Matematika „A" 12. évfolyam

3. modul
Síkidomok kerülete, területe

Készítette: Lövey Éva

A modul célja	A területszámításról tanultak alkalmazása. A felszín és térfogatszámítás előkészítése. A valóság tárgyainak geometriai modellezéséhez szükséges képességek továbbfejlesztése.
Időkeret	6 óra
Ajánlott korosztály	12. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: A mindennapi életben földterületek, alaprajzok értékelése. Területek becslése. Szűkebb környezetben: A középiskolában tanult bővebb matematikai ismeretek segítségével számítások végzése. Nagy és kis számokkal való számítások. Valóságból vett mért értékű feladatok matematikai átfogalmazása, azok megoldása, és az eredmények visszakonvergálása az eredeti problémába. A felszín és térfogatszámítás előkészítése. Ajánlott megelőző tevékenységek: Szögfüggvények, sinus és koszinusz tétel.
A képességfejlesztés fókuszai	Számolás, számlálás, számítás: Képlet alapján a képletben szereplő ismeretlen kifejezés kiszámítása Szöveges feladatok, metakogníció: A valóságból merített szöveges feladatok alapján felismerni az alkalmazandó eljárást, képletet. A megkapott eredmény értelmezése. Szövegben előforduló tartalmi összefüggések megkeresése.
Megjegyzés:	A modul ábrái és képei színesek. Ha a tanulóknak csak fekete-fehér fénymásolatban tudják átadni az anyagot, szükséges, hogy a képeket és ábrákat valamilyen módon színesben is bemutassák, különben néhány esetben a kísérő szöveg is értelmét veszti. Javaslom, hogy írásvetítő-fóliára másolják át az ábrákat, vagy csak az ábrákat nyomtassák ki színesben is.

A TANANYAG JAVASOLT ÓRABEOSZTÁSA:

1. óra: Bevezetés, a háromszög területe
2. óra: Háromszögek
3. óra: Négyszögek
4. óra: Szabályos sokszögek
5. óra: Kör és részei
6. óra: Hasonló síkidomok

ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEK:

Kerület, terület

Középszint

Ismerje a kerület és terület szemléletes fogalmát. Háromszögek területének kiszámítása különböző adatokból:

$t = \dfrac{a \cdot m_a}{2}$; $t = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$.

Nevezetes négyszögek területének kiszámítása. Szabályos sokszögek kerületének és területének kiszámítása.

Kör, körcikk, körszelet kerülete, területe.

Kerület és területszámítási feladatok. Tudja és alkalmazza feladatokban a hasonló síkidomok területének arányáról szóló tételeket.

Emelt szint

A háromszög területének kiszámítására használt képletek bizonyítása, további összefüggések:

$t = s \cdot r$ (bizonyítással), $t = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ alkalmazása.

A területképletek bizonyítása.

Gondolkodási módszerek

Legyen képes a tanuló adott szövegben rejlő matematikai problémákat észrevenni, szükség esetén matematikai modellt alkotni, a modell alapján számításokat végezni, és a kapott eredményeket értelmezni.

MODULVÁZLAT

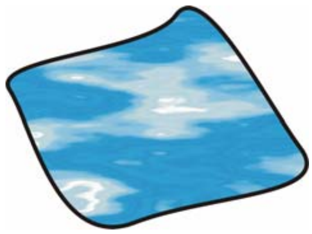
	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Bevezetés, háromszög területe			
1.	Síkidom területének és kerületének becslése	Problémamegoldás, becslés	Írásvetítő, vagy aktív tábla vagy a Tanulók könyve
2.	Háromszög területe I. $t=\frac{a\cdot m_a}{2}$; $t=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$. $T=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$	Kommunikáció, kombinatív gondolkodás, pontos fogalmazás	1., 2.mintapélda; 1., 2. feladat
II. Háromszögek			
1.	Háromszög területe II. $t=s\cdot r$	Becslés, mérés mennyiségi következtetés	3–5. mintapélda
2..	Számítási feladat		3., 4., 5. feladat
3.	Mikor melyik képletet alkalmazzuk?	Kombinatív gondolkodás, problémamegoldás	
III. Négyszögek			
1.	Négyzet, téglalap, trapéz területe $T_{\text{paralelogramma}}=a\cdot m_a=a\cdot b\cdot\sin\gamma=\frac{1}{2}\cdot e\cdot f\cdot\sin\varphi$	Kommunikáció, kombinatív gondolkodás, pontos fogalmazás	6–8. mintapélda
2.	Deltoid területe, érintőnégyszög területe	Rendszerzés, mennyiségi következtetés	10. mintapélda; 6., 8. feladat
3.	Általános sokszög területe	Kombinatív gondolkodás, problémamegoldás.	9. mintapélda

IV. Szabályos sokszögek			
1.	Párok által készített feladat megoldása, megbeszélése	Kommunikáció, kombinatív gondolkodás, problémamegoldás	
2.	Szabályos sokszög kerületének és területének kiszámítása oldal, beírt kör, ill. köréírt kör sugarából	Szövegértés, kommunikáció, logikus gondolkodás	11., 12. mintapélda; 9–12. feladat

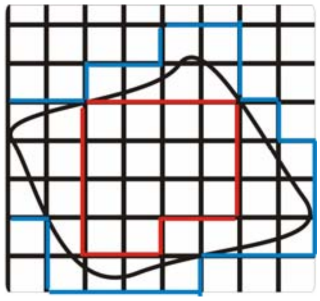
V. Kör és részei			
1.	Kör kerülete, területe, körgyűrű területe	Becslés, logikus gondolkodás	13., 14. mintapélda
2.	Körcikk, körszelet területe		15. mintapélda; 13., 15. feladat

VI. Hasonló síkidomok			
1.	Hasonló síkidomok kerülete és területe	Szövegértés, kommunikáció, becslés, logikus gondolkodás	16., 17. mintapélda
2.	Feladatmegoldás		19., 20. feladat

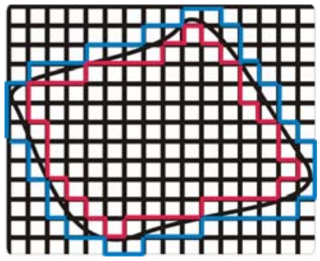
I. Bevezetés



Becsüljük meg, mekkora lehet ennek a tónak a területe és a kerülete?



Fedjük le a tó térképét 100 m oldalú (10000 m^2 területű) négyzetekkel! Azoknak a négyzeteknek a területösszege, amelyek beleférnek a tóba, kisebb, míg azoknak a területösszege, melyek magukba foglalják a tavat, pedig nagyobb, mint a tó területe.
Tehát a tó területe $180000\ \mathrm{m}^2 < T_{tó} < 400000\ \mathrm{m}^2$.

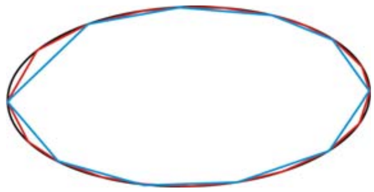


Ha még pontosabban meg akarjuk tudni a területet, akkor kisebb négyzetekkel is lefedhetjük a tó térképét. Például csökkentsük a négyzet oldalát felére, ekkor 2500 m^2 területű négyzetek keletkeznek. Így pontosabb becslést kapunk:
$92 \cdot 2500\ \mathrm{m}^2 < T_{tó} < 119 \cdot 2500\ \mathrm{m}^2$, azaz

$230000\ \mathrm{m}^2 < T_{tó} < 297500\ \mathrm{m}^2$, azaz $23\ \mathrm{km}^2 < T_{tó} < 29{,}75\,\mathrm{km}^2$.

A második ábrán, ahol kisebb négyzetek területösszegeként becsültük a területet, a körülírt sokszög területe kisebb lesz, mint az előző esetben. Általában, ha a négyzetrács oldalát csökkentjük, az alakzat köré írt sokszög területe csökken – vagy legalábbis nem nő – az előzőhöz képest, hiszen az újabban felrajzolt becslés mindig „belefér” az előzőbe. A körülírt sokszögek területe tehát csökken, de értéke nem csökken a mérendő alakzat területe alá, csak egyre inkább megközelíti azt.
Hasonlóan, a beírt sokszögek területe egyre nő, ahogy a négyzetrács oldala csökken, hiszen az új beírt sokszög mindig tartalmazza az előzőt. Területük tehát növekvő sorozatot alkot, de értéke sosem haladja meg a mérendő alakzat területét (hiszen belefér), csak egyre inkább megközelíti azt.
A négyzetek oldalát tovább csökkentve, egyre pontosabban megkaphatjuk a tó területét.
Ha a tó kerületét (a határoló görbevonal hosszát) akarjuk megbecsülni, közelítsük azt olyan sokszögek kerületével, melyeknek csúcspontjai a határoló íven vannak.

Ha a csúcspontok számát növeljük (például megkétszerezzük a csúcspontok számát úgy, hogy két-két csúcspont közé újabbat illesztünk), a sokszög kerülete egyre jobban hozzásimul az alakzat kerületéhez, így hossza egyre jobban közelíti a görbe hosszát.



Egy sokszöget fel lehet osztani háromszögekre, és a háromszögek területének összege megadja a sokszög területét.

Ezért is igen fontos, hogy felelevenítsük a sokszögek kerületének és területének, ezen belül is a háromszögek területének kiszámítási módjait.

II. Háromszögek

Foglaljuk össze, **milyen képleteink vannak a háromszög területének kiszámítására**!

$$\boxed{T_\Delta = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}}$$

Akkor használhatjuk, ha a háromszög valamely oldala és a hozzá tartozó magasság adott.

$$\boxed{T_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}}$$

Akkor használhatjuk, ha a háromszög két oldala és az oldalak közbezárt szöge adott. Ez a háromszögben bármely két oldalpárra és azok közbezárt szögére vonatkozhat:

$$T_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}$$

$$\boxed{T = \frac{r}{2} \cdot K = \frac{r \cdot K}{2} = r \cdot s}$$

Akkor használhatjuk, ha a háromszög kerülete és a beírt kör sugara adott.

$$\boxed{T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}$$

Akkor használhatjuk, ha a háromszög mindhárom oldalát ismerjük (Heron-képlet). Ebben a képletben s a háromszög kerületének felét jelenti: $s = \frac{K}{2} = \frac{a+b+c}{2}$.

Mintapélda₁

A kertészeti vállalat következő feladata, hogy egy háromszög alakú területet füvesítsenek. Itt a terület határoló oldalainak hosszát tudták lemérni.

$AB = 100$ m, $BC = 130$ m, $AC = 70$ m.

Mekkora a párosítandó terület?

1. megoldás:

A háromszög területének kiszámításához ki kell számítani a háromszög valamely szögét. Ehhez a koszinusztételt használjuk:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma, \qquad a = 130, \qquad b = 70, \qquad c = 100.$$

$$100^2 = 130^2 + 70^2 - 2 \cdot 130 \cdot 70 \cdot \cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{130^2 + 70^2 - 100^2}{2 \cdot 130 \cdot 70} \approx 0{,}6484 \;\Rightarrow\; \gamma \approx 49{,}58^\circ.$$

Ezt a szöget felhasználva, a háromszög területe:

$$T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{130 \cdot 70 \cdot \sin 49{,}58^\circ}{2} \approx 3464{,}1.$$

A parkosítandó terület tehát 3464,1 m².

2. megoldás:

Kiszámíthatjuk a fenti háromszög területét a Héron-képlet segítségével is.

Először számítsuk ki a kerület felét: $s = \frac{K}{2} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{130+70+100}{2} = 150$.

