Matematika „A” 12. évfolyam

2. modul
Gazdasági matematika

Készítette: Lövey Éva

A modul célja	A felnőttkorba lépő tanulók gazdasági ismereteinek bővítése a tanult matematikai fogalmak segítségével.
Időkeret	4 óra
Ajánlott korosztály	12. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: A mindennapi életben, vásárlásnál, hitelfelvételnél, bankszámla nyitásakor, újság olvasásakor a hallott fogalmak értelmezése. Lehetőségek összehasonlítása. Hétköznapi szituációk. Gazdasági számítási feladatok és különböző összegzések gyors elvégzése. Szűkebb környezetben: A mértani sorozat elemei, mint kamatos kamat. A mértani sorozat elemeinek összege mint halmozódó betétállomány, vagy járadék tagjai. Ajánlott megelőző tevékenységek: Sorozatok, százalékszámítás.
A képességfejlesztés fókuszai	Számolás, számlálás, számítás: Képlet alapján a képletben szereplő ismeretlen kifejezés kiszámítása. Szöveges feladatok, metakogníció: A valóságból merített szöveges feladatok alapján felismerni az alkalmazandó eljárást, képletet. A megkapott végeredmény értelmezése. Szövegben előforduló tartalmi összefüggések megkeresése.
Megjegyzés:	Ennek a modulnak az anyaga nem tartozik az érettségi követelmények közé. A mindennapi életben való könnyebb eligazodás segítségére készült a 18 éves korosztálynak. Tanári döntésen múlik, hogy foglalkoznak-e vele.

AJÁNLÁS

Az utolsó órát a diákoknak kellene tartani, természetesen a tanár irányítása mellett. Kutatómunkára lenne szükség, házi feladat lenne felkészülni, az órán beszámolva a kutatás eredményéről az osztálytársaknak. A következő kutatási témákat javasoljuk úgy, hogy önként vállalkozók dolgozzák ki ezeket:

- Mit tartalmaz egy konkrét áru és bank esetén a THM? A műszaki áruházláncok hirdetési újságjaiból kiderül, hogy az üzletek szerződést kötnek egy-egy bankkal, amely különböző hitelkonstrukciókat ajánl a vásárlóknak. A hirdetési újságokban a THM igen széles skálán mozog, még tájékoztatásnak sem elég. Odaírják, hogy konkrét hitel esetén teljes felvilágosítást nyújt az ügyintézőjük. Ez lenne a diák feladata: válasszon ki egy árut, és ne nyugodjon addig, amíg ki nem deríti (ehhez joga van!), hogy itt milyen kamattal számol a bank, milyen gyakran tőkésítenek, milyen járulékos költségek vannak még, magyarul: miből jön itt össze a THM?
- Van 1 millió forintunk. Két évig nincs rá szükségünk. Keresse meg a diák a legkedvezőbb betéti lehetőséget. Lehet betét, de akár államkötvény is…. Számítsa ki, mennyi pénzünk lesz 2 év múlva.
- Sürgős szükségem van 100 000 Ft szabad felhasználású hitelre. Nézzen utána, milyen feltételek mellett, hogy lehet a legkedvezőbben hozzájutni. Több bank ajánlatát hasonlítsa össze.

Utóbbi két feladatnál nagyon hasznos az Internet használata.

- Továbbtanulni szándékozóknak: Nézzen utána, azon a területen, ahol – szándéka szerint – majd elhelyezkedik, kb. mennyi a kezdőfizetés, és a távlati lehetőségek. Majd a diákhitel honlapján a hitelkalkulátorral számíttassa ki, hogy különböző összegű hitelek felvétele esetén mikorra törlesztheti a kölcsönt és milyen törlesztőrészletekkel.
- Ha mindezekre nincs fogadókészség a csoportnál, akkor jöhet a modulvázlatban meghatározott IV. rész.

A TANANYAG JAVASOLT ÓRABEOSZTÁSA

1. óra:	Betétek, EBKM
2. óra:	Járadék
3. óra:	Áruvásárlási kölcsön, THM, devizahitel
4. óra	Hitelek, diákhitel

ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEK

Sorozatok

Középszint

Ismerje a számsorozat fogalmát és használja a különböző megadási módjait.
Tudjon olyan feladatokat megoldani a számtani és mértani sorozatok témaköréből, ahol a számtani, illetve mértani sorozat fogalmát és az a_n-re, illetve az S_n-re vonatkozó összefüggéseket kell használni.
Tudja a kamatos kamatra vonatkozó képletet használni, s abból bármelyik ismeretlen adatot kiszámolni.

Emelt szint

Sorozat jellemzése (korlátosság, monotonitás) a konvergencia szemléletes fogalma.
Egyszerű rekurzív képlettel megadott sorozatok.
Bizonyítsa a számtani és a mértani sorozat általános tagjára vonatkozó összefüggéseket, valamint az összegképleteket.
Ismerje a végtelen mértani sor fogalmát, összegét.
Tudjon gyűjtőjáradékot és törlesztőrészletet számolni.

Gondolkodási módszerek

Legyen képes a tanuló adott szövegben rejlő matematikai problémákat észrevenni, szükség esetén matematikai modellt alkotni, a modell alapján számításokat végezni, és a kapott eredményeket értelmezni.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény**
I. Betétek, EBKM			
1.	Tőkésítés, kamatperiódus	Kommunikáció, kombinatív gondolkodás, pontos fogalmazás	1. mintapélda; 2. feladat
2.	EBKM fogalma, számítása		Internet+ www.pszaf.hu, vagy 2., 3. mintapélda és 3. feladat
3.	Halmozódó betét kamata, gyűjtőjáradék	Rendszerzés, mennyiségi következtetés	4. mintapélda; 4. feladat
II. Járadék			
1.	Járadék fogalma	Rendszerzés, logikus gondolkodás	5. mintapélda
2.	Számítási feladat		6. mintapélda; 5. és 6. feladat
III. Kölcsönök, THM, diákhitel			
1.	THM fogalma	Kommunikáció, kombinatív gondolkodás, pontos fogalmazás	6. mintapélda
2.	Áruvásárlási kölcsön	Rendszerzés, mennyiségi következtetés	7. mintapélda
3.	Árfolyam, deviza alapú hitelek		10., 11. mintapélda

IV. Hitelek, diákhitel			
1.	Személyi kölcsön	Rendszerezés	8. mintapélda
2.	Diákhitel (csoportos feldolgozás)	Szövegértés, kommunikáció, logikus gondolkodás	Internet+ www.diakhitel.hu A. és B. feladatlapok

I. Betétek

Mintapélda$_1$

Számítsuk ki, mekkora éves kamatot jelent az, ha a bankba tett 200 000 Ft-ot évi 6%-kal

a) hathavonta (azaz évente kétszer),

b) kéthavonta,

c) havonta tőkésítik.

A fenti tőkésítési gyakoriságot **kamatperiódusnak** nevezik.

Megoldás:

Legyen a tőke $A = 200000$ Ft.

a) Ha egy bank évente kétszer tőkésít, az azt jelenti, hogy az éves kamat felét két alkalommal hozzáírja a tőkéhez. Tehát a 6% felét, 3% kamatot hozzáadnak az A tőkéhez, így két tőkésítés után $A \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{2}\right)^2 = A \cdot 1{,}03^2 = 1{,}0609 \cdot A$-ra nő a tőke.

Ez megfelel 6,09%-os éves kamatnak.

b) Ha a bank évente 6-szor tőkésít, azt jelenti, hogy az éves kamat hatodrészét 6 alkalommal hozzáírja a tőkéhez. Tehát a 6% hatodát, 1% kamatot hozzáadnak az A tőkéhez, így 6 tőkésítés után $A \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{6}\right)^6 = A \cdot 1{,}01^6 \approx 1{,}06152A$-ra nő a tőke.

Ez évi 6,152%-os kamatnak felel meg.

c) Ha a bank évente 12-szer tőkésít, az azt jelenti, hogy az éves kamat tizenkettedrészét adják hozzá tizenkét alkalommal az aktuális tőkéhez. Tehát 12 kamatperiódus után a tőke $A \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12} = A \cdot 1{,}005^{12} \approx 1{,}06168A$. Ez 6,168%-os kamatnak felel meg.

Számunkra ez a legkedvezőbb megoldás.

