Matematika „A” 12. évfolyam

1. modul
Sorozatok

Készítette: Lövey Éva

A modul célja	A sorozatok fogalmának elmélyítése. Gyakorlati alkalmazások.
Időkeret	12 óra
Ajánlott korosztály	12. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Sorozatok alkotása. Megfigyelésben, mérésben, számlálásban, számolásban gyűjtött adatok, elemek sorozatba rendezése; a keletkező sorozat tulajdonságai szabályosságának vizsgálata. (Például periodikus sorozatok, számtani, mértani sorozat.) Megkezdett sorozat folytatása, kiegészítése adott szabály szerint, felismert összefüggés alkalmazásával. Az „összefüggés” megalkotása a sorozat elemei közti kapcsolat általánosításaként; ellenőrzése. Hétköznapi szituációk. Gazdasági számítási feladatok és különböző összegzések gyors elvégzése. Szűkebb környezetben: Lássa, hogy a sorozat diszkrét folyamatok megjelenítésére alkalmas matematikai eszköz, a pozitív számok halmazán értelmezett függvény. Gazdasági matematika előkészítése. Ajánlott megelőző tevékenységek: Függvénytulajdonságok és függvénygrafikonok átismétlése. Ajánlott követő tevékenységek: Gazdasági matematika.
A képességfejlesztés fókuszai	Számolás, számlálás, számítás: Képlet alapján a képletben szereplő ismeretlen kifejezés kiszámítása. Szöveges feladatok, metakogníció: Szövegben előforduló tartalmi összefüggések megkeresése. A valóságból merített feladatok alapján felismerni az alkalmazandó eljárást, képletet. A megkapott végeredmény értelmezése. Rendszerezés, kombinatív gondolkodás: Speciális sorozatok felismerése. Sorozatok tulajdonságainak elemzése.

A TANANYAG JAVASOLT ÓRABEOSZTÁSA:

1. óra:	Sorozatok fogalma és megadása
2. óra:	Sorozatok grafikonja, tulajdonságai
3. óra:	Számtani sorozat fogalma, *n*-edik tag kiszámítása
4. óra:	Számtani sorozat első *n* tagjának összege
5. óra:	Gyakorlás
6. óra:	Mértani sorozat fogalma, *n*-edik tagjának kiszámítása
7. óra:	Játék és gyakorlás
8. óra:	Kamatos kamat
9. óra:	Mértani sorozat első *n* tagjának összege
10. óra:	A mértani sorozat gyakorlati példákban
11-12. óra:	Számtani és mértani sorozatot is alkalmazó feladatok. Vegyes feladatok számtani és mértani sorozatokra

ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEK:

Sorozatok

Középszint

Ismerje a számsorozat fogalmát és használja a különböző megadási módjait.

Tudjon olyan feladatokat megoldani a számtani és mértani sorozatok témaköréből, ahol a számtani, illetve mértani sorozat fogalmát és az a_n-re, illetve az S_n-re vonatkozó összefüggéseket kell használni.

Tudja a kamatos kamatra vonatkozó képletet használni, s abból bármelyik ismeretlen adatot kiszámolni.

Emelt szint

Sorozat jellemzése (korlátosság, monotonitás) a konvergencia szemléletes fogalma.

Egyszerű rekurzív képlettel megadott sorozatok.

Bizonyítsa a számtani és a mértani sorozat általános tagjára vonatkozó összefüggéseket, valamint az összegképleteket.

Ismerje a végtelen mértani sor fogalmát, összegét.

Tudjon gyűjtőjáradékot és törlesztőrészletet számolni.

Gondolkodási módszerek

Legyen képes a tanuló adott szövegben rejlő matematikai problémákat észrevenni, szükség esetén matematikai modellt alkotni, a modell alapján számításokat végezni, és a kapott eredményeket értelmezni.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Sorozatok fogalma és megadása			
1.	„Te hogyan folytatnád?” – ötletbörze különböző sorozatokra	Kommunikáció, kombinatív gondolkodás, pontos fogalmazás	
2.	Sorozat definíciója, megadása	Rendszerzés, logikus gondolkodás	1., 2. mintapélda;
3.	Gyakorlás		1., 2., 3. feladat
II. Sorozatok grafikonja, tulajdonságai			
1.	Függvénytulajdonságok felidézése	Rendszerzés, logikus gondolkodás	
2.	Periodikus sorozatok		3., 4. mintapélda
3.	Monoton sorozatok	Kombinatív gondolkodás, becslés	5. mintapélda
4.	Gyakorlás		5. feladat
III. A számtani sorozat			
1.	Számtani sorozat definíciója, felismerése	Rendszerezés	
2.	*n*-edik tag kiszámítása	Rendszerzés, mennyiségi következtetés	6. mintapélda
3.	„Középső” tag mint számtani közép	Rendszerzés, logikus gondolkodás	7. mintapélda
4.	Gyakorlás	Rendszerzés, mennyiségi következtetés	6.,7..feladatok

