3. Egy alapjára állított kúpba a csúcsánál vizet öntünk. A kúp térfogatának hány %-át foglalja el a benne levő víz, ha a magasság kétharmadáig töltjük fel?	
A felső kis kúp hasonló az eredeti nagy kúphoz, 	1 pont
A hasonlóság aránya 3.	1 pont
A hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbe, így a kis kúp térfogata a nagy kúp térfogatának 27-ed része.	1 pont
A megtöltött térfogat a kúp térfogatának $\frac{26}{27}$ része, ami $\frac{26}{27} = 0{,}963$ miatt 96,3%.	1 pont
Összesen:	**4 pont**

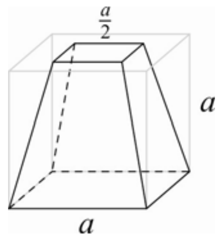
4. Egy gömb alakú lufi felszíne 22 cm^2. Mennyivel lesz több a felszíne, ha a sugarát megduplázva felfújjuk (az alakja most is gömb lesz)?	
A két gömb hasonló egymáshoz, és hasonló testek felszínének aránya a hasonlóság arányának négyzete, így	1 pont
a lufi felszíne négyszeresére növekszik.	1 pont
A különbség $3\cdot 22=66\ \text{cm}^2$.	1 pont
Összesen:	**3 pont**

5. Egy kis kocka éle 3 cm. Mekkora az ábrán látható, kis kockákból összerakott test felszíne? 	
Egy oldallap területe $3^2=9\ \text{cm}^2$.	1 pont
A testet határoló négyzetek száma: 28, így a felszín	1 pont
$9\cdot 28=252\ \text{cm}^2$.	1 pont
Összesen:	**3 pont**
Megjegyzés: Ha a tanuló rosszul számolja össze a határoló négyzeteket, de a szorzást a rossz résszámítás eredményével helyesen végzi el, akkor 2 pont jár neki.	

6. Mekkora az ábrán látható ház tetőterének térfogata? A veszteségek miatt 5%-ot rászámolva hány m^2 cserepet kell vásárolni a tető befedéséhez? 	
A tető háromszög alapú hasáb, az alaplap (azaz a tető) magassága $\sqrt{4{,}3^2-2{,}5^2}\approx 3{,}5\,\text{m}$.	2 pont
Az alaplap területe $T=\dfrac{5\cdot 3{,}5}{2}=8{,}75\ (\text{m}^2)$,	1 pont
a hasáb térfogata $V=T\cdot m=8{,}75\cdot 12=105\ \text{m}^3$.	2 pont
A tető két téglalapból áll, a felszíne: $A=2\cdot 12\cdot 4{,}3=103{,}2\ (\text{m}^2)$.	1 pont
A veszteséget rászámolva $103{,}2\cdot 1{,}05=108{,}36\approx 110\ \text{m}^2$ cserép szükséges .	2 pont
Összesen:	**8 pont**

7. Egy 60 cm élű fakockából olyan négyzet alapú egyenes csonkagúlát faragunk ki, amelynek alapéle megegyezik a kocka élével, fedőéle épp a kocka élének a fele, testmagassága pedig megegyezik a kocka élével.
a) A kocka térfogatának hány %-át kell eltávolítani?
b) Ennek a csonkagúlának a palástját lemezekből hegesztjük össze úgy, hogy hiányzik a fedőlap és az alaplap. Mennyi festék kell az alakzat lefestéséhez, ha azt kívül is, és belül is egy rétegben le szeretnénk festeni és 1 l festék 8 m^2-re elegendő? A lemez vastagságát tekintsük nullának!

A helyes ábra elkészítése (természetesen az is jó, ha konkrét távolságadatokat ír a tanuló az ábrára akár deciméterben, akár méterben): — 1 pont



a) A csonkagúla alapterülete $T = a^2$ $(= 3600\ \text{cm}^2)$, a fedőlap területe
$$t = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad (= 900\ \text{cm}^2).$$
— 2 pont

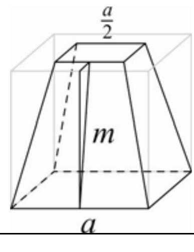
A csonkagúla térfogata
$$V = \frac{M}{3}\left(t + T + \sqrt{t \cdot T}\right) = \frac{a}{3}\left(a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{7}{12}a^3 \quad (= 126000\ \text{cm}^3).$$
— 2 pont

A hulladék $a^3 - V = \frac{5}{12}a^3$ $(= 90000\ \text{cm}^3)$, ami a kocka térfogatának — 1 pont

$\frac{5}{12}$ része; $\frac{5}{12} \approx 0{,}42$ miatt kb. 42%. — 1 pont

Megjegyzés: Akkor is jár a maximális pontszám, ha a tanuló konkrét számértékekkel kapja meg a helyes eredményt: $\frac{90000}{60^3} = \frac{90000}{216000} \approx 0{,}42$.

b) Az oldallapok trapézok, magasságuk Pitagorasz-tétellel meghatározható:



$$m = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{16}a^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}a \approx 61{,}8\ (\text{cm}),$$ a trapéz területe — 2 pont

$$T_{trapéz} = \frac{a+c}{2} \cdot m = \frac{3}{4}a \cdot \frac{\sqrt{17}}{4}a = \frac{3\sqrt{17}}{16}a^2 \approx 2783{,}1\ (\text{cm}^2),$$ a felszín ennek négyszerese: — 2 pont

$A = 4 \cdot T_{trapéz} \approx 11132{,}4\ \text{cm}^2 \approx 1{,}12\ \text{m}^2$.	1 pont
A szükséges festék mennyisége: $\frac{2 \cdot 1{,}12}{8} = 0{,}28$ liter.	2 pont
Összesen:	**14 pont**

A dolgozatra kapható maximális pontszám:	**38 pont**

Javasolt ponthatárok:
33 – 38: jeles
26 – 32: jó
20 – 25: közepes
13 – 19: elégséges
0 – 12: elégtelen