Megjegyzés: Látható, hogy számításunk eredménye független attól, hogy mekkora az A tőke.

Általánosan: Ha a bank p%-os évi kamat mellett évi n alkalommal tőkésít, akkor az induló tőke $\left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$-szeresére nő.

Módszertani megjegyzés: A példák adatait megpróbáltuk valós banki ajánlatok alapján számítani. A következő mintapéldához a bankfelügyelet összehasonlító táblázatának adatait használtuk úgy, hogy két bank szolgáltatásai közül csak azt vettük figyelembe, melynek összegsávjába esik az 1 millió forint. Időigényesebb, de érdekesebb, ha a bankfelügyelet honlapjáról a diákokkal közösen mazsolázunk a lehetőségek közül.
www.pszaf.hu (Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyelete)

Mintapélda$_2$

Azt tervezzük, hogy beteszünk a bankba 2007. január 1-jén 1 millió forintot, és 2 éven át nem nyúlunk hozzá. A következő banki ajánlatok közül választhattunk 2007-ben. Segíts dönteni!

Elnevezés	Sávhatárok	Kamatláb(bruttó) % / EBKM %					Minimálisan leköthető összeg (Ft)	Betétlejárat előtti felmondáskor alkalmazott kamatláb	Kamatprémium
		1 hónapos	2 hónapos	3 hónapos	6 hónapos	1 éves			
Kamatcsúcs betét	1 000 000 – 2 999 999	X	6,34/6,49	X	X	X	1 000 000	0,00 Ft	0,00 Ft
Határidős hozambetét	1 000 000-tól	5,15/5,22	5,15/5,22	5,20/5,27	5,20/5,27	5,20/5,27	1 000 000	0,00%	0,25
Família betétszámla	1 000 000 Ft – 9 999 999 Ft	X	X	X	X	6,00/6,17	50 000		

A következőket lehet még tudni a fenti betétekről:

A határidős hozambetét a lejárat után nem kamatozik.

A Família betétszámla havi kamatjóváírású.

Mi is az az EBKM?

Az **egységesített betéti kamatláb mutató** egyike azoknak a mutatószámoknak, amelyek segítenek bennünket a különböző banki ajánlatok összehasonlításában. Ahogy a boltokban kötelesek feltüntetni minden mosópornál, hogy abból a mosóporból mennyibe kerülne 1 kg, ugyanígy a bankok is megadják, milyen éves kamat adódik a betétjeiknél, hogy a különböző időpontokban történő tőkésítések ellenére is össze tudjuk hasonlítani az egyes betéti kamatokat. Tehát **az EBKM azt adja meg, hogy mekkora valamely betét tényleges éves hozama.** Ezt köteles minden bank azonos elvek alapján kiszámítani.

Megoldás:

A *Kamatcsúcs betét* esetén úgy tudunk két éven át takarékoskodni, ha kéthavonta újra és újra lekötjük 2 hónapra. Bár erről nem szól a hirdetmény, a kamatjóváírás is valószínűleg kéthavonta történik meg. Ilyenkor az éves kamat $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ részével számolnak, így 1 év alatt az 1 millió forintunk

$$1000\,000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0634}{6}\right)^6 \approx 1{,}065099 \cdot 1000\,000 = 1065\,099 \text{ Ft-ra nő.}$$

Ez az összeg az 1 millió forintunk 6,51%-os növekedését jelzi az első évben, ami nagyon hasonlít a táblázatunkban szereplő 6,49%-hoz.

Tulajdonképpen már ezek után, különösebb számolgatás nélkül dönthetünk is, azt a betéti formát érdemes választanunk, amelynél az EBKM a legnagyobb. Az egyes lehetőségeknél: *Kamatcsúcs betét* 6,49%, *Határidős hozambetét* 5,27%, *Família betétszámla* 6,17%, vagyis az első lekötés a legkedvezőbb.

Előfordulhat, hogy valamelyik szemfüles gyerek észreveszi, hogy az EBKM akkor is különbözik az éves kamattól, ha a kamatperiódus 1 év. Ennek oka a következő: a bankoknak az a szokásuk, hogy az éves kamatot 360 napra adják meg. (Ez a „banki év”.) Ha az általuk megadott kamatot átszámítjuk 365 napra (azaz elosztjuk 360-nal, és szorozzuk 365-tel, az EBKM értékét kapjuk meg.

Mintapélda₃

Számítsuk ki, mekkora összeghez jutunk két év elteltével a fenti – legjobb – ajánlat esetén!

Megoldás:

A tényleges összeg kiszámításához figyelembe kell venni, hogy betétünk kamata után kamatadót kell fizetni. A kamatadó mértéke a mindenkori kamat 20%-a, így a két hónap elteltével az *A* összeg után $\frac{0{,}0634}{6} \cdot A$ kamatot írnának jóvá (tőkésítenének), de ennek 20%-át rögtön az államnak utalják, így számlánkon csak a kamat 80%-a, azaz

$\frac{0{,}0634}{6} \cdot A \cdot 08 = \left(\frac{0{,}0634}{6} \cdot 08\right) \cdot A$ kamat jelenik meg. Tehát 1 millió forintunk 24 hónap, azaz 12 kamatperiódus alatt $1000\,000 \cdot \left(\frac{0{,}0634}{6} \cdot 0{,}8\right)^{12} \approx 1331484$ Ft-ra nő.

A továbbiakban úgy tekintjük, mintha a megadott kamat mértéke az adózás utáni kamat lenne, azaz a meghirdetett kamat 80%-ával számolnánk.

Mintapélda$_4$

Ha a bank évi 12%-ot ígér havi tőkésítéssel, az azt jelenti, hogy minden hónap végén az aktuális betét után az éves kamat tizenketted részényi kamatot fizetnek. A kamatot havonta írják jóvá (és **tőkésítik**). Ez azt jelenti, hogy minden hónap végén az éppen bankba levő pénzünk 1%-át hozzáadják a betéthez, ettől kezdve a kamat is kamatozik.
Havonta 20 000 Ft-ot tudunk félretenni, és ezt minden hónap elején a számlánkra tesszük.
Olyan bankot választottunk, amelyik (ha 2 éven belül nem nyúlunk a pénzünkhöz) évi 12% kamatot fizet.
Célszerű egy táblázatot készíteni a hónap eleji és év végi helyzetünkről.

Megoldás:

	Hónap elején	Hónap végén
1.	20 000	$20000\cdot 1{,}01$
2.	$20000\cdot 1{,}01+20000$	$20000\cdot 1{,}01^2+20000\cdot 1{,}01$
3.	$20000\cdot 1{,}01^2+20000\cdot 1{,}01+20000$	$20000\cdot 1{,}01^3+20000\cdot 1{,}01^2+20000\cdot 1{,}01$
…		
24.	$20000\cdot 1{,}01^{23}+\ldots+20000\cdot 1{,}01+20000$	$20000\cdot 1{,}01^{24}+\ldots+20000\cdot 1{,}01+20000\cdot 1{,}01$

Észrevehetjük, hogy a 24. hónap végén egy olyan mértani sorozat első 24 elemének összegét kapjuk, melynél $a_1=20000\cdot 1{,}01$ és $q=1{,}01$.

Tehát a 24 hónap leteltével felvehető összeg:

$$S_{24}=20000\cdot 1{,}01\cdot\frac{1{,}01^{24}-1}{1{,}01-1}\approx 544864.$$

Két év elteltével 544 864 Ft-unk lesz a bankban.

A fenti típusú takarékosságot **gyűjtőjáradéknak** nevezzük: rendszeres időközönként (pl. havonta, évente) azonos összeget fizetünk be, és az a számlánkon kamatozva gyűlik.

Feladatok

1. Az újságban ezt olvashattuk: „Nyolc nap alatt elkapkodták a magánbefektetők a CIB 2006. augusztus elején, 3 milliárd forint értékben piacra dobott, hároméves futamidejű, a futamidő alatt összesen 24 százalékos kamatot fizető CIB Classic 2009A kötvényét.” Mekkora évi kamatnak felel meg ez?

Megoldás:

$q^3 = 1{,}24$

$q = \sqrt[3]{1{,}24} \approx 1{,}0743$

Tehát évi 7,43%-os kamatnak felel meg.