A Héron-képlet szerint tehát a terület:

$$T = \sqrt{150 \cdot (150-130) \cdot (150-70) \cdot (150-100)} = \sqrt{150 \cdot 20 \cdot 80 \cdot 50} =$$

$$= \sqrt{12\,000\,000} = 2000 \cdot \sqrt{3}.$$

Ez az érték pontos érték, de egy kertész számára nem hasznosítható. Közelítő értéke természetesen ugyanaz, mint az előbb, tehát körülbelül 3464,1 m².

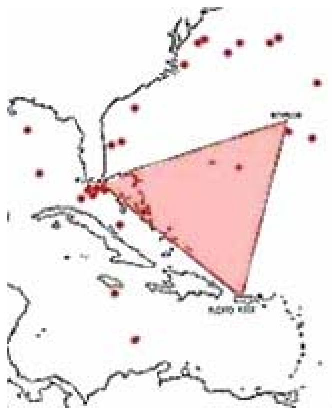
Mintapélda$_2$

A Bermuda-háromszög egy titokzatos terület, mivel több hajó és repülőgép tűnt el ott sokáig megmagyarázhatatlan módon. A háromszög három csúcsát a Bermuda-szigetek, Puerto Rico és Fort Lauderdale alkotják. Tudjuk a következő távolságokat:

Bermuda-szigetek–Puerto Rico: 1500 km,

Bermuda-szigetek–Fort Lauderdale: 1510 km,

Puerto Rico–Fort Lauderdale: 1410 km.



Számítsuk ki annak a háromszögnek a területét, melynek oldalai ezek a távolságok, majd hasonlítsuk össze a térképészek által megadott területtel, mely 704 000 km^2.

Megoldás:

Használjuk a Héron-képletet: $s = \dfrac{1500+1510+1410}{2} = 2210$.

$T = \sqrt{2210 \cdot 710 \cdot 700 \cdot 800} \approx 937\,388\,\text{km}^2$.

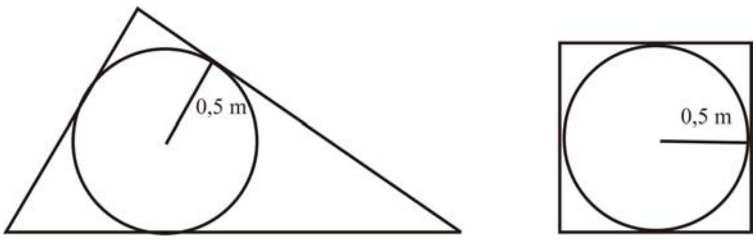
Ez erősen eltér a „hivatalosan” megadott 704 000 km^2 értéktől! Mi lehet a magyarázat az eltérésre?

A fenti képlettel egy síkidom területét számoltuk ki. Oldalai szakaszok. A valóságban a Bermuda-háromszög a földgömb felszínén van, oldalai a főkörök egy-egy íve, vagyis valójában egy **gömbháromszögről** van szó. Egy gömb felszínének egy bizonyos részét kellene kiszámítani. A kiszámításhoz a térképészetben gyakran használatos gömbháromszögtani ismeretekre lenne szükség. (A gömbi háromszögekről ugyan már esett szó a korábbi osztályokban, de velük kapcsolatos számolási feladatokkal sem akkor, sem most nem foglalkozunk.) Síkmértani módszerekkel tehát csak akkor szabad földdarabok területét kiszámítani, ha a távolságok nem túl nagyok, ugyanis ilyenkor a gömbfelszín kicsiny darabja jól közelíthető síkidommal.

Mintapélda$_3$

Egy 1 méter átmérőjű körhenger alakú mély gödör van a kertben, amit el kell keríteni. Ezt három darab, összesen 6,2 m hosszú kerítéssel oldjuk meg. Számítsuk ki, mennyivel nagyobb területet kerítettünk így el, mintha négyzet alakban vettük volna körbe a gödröt!

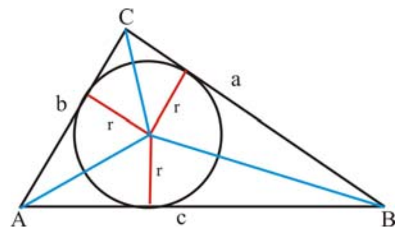
Megoldás:



Először számoljuk ki a négyzet területét! Az 1 m átmérőjű kör köré 1 m oldalú négyzet rajzolható. Ennek területe 1 m^2.

A háromszög területének kiszámításához látszólag kevés az adatunk. Ha azonban egy kicsit ügyeskedünk, elegendő lesz a terület kiszámításához.

Kössük össze a kör középpontját a háromszög három csúcsával. Ezek a szakaszok a háromszögünket három olyan háromszögre bontják, melyeknek az egyik magassága közös: a háromszögbe írt kör sugara. Jelöljük ezt r-rel.



A háromszög területe kiszámítható a beírt kör sugara, valamint a kerület segítségével (s ismét a kerület felét jelenti): $T = \frac{r}{2} \cdot K = \frac{r \cdot K}{2} = r \cdot s$

A körbekerített terület tehát $T_\Delta = 0{,}5 \cdot \frac{6{,}2}{2} = 1{,}55$ m², ez 0,55 m²-rel nagyobb, mintha négyzet alakban kerítettük volna körbe.

Mintapélda$_4$

Egy kerítéssel körbevett 940 m²-es háromszög alakú területről tudjuk, hogy két oldalán a kerítés hossza 40 és 50 méter. Meg tudjuk-e állapítani ezekből az adatokból, hogy milyen hosszú a kerítés harmadik része?

Megoldás:

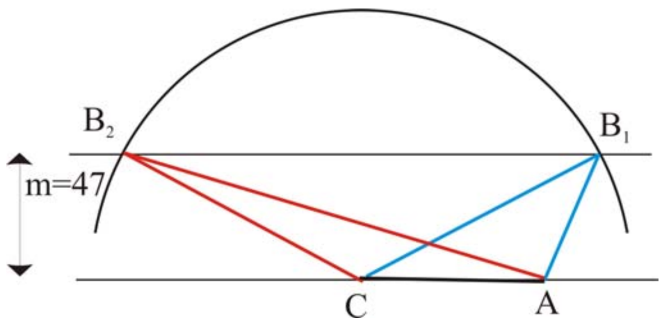
Látszólag egyszerű a dolgunk, van egy képletünk, amelyeknek segítségével két oldal és a terület ismeretében meghatározható a közbezárt szög szinusza: $T_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$.

Legyen most a és b oldal a két ismert kerítéshossz, és számítsuk ki azt a szöget, amelyet ez a két oldal bezár:

$$940 = \frac{40 \cdot 50 \cdot \sin\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = 0{,}94.$$

Ez a szinuszérték azonban 0º és 180º között két szöget is meghatároz: $\gamma_1 = 70{,}05°$, illetve $\gamma_2 = 109{,}95°$. Tehát a telek alakja nem egyértelmű.

A területből és a 40 méteres b oldalból kiszámíthatjuk a háromszög b oldalhoz tartozó magasságát: $T = \frac{b \cdot m_b}{2} \quad \Rightarrow \quad m_b = \frac{2T}{b} = \frac{2 \cdot 940}{40} = 47$.



Elemi geometriai ismereteinkből tudjuk, hogy a háromszög B csúcsa rajta van azon az egyenesen, amely párhuzamos az AC oldallal, és attól 47 m távolságra van. Másrészt a B csúcs illeszkedik a C középpontú 50 méter sugarú körre. A körív és a párhuzamos egyenes két pontban metszi egymást, tehát két olyan háromszög is van, melynek két oldala 40 és 50 méter, területe pedig 940 m². Az ábrából és a számításból is látszik, hogy a két lehetséges γ szög 180°-ra egészíti ki egymást.

Számítsuk ki mindkét esetben a harmadik oldal hosszát a koszinusztétel felhasználásával:

$$c_1^{\,2} = 40^2 + 50^2 - 2\cdot 40\cdot 50\cdot \cos 70{,}05° \Rightarrow c_1 \approx 52{,}3\,.$$

$$c_2^{\,2} = 40^2 + 50^2 - 2\cdot 40\cdot 50\cdot \cos 109{,}95° = 40^2 + 50^2 + 2\cdot 40\cdot 50\cdot \cos 70{,}05°$$

$$c_2 \approx 73{,}9\,.$$

A harmadik kerítéselem tehát 52,3 méter, vagy 73,9 méter, így a telek bekerítéséhez annak alakjától függően 142,3 m, illetve 164 m hosszú kerítésre van szükség.

Mintapélda$_5$

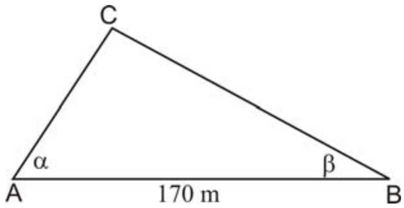
Péter és Pál földje háromszög alakú. Meg akarták tudni, hogy mekkora a területe. Egyik sarkába letűztek egy karót, a háromszög másik két csúcsába pedig Péter és Pál állt. Ez volt az utcai oldal, tehát tudták, hogy a hossza 170 méter. Péter teodolittal megmérte, hogy Pált és a karót 74°-os szög alatt látja, Pál is megmérte, hogy ő a Péter és a karó közti oldalt 43°-os szög alatt látja. Számítsuk ki a föld területét!

Megoldás:

Most ismerjük a háromszög egyik oldalát és a rajta fekvő két szöget. Ezek az adatok a háromszöget egyértelműen meghatározzák. Legyen a háromszög 170 méteres oldala AB, ekkor ha az A csúcsban áll Péter, tehát az α szög 74°-os lesz, Pál pedig a B csúcsban, így a β szög lesz 43°.

Ha a $T_{\Delta} = \dfrac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ képletet akarjuk használni, ki kell számítanunk a háromszög még egy oldalát. A szinusztétel segítségével kiszámíthatjuk az AC oldalt:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$



A képletben szerepel a γ szög, amit ki tudunk kiszámítani, mivel a háromszög belső szögeinek összege 180˚.

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (74° + 43°) = 63°.$$

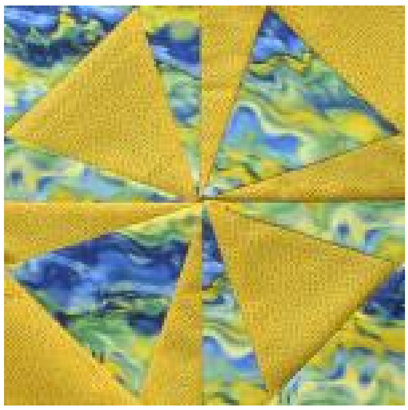
Ezt behelyettesítve képletünkbe: $AC = 170 \cdot \dfrac{\sin 43°}{\sin 63°} \approx 130{,}12\ \text{(m)}$. Most már ismerjük a háromszög két oldalát és a közbezárt szögét, a terület tehát:

$$T = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin\alpha}{2} \approx \frac{170 \cdot 130{,}12 \cdot \sin 74°}{2} \approx 10\,631{,}7.$$

Péter és Pál földjének területe tehát 10 631,7 m².

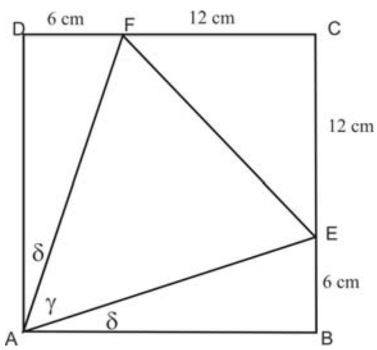
Feladatok

1. A képen látható pachworkben a minta középpontosan szimmetrikus. Számítsd ki a legnagyobb területű háromszög kerületét és területét! (A kép 36 cm oldalú négyzet. A bal felső háromszög jobb oldali csúcsa harmadolja a négyzet oldalát.)
Mekkorák azok a szögek, melyek az ábra szimmetriaközéppontjában keletkeznek?