IV. A számtani sorozat első *n* tagjának összege			
1.	Képlet levezetése	Rendszerezés	
2.	Alkalmazása	Rendszerzés, mennyiségi következtetés	8., 9. mintapélda
3.	„Cseles” számítás	Rendszerezés	10. mintapélda; 10. feladat
4.	Sok-sok gyakorlás	Rendszerzés, mennyiségi következtetés	11., 13., 15. feladat

V. A mértani sorozat			
1.	A mértani sorozat definíciója, felismerése	Rendszerezés	11. mintapélda
2.	*n*-edik tag kiszámítása	Rendszerzés, mennyiségi következtetés	12. mintapélda
3.	Játék: Folytasd a sorozatot úgy, hogy számtani vagy mértani sorozat legyen!	Rendszerezés	Játék a tanári segédletből
4.	Feladatmegoldás		16–18. feladat

VI. Kamatos kamat			
1.	Százalékszámítás felelevenítése, gyakorlása	Mennyiségi következtetés	14–16. mintapélda, vagy 19–20. feladat
2.	Kamatos kamat mint mértani sorozat	Rendszerzés, mennyiségi következtetés	17., 18. mintapélda
3.	Gyakorlás	Mennyiségi következtetés	21–22. feladat

VII. Mértani sorozat első *n* tagjának összege			
1.	Probléma fölvetése		19. mintapélda
2.	A képlet levezetése	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás	
3.	Képlet alkalmazása I.		20–24. mintapélda

VIII. A mértani sorozat gyakorlati példákban			
1.	Képlet alkalmazása II.	Rendszerzés, mennyiségi következtetés, kombinatív gondolkodás	23., 24., 26. feladat
2.	Járadék, ill. betét típusú, de nem gazdasági feladatok		28–30. mintapélda
3.	Gyakorlás	Mennyiségi következtetés	27. feladat

IX. Számtani és mértani sorozatot is alkalmazó feladatok			
1.	Típuspéldák	Kombinatív gondolkodás, mennyiségi következtetés	31–32. mintapélda
2.	Gyakorlás	Rendszerzés, mennyiségi következtetés	27., 29., 30. feladat
3.	Gyakorlás	Kombinatív gondolkodás, mennyiségi következtetés	31., 33., 34., 35.,36. feladat

I. Sorozatok fogalma és megadása

Logikai feladványokban gyakran szerepelnek olyan kérdések, mi lenne egy megkezdett számsor vagy ábrasor 100. tagja. Ilyenkor bizonyos törvényszerűséget kell felfedezni az első néhány tag alapján. Hasonló témával már az általános iskolában is foglalkoztatok, sőt már tanultatok sorozatokról. Idézzük fel ezt!

Keressünk a felsorolt elemek tulajdonságai között szabályszerűséget, és annak megfelelően folytassuk még 5 taggal!

I. – 2 1 4 7 10 …

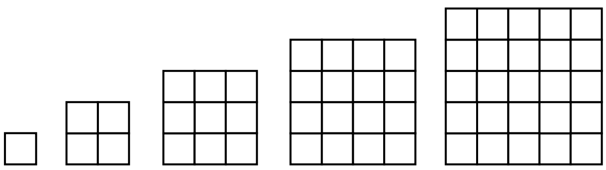
II. ♣ ♥ ♠ ♦ ♣ …

III.

…

IV. C D E F G …

V.



…

Bizonyára mindenkinek támadt ötlete, hogyan lehetne ezeket az elemeket folytatni. Matematikailag ezek egyikét sem lehet sorozatnak nevezni, ugyanis ha ezek jól megadott valódi sorozatok lennének, csak egyféleképpen lehetne folytatni őket. Ezeket viszont többféleképpen is lehet:

– 2 1 4 7 10 13 16 19 22 25 … és ettől kezdve minden tag 3-mal nagyobb az előzőnél, vagy

– 2 1 4 7 10 10 10 10 10 10 … és ettől kezdve minden tag 10.