2. Döntsd el, az a), b) és c) esetekben alábbi lehetőségek közül mikor, mennyit kapunk kézhez 1 év után, ha a bankba tett pénzünk százezer forint! (A kamatadót most ne vedd figyelembe!)

a) Évi 6% kamat esetén, havi kamatperiódussal.

b) Évi 6,3% , ha a tőkésítés kéthavonta történik.

c) Évi 6,4% kamat, ha évente kétszer tőkésítenek.

Megoldás:

a) Havi kamat 0,5% lesz, így pénzünk 1 év múlva $100\,000 \cdot 1{,}005^{12} \approx 106168$ Ft.

b) Kéthavonta a kamat $\frac{6{,}3}{6} = 1{,}05\%$ lesz (mivel az év folyamán 6-szor tőkésítenek), így 1 év múlva $100\,000 \cdot 1{,}0105^6 \approx 106\,468$ Ft lesz a számlánkon.

c) Félévente a kamat 3,2% lesz, így egy év után $100\,000 \cdot 1{,}032^2 \approx 106\,502$ Ft-ot vehetünk fel.

3. Számítsd ki az EBKM értékét, ha az éves kamat 4,8%, és a kamatperiódus

a) 1 hónap; b) 3 hónap; c) 4 hónap.

Megoldás:

a) Most évi 12 alkalommal tőkésítenek, tehát a kamat alkalmanként $\frac{4{,}8\%}{12} = 0{,}4\%$, így az egy évre számított növekedés $\left(1 + \frac{0{,}4}{100}\right)^{12} = 1{,}004^{12} \approx 1{,}04907$, ilyenkor az EBKM 4,907%.

b) Most évi 4 alkalommal tőkésítenek, tehát a kamat alkalmanként $\frac{4,8\%}{4} = 1,2\%$, így az egy évre számított növekedés $\left(1+\frac{1,2}{100}\right)^4 = 1,012^4 \approx 1,04887$, ilyenkor az EBKM 4,887%.

c) Most évi 3 alkalommal tőkésítenek, tehát a kamat alkalmanként $\frac{4,8\%}{3} = 1,6\%$, így az egy évre számított növekedés $\left(1+\frac{1,6}{100}\right)^3 = 1,016^3 \approx 1,04877$, ilyenkor az EBKM 4,877%.

4. Egy életbiztosítással kombinált megtakarítási számlára 10 éven át minden év elején 150 000 Ft-ot fizetünk be. Ebből 20 000 Ft az éves biztosítás díja. Ezek általában évente változó kamatozású számlák, de az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy évi 6% kamatot fizetnek. A 10 év elteltével mennyi pénz felett rendelkezünk a számlán?

Megoldás:

A számlára befizetett összegből csak 130 000 Ft a megtakarítás, hiszen 20 000 Ft a biztosításunk éves díja.

	Év elején	Év végén
1.	130 000	$130\,000 \cdot 1,06$
2.	$130\,000 \cdot 1,06 + 130\,000$	$130\,000 \cdot 1,06^2 + 130\,000 \cdot 1,06$
3.	$130\,000 \cdot 1,06^2 + 130\,000 \cdot 1,06 + 130\,000$	$130\,000 \cdot 1,06^3 + 130\,000 \cdot 1,06^2 + 130\,000 \cdot 1,06$

…

10.	$130\,000 \cdot 1,06^9 + \ldots + 130\,000 \cdot 1,06 + 130\,000$	$130\,000 \cdot 1,06^{10} + \ldots + 130\,000 \cdot 1,06 + 130\,000 \cdot 1,06$

A 10. év végén felvehető összeg egy mértani sorozat első 10 elemének összege, ahol

$a_1 = 130\,000 \cdot 1,06, \;\; q = 1,06 \quad n = 10 \;\; S_{10} = 130\,000 \cdot 1,06 \cdot \frac{1,06^{10} - 1}{0,06} \approx 1\,816\,314 \text{ Ft.}$

Tíz év elteltével a számlánkon 1 816 314 Ft lesz.

II. Járadék

Takarékoskodni nem csak azért lehet, hogy valami vágyott dologra összegyűjtsük a pénzt, hanem hogy később, azonos időközökben – amikor szükségünk van rá – fölvegyük. Ilyenkor **járadékot** biztosítunk magunknak.

Mintapélda$_5$

Egy idős házaspár elhatározza, hogy – nyaralójuk eladásából származó – 5 millió forintjukat bankba teszik évi 9%-os kamatra, és amíg pénzük tart, minden évben a kamat tőkésítése után kivesznek 500 000 Ft-ot, hogy abból utazzanak. A kamatot minden év végén írják jóvá. Mennyi pénzük marad a 10. év végén?

Megoldás:

	Év elején	Év végén
1.	5 000 000	$5\,000\,000\cdot 1{,}09-500\,000$
2.	$5\,000\,000\cdot 1{,}09-500\,000$	$5\,000\,000\cdot 1{,}09^2-500\,000\cdot 1{,}09-500\,000$
3.	$5\,000\,000\cdot 1{,}09^2-500\,000\cdot 1{,}09-500\,000$	$5\,000\,000\cdot 1{,}09^3-500\,000\cdot 1{,}09^2-500\,000\cdot 1{,}09-500\,000$

…

10.	$5\,000\,000\cdot 1{,}09^9-S_9$	$5\,000\,000\cdot 1{,}09^{10}-S_{10}$

Az év végén kamatozik a pénzünk, ezért az év elején levő vagyonunkat megszorozzuk $1+\frac{p}{100}=1+\frac{9}{100}=1{,}09$-dal, majd kivonunk belőle 500000 Ft-ot.

Észrevehetjük, hogy a levont összegek egy mértani sorozat tagjai, melynek első tagja $a_1=500\,000$, kvóciense pedig $q=1{,}09$.

Számítsuk ki, mekkora összeggel rendelkezik az idős házaspár a tizedik év végén:

$$5\,000\,000\cdot 1{,}09^{10}-S_{10}=5\,000\,000\cdot 1{,}09^{10}-500\,000\cdot\frac{1{,}09^{10}-1}{1{,}09-1}\approx 11\,836\,818-7\,596\,465=$$

$=4\,240\,354$. Láthatjuk, hogy a tizedik év végén még majdnem az eredeti összeg áll a rendelkezésükre. (Eltekintettünk az inflációtól és a kamatadótól, ezért ez az ideális, szép eredmény.)

Mintapélda$_6$

Számítsuk ki, hogy az előző példában szereplő összeg évi 500 000 Ft kivétele esetén hány évre elegendő az idős házaspárnak.

Megoldás:

Az előző feladatban szereplő képletet használhatjuk most is, csak úgy, hogy a 10 év helyett n év szerepeljen mindig. A rendelkezésre álló összeg n év elteltével:

$$\ddot{O}(n) = 5\,000\,000 \cdot 10^n - S_n = 5\,000\,000 \cdot 1{,}09^n - 500\,000 \cdot \frac{1{,}09^n - 1}{1{,}09 - 1}.$$

Amíg van pénz a számlájukon, addig ez a különbség pozitív, tehát az $\ddot{O}(n) \geq 0$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk.

$$5\,000\,000 \cdot 1{,}09^n - 500\,000 \cdot \frac{1{,}09^n - 1}{1{,}09 - 1} \geq 0 \qquad / : 500\,000$$

$$10 \cdot 1{,}09^n - \frac{1{,}09^n - 1}{0{,}09} \geq 0 \qquad / \cdot 0{,}09$$

$$0{,}9 \cdot 1{,}09^n - \left(1{,}09^n - 1\right) \geq 0$$

$$-0{,}1 \cdot 1{,}09^n + 1 \geq 0 \qquad / - 1$$

$$0{,}1 \cdot 1{,}09^n \leq 1 \qquad / \cdot 10$$

$$1{,}09^n \leq 10$$

Mivel az $x \mapsto \lg x$ függvény szigorúan nő, vehetjük mindkét oldal logaritmusát:

$$\lg 1{,}09^n \leq \lg 10,$$

mivel $\lg 10 = 1$, ezért $\quad n \cdot \lg 1{,}09 \leq 1 \qquad / : \lg 1{,}09 > 0$

$$n \leq \frac{1}{\lg 1{,}09} \approx 26{,}72.$$

Ez azt jelenti, hogy a telek árából idealizált körülmények között 26 éven át tudnak utazni.