Megoldás:

A képen összesen 16 háromszög látható, melyek közül 4-4 és 8 darab egymással egybevágó, tehát három különböző háromszög közül kell eldöntenünk, hogy melyiknek a legnagyobb a területe. A négyzetet a két középvonala 4 egybevágó négyzetre bontja. Ezek oldala 18 cm.

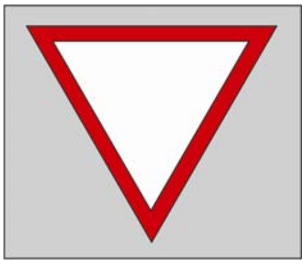


Tekintsünk egy ilyen négyzetet. Mivel az E és F pont az eredeti négyzetnek harmadolópontja, $FC = 12$ cm. Az ábra alapján nyilvánvaló, hogy az AEF háromszög a legnagyobb területű. Ennek a háromszögnek a területét megkapjuk úgy, ha a 18cm oldalú négyzet területéből levonjuk a másik három háromszög területét. Az ECF derékszögű háromszög területe $\frac{12\cdot 12}{2}=72\ \text{cm}^2$, az ADF és ABE derékszögű háromszögek területe $\frac{18\cdot 6}{2}=54\,\text{cm}^2$, tehát $T_{AEF}=18^2-(72+2\cdot 54)=144\ \text{cm}^2$. Az AEF háromszög oldalait Pitagorasz-tétellel kapjuk meg: $EF=12\cdot\sqrt{2}$, $AE=AF=\sqrt{6^2+18^2}=6\sqrt{10}$. A háromszög kerülete tehát $12\sqrt{2}+2\cdot 6\sqrt{10}\approx 54{,}9\,\text{cm}$.

Számítsuk ki először az FAE szöget! AFE egyenlőszárú háromszög, ezért

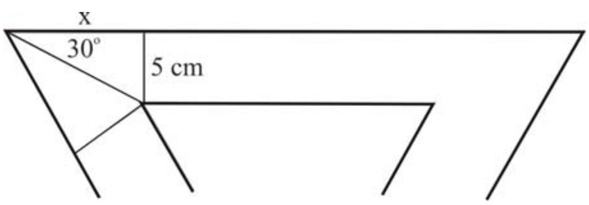
$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\frac{EF}{2}}{AE}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}.$$ Mivel $\frac{\gamma}{2}$ hegyesszög $\gamma=53{,}13^\circ$, $\delta=\frac{90^\circ-53{,}13^\circ}{2}=18{,}44^\circ$.

2. Az „elsőbbségadás kötelező” KRESZ táblát úgy készítik, hogy előbb lefestik az egész táblát fehérre, majd a szélére 5 cm széles piros csíkot festenek. A tábla egyenlőoldalú háromszög, melynek oldala 60 cm. Számítsd ki, 100 ilyen tábla lefestéséhez hány négyzetméterre való fehér, illetve piros festéket kell vásárolni!



Megoldás:

A fehérre festett terület: $T=\frac{60^2\cdot\sin 60^\circ}{2}=900\cdot\sqrt{3}$, ennek százszorosa $90\,000\sqrt{3}$ (cm^2), azaz $9\sqrt{3}\approx 15{,}6$ (m^2).



A piros területet úgy kapjuk meg, hogy az egész tábla területéből levonjuk a belső háromszög területét. Az x befogójú derékszögű háromszögben: $\frac{5}{x}=\text{tg}\,30^\circ$,

ebből $x=5\sqrt{3}$ (cm). A belső háromszög oldala: $60-2x=60-10\sqrt{3}$. A piros terület

tehát $$900\sqrt{3}-\frac{\left(60-10\sqrt{3}\right)^2\cdot\sin 60^\circ}{2}=900\sqrt{3}-\left(3900-1200\sqrt{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=$$
$$=900-75\sqrt{3}\approx 770{,}1.$$

Ez 100 tábla esetén 77 010 cm², körülbelül 7,7 m². Piros festéket tehát 7,7 m²-re, fehéret pedig 15,6 m²-re kell vásárolni.

3. Egy közpark sarkából egy kertészeti áruda kihasít egy háromszög alakú területet. Az eredeti terv szerint kerítésük a saroktól az Ó utcán 80 méterig, az Új utcán pedig 70 méterig tart, de kiegyeznek abban is, ha a két utcafronton 75-75 méteres kerítésük lehet.
Mikor veszít kevesebb területet a közpark? (Tudjuk, hogy az Ó utca és az Új utca 80˚-os szögben találkozik.)

Megoldás:

Első esetben a lehasított terület $T_1 = \dfrac{70 \cdot 80 \cdot \sin 80°}{2} \approx 2757{,}5\ \text{m}^2$.

Második esetben $T_2 = \dfrac{75 \cdot 75 \cdot \sin 80°}{2} \approx 2769{,}8$ m², tehát a közpark az első esetben veszít kevesebb területet.

4. Milyen hosszú kerítéssel lehet körbevenni azt a háromszög alakú kertet, melynek területe 2500 m², két oldala pedig 80-80 méter?

Megoldás:

A háromszög harmadik oldalának kiszámításához a két ismert oldal által közbezárt szöget számítjuk ki először:

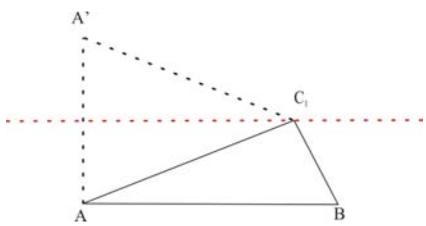
$$2500 = \frac{80^2 \sin\gamma}{2} \Rightarrow \sin\gamma = 0{,}78125 \Rightarrow \gamma_1 \approx 51{,}38°, \quad \gamma_2 \approx 128{,}62°.$$

Koszinusztétellel kiszámítjuk a harmadik oldalt, amelyik lehet $c_1 = 144{,}2$ m, ekkor a kerítés hossza 304,2 m, vagy $c_2 = 69{,}4$ m, ekkor a kerítés hossza 229,4 m.

5. Egy háromszög alakú kertecskéről azt állítják, egyik oldala 30 méter, területe 300 m², kerülete pedig 70 méter. Honnan tudjuk, hogy valamelyik adat téves? (Azaz mekkora lesz egy olyan háromszög minimális kerülete, melynek egyik oldala 30 méter, területe pedig 300 m²?)

Megoldás:

A területből és az ismert oldalból ki lehet számítani a hozzá tartozó magasságot:



$300 = \frac{30 \cdot m}{2} \Rightarrow m = 20$. Tudjuk, hogy a háromszög *C* csúcsának az *AB* szakasztól 20 méterre levő párhuzamoson kell lennie valahol. Hol legyen a *C* csúcs ahhoz, hogy *AC* + *CB* távolságösszeg minimális legyen?

Tükrözzük az *A* csúcsot a piros szaggatott egyenesre! A C_1 csúcs tetszőleges megválasztása esetén a tükrözés tulajdonsága miatt $AC_1 = C_1A'$. Tehát a $BC_1 + C_1A$ összeg ott lesz minimális, ahol a $BC_1 + C_1A'$ összeg a lehető legkisebb. Ez viszont akkor a legkisebb, ha B, C_1 *és* A' egy egyenesbe esik, azaz ha *C* csúcs a BA' szakasz és a piros párhuzamos metszéspontja azaz ha az *ABC* háromszög egyenlőszárú. Ebben az esetben $AC = CB = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$, tehát az $AC + BC$ összeg legalább 50, a kerület pedig minimálisan 80 méter.

III. Négyszögek

Egy négyszög egy átlójával mindig felbontható két háromszögre, így a négyszög területe mindig előállítható két háromszög területének összegeként. Vannak olyan négyszögek, melyek területének kiszámítására ismerünk egyszerűbb módszert is.

Foglaljuk össze, milyen képleteket ismertünk meg a négyszögek területének kiszámítására!

Trapéz területe:

$$\boxed{T_{\text{trapéz}} = \frac{a+c}{2} \cdot m}$$

ahol a és c a két párhuzamos oldal hossza, m a trapéz magassága. Mivel a paralelogramma, a rombusz, a téglalap és a négyzet mind trapéz, ezzel a képlettel ezek területei is számolhatók.

Paralelogramma területe:

$$\boxed{T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot m_a = b \cdot m_b}$$

$$\boxed{T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot b \cdot \sin\gamma}$$

$$\boxed{T_{\text{paralelogramma}} = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}}$$

ahol a, b a paralelogramma oldalai, m a magassága, e, f az átlói, γ az a, b oldalak által bezárt szög, φ pedig az átlók által bezárt szög.

Mivel a rombusz, a téglalap és a négyzet is paralelogramma, ezekkel a képletekkel ezek területei is számolhatók. Speciálisan

$$\boxed{T_{\text{téglalap}} = a \cdot b} \qquad \boxed{T_{\text{négyzet}} = a^2}$$

Deltoid területe:

$$\boxed{T_{\text{deltoid}} = \frac{e \cdot f}{2}}$$

ahol e, f a deltoid átlói.

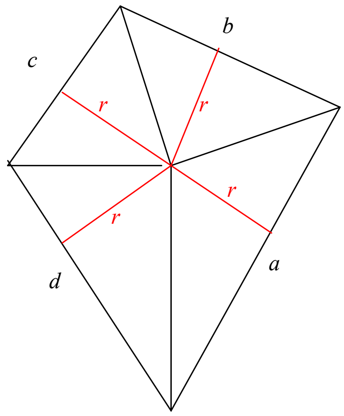
Érintőnégyszög területe:

$$\boxed{T_{\text{érintőnégyszög}} = \frac{K \cdot r}{2}}$$

ahol K a négyszög kerülete, r a beírt kör sugara.

Módszertani megjegyzés: A képletet ugyanúgy igazoljuk, mint a háromszög esetében: ha a kör középpontjából a négyszög csúcsaihoz szakaszokat húzunk, azzal a négyszöget négy darab háromszögre vágjuk. Ezen háromszögek magasságának mindegyike a beírt kör sugara, így a négyszög területe felírható

$$T_{\text{érintőnégyszög}} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} + \frac{d \cdot r}{2} = \frac{r}{2} \cdot (a+b+c+d) = \frac{r \cdot K}{2}.$$



Általános négyszög területe:

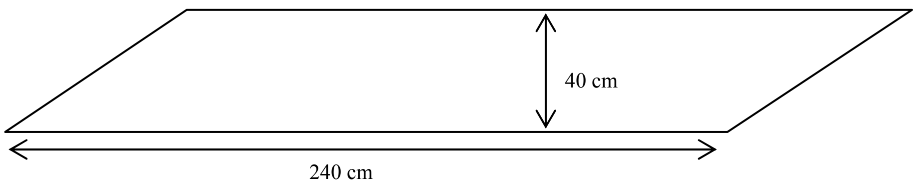
$$\boxed{T_{\text{négyszög}} = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}}$$

Ezzel a képlettel bármely négyszög területét meghatározhatjuk, ha ismerjük a négyszög átlóit (e, f) és az átlók által bezárt φ szöget.

Mintapélda$_6$

Egy húsfeldolgozó üzem egyik munkapadját védőfestékkel kell bevonni. A felület paralelogramma alakú, 60 cm széles pallóból vágták ki, hosszabb oldala 250 cm. Elegendő lesz-e 1 doboz, 1 m² lefestésére alkalmas festéket vásárolni?