♣ ♥ ♠ ♦ ♣ ♥ ♠ ♦ ♣ ♥ … és ettől kezdve mindig az első négy tag ismétlődne, vagy

♣ ♥ ♠ ♦ ♣ ● ● ● ● … és ettől kezdve minden tag zöld kör.

és ettől kezdve mindig ebben az arányban nőnének a babák.

Vagy akár folytatódhatna így is:

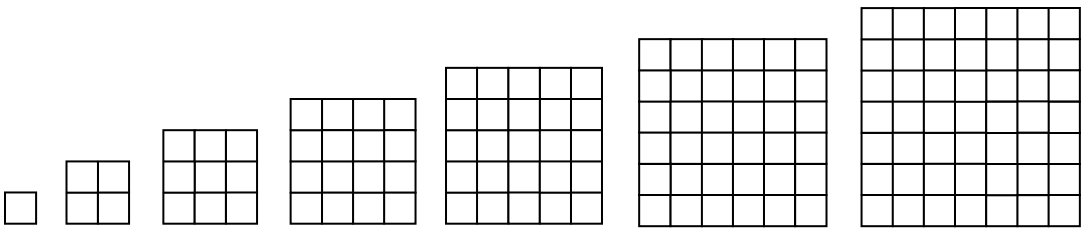
majd ismét növekednek, és újabb 5 baba után megint csökken a méretük.

A következő 5 betűben felfedezhetjük a zenei hangok sorát, amit akár folytathatunk így is:

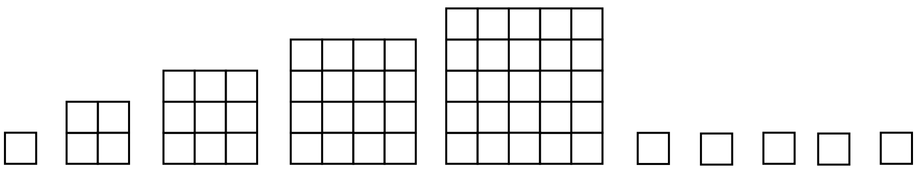
C D E F G A H C D E és így folytatva ez a hét betű ismétlődik a végtelenségig, vagy felfoghatjuk az öt leírt nagybetű egy lehetséges permutációjának, melyet követhet a többi 119 permutáció, majd vége a sorozatnak.

C D E F G C D E G F

A négyzeteket is folytathatnánk több módon, a legkézenfekvőbb, hogy a négyzet oldalai mindig egy egységgel nőnek:



de az is elképzelhető, hogy ettől kezdve csupa egységnégyzettel folytatódnak:



Az I. – V. feladatoknál többféleképpen is folytathattuk a hiányzó elemek keresését, ezért kell pontosítanunk a sorozat fogalmát:

egy sorozatot csak akkor tekintünk megadottnak, ha elemei egyértelműen meghatározottak. Ilyen esetekben meg tudjuk azt is mondani, hogy mi lesz a sorozat 15., 100., 1000., … *n*-edik tagja.

Azt is mondhatjuk, hogy minden pozitív egész számhoz egyértelműen hozzárendelünk valamit. Valójában tehát függvényről van szó, ami két halmaz közti egyértelmű hozzárendelés. Sorozat esetén a függvény értelmezési tartománya: a pozitív egész számok halmaza, értékkészlete pedig: a sorozat tagjai. Amit úgy írunk a függvényeknél, hogy $x \mapsto f(x)$, azt most pl. a II. sorozatnál úgy tekintjük, hogy

$$1 \to ♣$$
$$2 \to ♥$$
$$3 \to ♠$$
$$4 \to ♦$$
$$5 \to ♣ \ldots$$

Például a II. sorozat esetében ezt így írjuk: $a_1 =$ ♣, $a_2 =$ ♥, $a_3 =$ ♠, $a_4 =$ ♦, $a_5 =$ ♣,… .

Összefoglalva tehát:

Sorozatnak nevezünk egy olyan függvényt, melynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékkészletének elemei pedig a sorozat **tagjai**. A sorozat *n*-edik tagját általában a_n jelöli.

Mintapélda$_1$

Adjuk meg a következő sorozatok első öt, illetve 100. tagját, és vizsgáljuk meg, hogy a megadott szám beletartozik-e a sorozatba!