Feladatok

5. Egymillió forintot beteszünk a bankba, majd a következő évtől minden év elején kiveszünk 100 000 Ft-ot. Az évi 9,6%-os kamatot minden év végén tőkésítik. Mennyi pénzünk marad a 11. év elején?

Megoldás:

A megmaradó pénz: $1000000 \cdot 1{,}096^{10} - S_{10}$, ahol

$$a_1 = 100\,000, \quad q = 1{,}096, \qquad S_{10} = 100\,000 \cdot \frac{1{,}096^{10} - 1}{1{,}096 - 1} \approx 1563\,493.$$

Tehát az összeg a 11. év elején kb.

$1\,000\,000 \cdot 1{,}096^{10} - 1563\,493 \approx 2\,500\,953 - 1563\,493 \approx 937\,460$ Ft, ennyi marad a bankban.

6. 200 000 Ft kölcsönt vettünk fel a bankból, évi 12%-os kamatra.
Ha minden hónap elején 15 000 Ft-ot tudunk törleszteni, mennyi idő alatt fizetjük vissza a hitelt?

Megoldás:

Ha az éves kamat 12%, a havi kamat 1% lesz, melyet a hónap végén tőkésít a bank.
A törlesztett összeg mértani sorozat összegeként határozható meg.
S_n egy olyan mértani sorozat első n elemének összege, ahol $a_1 = 15000$ *és* $q = 1{,}01$.

A kölcsönt akkor törlesztettük, ha $200\,000 \cdot 1{,}01^n - S_n \le 0$, ahol $S_n = 15000 \cdot \dfrac{1{,}01^n - 1}{0{,}01}$.

$$200\,000 \cdot 1{,}01^n - 15\,000 \cdot \frac{1{,}01^n - 1}{0{,}01} \le 0. \qquad \text{Innen:} \qquad n \ge \frac{\lg \frac{15}{13}}{\lg 1{,}01} \approx 14{,}38.$$

Tehát 15 hónap alatt ki tudjuk fizetni a kölcsönt.

III. Kölcsönök, THM, diákhitel

Egy üzletlánc hirdetésében a következőket olvashatjuk:
A fűnyírót megvásárolhatja 12 havi részletre is, 0% kamat, THM: 5,8%.
A fűnyíró ára (ha készpénzzel fizetünk) 48000 Ft, a havi törlesztőrészlet 4000 Ft – mi is lehet hát akkor a THM?

A **THM**, azaz **teljes hiteldíjmutató** is egyike azoknak a mutatóknak, ami segít nekünk abban, hogy eligazodjunk a különböző bankok ajánlatai között. **A THM az összes olyan költséget tartalmazza, ami egy év alatt felmerül a kölcsön törlesztése kapcsán**.

Ilyen lehet például a banki kamaton kívül a hitelbírálati díj, a folyósítási jutalék, a kezelési költség stb. Ha lakást vásárolunk, beszámít a THM-be a megvásárolandó ingatlan értékbecslési díja is. Fenti, „fűnyírós" példánkban valószínűleg fizetnünk kell valami okból (például hitelbírálat díjként) $48000 \cdot 0{,}058 = 2784$ Ft-ot. Még valószínűbb, hogy ez 2800 Ft lesz, mivel a $\frac{2800}{48000} \approx 0{,}05833$ kerekített értéke is 5,8%.

Mintapélda$_7$

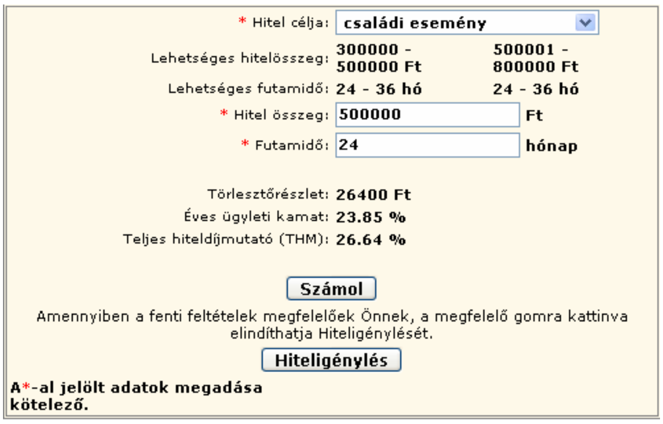
Kerékpárt akarunk vásárolni a négyfős család minden tagjának, és ezért személyi kölcsönt veszünk fel, melyet 4 hónap múlva egy összegben kell visszafizetni. Tudjuk, hogy a bank évi 15% kamatot számít fel, és a 100 000 Ft-os kölcsön kiutalásakor 1%-os kezelési költséget levonnak.
Számítsuk ki, mekkora a THM?

Megoldás:

Számítsuk ki, mekkora kamatot kell fizetni 4 hónapra a felvett összeg után! 4 hónap az év ⅓ része, így a kamat 5%, a visszafizetendő összeg $100\,000 \cdot 1{,}05 = 105\,000$ Ft. Nézzük meg, hogy ez hányszorosa annak az összegnek, amihez hozzájutottunk. Igazából csak 99 000 Ft-ot kaptunk, hiszen 1%-ot a kifizetéskor levontak: $\frac{105\,000}{99\,000} \approx 1{,}0606$. A THM megállapításakor a jobb összehasonlíthatóság kedvéért mindig 1 évre számolnak. Az egy évre számított kamat hatványozódik: $1{,}0606^4 \approx 1{,}2653$. Tehát a THM itt 26,53% lesz, ami meglehetősen magas érték.

Mintapélda₈

Vannak olyan kölcsönök, melyekhez igen könnyű gyorsan hozzájutni, de igen magas kamatozásúak. Ilyenkor – mivel a különböző futamidők esetén különböző kamattal számolnak – csak így adják meg a THM értékét: pl:THM: 25–30%. Lehet azonban hitelkalkulációt kérni, ahol ha beadjuk a kért összeget és a futamidőt, kiszámítják a törlesztőrészletet. Ilyenkor már megadják a THM értékét is. Egy ilyen ajánlatot találtunk az interneten. Nézzük meg, a kamaton kívül kell-e számítanunk valami egyéb költségre is a hitel felvételekor?



Megoldás:

Ha az éves kamat 23,85%, akkor havi törlesztések esetén a havi kamat ennek tizenkettedrésze lesz, ami éves kamatban

$\left(1+\frac{0{,}2385}{12}\right)^{12} \approx 0{,}2664$, és ez pontosan a THM-mel megegyező érték, tehát ennél a kölcsönnél a kamaton kívül nincs egyéb teher.

Módszertani megjegyzés: Az alábbi mintapéldát akkor javaslom, ha az utolsó óra csoportfoglalkozásán nem a diákhitellel foglalkoznak. A diákhitel kamatát nem így számolják, a számítási mód a feladatlap ismertetőjében található. Röviden: naponta kiszámolják az aktuális tartozás kamatát, majd ezt minden év december 31-én tőkésítik. Belátható, hogy ezzel a módszerrel 5 évi halmozódást számolni igen bajos, bár egy egyszerű táblázatkezelő programmal ez kiszámítható.

DIÁK HITEL

Hamarosan leérettségiztek, és lehet, hogy lesz köztetek olyan is, aki **diákhitelt** vesz igénybe a továbbtanuláshoz. A hitelt államilag támogatott vagy önköltséges nappali tagozatos képzésben továbbtanuló egyetemi hallgatók vehetik igénybe. Dönthetsz, hogy hány félévre kéred a folyósítását. Egy tanulmányi félév során 5 havi diákhitelt folyósítanak.

Akkor kezded el törleszteni a kölcsönt, amikor munkába állsz. Az első két évben a minimálbér 6%-át kell fizetned havonta mint törlesztőrészletet. A harmadik évtől kezdve a havi törlesztőrészletet úgy számítják ki, hogy a két évvel korábbi egész éves béred tizenketted részének 6%-át kell havonta törlesztésként befizetned egészen addig, amíg nem fizetted vissza az adósságod.

Módszertani megjegyzés: A diákhitellel kapcsolatos tudnivalók elérhetők a www.diakhitel.hu oldalon. Található ott egy hitelkalkulátor is. Ez megkérdezi, hány féléven át havi milyen összeget akar felvenni a hallgató, majd megtippelteti vele a kezdő fizetését, és megjósolja, mekkora törlesztőrészletet fog fizetni, és mikorra jár le a tartozása.