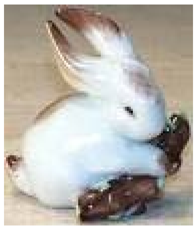
Megoldás:



A paralelogramma területe $T_{\text{paralelogramma}} = 240 \cdot 40\ \text{cm}^2 = 9600\ \text{cm}^2 = 0{,}96\ \text{m}^2$.

Tehát szűken, de elég lesz egy doboz festéket megvásárolni.

Mintapélda$_7$



A húsvéti nyuszinak a kertben úgy választottunk le területet, hogy egy régi gyerekjáróka rácsát használtuk fel hozzá. A járóka eredetileg téglalap alapú volt, de már nincs meg az alja, ami megtartaná a derékszöget. A rács hosszabb oldala 150 cm, a rövidebb 100 cm. Mekkora területet választottunk le a nyuszinak, ha a kert egy olyan sarkába illesztettük be a járókát, ahol a két kerítés 70˚-os szöget zár be?

Megoldás:

Ha a járóka alapja eredetileg téglalap volt, szemközti oldalai egyenlők lesznek, csak a derékszög nem biztosított, így paralelogramma területét kell kiszámítanunk. Ha a járókát olyan kerítésrészhez állítottuk, ahol a bezárt szög 70˚, akkor a paralelogrammánk két szomszédos oldala által bezárt szög is 70˚ lesz, így a járóka aljának területe

$T = 100 \cdot 150 \cdot \sin 70° \approx 14\,095\ \text{cm}^2$, azaz majdnem másfél négyzetméter a leválasztott terület.

Mintapélda$_8$

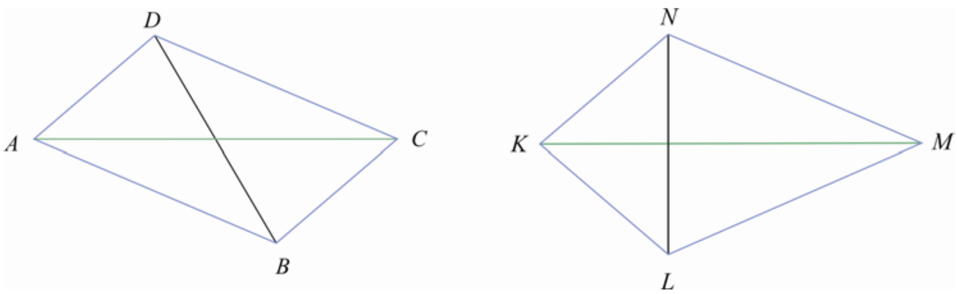
Egy kertészeti vállalat azt a feladatot kapta, hogy egy négyszög alakú parkban a két átló mentén sétáló utat létesítsen. A kert alaprajzát nem találják, de az eddigi munkálatok leírásából kiderül, hogy a parknak 2-2 oldala egyenlő 200-200, illetve 180-180 méteres, és az odaszállított fűmag mennyisége alapján a területe 30 000 m².

Meg tudjuk-e mondani, hogy milyen hosszúak az átlók?

Megoldás:

Ha a négyszögnek két-két oldala egyenlő hosszú, akkor a négyszög vagy paralelogramma, vagy deltoid.

Az egyik átlója mindkét esetben két egybevágó háromszögre bontja, ezek területe a négyszög területének fele, tehát $T_{ACD} = T_{KMN} = 15\,000 = \dfrac{200 \cdot 180 \cdot \sin\gamma}{2}$.



A γ szög a paralelogrammában az *ADC* szög, a deltoidban pedig a *KNM* szög. Fenti képletből γ-ra két érték adódik: $\sin\gamma = 0{,}83333 \Rightarrow \gamma_1 = 56{,}44°$ vagy $\gamma_2 = 123{,}56°$. Ez a paralelogrammánál nem ad két lényegesen különböző megoldást, hiszen az *ACD* és *BDC* háromszögeknek azonos a területük (mindkettő területe a paralelogramma területének fele), és két oldaluk is azonos hosszúságú.

A deltoidnál azonban két lényegesen különböző megoldást kapunk. Ha az *N* pontnál tompaszög van, akkor mindenképpen konvex deltoidhoz jutunk, tehát $\gamma_2 = 123{,}56°$-kal számolva számítsuk ki az *AC*, illetve *KM* átló hosszát koszinusztétel felhasználásával:

$$AC = KM = \sqrt{200^2 + 180^2 - 2\cdot 200\cdot 180\cdot \cos 123{,}56°} \approx 334{,}97\,\text{m}.$$

A paralelogramma másik átlóját megkapjuk, ha $\gamma = 56{,}44°$-kal számolunk:

$$DB = \sqrt{200^2 + 180^2 - 2\cdot 200\cdot 180\cdot \cos 56{,}44°} \approx 180{,}55\,\text{m}.$$

Ha az *N* pontnál hegyesszög van, akkor 180,55 m lesz a deltoid szimmetriatengelye is. Ilyenkor előfordulhat, hogy a deltoid konkáv lesz. Feladatunknak azonban ez nem megoldása, hiszen akkor nem a parkon halad át a másik sétány. Ha a *KMN* háromszögben *K*-nál vagy *M*-nél tompaszög van, akkor a deltoid konkáv. Tompaszög a háromszögben csak a legnagyobb oldallal szemben lehet, tehát vizsgáljuk meg, hogy a *KMN* háromszögben milyen szög van a 200 méteres oldallal szemben. A legnagyobb oldallal szemben akkor van tompaszög, ha a másik két oldal négyzetének összege kisebb, mint a legnagyobb oldal négyzete. $40\,000 = 200^2 < 180^2 + 180{,}55^2 \approx 64\,998$, tehát a másik formájú deltoid is konvex.

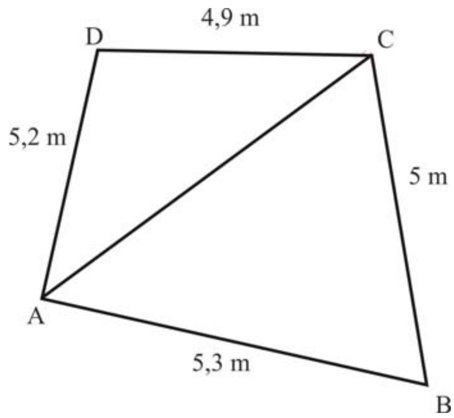
Számítsuk most ki a deltoidok másik átlóját! Ha a deltoid egyik átlója (a szimmetriatengely) $e_1 = 334{,}97$, akkor a *KMN* háromszögben ehhez az oldalhoz tartozó magasság a másik átló fele lesz. Ezt a területképletbe helyettesítve:

$\dfrac{334{,}97\cdot\dfrac{f_1}{2}}{2} = 15\,000$, ebből megkapjuk a másik átló hosszát: $f_1 \approx 179{,}12$. Hasonlóan, a területképletbe helyettesítve az $e_2 = 180{,}55$ értéket, megkapjuk, hogy $f_2 \approx 332{,}32$.

A két sétaút hossza tehát körülbelül 335 m és 180,5 méter, ha a park paralelogramma alakú. Deltoid alakú park esetén két lehetőség is van: a két sétaút hossza körülbelül 335 m és 179 m, vagy 180 m és 332 méteres.

Mintapélda9

Egy szabálytalan négyszög alapú szoba parkettázásáért kell fizetnünk. Megmértük a négy fal hosszát: AB = 5,3 m, BC = 5 m, CD = 4,9 m és DA = 5,2 m. Sajnos ezek az adatok nem elegendőek a terület kiszámításához, hiszen nem határozzák meg egyértelműen sem a szoba alakját, de még a területét sem. (Gondoljunk az összecsukódó járókára!) Ha csak mérőszalagunk van, hogyan segíthetünk magunkon, hogy mégis ki tudjuk számítani a szoba alapterületét?



Megoldás:

Ha megmérjük a szoba egyik átlóját, két egyértelműen meghatározott háromszögre bontottuk a szobát. Ezek területének összege megadja a szoba területét. Tegyük fel, hogy mérésünk eredménye is megvan már, AC = 7,1 m. Az ABC háromszög területe a Héron-képlet segítségével:

$$s=\frac{7{,}1+5{,}3+5}{2}=8{,}7\,;$$

$$T_{ABC}=\sqrt{8{,}7\cdot(8{,}7-7{,}1)\cdot(8{,}7-5{,}3)\cdot(8{,}7-5)}\approx 13{,}23\ \text{m}^2.$$

Az ACD háromszög területe pedig:

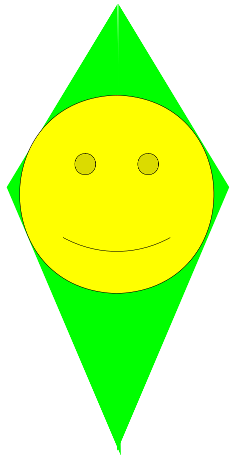
$$s=\frac{5{,}2+4{,}9+7{,}1}{2}=8{,}6; \qquad T_{ACD}=\sqrt{8{,}6\cdot(8{,}6-5{,}2)\cdot(8{,}6-4{,}9)\cdot(8{,}6-7{,}1)}\approx 12{,}74\ \text{m}^2.$$

A két háromszög területét összeadjuk. A szoba alapterülete tehát 25,97 m² ≈ 26 m².

Házi feladatnak a következőt javasoljuk: Készítsenek a tanulók társaiknak olyan területszámítási feladatot, melyet maguk már megoldottak. A feladat lehet egy ház, szoba, telek, háztömb, vagy sokszög alakú falurészlet területének kiszámítása úgy, hogy társaik rendelkezésére bocsátják a számításhoz szükséges adatokat. A következő óra elején az általuk készített feladatot egy másik pár fogja kiszámítani, az ellenőrzés a készítő pár feladata.

Mintapélda$_{10}$

Az ábrán látható deltoid alakú sárkány két oldala 40 és 60 cm, a benne levő kör sugara pedig 30 cm. Hány négyzetcentiméter pauszpapírt használtunk fel az elkészítéséhez? (5% veszteséggel számolj!)



Megoldás:

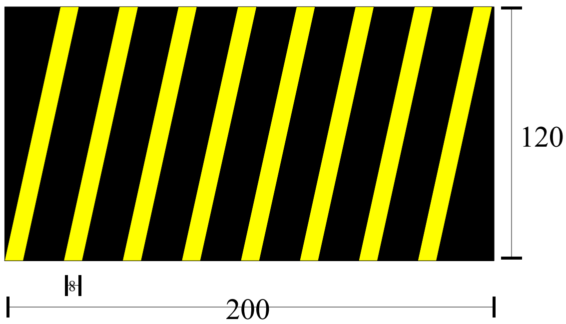
Ez a sárkány – mint minden deltoid – érintőnégyszög, hiszen a szemközti oldalak összege egyenlő. Az érintőnégyszög területe kiszámítható a $T = \frac{K \cdot r}{2}$ képlettel, így a sárkány kerülete:

$K = 2 \cdot (40 + 60) = 200 \text{ cm}$, a területe

$T = \frac{30 \cdot 200}{2} = 3000 \text{ cm}^2$. Ennek 5%-kal megnövelt értéke, azaz 3150 cm² pauszpapír szükséges a sárkányhoz.

Feladatok

6. Forgalomtól elzárt területet jelöl ez a csíkozás. A csíkok jelölt szélessége 8 cm. 1 m² felület befestésére vásárolt festékkel elkészíthető-e ez a csíkozás? Ha maradna festék, akkor lehetne-e egy 8 cm széles sávot még körbe festeni?