I. $a_n = n + 5,\quad a = 2007,$

II. $b_n = -6n,\quad b = -770,$

III. $c_n = \dfrac{5n}{n+3},\quad c = 20,$

IV. $d_n =$ a $\dfrac{2}{7}$ tört tízedestört alakjának tizedesvessző utáni *n*-edik számjegye, $d = 6.$

Megoldás:

I. ha $n = 1$, $a_1 = 1 + 5 = 6$; ha $n = 4$, $a_4 = 4 + 5 = 9$;

ha $n = 2$, $a_2 = 2 + 5 = 7$; ha $n = 5$, $a_5 = 5 + 5 = 10$;

ha $n = 3$, $a_3 = 3 + 5 = 8$; ha $n = 100$, $a_{100} = 100 + 5 = 105.$

Nézzük meg, van-e olyan n pozitív egész szám, amelyre $a_n = n + 5 = 2007$?

$n = 2002$ esetén $a_{2002} = 2007$, azaz 2007 ennek a sorozatnak a 2002. tagja.

II. ha $n = 1$, $b_1 = -6 \cdot 1 = -6$; ha $n = 4$, $b_4 = -6 \cdot 4 = -24$;

ha $n = 2$, $b_2 = -6 \cdot 2 = -12$; ha $n = 5$, $b_5 = -6 \cdot 5 = -30$;

ha $n = 3$, $b_3 = -6 \cdot 3 = -18$; ha $n = 100$, $b_{100} = -6 \cdot 100 = -600$.

Oldjuk meg a $-6n = -770$ egyenletet! $n = \frac{385}{3}$, ami nem pozitív egész szám, tehát nincs olyan n, hogy $b_n = -770$ legyen, a -770 nem tagja a sorozatnak.

III. ha $n = 1$, $c_1 = \frac{5 \cdot 1}{1+3} = \frac{5}{4}$; ha $n = 4$, $c_4 = \frac{5 \cdot 4}{4+3} = \frac{20}{7}$;

ha $n = 2$, $c_2 = \frac{5 \cdot 2}{2+3} = \frac{10}{5} = 2$; ha $n = 5$, $c_5 = \frac{5 \cdot 5}{5+3} = \frac{25}{8}$;

ha $n = 3$, $c_3 = \frac{5 \cdot 3}{3+3} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$; ha $n = 100$, $c_{100} = \frac{5 \cdot 100}{100+3} = \frac{500}{103}$.

Az $\frac{5n}{n+3} = 20$ egyenlet megoldása $n = -4$, ami egész ugyan, de nem pozitív, így a 20 sem tagja a sorozatnak.

IV. Írjuk fel a $\frac{2}{7}$ törtet tizedestört alakban, azaz végezzük el a $2 : 7$ osztást!

```
2 : 7 = 0, 2 8 5 7 1 4
2 0
  6 0
    4 0
      5 0
        1 0
          3 0
            2
```

Látható, hogy amint újra megjelenik a 2 mint maradék, a hányadosban szereplő számjegyek ismétlődni fognak, ismét 2, 8, 5, 7, 1, 4, majd ismét ez a 6 hosszúságú szakasz következik.

Így $d_1 = 2$, $d_2 = 8$, $d_3 = 5$, $d_4 = 7$, $d_5 = 1$.

A századik tag kiszámításához nem kell az előtte levő 99 tagot felírni, elég, ha észrevesszük, hogy minden 6. tag azonos, és a 100. tag ezek szerint ugyanannyi lesz, mint a 4. tag, mivel $100 = 16 \cdot 6 + 4$, így $d_{100} = 7$.

Mivel az osztás eredményében csak az 1, 2, 4, 5, 7, 8 számjegyek ismétlődnek, így a 6 nem tagja a sorozatnak.

Mintapélda₂

Adjuk meg a következő sorozatok első öt, illetve 100. elemét $(n \geq 2)$!

V. $e_1 = -2,\ e_n = e_{n-1} - 2$

VI. $f_1 = 1,\quad f_2 = 1,\quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ **Fibonacci-sorozat**

Megoldás:

Ennél a két sorozatnál az egyes elemeket az őt megelőző elemek segítségével kell meghatározni.

V. A sorozat minden eleme 2-vel kevesebb az őt megelőző elemnél.

$e_1 = -2$ $e_2 = e_1 - 2 = -2 - 2 = -4$ $e_3 = e_2 - 2 = -4 - 2 = -6$

$e_4 = e_3 - 2 = -6 - 2 = -8$ $e_5 = e_4 - 2 = -8 - 2 = -10$.