Mintapélda₉

Az államilag támogatott képzésben választhatsz, hogy havonta 15, 21, 25 vagy 30 ezer forintot veszel fel. A 2006/07-es tanévben az éves kamat 9,5%. Ha úgy döntesz, hogy 10 félévre veszed fel a hitelt, havi 30ezer forintot, és minden félévben 1 összegben kéred, milyen tartozással zárod tanulmányidat? (Feltételezzük, hogy az 5 év folyamán a kamat változatlan marad.)

Megoldás:

Az első kölcsön felvétele és a 10. félév vége között (pl. 2008. október–2013. június) 57 hónap telik el. Az 1 hónapra számított kamat az éves kamat tizenketted része: $\frac{0{,}095}{12}$.

A félévben felvett kölcsön	Ennek kamattal növelt összege:
1. félév–október 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{57}$
2. félév–március 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{52}$
3. félév–október 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{45}$
4. félév–március 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{40}$
5. félév–október 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{33}$
6. félév–március 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{28}$
7. félév–október 150 000	$150\,000 \cdot \left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{21}$

8. félév–március 150 000	$150\,000\cdot\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{16}$
9. félév–október 150 000	$150\,000\cdot\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{9}$
10. félév–március 150 000	$150\,000\cdot\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{4}$

A jobb oldali oszlop összege lesz a fennálló tartozásunk. Észrevehetjük, hogy ha minden második sort tekintjük, azok mértani sorozat egymást követő tagjai. Ha alulról felfelé nézzük a sorozatok egymást követő tagjait, mindkét sorozat esetén $q=\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{12}$, mindkettő 5 tagból áll, de az októberi sorozatnál $o_1=150\,000\cdot\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{9}$, míg a márciusinál $m_1=150\,000\cdot\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{4}$. A fennálló kölcsöntartozásunk tehát

$$S_o+S_m=150\,000\cdot\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{9}\cdot\frac{\left(\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{12}\right)^{5}-1}{\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{12}-1}+150\,000\cdot\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{4}\cdot\frac{\left(\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{12}\right)^{5}-1}{\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{12}-1}=$$

$$150\,000\cdot\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{4}\cdot\frac{\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{60}-1}{\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{12}-1}\cdot\left(\left(\frac{0{,}095}{12}+1\right)^{5}+1\right)\approx 1925\,342.$$

A fenti műveletsort még számológéppel sem egyszerű elvégezni. Javasoljuk a diákoknak, hogy először számolják ki a $\frac{0{,}095}{12}+1$ mennyiséget (ami az egy havi kamat), majd ha azt eltárolták a memóriába, a számításuk áttekinthetőbb lesz.

Mintapélda$_{10}$

A bankokban **deviza alapú hiteleket** is fel lehet venni. Ez azt jelenti, hogy a felvett összeget, majd a mindenkori tartozást nem forintban tartják nyilván, hanem valamely más pénznemben. A mindenkori törlesztőrészletet is ebben a valutában határozzák meg. Ha a jövedelmünk forintban keletkezik, módunkban áll a törlesztést is forintban befizetni, de úgy, hogy az összeg idegen valutára átváltva akkora legyen, mint a megállapított részlet. Így fordulhat elő az, hogy a deviza alapú hitelünk törlesztőrészlete azonos kamat és kezelési költség mellett is hónapról hónapra változik.

A következő táblázat azt mutatja, milyen ajánlatot adhat egy bank egy adott összegű kölcsön fölvételére.

a) Számítsuk ki, mekkora a felvett hitel!

b) Számítsuk ki, a meghirdetés pillanatában mennyi volt a svájci frank ára!

c) Számítsuk ki, hogy ha a hitelt 10 éves futamidőre vettük fel, milyen törlesztőrészletet kell fizetni 2007. március 28-án, ha 1 svájci frank ára 158,53 Ft az adott bankban azon a napon!

Hiteltípus	**Kamat %**	**Kezelési költség/év**	**Törlesztőrészlet a futamidő függvényében**	
	1 évre fix		**10 év**	**20 év**
Svájci frank alapú	2,49	2,5% (125 eFt)	301 CHF (48,6 eFt)	170 CHF (27,4 eFt)
Ft alapú forrásoldali támogatással	6,99	2,0% (100 eFt)	58,3 eFt	39 eFt

Megoldás:

a) A felvett hitel összegét ki tudjuk számítani, hiszen látjuk, hogy 2%-a 100 000 Ft. Így maga a felvett kölcsön $\frac{100\,000}{0{,}02} = 5\,000\,000$ Ft. Ugyanezt az eredményt adja a CHF alapú hitelajánlat is: $\frac{125\,000}{0{,}025} = 5\,000\,000$ Ft.

b) A bank ajánlatában az szerepel, hogy 301 CHF (svájci frank) 48,6 eFt-nak felel meg, tehát $1\text{ CHF} = \frac{48\,600}{301} \approx 161{,}46$ Ft. Ugyanakkor az is szerepel, hogy 170 CHF 27,4 eFt-nak felel meg, ebből $1\text{CHF} = \frac{27\,400}{170} \approx 161{,}18$ Ft. A különbség valószínűleg annak a kerekítésnek a hibájából adódik, hogy a törlesztés forintértékét ezer forint pontossággal adták meg.

c) 10 éves futamidő esetén 1 havi törlesztőrészlet 301 CHF, amiért 2007. március 28-án $301 \cdot 158{,}53 \approx 47\,718$ Ft-ot kell fizetni.

Mintapélda[11]

A következő grafikon azt mutatja, hogyan változott a forint árfolyama az euróéhoz képest, azaz hány forintért lehetett vásárolni 1 eurót:

1. grafikon – A forint/euró árfolyam alakulása 2002 január és 2004 november között

Forrás: MNB (2004)

a) Olvasd le a grafikonról, hány forintért lehetett vásárolni 1 eurót

2003. január 2-án, 2003. május 2-án, 2004. szeptember 2-án.

b) Olvasd le a grafikonról, a vizsgált időszak alatt, mikor ért a legtöbbet a forint (az euróhoz képest) és mikor a legkevesebbet!

Megoldás:

a) 2003. január 2-án körülbelül 236 Ft-ba került 1 euró,

2003. május 2-án körülbelül 246 Ft-ba került 1 euró,

2004. szeptember 2-án körülbelül 252 Ft-ba került 1 euró.

b) Akkor ér a legtöbbet a forint, ha a legkevesebbe kerül 1 euró, tehát keressük a grafikon minimumhelyét, és az 2003 januárjában van. Ekkor 1 € (euró) körülbelül 235 Ft-ba kerül.

Akkor ér a legkevesebbet a forint, amikor a legtöbbet kell fizetni 1 €-ért, ezért keressük a grafikon maximumhelyét, amit körülbelül 2003 decemberében találunk, amikor több mint 270 Ft-ot kellett fizetni 1 €-ért.

Feladatok

7. Olvasd el figyelmesen az alábbi hirdetményt. Mi az, ami óvatosságra int?

Van-e olyan vásárlási összeg, ami esetén nem tudod, mekkora az önrész?

ÁLTALÁNOS FELTÉTELEK:	
IGÉNYELHETŐ HITELÖSSZEG:	30 000–1 000 000 Ft
ÖNRÉSZ:	300 000 Ft-ig a termék vételárának 0%-a, 300 001 Ft felett a termék vételárának 20%-a
FUTAMIDŐ:	6–60 hónap
KEZELÉSI KÖLTSÉG:	a hitelösszeg 2%-a

„A hitel megítélése a Bank hitelbírálatának függvénye. Ez a hirdetés kizárólag a figyelemfelkeltés célját szolgálja, nem minősül a Bank részéről nyilvános tájékoztatónak és ajánlattételnek. A teljes hiteldíj-mutató (THM): 0–44,23%, a választott hitelkonstrukció és a futamidő függvényében. A hitelről szóló részletes tájékoztatást az áruházakban elhelyezett hirdetmények adnak.”

Számítsd ki, ha vásárolsz az adott bank által nyújtott hitel segítségével egy televíziót 120000Ft-ért, milyen költségekkel jár ez számodra a magasabb THM esetén? A futamidőt 1 évnek válaszd, és 1 év elteltével egy összegben fizeted be a tartozásod.