Megoldás:

A csíkok paralelogrammák, melyeknek 8 cm-es oldalukhoz tartozó magassága 120 cm. Így 8 paralelogramma területének összegét kell kiszámolni, és ez

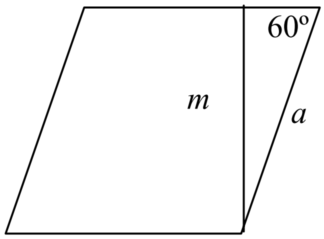
$8 \cdot (8 \cdot 120) \text{ cm}^2 = 0{,}768 \text{ m}^2$, tehát elég lesz a festék.

A 8 cm széles csík területe $2 \cdot 216 \cdot 8 + 2 \cdot 120 \cdot 8 = 5376 \text{ cm}^2 = 0{,}5376 \text{ m}^2$, tehát a sávra már nem lesz elég az 1 négyzetméterre való festék.

7. A fotón látható falikép oldala 1 m, a hatszög oldala 40 cm. A csíkminta szélessége 5 cm. Hány négyzetcentiméter kék színű alapanyagot használtak fel hozzá?

Megoldás:

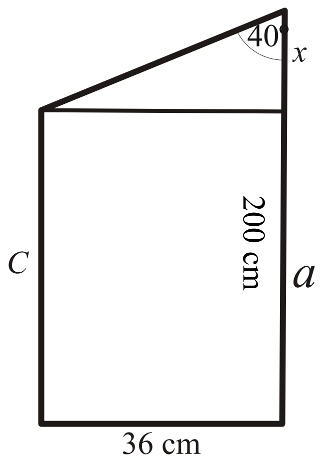
A hatszög közepén levő kék „csillagban” 6 négyszög található. Szemközti oldalaik párhuzamosak, két szomszédos oldaluk a szimmetria miatt egyenlő. Az általuk bezárt szög 60º. Magasságuk megegyezik a csík szélességével, tehát $m = 5$ cm.



$\sin 60° = \frac{5}{a} \Rightarrow a \approx 5{,}77$ cm. A hatszög csúcsainál levő rombuszok is egybevágóak ezekkel. Az alapterület összesen: $T_{kék} = 18 \cdot (5{,}77 \cdot 5) \approx 519{,}3\ \text{cm}^2$, tehát ennyi anyagot használtak fel.

8. Amikor legutóbb kitört az ajtó legkisebb ablaka, az üvegesnél 600 Ft-ot fizettünk. Tudjuk, hogy az árak egyenesen arányosak az üvegtábla területének méretével. Mennyit fogunk most fizetni, amikor a legnagyobb ablak törött ki? A legkisebb ablak méretei: 15 cm széles és 25 cm magas, a legnagyobb (trapéz alakú) ablak leghosszabb oldala 200 cm, a trapéz vízszintes oldala 38 cm, hegyesszöge pedig 40º.

Megoldás:



$\text{tg}40° = \frac{38}{x}$. $\Rightarrow x \approx 45{,}3$ cm, tehát

$c = a - x = 200 - 45{,}3 = 154{,}7$ cm, így a trapéz területe

$\frac{200 + 154{,}7}{2} \cdot 38 \approx 6\,739{,}3\ \text{cm}^2$. A legkisebb ablak területe

$15 \cdot 25 = 375\ \text{cm}^2$. A nagy ablak területe ennek

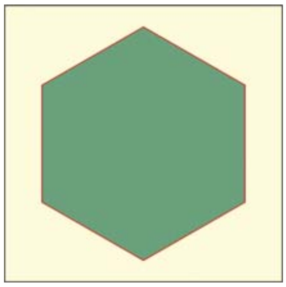
$\frac{6739{,}3}{375} \approx 18$-szorosa, így az ár is a 600 Ft 18-szorosa lesz,

azaz 10 800 Ft.

IV. Szabályos sokszögek

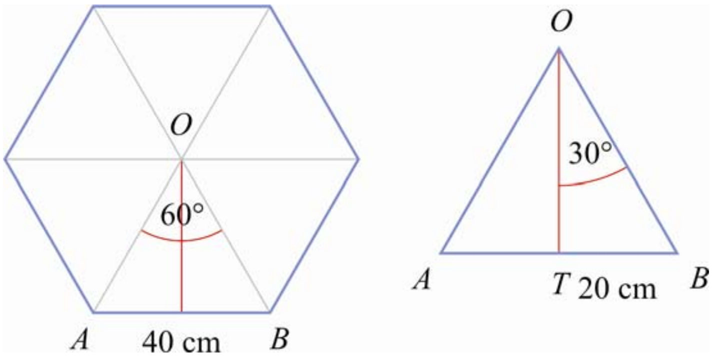
Egy sokszöget akkor nevezünk szabályosnak, ha minden oldala és szöge egyenlő.

Mintapélda$_{11}$



Egy négyzet alakú terítő közepén szabályos hatszög van, melynek oldala 40 cm. Számítsd ki a hatszögminta területét!

Megoldás:



A hatszög szimmetriatengelyeinek metszéspontjából a csúcsokhoz húzott szakaszok a hatszöget hat egybevágó szabályos háromszögre bontják. Egy ilyen kis háromszög területének meghatározásához szükségünk van az *OT* magasságra is, ezt tangens szögfüggvénnyel határozzuk meg:

$$\mathrm{tg}30° = \frac{20}{OT} \quad , \; OT = \frac{20}{\mathrm{tg}\,30°} = \frac{20}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 20\cdot\sqrt{3}$$

Így már minden adatunk megvan a hatszög területének meghatározásához:

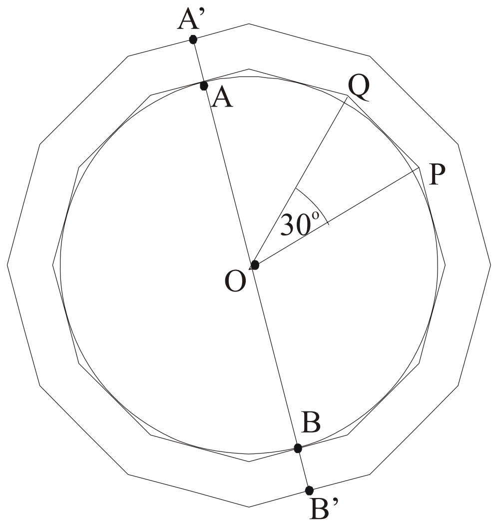
$$T_{hatszög} = 6\cdot\frac{40\cdot\left(20\cdot\sqrt{3}\right)}{2} = 2400\cdot\sqrt{3} \approx 4157\mathrm{cm}^2 .$$

Mintapélda$_{12}$

Kör alakú, 3 méter átmérőjű felfújható medencénk alá akarunk (a lehető legkisebb) szabályos 12 szög alakú betonalapot készíteni úgy, hogy a medence szélétől mindenhol legalább fél méter szélesen beton legyen. Milyen hosszú legyen ennek a tizenkétszögnek egy oldala, és mekkora területet fedünk le vele?

Megoldás:

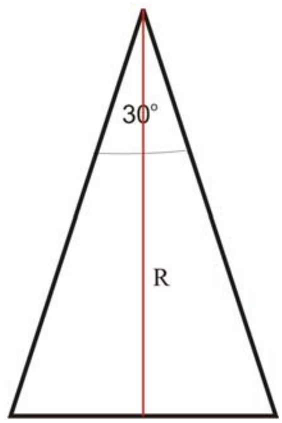
Fogalmazzuk meg a feladatot másképpen: Adott egy szabályos 12-szög, ami érinti a medence minden oldalát. Ha ezt a tizenkétszöget a kör középpontjából úgy nagyítjuk ki, hogy a két szemközti érintési pont távolsága az eredeti méretnél 2-szer 50 cm-rel nagyobb legyen, akkor megkapjuk a feladatban kívánt tizenkétszöget.



Mekkora az a tizenkétszög, amely érinti ezt a kört?

Ha a kör középpontját a tizenkétszög csúcsaival összekötjük, olyan 12 egybevágó egyenlőszárú háromszöget kapunk, melynek szárszöge $\frac{360°}{12} = 30°$. A háromszögnek az alaphoz tartozó magassága a kör sugara lesz. A nagyobb tizenkétszögnél ugyanez az adat 0,5 méterrel hosszabb:

$R = 1{,}5 + 0{,}5 = 2$. A nagyobbik sokszög oldalának kiszámításához az OPQ egyenlőszárú háromszöget használjuk:



$$\mathrm{tg}\,15° = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2 \cdot 2} = \frac{a}{4} \quad \Rightarrow \quad a = 4 \cdot \mathrm{tg}\,15° \approx 1{,}07\,.$$

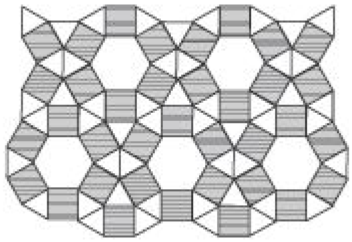
Tehát a medencét alulról védő betonsokszög oldalai körülbelül 107 cm hosszúak legyenek.

A beton területét megkapjuk, ha a 12 egyenlőszárú háromszög területét összeadjuk:

$$T_{beton} = 12 \cdot \frac{107 \cdot 200}{2} = 128\,400\,\mathrm{cm}^2 = 12{,}8\,\mathrm{m}^2.$$

Feladatok

9. A rajzon egy parkettázást látsz, azaz a síkot hézagmentesen lefedték szabályos sokszögekkel. A tizenkétszög oldala 12 cm. Mekkora a rajzon látható többi szabályos síkidom területe?



Megoldás:

A szabályos háromszög területe $\frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 36 \cdot \sqrt{3} \approx 62{,}35\ \text{cm}^2$. A szabályos hatszög 6 olyan szabályos háromszögből áll, amelynek oldalai 12 cm-esek.

$$T_{hatszög} = 6 \cdot 36 \cdot \sqrt{3} = 216 \cdot \sqrt{3} \approx 374{,}12\ \text{cm}^2.$$

A 12 cm oldalú négyzet területe 144 cm². A tizenkétszög területét megkapjuk, ha a hatszög területéhez hozzáadjuk 6 háromszög és 6 négyzet területét:

$$T_{12} = 216\sqrt{3} + 6 \cdot 36\sqrt{3} + 6 \cdot 144 = 864 + 432\sqrt{3} \approx 1612{,}25\ \text{cm}^2.$$

10. A képen látható homokozó készen kapható. Szabályos nyolcszög alakú, és úgy hirdetik, hogy 35 m² területű. Mekkora lehet a leghosszabb átlója? A számítás elvégzése előtt becsüld meg az eredményt!

Megoldás:

A leghosszabb átlója egyben a köré írható kör átmérője is. $T_{nyolcszög} = 8 \cdot \frac{R^2 \cdot \sin 45°}{2}$.

Az egyenletből $R = \sqrt{\frac{35}{2 \cdot \sqrt{2}}} \approx 3{,}52$ m, tehát a leghosszabb átlója körülbelül 7 m.

11. Számítsd ki annak az n oldalú szabályos sokszögnek az oldalát, amely érinti az 1 m sugarú kört!

a) $n = 3$; b) $n = 4$;

c) $n = 8$; d) $n = 12$.

Hány százaléka lesz a sokszög kerülete a kör kerületének? Hány százaléka lesz a sokszög területe a kör területének? Hogyan változnak ezek az arányok?