A 100. tag kiszámításához a képlet utasítása szerint ismernünk kellene az előtte levő tagot, az a_{99}-et. Ha nem ügyeskedünk, ez hosszú számolást igényel.

Ha egy sorozat tagjait úgy adjuk meg, hogy az *n*-edik tag meghatározásához szükség van a sorozat előző tagjaira is, akkor a sorozatot **rekurzív definícióval** adtuk meg.

Példánkban észrevehetjük, hogy a negatív páros számok csökkenő sorozatához jutunk, a sorozat *n*-edik tagja $e_n = (-2) \cdot n$. Tehát $e_{100} = -200$.

VI. Ez a sorozat a leghíresebb rekurzív sorozat, melyet **Leonardo Pisano** „fedezett fel”.

Leonardo Pisano (1170–1250?), azaz **FIBONACCI**
Itáliai matematikus; a középkor legnagyobb európai matematikusa. BONACCIO pisai kereskedő fia, innen a Fibonacci (Bonaccio fia) név. Egy észak-afrikai városban nőtt fel, majd kereskedelmi utazásokat tett Egyiptomban, Szíriában, Görögországban és Szicíliában. Röviddel hazatérte után publikálta híres Liber Abaci című művét. A könyv nagymértékben elősegítette az arab algebra és a hindu-arab számírás elterjedését Európában. Nevét őrzi a Fibonacci-sorozat.

További érdekes információk találhatók Fibonaccival kapcsolatban a http://fibonacci.lap.hu/#b17994670 oldalon.

A sorozat tagjai közül megadtuk az első két tag értékét, és minden további tagot az őt megelőző két tag összegeként számolhatunk ki.

$f_1 = 1,\quad f_2 = 1,\quad f_3 = f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2,\qquad f_4 = f_2 + f_3 = 1 + 2 = 3,$

$f_5 = f_3 + f_4 = 2 + 3 = 5$.

A sorozat 100. tagját most – hiába töprengünk – csak az előző 99 tag ismeretében tudjuk meghatározni. Ennek a tagnak közelítő értéke: $f_{100} \approx 3{,}54 \cdot 10^{20}$.

A sorozat tetszőlegesen sok tagját könnyedén kiszámíthatjuk egy excel-táblázatban. Létezik az n-edik elem kiszámítására egy zárt képlet is: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, de annak bizonyítása, hogy ez a sorozat azonos a rekurzívan megadott Fibonacci-sorozattal, komoly algebrai ismereteket követel.

Mintapélda$_3$

Megadtuk a következő sorozatokat:

a) 11; 102; 1 003; 10 004; 100 005;…

b) 3; 6; 11; 18; 27;…

Keress képletet vagy rekurzív definíciót, amellyel meghatározható a sorozat n-edik tagja!

Add meg a sorozat 30. tagját is!

Megoldás:

a) $a_n = 10^n + n$ $\quad a_{30} = 10^{30} + 30 = 1\,000\,...\,000\,030$, ahol az 1-es és a 3-as között 28 darab 0 van.

b) Az egymást követő számok különbsége a páratlan számok részsorozata, tehát

$b_2 = b_1 + 3,\quad b_3 = b_2 + 5,\quad b_4 = b_3 + 7,\quad b_5 = b_4 + 9,$ általánosan:

$b_1 = 3,\quad b_n = b_{n-1} + (2n-1).$ Ha valaki ezt a rekurzív definíciót követve akarja megadni a 30. tagot, annak ki kell számolnia a sorozat összes előbbi tagját is.

Észrevehetjük azonban, hogy

$b_1 = 1^2 + 2,\quad b_2 = 2^2 + 2,\quad b_3 = 3^2 + 2, \ldots$, azaz általánosan: $b_n = n^2 + 2$. Ezzel az összefüggéssel könnyedén kiszámítható a sorozat 30. tagja is: $b_{30} = 30^2 + 2 = 902$.

Az utóbbi megadással azt kapjuk, hogy a két egymást követő tag különbsége mindig a páratlan számok növekvő sorozata:

$$b_{n-1} + (2n-1) = (n-1)^2 + 2 + (2n-1) = (n^2 - 2n + 1) + 2 + (2n-1) = n^2 + 2 = b_n.$$

Itt alkalom adódik, hogy arról beszéljünk, hogy az egymást követő négyzetszámok különbsége a páratlan számok sorozatát adja.

