A csoport

1. Egy utcai futóverseny eredményhirdetésén összesen 650 csokoládét osztanak ki az első 20 helyezett között, úgy, hogy a kiosztott csokoládék száma helyezettről-helyezettre mindig ugyanannyival csökken. Tudjuk, hogy a 10. helyezett 34 csokoládét kapott. Mennyit kapott a győztes? (8 pont)

2. Egy csökkenő mértani sorozat második tagja 192, negyedik tagja 48. Számítsd ki az első 5 tag összegét! (10 pont)

3. Egy 5 cm oldalú rombusz egyik szöge 40º.
a) Számítsd ki a rombusz területét!
b) Számítsd ki, hány százaléka a beírt kör területe a rombusz területének! (9 pont)

4. Egy közlekedési vállalat elhatározza, hogy a „bliccelők” (jegy, bérlet nélkül utazók) számát évről-évre 10%-kal csökkenti. Ha meg tudja valósítani a tervét, hány év múlva érik el, hogy a jegy nélkül utazók száma felére csökken? (10 pont)

❖ 1 000 000 Ft-unk van a bankban. A betét éves kamata 8%, melyet év végén tőkésítenek.
a) Ha 8 évig bent hagyjuk az 1 000 000 Ft-ot a 8%-os kamatozás mellett, a 8. év végén mennyi pénz tudunk kivenni?
b) Ha az 1 000 000 Ft-hoz minden hónap elején – 3 éven keresztül – 20 000 Ft-ot teszünk, ugyanilyen kamatozással mennyi pénzünk lesz a 3. év végére? (10 pont)

B csoport

1. Egy kerékpáros ügyességi verseny eredményhirdetésén az első 10 helyezett között összesen 230 csokoládét osztanak ki. Tudjuk, hogy az 5. legjobb versenyző 25 csokoládét kapott úgy, hogy a kiosztott csokoládék száma helyezettről-helyezettre mindig ugyanannyival csökken. Hány csokoládé jutott a 10. versenyzőnek? (8 pont)

2. Egy csökkenő mértani sorozat második tagja 405, negyedik tagja 45. Számítsd ki az első 5 tag összegét! (10 pont)

3. Egy 4 cm oldalú rombusz egyik szöge 50º.
a) Számítsd ki a rombusz területét!
b) Számítsd ki, hány százaléka a beírt kör területe a rombusz területének! (9 pont)

4. Egy mezőgazdasági vállalkozás (környezetvédelmi okokból) vállalja, hogy a növényvédő szerek felhasználását évről-évre 8%-kal csökkenti. Hány év múlva érik el, hogy a szerek felhasználása felére csökken? (10 pont)

❖ 800 000 Ft-unk van a bankban. A betét éves kamata 10%, melyet év végén tőkésítenek.
a) Ha 10 évig bent hagyjuk a 800 000 Ft-ot a 10%-os kamatozás mellett, a 10. év végén mennyi pénz tudunk kivenni?
b) Ha a 800 000 Ft-hoz minden hónap elején – 3 éven keresztül – 10 000 Ft-ot teszünk, ugyanilyen kamatozással mennyi pénzünk lesz a 3. év végére? (10 pont)

MEGOLDÁSOK
A csoport

1. Egy utcai futóverseny eredményhirdetésén összesen 650 csokoládét osztanak ki az első 20 helyezett között, úgy, hogy a kiosztott csokoládék száma helyezettről-helyezettre mindig ugyanannyival csökken. Tudjuk, hogy a 10. helyezett 34 csokoládét kapott. Mennyit kapott a győztes?	
A kiosztott csokoládék száma számtani sorozatot alkot	1 pont
$a_{10} = a_1 + 9d = 34$	1 pont
$S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = 650$	1 pont
$\left.\begin{array}{l} a_1 + 9d = 34 \\ 2a_1 + 19d = 65 \end{array}\right\}$ egyenletrendszert kell megoldani.	1 pont
$a_1 = 61 \qquad d = -3$ (utóbbi nem szükséges)	2 pont
A győztes 61 csokoládét kapott.	1 pont
Ellenőrzés	1 pont
Összesen:	**8 pont**

2. Egy csökkenő mértani sorozat második tagja 192, negyedik tagja 48. Számítsd ki az első 5 tag összegét!	
$a_2 = a_1 \cdot q = 192 \qquad a_4 = a_1 \cdot q^3 = 48$	2 pont
$q^2 = \frac{1}{4}$	1 pont
$q = \frac{1}{2} \quad q_2 = -\frac{1}{2}$	2 pont
Ha $q_2 = -\frac{1}{2}$, a sorozat nem csökkenő.	2 pont
$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{192}{0{,}5} = 384$	1 pont
$S_5 = a_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 384 \cdot \frac{0{,}5^5 - 1}{0{,}5 - 1} = 744$	2 pont
Összesen:	**10 pont**