Megoldás:

Az oldalt az $a = 2r \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$ képlettel számoljuk ki. Valamennyi sokszög esetén a terület kiszámításakor kihasználjuk, hogy a sokszög érintősokszög, tehát $T = \dfrac{K \cdot r}{2}$.

a) $a_3 = 2 \cdot \mathrm{tg}\,60^\circ = 2 \cdot \sqrt{3}$, $K_3 = 6\sqrt{3}$, $\dfrac{K_3}{K_\circ} = \dfrac{6\sqrt{3}}{2\pi} \approx 165\%$;

$T_3 = \dfrac{6 \cdot \sqrt{3} \cdot 1}{2} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 5{,}20$, $\dfrac{T_3}{T_\circ} = \dfrac{5{,}20}{\pi} \approx 165\%$.

b) $a_4 = 2$, $K_4 = 8$, $\dfrac{K_4}{K_\circ} = \dfrac{8}{2\pi} \approx 127\%$,

$T_4 = 4$, $\dfrac{T_4}{T_\circ} = \dfrac{4}{\pi} \approx 127\%$.

c) $a_8 = 2 \cdot \mathrm{tg}22{,}5^\circ \approx 0{,}83$, $K_8 = 8 \cdot 0{,}83 = 6{,}64$, $\dfrac{K_8}{K_\circ} = \dfrac{6{,}64}{2\pi} \approx 106\%$;

$T_8 = \dfrac{8 \cdot 0{,}83 \cdot 1}{2} \approx 3{,}32$, $\dfrac{T_8}{T_\circ} = \dfrac{3{,}32}{\pi} \approx 106\%$.

d) $a_{12} = 2 \cdot \mathrm{tg}15^\circ \approx 0{,}536$, $K_{12} = 6{,}432$, $\dfrac{K_{12}}{K_\circ} = \dfrac{6{,}432}{2\pi} \approx 102\%$;

$T_{16} = \dfrac{6{,}432}{2} \approx 3{,}216$, $\dfrac{T_{12}}{T_\circ} = \dfrac{3{,}216}{\pi} \approx 102\%$.

Vegyük észre, hogy a kerületek és területek méretének sorozata csökken és egyre pontosabban közelíti a kör kerületét, illetve területét.

12. Számítsd ki annak az *n* oldalú szabályos sokszögnek a területét, amelynek csúcsai az 1 m sugarú körön vannak! Számítsd ki, hány százaléka ez a kör területének! Hogyan változik ez az arány?

a) $n = 3$; b) $n = 4$;
c) $n = 8$; d) $n = 12$.

Megoldás:

A terület nagyságának meghatározásához a $T_n = n \cdot \dfrac{R^2 \cdot \sin\dfrac{360^\circ}{n}}{2}$ képletet használjuk.

a) $T_3 = 3 \cdot \dfrac{\sin 120^\circ}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1{,}299$, $\dfrac{T_3}{T_\circ} = \dfrac{1{,}299}{\pi} \approx 41\%$;

b) $T_4 = 2, \quad \dfrac{T_4}{T_\circ} = \dfrac{2}{\pi} \approx 64\%$;

c) $T_8 = 8 \cdot \dfrac{\sin 45^\circ}{2} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}828, \quad \dfrac{T_8}{T_\circ} = \dfrac{2{,}828}{\pi} \approx 90\%$;

d) $T_{12} = 12 \cdot \dfrac{\sin 30^\circ}{2} = 3, \quad \dfrac{T_{12}}{T_\circ} = \dfrac{3}{\pi} \approx 95\%$.

Észrevehetjük, hogy a területek nagysága az oldalszám növelésekor növekedik, egyre jobban közelíti a kör területét.

V. Kör és részei

Foglaljuk össze, milyen képleteket ismertünk meg a körre és a kör részeire vonatkozóan.

Kör:

$$\boxed{K_{\text{kör}} = 2r\pi} \qquad \boxed{T_{\text{kör}} = r^2\pi}$$

ahol r a kör sugara, $\pi \approx 3{,}14159$ állandó. (Használjuk 3,14 helyett a számológépben tárolt π értéket!)

Körcikk:

$$\boxed{T_{\text{körcikk}} = \frac{i \cdot r}{2}} \qquad \boxed{T_{\text{körcikk}} = \frac{r^2\pi\alpha}{360°}}$$

ahol r a kör sugara, i a körcikk ívhossza, α a körcikk középponti szöge.

Körgyűrű:

$$\boxed{K_{\text{körgyűrű}} = 2R\pi + 2r\pi = 2\pi(R + r)} \qquad \boxed{T_{\text{körgyűrű}} = R^2\pi - r^2\pi = \left(R^2 - r^2\right)\pi}$$

ahol R a külső, r a belső kör sugara.

Körszelet:

$$\boxed{T_{\text{körszelet}} = \frac{ir - h(r - m)}{2}}$$

ahol h a határoló húr hossza, i a körszelet ívhossza, r a kör sugara, m a körszelet magassága.

Mintapélda$_{13}$

A 8 méter átmérőjű szökőkút mellé 2 méter széles járdát terveznek díszburkolattal. Hány négyzetmétert kell burkolni? A járda két oldala szegélykövekkel van határolva. Hány folyóméternyi szegélykövet kell a helyszínre vinni?

Megoldás:

A járda felülete körgyűrű alakú. Területét megkapjuk, ha a külső kör területéből levonjuk a belső kör területét: $T = \left(10^2 - 8^2\right) \cdot \pi \approx 113{,}1\ \text{m}^2$.

Amikor a szegélykövek mennyiségére vagyunk kíváncsiak, a körgyűrű kerületét kell kiszámítanunk, az pedig – értelemszerűen – a külső és belső körök kerületének összege:

$K = 2 \cdot (10 + 8) \cdot \pi \approx 113{,}1\ \text{m}$ lesz.

Mintapélda$_{14}$

Számítsd ki, hogy az ajtó felületének hány százaléka üveg? Méretek: Az ajtó szélessége 91 cm, magassága: 204 cm. Egy téglalap alakú üvegtábla szélessége 17 cm, magassága 34 cm. Két – vízszintesen egymás melletti – üvegtábla távolsága 33 cm. Két ablakot elválasztó léc szélessége 8 cm.

Megoldás:

Számoljuk ki először az egész ajtó felületét:

$T_{ajtó} = 91 \cdot 204 = 18564\ \text{cm}^2$.

A téglalap alakú ablakokból 6 van, területük együttesen:

$6 \cdot T_{téglalap} = 6 \cdot 17 \cdot 34 = 3468\ \text{cm}^2$.

A két felső ablak körgyűrűcikk formájú, de mégsem az, hiszen a középső léc oldalai nem sugár irányúak. Nem csalunk sokat, ha a két felső ablak együttes területét úgy számoljuk ki, hogy egy fél körgyűrű területéből egy 8 cm széles, 17 cm magas téglalap területét vonjuk le. Az elválasztó léc itt valójában nem téglalap, de területe csak kevéssel különbözik a számított téglalapétól. A körgyűrűnk belső átmérője akkora, mint két szomszédos ablaktábla távolsága, azaz $2r = 33$ cm, a külső kör átmérőjét pedig úgy kapjuk meg, hogy a szomszédos ablaktáblák távolságához hozzáadjuk két téglalap alakú ablak szélességét: $2R = 33 + 2 \cdot 17 = 67$ cm.

A fél körgyűrű területe tehát $\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{67}{2} \right)^2 - \left(\frac{33}{2} \right)^2 \right) \cdot \pi \approx 1335\ \text{cm}^2$.

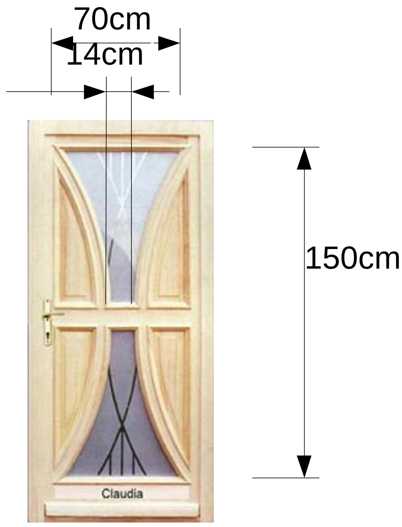
Ebből még ki kell vonni az elválasztó „téglalap" területét:

$$T_{felső\ üveg} = 1335 - 8 \cdot 17 = 1199\ \text{cm}^2.$$

Az összes üvegfelület tehát $T_{üveg} = 3468 + 1199 = 4667\ \text{cm}^2$. Ezt elosztva az egész ajtó területével, megkapjuk, hogy $\frac{4667}{18564} \approx 0{,}251$ az egész ajtó 25%-a üveg.

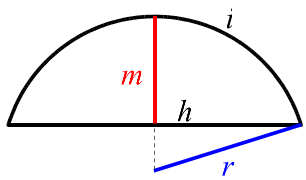
Mintapélda$_{15}$

Ezt a formájú ajtót meg lehet rendelni úgy is, hogy a középső, üveges rész helyett fatáblát helyeznek. 1 m² (1 cm vastag) fa tömege 6600 g-mal könnyebb, mint 1 m² (0,4 cm vastag) üvegé. Mennyivel nehezebb az üveges ajtó a csupa fa ajtónál? Méretek: függőleges nyíl: 150 cm, vízszintesen mért távolságok: 70 cm és 14 cm.

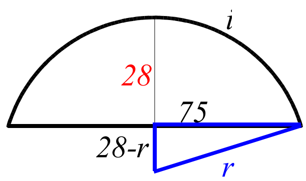


Megoldás:
A válaszadáshoz ki kell számítanunk az ablakok területét. Az ablakok területét úgy a legegyszerűbb megkapni, ha a 150 cm magas és 70 cm széles téglalap területéből kivonjuk a két körszelet területét.

A terület meghatározásához szükséges adatok közül nekünk csak a húr hossza adott (h = 150 cm). A körszelet magassága igen egyszerűen kiszámítható: ($m = \frac{70-14}{2} = 28$ cm). Az ábrán látható derékszögű háromszögből r Pitagorasz tételével kiszámítható:



$75^2 + (28-r)^2 = r^2$. Elvégezve a négyzetreemelést, majd kifejezve r-et, $r = \frac{6409}{56} \approx 114{,}45$ cm.



Az ív hosszának kiszámításához derékszögű háromszögünkből kiszámítjuk az ív középponti szögének felét: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{75}{114{,}45} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 40{,}94°,\ \alpha = 81{,}89°$.

Az ív hossza egyenesen arányos a középponti szög nagyságával, $\frac{i}{2r\pi} = \frac{\alpha}{360°}$, jelen esetben

$$i = \frac{81{,}89°}{360°} \cdot 2 \cdot 114{,}45 \cdot \pi \approx 163{,}58 \text{ cm}.$$

Most már semmi akadálya, hogy használjuk a képletet:

$T_{körszelet} = \frac{163{,}58 \cdot 114{,}45 - 150 \cdot (114{,}45 - 28)}{2} \approx 2877{,}12 \text{ cm}^2$. Az ajtón két körszelet van, tehát

$$T_{üveg} = 2 \cdot 2877{,}12 = 5754{,}24 \text{ cm}^2 = 0{,}575424 \text{ m}^2.$$

Mivel egy négyzetméter üveg 6600 g-mal nehezebb egy négyzetméter fánál, ezért az üveges ajtó $0{,}575424 \cdot 6600 \approx 3797{,}8$ g-mal, azaz 3,8 kg-mal nehezebb, mint a faajtó.

Feladatok

13. A képen látható legyező hossza összecsukva 16 cm. Ha a lehető legjobban széthúzzuk, a középponti szög 200˚. Számítsd ki, mekkora területű felülettel tudunk legyezni, ha a legyezőt csak 60˚-osra, félkörre, vagy teljesen kinyitjuk!