Megoldás:

300 001-Ft nál nem tudom, mennyi az önrész. (Szerencsére ritkán kerül egy áru ennyibe, gyakoribb a 299 999Ft-os ár.)

A hitel felvételének pillanatában ki kell fizetnem a hitel 2%-át, azaz 2400Ft-ot. Tételezzük fel, hogy ezen felül nincs egyéb járulékos költség, mert azt odaírták volna. Tehát a THM többi része a kamatból származik. Igazából csak 117600Ft-ot kaptam kölcsön, számoljuk rá erre a 44,23% kamatot, az $117\,600 \cdot 1{,}4423 \approx 169\,614$ Ft-ot kell az év végén visszafizetni.

8. Egy mezőgazdasági vállalkozó 3 millió forint kölcsönt vett fel gép vásárlására, melyet 2 év múlva kezd el törleszteni 3 év alatt, 3 egyenlő részletben, minden év elején. A bank a fennálló tartozásra évi 18%-os kamatot számít fel. Mekkora lesz a törlesztőrészlet?

Megoldás:

Az első két évben a tartozás nő, hiszen nem törleszt. A 2. év végén tartozása $3\,000\,000 \cdot 1{,}18^2$ Ft-ra nő. Legyen az évi törlesztőrészlet *R*.

Év elején	Év végén
$3\,000\,000 \cdot 1{,}18^2 - R$	$\left(3\,000\,000 \cdot 1{,}18^2 - R\right) \cdot 1{,}18 = 3\,000\,000 \cdot 1{,}18^3 - R \cdot 1{,}18$
$3\,000\,000 \cdot 1{,}18^3 - R \cdot 1{,}18 - R$	$\left(3\,000\,000 \cdot 1{,}18^3 - R \cdot 1{,}18 - R\right) \cdot 1{,}18 = 3\,000\,000 \cdot 1{,}18^4 - R \cdot 1{,}18^2 - R \cdot 1{,}18$
$3\,000\,000 \cdot 1{,}18^4 - R \cdot 1{,}18^2 - R \cdot 1{,}18 - R = 0$	

$$3\,000\,000 \cdot 1{,}18^4 - R \cdot 1{,}18^2 - R \cdot 1{,}18 - R = 0$$

Rendezve az egyenletet, azt kapjuk, hogy $R = \dfrac{3\,000\,000 \cdot 1{,}18^4}{1{,}18^2 + 1{,}18 + 1} \approx 1628130$.

Tehát a vállalkozónak 3 éven át évi 1 628 130 Ft-ot kell fizetnie.

9. Az 1 200 000 Ft kölcsönt évi 12%-os kamatra vettük fel. 1 év alatt fizetjük vissza. Mekkora a törlesztőrészlet, ha

a) 12 részletben; b) 3 részletben fizetjük vissza?

A kamat tőkésítése mindkét esetben havonta történik.

Megoldás:

a) Ha évi 12% a kamat, az havi 1%-nak felel meg. Legyen a részlet *R*. A 12. hónap elején a tartozásnak 0-nak kell lennie, tehát a

$$1200\,000 \cdot 1{,}01^{12} - \left(R \cdot 1{,}01^{11} + \ldots + R \cdot 1{,}01 + R\right) = 0$$

egyenlet megoldásakor a mértani sorozat összegképletét alkalmazva:

$$1200\,000 \cdot 1{,}01^{12} - R \cdot \frac{1{,}01^{12} - 1}{0{,}01} = 0$$

$$R = \frac{0{,}01 \cdot 1200\,000 \cdot 1{,}01^{12}}{1{,}01^{12} - 1} \approx 106\,619.$$

Tehát a törlesztőrészlet havi 106 619 Ft.

b) Ha 3 részletben fizetjük vissza a kölcsönt, az azt jelenti, hogy a fizetési gyakoriság 4 hónap, mert a felvételtől számított 3 hónap múlva fizetjük az első részletet.

$$1200\,000 \cdot 1{,}01^{12} - \left(R \cdot 1{,}01^{8} + R \cdot 1{,}01^{4} + R\right) = 0$$

$$R = \frac{1200\,000 \cdot 1{,}01^{12}}{1{,}01^{8} + 1{,}01^{4} + 1} \approx 432\,914.$$

Tehát a törlesztőrészlet 432 914 Ft.

10. Számítsd ki, az alábbi hitel esetén mekkora volt az aktuális euró-árfolyam?

Hány forint lenne ez a havi törlesztőrészlet 2002. január 2-án, 2003. január 2-án, illetve 2004 decemberében, amikor olyan magas volt az euró ára?

Használd a 11. mintapéldában található grafikont!

Mit gondolsz, miért alacsonyabb a törlesztőrészlet 3 hónapos kamatperiódus esetén?

Mit gondolsz, 20 éves futamidő esetén miért nem fele akkora a törlesztőrészlet?

<table>
<tr><td>5 millió forint hitelösszeg
20 év futamidő
3 hónapos kamatperiódus esetén</td><td>Havi törlesztő részlet:
148,58 € 39 140 Ft.</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>5 millió forint hitelösszeg
20 év futamidő
1 éves kamatperiódus esetén</td><td>Havi törlesztő részlet:
149,74 € 39 446 Ft.</td></tr>
<tr><td>5 millió forint hitelösszeg
10 év futamidő
1 éves kamatperiódus esetén</td><td>Havi törlesztő részlet:
99,83 € 26 297 Ft.</td></tr>
</table>

Megoldás:

Ha 148,58 € ára 39 140 Ft, akkor 1 € ára $\frac{39140}{148{,}58} \approx 263{,}43$ Ft.

A grafikonról leolvasható, hogy 2002.01.02-én 1 € ≈ 245 Ft. A havi törlesztőrészlet tehát $148{,}58 \cdot 245 \approx 36\,402$ Ft.

2003.01.02-án 1 € ≈ 235 Ft, a törlesztőrészlet ekkor $148{,}58 \cdot 235 \approx 34\,916$ Ft.

Az euró-árfolyam legmagasabb 2003. decemberében volt; ekkor $148{,}58 \cdot 272 \approx 40\,413$ Ft a törlesztőrészlet.

Az év folyamán lényegesen csökken a tartozásunk. Ha a kamatperiódus 1 év, az év elején aktuális tartozás után fizetünk kamatot. Ha a kamatperiódus 3 hónap, az év folyamán egyre csökkenő tartozás kamatát számítják fel.

Ha 20 évig fizetjük vissza a kölcsönt, akkor a törlesztés első 10 éve után fennmaradó tartozásunk további 10 évi kamatával is számolnunk kell.

2.1 feladatlap

Olvassátok el figyelmesen az alábbi tudnivalókat a diákhitellel kapcsolatban, majd válaszoljatok a feltett kérdésekre!

Mekkora összeg vehető fel?
Szabadon választhat, hogy mekkora összeget utaljunk bankszámlájára.
A 2006/2007-es tanévben az államilag támogatott képzésben részt vevő hallgatók havi

- 15 ezer,
- 21 ezer,
- 25 ezer vagy
- 30 ezer

forintot igényelhetnek.

Mikor utalják át a pénzt?
Dönthet úgy, hogy a félévre járó diákhitelt egy összegben kéri. Ilyenkor a félévre járó 5 havi ösztöndíjat a szemeszter 2. hónapjának 15-éig egy összegben folyósítjuk. Ha havonta kéri utalni az összeget, egy adott szemeszterben (félévben) a Diákhitel első folyósítási napja a második tanulmányi hónap legkésőbb 15. napja (október 15. vagy március 15.). A Diákhitel Központ a kölcsön tárgyi tanulmányi félévének első két hónapjára járó összegét az aktuális tanulmányi félév második hónapjának 15-éig, majd azt követően havonta folyamatosan az adott hónap 15-éig folyósítja.