3. Egy 5 cm oldalú rombusz egyik szöge 40°. a) Számítsd ki a rombusz területét! b) Számítsd ki, hány százaléka a beírt kör területe a rombusz területének!	
$T_{rombusz} = a \cdot b \cdot \sin\gamma = 5 \cdot 5 \cdot \sin 40° \approx 16{,}0697\ \text{cm}^2$.	2 pont
A rombusz érintőnégyszög, tehát $T_{rombusz} = \frac{K}{2} \cdot r$	1 pont
$K = 4a = 20\,\text{cm}, \qquad \frac{K}{2} = 10\ \text{cm}$	1 pont
$16{,}0697 = 10 \cdot r$	1 pont
$r = 1{,}6069\,\text{cm}$	1 pont

$T_{kör} = r^2 \cdot \pi \approx 8{,}112\ \text{cm}^2$	1 pont
$\dfrac{T_{kör}}{T_{rombusz}} \approx 0{,}5048$	1 pont
A kör területe a rombusz területének körülbelül 50,48%-a	1 pont
Összesen:	**9 pont**

4. Egy közlekedési vállalat elhatározza, hogy a „bliccelők” (jegy, bérlet nélkül utazók) számát évről-évre 10%-kal csökkenti. Ha meg tudja valósítani a tervét, hány év múlva érik el, hogy a jegy nélkül utazók száma felére csökken?	
A bliccelők évi száma mértani sorozatot alkot.	1 pont
$q = 0{,}9$	1 pont
Legyen a bliccelők eredeti száma B, ekkor az *n* év elteltével $a_n = B \cdot 0{,}9^n$	1 pont
Keressük azt az *n*-et, melyre $B \cdot 0{,}9^n \le 0{,}5B$, azaz $0{,}9^n \le 0{,}5$	2 pont
Mivel az $x \mapsto \lg x$ függvény szigorúan monoton nő	1 pont
$n \cdot \lg 0{,}9 \le \lg 0{,}5$	1 pont
Az egyenlőtlenség megfordul, hiszen $\lg 0{,}9 < 0$ negatív számmal osztunk	1 pont
$n \ge \dfrac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}9} \approx 8{,}70$	1 pont
Kb. 9 év múlva csökken a bliccelők száma az eredeti 50%-ára	1 pont
Összesen:	**10 pont**

❖ 1 000 000 Ft-unk van a bankban. A betét éves kamata 8%, melyet év végén tőkésítenek. a) Ha 8 évig bent hagyjuk az 1 000 000 Ft-ot a 8%-os kamatozás mellett, a 8. év végén mennyi pénz tudunk kivenni? b) Ha az 1 000 000 Ft-hoz minden hónap elején – 3 éven keresztül – 20 000 Ft-ot teszünk, ugyanilyen kamatozással mennyi pénzünk lesz a 3. év végére?	
a) q =1,08 kvóciensű mértani sorozattal számol	1 pont
$a_8 = 1000000 \cdot 1{,}08^7$	2 pont
A nyolcadik év végén körülbelül 1 713 824 Ft-ja lesz.	1 pont
b) Havi 20 000 Ft évi 240 000 Ft megtakarítást jelent.	1 pont
Az 1 000 000 Ft a 3. év végére $1000000 \cdot 1{,}08^3$ Ft-ra nő.	2 pont
Az évi 240 000 Ft befizetés a 3. év végére $(240000 \cdot 1{,}08^3 + 240000 \cdot 1{,}08^2 + 240000 \cdot 1{,}08)$ Ft lesz.	2 pont
A harmadik év végén tehát 1 713 824+841 467=2 101 179 Ft gyűlik össze.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

A dolgozatra kapható maximális pontszám:	**47 pont**

Javasolt ponthatárok:
40 – 47: jeles
31 – 39: jó
23 – 30: közepes
16 – 22: elégséges
0 – 15: elégtelen

B csoport

1. Egy kerékpáros ügyességi verseny eredményhirdetésén az első 10 helyezett között összesen 230 csokoládét osztanak ki. Tudjuk, hogy az 5. legjobb versenyző 25 csokoládét kapott úgy, hogy a kiosztott csokoládék száma helyezettről-helyezettre mindig ugyanannyival csökken. Hány csokoládé jutott a 10. versenyzőnek?	
A kiosztott csokoládék száma számtani sorozatot alkot	1 pont
$a_5 = a_1 + 4d = 25$	1 pont
$S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 230$	1 pont
$\left.\begin{array}{l} a_1 + 4d = 25 \\ 2a_1 + 9d = 46 \end{array}\right\}$ egyenletrendszert kell megoldani.	1 pont
$a_1 = 41$ $d = -4$ (utóbbi nem szükséges)	2 pont
A győztes 41 csokoládét kapott.	1 pont
Ellenőrzés	1 pont
Összesen:	**8 pont**