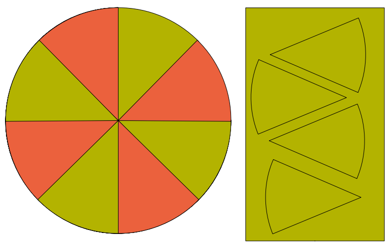
Megoldás:

A legyező kinyitva egy körcikk lesz, melynek területe a középponti szögtől függően:

$$T_{60°}=\frac{60°}{360°}\cdot 16^2\cdot\pi\approx 134\ \text{cm}^2,\ T_{180°}=\frac{1}{2}\cdot 16^2\cdot\pi\approx 402\ \text{cm}^2,$$

$$T_{200°}=\frac{200°}{360°}\cdot 16^2\cdot\pi\approx 447\ \text{cm}^2.$$

14. Az ábrán látható 1 méter átmérőjű terítő körcikkeit szeretnénk kiszabni. A szálirány miatt, és mert nem lehet tetszőlegesen széles anyagot kapni, így szabjuk ki a darabokat egy 70 cm széles, 1 m hosszú anyagból. Számítsd ki, hány százalék lesz a hulladék a körcikkek kiszabásakor!



Megoldás:

A négy körcikk együtt egy félkört ad, $T_{hasznos}=\frac{1}{2}\cdot 0{,}5^2\cdot\pi\approx 0{,}3927$ m². Az összes terület $0{,}7\cdot 1=0{,}7$ m², így a hulladék $\frac{0{,}7-0{,}3927}{0{,}7}\approx 0{,}439\approx 43{,}9\%$ lesz.

15. Ádám és Zoltán ablakok és ajtók üvegfelületének lemosását vállalta. Ádám a két bejárati ajtót és a kerek ablakot, Zoltán pedig a nagyobbfajta ablakot mosta le. Melyikük dolgozott többet? (Egy-egy ablakon belül a léceket ne vegyük figyelembe.) Méretek:

Az ajtókon a félkörök szélessége 63 cm, a bal oldali ajtón a fa félkör átmérője 13 cm. A kör alakú ablak átmérője 60 cm, a nagy ablak szélessége 80 cm, magassága középen 120 cm.

Megoldás:

A bal oldali ajtón a körgyűrűcikk területe $\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{63}{2}\right)^2-\left(\frac{13}{2}\right)^2\right)\cdot\pi\approx 1492\ \text{cm}^2$.

A jobb oldali ajtó ablakának területe $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{63}{2}\right)^2\cdot\pi\approx 1559\ \text{cm}^2$.

A kerek ablak területe $30^2\cdot\pi\approx 2827\ \text{cm}^2$. Ezek együttes területe 5878 cm².

A másik ablak üvegrésze egy téglalapból és egy félkörből tevődik össze.

$T_{téglalap}=80\cdot(120-40)=6400\ \text{cm}^2$. $T_{félkör}=\frac{1}{2}\cdot 40^2\cdot\pi\approx 2513\ \text{cm}^2$. Tehát a nagy ablak területe 8913 cm², Zoltán dolgozott többet.

16. Számítsd ki, a „megállni tilos” táblán mekkora a pirossal és kékkel festett területek aránya! (A tábla átmérője 60 cm, a piros vonalak vastagsága 5 cm.)

Megoldás:

A táblán négy kék negyedkört találunk, a tábla többi része piros.

A negyedkörök sugara $r=22{,}5$ (cm), így a kék terület:

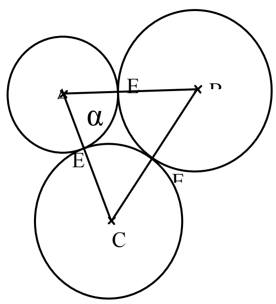
$T_{kék}=22{,}5^2\pi\approx 1590{,}43\ (\text{cm}^2)$.

A piros terület: $T_{piros}=30^2\pi-T_{kék}\approx 1237{,}00\ (\text{cm}^2)$.

A területek aránya: $\frac{T_{piros}}{T_{kék}}\approx 0{,}778$.

17. Egy 5, egy 20 és egy 100 Ft-os érmét az ábrán látható módon szorosan egymás mellé rakunk. Mekkora lesz az általuk közrezárt terület? Az érmék átmérője 21 mm, 26 mm és 24 mm.

Megoldás:



Legyen a három kör sugara $r_1=AE_1=10{,}5$ (mm),

$r_2=E_1B=13$ (mm), $r_3=E_3C=12$ (mm).

Ha két kör érinti egymást, akkor az érintési pont és a két kör középpontja egy egyenesbe esik. Így az *ABC* háromszög oldalait a körök sugarainak összege adja meg: $AB = r_1 + r_2 = 23{,}5$ (mm), $AC = r_1 + r_3 = 22{,}5$ (mm) és $BC = r_2 + r_3 = 25$ (mm).

A keresett közbülső területet megkapjuk, ha az ABC háromszög területéből levonjuk a három körcikk területét. A szögeket koszinusztétellel számoljuk ki:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\alpha$, innen $\cos\alpha \approx 0{,}4099 \Rightarrow \alpha = 65{,}8^\circ$.

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta \approx 0{,}571 \Rightarrow \beta = 55{,}18^\circ$.

A háromszög belső szögeinek összege 180°, tehát $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 59{,}02^\circ$.

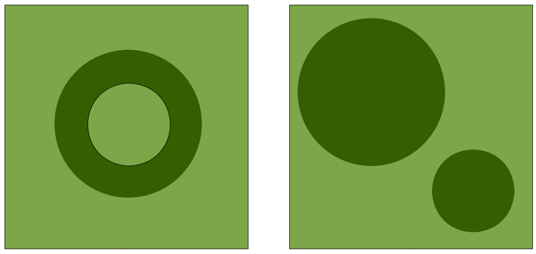
Az egyes körcikkek területe: $T_\alpha = \dfrac{\alpha}{360^\circ} r^2 \pi$;

$T_\alpha = 63{,}31$ (mm²), $T_\beta = 81{,}38$ (mm²), $T_\gamma = 74{,}17$ (mm²).

Az ABC háromszög területe: $T_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin\alpha}{2} = \dfrac{23{,}5 \cdot 22{,}5 \cdot \sin 65{,}8^\circ}{2} = 241{,}14$ (mm²).

$T_{\text{keresett}} = 241{,}14 - (63{,}31 + 81{,}38 + 74{,}17) = 22{,}28$ mm².

18. A bal oldali terítőn a sötét terület 350 cm², a jobb oldalin pedig 1650 cm². Mekkora a jobb oldali ábrán a két kör területe? (A két terítőn a körök sugara ugyanakkora.)



Megoldás:

Felírva az egyes területeket, a következő egyenletrendszert kapjuk: $\left.\begin{aligned} R^2\pi - r^2\pi &= 350 \\ R^2\pi + r^2\pi &= 1650 \end{aligned}\right\}$

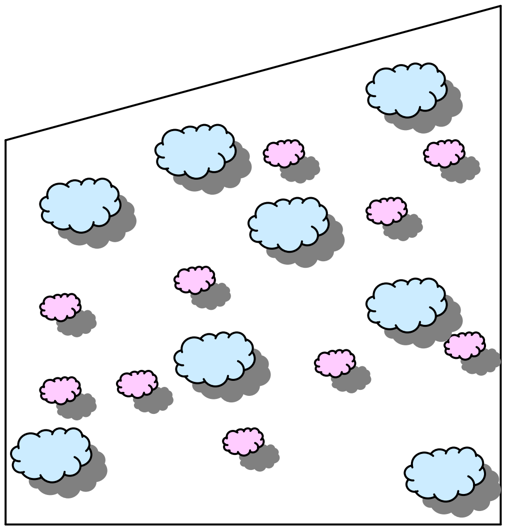
Innen $R^2\pi = 1000$ cm² és $r^2\pi = 650$ cm².

VI. Hasonló síkidomok kerülete és területe

Ha két síkidom hasonló, akkor kerületük aránya megegyezik hasonlóságuk arányával, területük aránya pedig a hasonlóságuk arányának négyzetével egyezik meg.

Mintapélda$_{16}$

Egy óvoda tűzfalát lefestették fehérre, majd az alábbi tervek alapján díszítik nagy kék és kis rózsaszín felhőkkel. A kék felhők festésével már készen vannak, 10 doboz festék fogyott. Hány doboz rózsaszín festéket vásároljanak? (Tudjuk, hogy a kicsi felhők szélessége pontosan a fele a nagy felhőkének.)



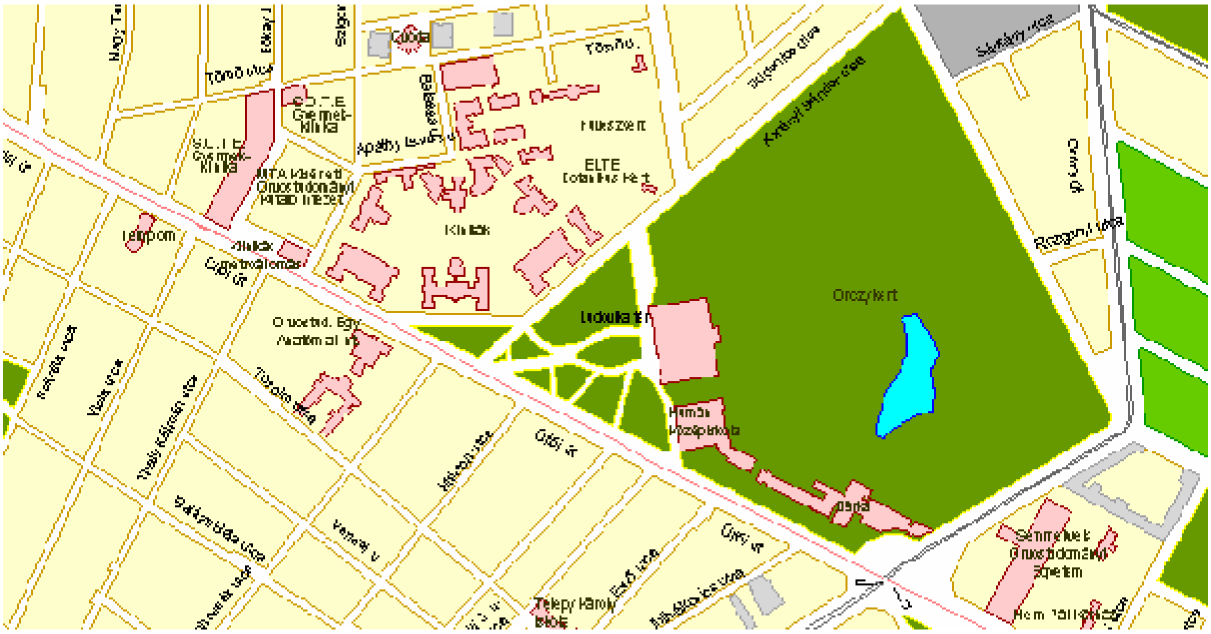
Megoldás:

A kék és rózsaszín felhők hasonló síkidomok. Ha a kék felhő szélessége kétszerese a rózsaszín megfelelő szakaszának, akkor a hasonlóság aránya 1:2. Ilyenkor a területek aránya 1:4, tehát egy rózsaszín felhő területe negyedakkora, mint egy kék felhőé.

Ha 8 kék felhő festéséhez 10 doboz festék kell, akkor 10 doboz festék $4 \cdot 8 = 32$ rózsaszín felhő befestésére elegendő. Azaz 1 rózsaszín felhő befestéséhez $\frac{10}{32} = \frac{5}{16}$ doboz festék kell, 10 rózsaszín felhő befestéséhez $10 \cdot \frac{5}{16} = 3{,}125$ doboz festék kell, tehát 4 dobozt kell megvásárolnunk.