Láttuk, hogy sorozatokat többféle módon is megadhatunk: **képlettel**, **utasítással** vagy **rekurzív definícióval** (azaz „visszavezető” lépésekkel).

Feladatok

1. Add meg az alábbi sorozatok első 10 elemét:

a) $a_n = 5n - 4$, $(n \in \mathbf{N}^+)$;

b) a 7-re végződő pozitív egész számok növekvő sorozata;

c) $c_n = P(n; -1)$ ahol P a derékszögű koordináta-rendszer egy pontja;

d) $d_n = n^2 - 2n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots, 10)$;

e) a prímszámok növekvő sorozata;

f) origó középpontú n egység sugarú kör, $(n \in \mathbf{N}^+)$;

g) $g_n = (-1)^n \cdot n$, $(n \in \mathbf{N}^+)$;

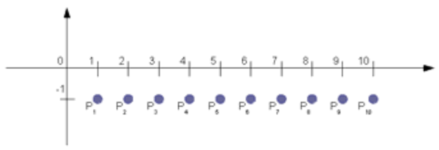
h) $h_1 = 7,\ h_2 = 8,$ $h_n = h_{n-1} - h_{n-2}$, $(n \geq 3$ egész szám).

Megoldás:

a) 1; 6; 11; 16; 21; 26; 31; 36; 41; 46.

b) 7; 17; 27; 37; 47; 57; 67; 77; 87; 97.

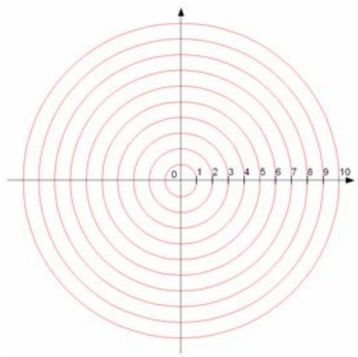
c) (1;– 1); (2;– 1); (3;– 1); (4;– 1); (5;– 1); (6;– 1); (7;– 1); (8;– 1); (9;– 1); (10;– 1).



d) – 1; 0; 3; 8; 15; 24; 35; 48; 63; 80.

e) 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29.

f) 10 origó középpontú koncentrikus kör.



g) – 1; 2; – 3; 4; – 5; 6; – 7; 8; – 9; 10.

h) 7; 8; 1; – 7; – 8; – 1; 7; 8; 1; – 7.

2. Válaszd ki azokat a sorozatokat, amelyeknek tagjai között a következő számok valamelyike megtalálható:

1 1,5 3 7 8

$a_n = 2n - 1;$ $b_n = n^2 + 2;$ $c_n = \dfrac{n+5}{n};$ $d_n = 1 - n^3;$

$e_1 = 12;$ $e_n = \dfrac{1}{2} \cdot e_{n-1};$ $f_1 = 1,$ $f_n = f_{n-1} + 3.$

Megoldás:

$-7 = d_2;$ $1 = a_1 = f_1;$ $1{,}5 = c_{10} = e_4;$ $3 = a_2 = b_1 = e_3;$ $7 = a_4 = f_3;$

8 nem tagja egyik sorozatnak sem.

3. Adj meg egy képletet vagy rekurzív definíciót, amellyel ki lehet számítani a sorozat *n*-edik tagját! Add meg a sorozat 20. tagját is!

a) 3; 6; 9; 12; 15; …

b) 1; – 1; – 3; – 5; – 7; …

c) 6; 3; 1,5; 0,75; …

d) 1; 4; 9; 16; 25; …

e) 100; 121; 144; 169; 225; …

f) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5};\ldots$

Megoldás:

a) $a_n = 3n$ $a_{20} = 60$

b) $b_n = 1 - 2 \cdot (n-1)$ vagy rekurzív módon megadva $b_1 = 1$ $b_n = b_{n-1} - 2$. $b_{20} = -37$.

c) $c_n = \dfrac{6}{2^{n-1}}$ vagy rekurzív módon megadva $c_1 = 6$ $c_n = \dfrac{c_{n-1}}{2}$. $c_{20} = \dfrac{6}{2^{19}} = 1{,}1444 \cdot 10^{-5}$.

d) $d_n = n^2$, vagy rekurzív módon megadva $d_1 = 1$ $d_n = d_{n-1} + 2n - 1$ (Ez akkor fordulhat elő, ha a tanuló azt fedezi fel, hogy az egymást követő számok különbsége a páratlan számok sorozatát adja.) $d_{20} = 400$.

e) $e_n = (n+9)^2$ $e_{20} = 841$.

f) $f_n = \dfrac{n}{n+1}$ $f_{20} = \dfrac{20}{21}$.