2. Egy csökkenő mértani sorozat második tagja 405, negyedik tagja pedig 45. Számítsd ki az első 5 tag összegét!	
$a_2 = a_1 \cdot q = 405$ $a_4 = a_1 \cdot q^3 = 45$	2 pont
$q^2 = \frac{1}{9}$	1 pont
$q = \frac{1}{3}$ $q_2 = -\frac{1}{3}$	2 pont
Ha $q = -\frac{1}{3}$, a sorozat nem lesz csökkenő	2 pont
$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{405}{\frac{1}{3}} = 1215$	1 pont
$S_5 = a_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 1215 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = 1815$	2 pont
Összesen:	**10 pont**

3. Egy 4 cm oldalú rombusz egyik szöge 50º. a) Számítsd ki a rombusz területét! b) Számítsd ki, hány százaléka a beírt kör területe a rombusz területének!	
$T_{rombusz} = a \cdot b \cdot \sin\gamma = 4 \cdot 4 \cdot \sin 50° \approx 12{,}257$ cm².	2 pont
A rombusz érintőnégyszög, tehát $T_{rombusz} = \frac{K}{2} \cdot r$	1 pont
$K = 4a = 16$ cm $\frac{K}{2} = 8$ cm	1 pont
$12{,}257 = 8 \cdot r$	1 pont

$r = 1{,}532$ cm	1 pont
$T_{kör} = r^2 \cdot \pi \approx 7{,}374$ cm²	1 pont
$\frac{T_{kör}}{T_{rombusz}} \approx 0{,}6016$	1 pont
A kör területe a rombusz területének körülbelül 60,16%-a.	1 pont
Összesen:	**9 pont**

4. Egy mezőgazdasági vállalkozás (környezetvédelmi okokból) vállalja, hogy a növényvédő szerek felhasználását évről-évre 8%-kal csökkenti. Hány év múlva érik el, hogy a szerek felhasználása felére csökken?	
A szerek felhasználásának mértéke mértani sorozatot alkot.	1 pont
$q = 0{,}92$	1 pont
Legyen a felhasználás eredeti mennyisége B, ekkor az *n* év elteltével $a_n = B \cdot 0{,}92^n$	1 pont
Keressük azt az *n*-et, melyre $B \cdot 0{,}92^n \le 0{,}5B$, azaz $0{,}92^n \le 0{,}5$	2 pont
Mivel az $x \mapsto \lg x$ függvény szigorúan monoton nő	1 pont
$n \cdot \lg 0{,}92 \le \lg 0{,}5$	1 pont
Az egyenlőtlenség megfordul, hiszen $\lg 0{,}9 < 0$ negatív számmal osztunk	1 pont
$n \ge \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}92} \approx 8{,}31$	1 pont
Kb. 8 és negyed év múlva csökken a bliccelők száma az eredeti 50%-ára	1 pont
Összesen:	**10 pont**

❖ 800 000 Ft-unk van a bankban. A betét éves kamata 10%, melyet év végén tőkésítenek. a) Ha 10 évig bent hagyjuk a 800 000 Ft-ot a 10%-os kamatozás mellett, a 10. év végén mennyi pénz tudunk kivenni? b) Ha a 800 000 Ft-hoz minden hónap elején – 3 éven keresztül – 10 000 Ft-ot teszünk, ugyanilyen kamatozással mennyi pénzünk lesz a 3. év végére?	
a) $q = 1{,}1$ kvóciensű mértani sorozattal számol	1 pont
$a_{10} = 800000 \cdot 1{,}1^{10}$	2 pont
A tizedik év végén körülbelül 2 074 994 Ft-ja lesz.	1 pont
b) Havi 10 000 Ft évi 120 000 Ft megtakarítást jelent.	1 pont
A 800 000 Ft a 3. év végére $1000000 \cdot 1{,}1^3$ Ft-ra nő.	2 pont
Az évi 120 000 Ft befizetés a 3. év végére $(120000 \cdot 1{,}1^3 + 120000 \cdot 1{,}1^2 + 120000 \cdot 1{,}1)$ Ft lesz.	2 pont
A harmadik év végén tehát 2 074 994+436 920=2 511 914 Ft gyűlik össze.	1 pont
Összesen:	**10 pont**

A dolgozatra kapható maximális pontszám:	**47 pont**

Javasolt ponthatárok:
40 – 47: jeles
31 – 39: jó
23 – 30: közepes
16 – 22: elégséges
0 – 15: elégtelen