Mintapélda[17]

Olvassuk le a térképről a megfelelő adatokat, majd számítsuk ki, mekkora az Orczy-kert területe, és milyen hosszú kerítés határolja!



425 m

Gyakran hasznos, hogy egy több lépésből megoldandó feladat kiszámítása előtt megoldási tervet készítünk. Ebben a feladatban bemutatjuk ezt a módszert.

Megoldás:

Terv: 1) Mérjük le a térképen a négyszög szükséges adatait; 2) Számítsuk ki a térképen levő síkidom területét; 3) A mért adat és a skála összehasonlításával állapítsuk meg a hasonlóság arányát; 4) Határozzuk meg a valós kerületet és területet.

Számítás:

1) Legyen az Üllői út felé eső oldal a négyszög AB oldala. $AB = 58$ mm, $BC = 36$ mm, $CD = 61$ mm és $DA = 71$ mm. Mivel ez általános négyszög, még legalább egy adatát le kell mérnünk: $AC = 83$ mm.

2) $T_{ABCD} = T_{ABC} + T_{CDA}$. A Héron-képletettel számoljuk ki az ABC háromszög és a CDA háromszög területét: $s = \frac{58+36+83}{2} = 88{,}5$, így

$$T_{ABC} = \sqrt{88{,}5 \cdot (88{,}5-58) \cdot (88{,}5-36) \cdot (88{,}5-83)} \approx 882{,}84\,(\mathrm{mm}^2).$$

Hasonlóan CDA háromszög területére: $s = \frac{61+71+83}{2} = 107{,}5$ így

$$T_{CDA} = \sqrt{107{,}5 \cdot (107{,}5-61) \cdot (107{,}5-71) \cdot (107{,}5-83)} \approx 2114{,}27\,(\mathrm{mm}^2).$$

$$T_{ABCD} = 882{,}84 + 2114{,}27 = 2997{,}11\,(\text{mm}^2).$$

3) A térkép alatti léptékről leolvasható, hogy az ábrán 47 mm felel meg a valóságban

425 méternek, így a hasonlóság aránya $\frac{47}{425000}$, azaz 1 : 9 042,5.

A valódi kerület a mért kerületnek 9 042,5-szerese, azaz

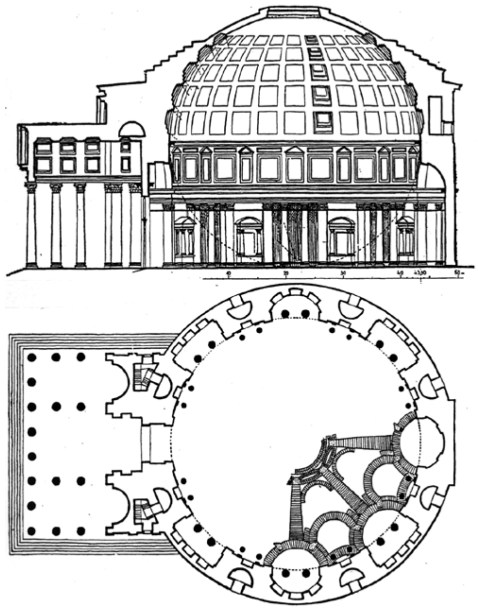
$$K = 9042{,}5 \cdot (0{,}058 + 0{,}036 + 0{,}061 + 0{,}071) \approx 2043\,(\text{m}).$$

4) A valódi terület a térképi területnek $9042{,}5^2$-szerese.

$T_{ABCD} = 2997{,}11\,mm^2 = 0{,}00299711\,(\text{m}^2)$, tehát a park területe

$$T_{park} = 9042{,}5^2 \cdot 0{,}00299711\,m^2 \approx 245063\ \text{m}^2.$$

Feladatok



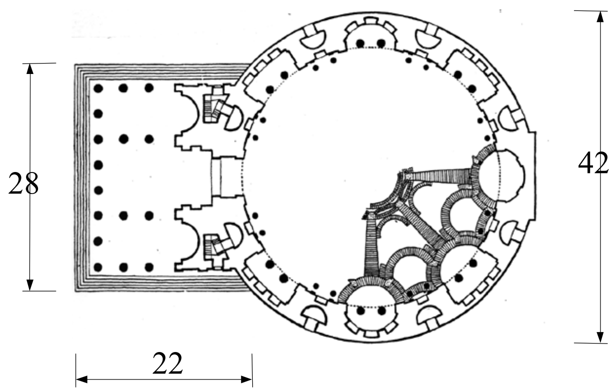
19. A római Pantheonról mindenhol megemlítik, hogy magassága ugyanakkora, mint a kör alakú főhajó átmérője, azaz 43,5 m. Mérd meg az alaprajzon szereplő méreteket, majd állapítsd meg az alaprajz és az eredeti épület méreteinek arányát!

Számítsd ki az épület alapterületét!

Megoldás:

Az ábrán nyilakkal jelölt szakaszokat érdemes megmérni. Az alaprajzon látható kör átmérője 4,2 cm, azaz 0,042 m. A hasonlóság aránya tehát

$$\frac{0{,}042}{43{,}5} \approx 1:1036.$$



Az alaprajz területét úgy kapjuk meg, hogy egy téglalap és egy kör területének összegéből kivonjuk egy körszelet területét. Ismerjük a húr hosszát, ez 2,8 cm. A kör sugarából és a húr hosszának feléből kiszámíthatjuk a középponti szög felét:

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1{,}4}{2{,}1} \Rightarrow \alpha = 84°$. A szög segítségével kiszámítható az ív hossza:

$i = \frac{84°}{360°} \cdot 2 \cdot 2{,}1 \cdot \pi \approx 3{,}08$, így a körszelet területe $T_{körszelet} = T_{körcikk} - T_{\Delta} = \frac{i \cdot r}{2} - \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2}$,

azaz $T_{körszelet} = \frac{3{,}08 \cdot 2{,}1}{2} - \frac{2{,}1^2 \cdot \sin 84°}{2} \approx 1{,}041\,\text{cm}^2$. $T_{téglalap} = 2{,}8 \cdot 2{,}2 = 6{,}16\,\text{cm}^2$.

$T_{kör} = 2{,}1^2 \cdot \pi \approx 13{,}85\,\text{cm}^2$. $T_{alaprajz} = 6{,}16 + 13{,}85 - 1{,}04 = 18{,}97\,\text{cm}^2$. A valódi alapterület ennek 1036^2-szerese, azaz $18{,}97 \cdot 1036^2 \approx 20\,360\,425\,\text{cm}^2 = 2\,036\,\text{m}^2$. Tehát a Pantheon alapterülete körülbelül 2000 m².

20. Egy termékkatalógusban a közúton használatos STOP-tábla méretét 60 cm-esnek adják meg, az iskolai közlekedési parkokban használatosakét pedig 30 cm-esnek. Nem közlik, hogy ez a leghosszabb átló mérete, vagy a tábla vízszintes legnagyobb kiterjedéséé.

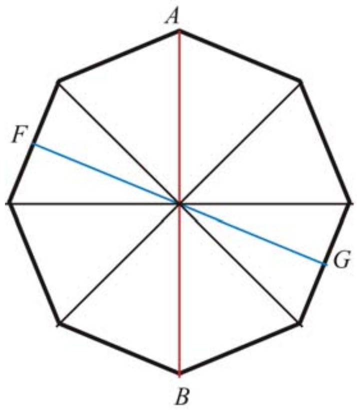
a) Számítsd ki mindkét esetben a közúti közlekedésben használatos STOP-tábla területét.

b) Ha egy adag piros festékkel a közúton használatos táblák közül 20-at tudunk befesteni, akkor hány táblára elegendő ez az iskolai parkban használatosak közül?

Megoldás:

a) Egyik esetben az *AB* szakaszról tudjuk, hogy 60 cm. Ilyenkor a 8 egyenlőszárú háromszög területe

$$8 \cdot \frac{30^2 \cdot \sin 45°}{2} = 1800 \cdot \sqrt{2} \approx 2545{,}6\,\text{cm}^2.$$



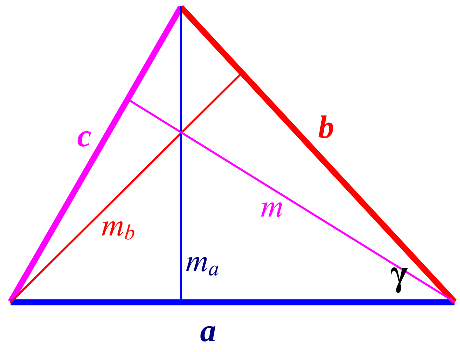
A másik esetben az *FG* szakasz lesz 60 cm. Ekkor a nyolcszög oldalának felét a derékszögű háromszögből szögfüggvénnyel kiszámíthatjuk:

$\sin 22{,}5° = \frac{\frac{a}{2}}{30} \Rightarrow a = 60 \cdot \sin 22{,}5° \approx 22{,}96\,\text{cm}$, így a 8 kis háromszög területe: $8 \cdot \frac{22{,}96 \cdot 30}{2} \approx 2755{,}2\,\text{cm}^2$.

b) A két tábla hasonló, a hasonlóság aránya 1:2, tehát a területük aránya 1:4.

A festék tehát 4-szer annyi, azaz 80 kisebb táblára elegendő.

Kislexikon



A háromszög kerülete és területe: $K_\Delta = a + b + c$.

$$T_\Delta = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$$

$$T_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}$$

$$T_\Delta = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)},$$

ahol s a háromszög kerületének fele, azaz $s = \frac{a+b+c}{2}$

$T_\Delta = \frac{K \cdot r}{2} = s \cdot r$, ahol K a kerülete, r a háromszögbe írt kör sugara, s pedig a kerület fele.

A négyzet kerülete és területe: $K_{négyzet} = 4a$; $T_{négyzet} = a^2$.

A téglalap kerülete és területe: $K_{téglalap} = 2 \cdot (a + b)$; $T_{téglalap} = a \cdot b$.

A trapéz kerülete és területe: $K_{trapéz} = a + b + c + d$;

$T_{trapéz} = \frac{a+c}{2} \cdot m$, ahol a és c a két párhuzamos oldal hossza, m pedig a trapéz magassága.

A paralelogramma kerülete és területe: $K_{parale\log ramma} = 2 \cdot (a + b)$.

$T_{paralelogramma} = a \cdot m_a = b \cdot m_b$.

$T_{paralelogramma} = a \cdot b \cdot \sin\gamma$, ahol γ az a és b hosszúságú oldalak bezárt szöge.

$T_{paralelogramma} = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}$, ahol e és f a két átló hossza, φ az általuk bezárt szög.

A rombusz kerülete és területe: $K_{rombusz} = 4a$; $T_{rombusz} = a \cdot m$.

$T_{rombusz} = \frac{e \cdot f}{2}$, ahol *e* és *f* a két átló hossza.

$T_{rombusz} = a^2 \cdot \sin\alpha$, ahol α a rombusz egyik szöge.

A deltoid kerülete és területe: $K_{deltoid} = 2 \cdot (a + b)$;

$T_{deltoid} = \frac{e \cdot f}{2}$ ahol *e* és *f* a két átló hossza.

Az érintőnégyszög területe: $T_{érintő\ négyszög} = \frac{r}{2} \cdot (a + b + c + d) = \frac{r \cdot K}{2}$.

Bármely konvex négyszög területe:

$T_{négyszög} = \frac{e \cdot f \cdot \sin\varphi}{2}$, ahol *e* és *f* a két átló hossza, és φ az általuk bezárt szög.