Kamat
A kölcsönszerződés értelmében a folyósított kölcsön összege után ügyleti kamatot számítunk fel. Ez azt jelenti, hogy minden napra annyi kamatot számítunk fel, amennyi az aktuális tartozásnak az 1 napra eső kamata. A kamatszámítás az első folyósítás napjától kezdődik, a kamatot a kölcsön visszafizetéséig kell fizetnie. A kölcsön kamatát minden év december 31-én tőkésítjük.
A Diákhitel kamata változó. A kamat mértékét a kormányrendeletben rögzített szabályok szerint határozzuk meg. A 2007. január 1-től június 30-ig érvényes kamatláb 9,5%.
Az aktuális kamat minden naptári félév első napjától érvényes. A kamatot a naptári félév előtt legalább hét nappal hirdetményként közzé tesszük a Népszabadságban és a Magyar Nemzetben, a honlapunkon, valamint a felsőoktatási intézményekben.

Visszafizetés
A Diákhitel törlesztési rendszerét úgy alakították ki, hogy a hitelt felvevők anyagi lehetőségeikhez igazodva, jövedelemarányosan törleszthessenek.
A törlesztési kötelezettség kezdetének évében és az azt követő évben a kötelező törlesztő részletet a minimálbér alapján határozzuk meg. Az ebben az időszakban fizetendő összeg az előző évben október 31-én érvényes minimálbér 6 százaléka.
A törlesztés harmadik évétől kezdve a törlesztő részlet kiszámításának alapja a két évvel azelőtti jövedelem. Aki jövedelemarányosan törleszt, annak 2006-ban a 2004-es éves jövedelem 6 százalékának 1/12-ed részét kell havonta fizetni.
Mivel a törlesztő részlet nagysága minden évben változhat, a következő évben esedékes havi összegekről minden év december 15-éig hivatalos levélben értesítjük.

Kérdések:

I. Számítsátok ki, mekkora diákhitelt vett fel az a hallgató, aki

a) 10 féléven át havi 15 000 Ft-ot vett fel?

b) 10 féléven át havi 30 000 Ft-ot vett fel?

c) 4 féléven át havi 40 000 Ft-ot vett fel? (költségtérítéses képzés esetén vehető fel ennyi)

d) Aki az utolsó két félévben havi 30 000 Ft-ot vett fel?

Ne felejtsétek el, hogy a diákkölcsön az év 10 hónapjában vehető igénybe!

II. Ha évi 9,5%-os kamattal számolunk, és a kamatot a meghirdetett módon tőkésítik, mekkora tartozása lesz a következő év szeptember 1-én (a kölcsöntörlesztés kezdetekor) a d) feladatban jelzett hallgatónak?

Az alábbi táblázat segít a számolásban, de ha találsz olyan gyors módszert, amely – kis hiba árán – lényegesen meggyorsítja a számolást, nem szükséges az összes sort kitöltened.

Időszak	Aktuális tartozás	Hány nap	Kamata
okt. 15.–nov. 15.	60000	31	$\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 60\,000\approx 484{,}11$
nov. 16.–dec. 15.	90000		
dec. 16.–dec. 31.			
Vigyázat! Itt tőkésítik az eddigi kamatot!			
jan. 1.–jan. 15.			
jan. 16.–márc. 15.			
márc. 16.–ápr. 15.			
ápr. 16.–máj. 15.			
máj. 16.–jún. 15.			
jún. 16.–aug. 31.			
Tehát az aktuális kamat és a még nem tőkésített kamat összege mint fennálló tartozás:			

Megoldás:

I. a) Félévente 75 000 Ft-ot vett fel, tehát 10 félév alatt 750 000 Ft-ot kapott.

b) Félévente 150 000 Ft-ot vett fel, tehát 10 félév alatt 1 500 000 Ft-ot kapott.

c) Félévente 200 000 Ft-ot vett fel, tehát 4 félév alatt 800 000 Ft-ot kapott.

d) Félévente 150 000 Ft-ot vett fel, tehát 2 félév alatt 300 000 Ft-ot kapott.

II.

Időszak	Aktuális tartozás	Hány nap	Kamata
okt. 15.–nov. 15.	60 000	31	$\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 60\,000\approx 484{,}11$
nov. 16.–dec. 15.	90 000	30	$\frac{30}{365}\cdot 0{,}095\cdot 90\,000\approx 702{,}74$
dec. 16.–dec. 31.	120 000	16	$\frac{16}{365}\cdot 0{,}095\cdot 120\,000\approx 499{,}73$
Vigyázat! Itt tőkésítik az eddigi kamatot! Tehát a tartozás dec.31-én: $120\,000+484{,}11+702{,}74+499{,}73=121686{,}58$			
jan. 1–jan. 15.	151 686,58	15	$\frac{15}{365}\cdot 0{,}095\cdot 151686{,}58\approx 592{,}20$
jan. 16–márc. 15.	181 686,58	16+28+15	$\frac{59}{365}\cdot 0{,}095\cdot 181686{,}58\approx 2\,790{,}01$
márc. 16–ápr. 15.	241 686,58	31	$\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 241686{,}58\approx 1950{,}05$
ápr. 16–máj. 15.	271 686,58	30	$\frac{30}{365}\cdot 0{,}095\cdot 271686{,}58\approx 2121{,}39$
máj. 16–jún. 15.	301 686,58	31	$\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 301686{,}58\approx 2\,434{,}16$
jún. 16–aug. 31.	331 686,58	15+31+31	$\frac{77}{365}\cdot 0{,}095\cdot 331686{,}58\approx 6\,647{,}36$
Tehát az aktuális kamat, és a még nem tőkésített kamat összege mint fennálló tartozás: $331686{,}58+592{,}20+2790{,}01+1950{,}05+2121{,}39+2434{,}16+6647{,}36=347\,629{,}55$			

DIÁK HITEL

2.2 feladatlap

Olvassátok el figyelmesen az alábbi tudnivalókat a diákhitellel kapcsolatban, majd válaszoljatok a feltett kérdésekre!

Mekkora összeg vehető fel?
Szabadon választhat, hogy mekkora összeget utaljunk bankszámlájára.
A 2006/2007-es tanévben az államilag támogatott képzésben részt vevő hallgatók havi

- 15 ezer,
- 21 ezer,
- 25 ezer vagy
- 30 ezer

forintot igényelhetnek.

Mikor utalják át a pénzt?
Dönthet úgy, hogy a félévre járó diákhitelt egy összegben kéri. Ilyenkor a félévre járó 5 havi ösztöndíjat a szemeszter 2. hónapjának 15-éig egy összegben folyósítjuk. Ha havonta kéri utalni az összeget, egy adott szemeszterben (félévben) a Diákhitel első folyósítási napja a második tanulmányi hónap legkésőbb 15. napja (október 15. vagy március 15.). A Diákhitel Központ a kölcsön tárgyi tanulmányi félévének első két hónapjára járó összegét az aktuális tanulmányi félév második hónapjának 15-éig, majd azt követően havonta folyamatosan az adott hónap 15-éig folyósítja.

Kamat
A kölcsönszerződés értelmében a folyósított kölcsön összege után ügyleti kamatot számítunk fel. Ez azt jelenti, hogy minden napra annyi kamatot számítunk fel, amennyi az aktuális tartozásnak az 1 napra eső kamata. A kamatszámítás az első folyósítás napjától kezdődik, a kamatot a kölcsön visszafizetéséig kell fizetnie. A kölcsön kamatát minden év december 31-én tőkésítjük.
A Diákhitel kamata változó. A kamat mértékét a kormányrendeletben rögzített szabályok szerint határozzuk meg. A 2007. január 1-től június 30-ig érvényes kamatláb 9,5%.
Az aktuális kamat minden naptári félév első napjától érvényes. A kamatot a naptári félév előtt legalább hét nappal hirdetményként közzé tesszük a Népszabadságban és a Magyar Nemzetben, a honlapunkon, valamint a felsőoktatási intézményekben.

Visszafizetés
A Diákhitel törlesztési rendszerét úgy alakították ki, hogy a hitelt felvevők anyagi lehetőségeikhez igazodva, jövedelemarányosan törleszthessenek.
A törlesztési kötelezettség kezdetének évében és az azt követő évben a kötelező törlesztő részletet a minimálbér alapján határozzuk meg. Az ebben az időszakban fizetendő összeg az előző évben október 31-én érvényes minimálbér 6 százaléka.
A törlesztés harmadik évétől kezdve a törlesztő részlet kiszámításának alapja a két évvel azelőtti jövedelem. Aki jövedelemarányosan törleszt, annak 2006-ban a 2004-es éves jövedelem 6 százalékának 1/12-ed részét kell havonta fizetni.
Mivel a törlesztő részlet nagysága minden évben változhat, a következő évben esedékes havi összegekről minden év december 15-éig hivatalos levélben értesítjük.

Kérdések:

I. Számítsátok ki, mekkora diákhitelt vett fel az a hallgató, aki

a) 10 féléven át havi 21 000 Ft-ot vett fel?

b) 10 féléven át havi 25 000 Ft-ot vett fel?

c) 4 féléven át havi 40 000 Ft-ot vett fel? (költségtérítéses képzés esetén vehető fel ennyi)

d) Aki az utolsó két félévben havi 30 000 Ft-ot vett fel?

Ne felejtsétek el, hogy a diákkölcsön az év 10 hónapjában vehető igénybe!

II. A d) feladatban említett hallgató a nyári szünet után szeptember elsején megkezdi a törlesztést úgy, ahogy azt a munkábaállás első két évében kell. Szeptember elseje előtt, amikor az első törlesztőrészletet átutalja, tőketartozása 301 687 Ft, kamattartozása 14 638 Ft. (Ez utóbbi az a kamat, amelyet még csak december 31-én fognak tőkésíteni.) Ha évi 9,5%-os kamattal számolunk, és a kamatot a meghirdetett módon tőkésítik, mekkora tartozása marad még a következő év december 31-én? 2007-ben a minimálbér 62 500 Ft. Feltételezzük, hogy sem a diákhitel kamata, sem a minimálbér ez idő alatt nem változik.

Az alábbi táblázat segít a számolásban, de ha találsz olyan gyors módszert, amely – kis hiba árán – lényegesen meggyorsítja a számolást, nem szükséges az összes sort kitöltened.

Időszak	Aktuális tartozás	nap	Ennek kamata
1. év szept. 1–30.	301687 hiszen a kamatot csak év végén tőkésítik	30	$\frac{30}{365}\cdot 0{,}095\cdot 301687$
okt. 1–31.	301687 – 3750 = 297937	31	$\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 301687-\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 3750$
nov. 1–30.			
dec. 1–31.			

Itt következik a tőkésítés! A kamatok összege a törlesztés kezdete óta:

Az éves kamat szeptember 1 előtti része:

Tehát egész éves kamatunk:

Tehát tőketartozásunk:

2. év jan. 1–31.			
febr. 1–28.			
márc. 1–31.			
ápr. 1–30.			
máj. 1–31.			
jún. 1–30.			
júl. 1–31.			
aug. 1–31.			
szept. 1–30.			
okt. 1–31.			
nov. 1–30.			
dec. 1–31.			
Éves kamatok összege: Összes tőketartozásunk a tőkésítés után:			

Megoldás:

I. a) Félévente 105 000 Ft-ot vett fel, tehát 10 félév alatt 1 050 000 Ft-ot kapott.

b) Félévente 125 000 Ft-ot vett fel, tehát 10 félév alatt 1 250 000 Ft-ot kapott.

c) Félévente 200 000 Ft-ot vett fel, tehát 4 félév alatt 800 000 Ft-ot kapott.

d) Félévente 150 000 Ft-ot vett fel, tehát 2 félév alatt 300 000 Ft-ot kapott.

II. Tudjuk, hogy a törlesztés első két évében a törlesztőrészlet a minimálbér 6%-a. Ha a minimálbér 62 500 Ft, ennek 6%-a 3 750 Ft.

Időszak	Aktuális tartozás	nap	Ennek kamata
1. év szept. 1–30.	301687 hiszen a kamatot csak év végén tőkésítik	30	$\frac{30}{365}\cdot 0{,}095\cdot 301687$
okt. 1–31.	301687 – 3 750 = = 297 937	31	$\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 301687-\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 3750$
nov.1–30.	$301687-2\cdot 3750$	30	$\frac{30}{365}\cdot 0{,}095\cdot 301687-\frac{30}{365}\cdot 0{,}095\cdot 2\cdot 3750$
dec. 1–31.	$301687-3\cdot 3750$	31	$\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 301687-\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 3\cdot 3750$
Itt következik a tőkésítés! A kamatok összege a törlesztés kezdete óta: $\frac{122}{365}\cdot 0{,}095\cdot 301687-0{,}095\cdot 3750\cdot\frac{31+2\cdot 30+3\cdot 31}{365}=\frac{122}{365}\cdot 0{,}095\cdot 301687-\frac{184}{365}\cdot 0{,}095\cdot 3750=$ $\frac{0{,}095}{365}\cdot(122\cdot 301687-184\cdot 3750)=\frac{0{,}095}{365}\cdot 36115814\approx 9400\text{Ft}\Rightarrow \text{éves kamat}: 9400+14638=24038\text{Ft}$			
2. év jan. 1–31.	314 475-3750	31	$\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 314475-\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 3750$
febr. 1–28.	$314475-2\cdot 3750$	28	$\frac{28}{365}\cdot 0{,}095\cdot 314475-\frac{28}{365}\cdot 0{,}095\cdot 2\cdot 3750$
márc. 1–31.	$314475-3\cdot 3750$	31	$\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 314475-\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 3\cdot 3750$
ápr. 1–30.	$314475-4\cdot 3750$	30	$\frac{30}{365}\cdot 0{,}095\cdot 314475-\frac{30}{365}\cdot 0{,}095\cdot 4\cdot 3750$
máj.1–31.	$314475-5\cdot 3750$	31	$\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 314475-\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 5\cdot 3750$
jún. 1–30.	$314475-6\cdot 3750$	30	$\frac{30}{365}\cdot 0{,}095\cdot 314475-\frac{30}{365}\cdot 0{,}095\cdot 6\cdot 3750$
júl. 1–31.	$314475-7\cdot 3750$	31	$\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 314475-\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 7\cdot 3750$
aug. 1–31.	$314475-8\cdot 3750$	31	$\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 314475-\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 8\cdot 3750$

szept. 1–30.	$314475-9\cdot 3750$	30	$\frac{30}{365}\cdot 0{,}095\cdot 314475-\frac{30}{365}\cdot 0{,}095\cdot 9\cdot 3750$
okt. 1–31.	$314475-10\cdot 3750$	31	$\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 314475-\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 10\cdot 3750$
nov. 1–30.	$314475-11\cdot 3750$	30	$\frac{30}{365}\cdot 0{,}095\cdot 314475-\frac{30}{365}\cdot 0{,}095\cdot 11\cdot 3750$
dec. 1–31.	$314475-12\cdot 3750$	31	$\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 314475-\frac{31}{365}\cdot 0{,}095\cdot 12\cdot 3750$
Kamatok összege: $\frac{365}{365}\cdot 0{,}095\cdot 314475-\frac{0{,}095}{365}\cdot 3750\cdot(31+28\cdot 2+31\cdot 3+\ldots+31\cdot 12)=$ $0{,}095\cdot 314475-\frac{0{,}095}{365}\cdot 3750\cdot 2382\approx 27\,550$			

A második év végén tehát a diák aktuális tartozása: 314 475 – 45 000 + 27 550 = 297 025 Ft.

Annál a résznél, ahol a teljes évre számoljuk a kamatot, érdemes megmutatni a tanulóknak, hogy milyen egyszerűvé válik a számítás, ha minden hónapot 30 nappal számolunk. Mivel 1 nap kamata max. 78 Ft, nagy eltérést nem jelenthet ez a számolásban.

Ebben a számításban a hónapok napszámához mindenhol 30-at helyettesítve:

$$\frac{365}{365}\cdot 0{,}095\cdot 314475-\frac{0{,}095}{365}\cdot 3750\cdot(31+28\cdot 2+31\cdot 3+\ldots+31\cdot 12)\approx$$
$$0{,}095\cdot 314475-\frac{0{,}095}{365}\cdot 3750\cdot(30+30\cdot 2+30\cdot 3+\ldots+30\cdot 12)$$

A zárójelben szereplő kifejezés egy számtani sorozat összege, ahol $a_1=30,\ d=30,\ n=12$.

Számításunk tehát így alakul: $0{,}095\cdot 314475-\frac{0{,}095}{365}\cdot 3750\cdot\frac{2\cdot 30+11\cdot 30}{2}\cdot 12=27591$, ami csak 41 Ft-os eltérés.