4. Jelöljük a sorozat első n elemének összegét S_n-nel.

Például $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ...

Mit ad meg $S_4 - S_3$, $S_6 - S_5$, illetve általában az $S_n - S_{n-1}$ különbség?

Add meg a sorozat első 5 elemét, ha

a) $S_n = 5n$; b) $S_n = n^2$; c) $S_n = 3$.

Megoldás:

Vegyük észre, hogy $S_n - S_{n-1} = (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}) = a_n$.

a) $a_1 = S_1 = 5 \cdot 1 = 5$, $a_2 = S_2 - S_1 = 10 - 5 = 5$, $a_3 = S_3 - S_2 = 15 - 10 = 5$,

$a_4 = S_4 - S_3 = 20 - 15 = 5$, $a_5 = S_5 - S_4 = 25 - 20 = 5$.

b) $b_1 = S_1 = 1^2 = 1$, $b_2 = S_2 - S_1 = 2^2 - 1^2 = 3$, $b_3 = S_3 - S_2 = 3^2 - 2^2 = 5$,

$b_4 = S_4 - S_3 = 4^2 - 3^2 = 7$, $b_5 = S_5 - S_4 = 5^2 - 4^2 = 9$.

c) $c_1 = S_1 = 3$, $S_n - S_{n-1} = 3 - 3 = 0$, tehát $c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$.

II. Sorozatok grafikonja, tulajdonságai

Tudjuk, hogy a sorozatok olyan speciális függvények, melyek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza. A függvények tulajdonságaival sokat foglalkoztunk. Ezen tulajdonságok közül néhány a sorozatoknál is érdekes lehet.

Mintapélda$_4$

Tekintsük a következő sorozatokat, és írjuk fel néhány elemüket!

$a_n = (-1)^n$. $\quad a_1 = 1$; $\quad a_2 = -1$; $\quad a_3 = 1$; $\quad a_4 = -1$; …

$b_n = \sin\left(\frac{n\cdot\pi}{3}\right)$. $\quad b_1 = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad b_2 = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad b_3 = \sin\pi = 0$

$b_4 = \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad b_5 = \sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$b_6 = \sin 2\pi = 0$ $\qquad b_7 = \sin\frac{7\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = b_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ldots$

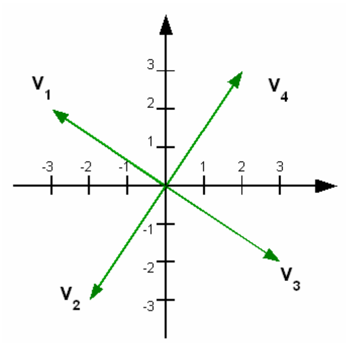
$c_n =$ a $\frac{170}{333}$ tört tizedestört-alakjának *n*-edik számjegye a tizedesvessző után.

$$\frac{170}{333} = 0{,}\dot{5}1\dot{0} = 0{,}510510510\ldots,\ \text{tehát}$$

$c_1 = 5$; $\quad c_2 = 1$; $\quad c_4 = 5 = c_1$; $\quad c_5 = 1 = c_2$; $\quad c_6 = 0 = c_3$.

$\mathbf{v}_n$ = a $\mathbf{v}(2;3)$ helyvektor elforgatottja az origó körül $n\cdot 90^\circ$-kal.

$\mathbf{v}_1\,(-3;2)$; $\quad \mathbf{v}_2\,(-2;-3)$; $\quad \mathbf{v}_3\,(3;-2)$;
$\mathbf{v}_4\,(2;3)$, és innen újra ismétlődnek a vektorok.



A tárgyalt sorozatok közös tulajdonsága, hogy tagjaik periodikusan ismétlődnek.

Az a_n sorozat periódusa $p = 2$, azaz $a_{n+2} = a_n$.

A b_n sorozat periódusa $p = 6$, azaz $b_{n+6} = b_n$.

A c_n sorozat periódusa $p = 3$, azaz $c_{n+3} = c_n$.

A $\mathbf{v}_n$ sorozat periódusa $p = 4$, azaz $\mathbf{v}_{n+4} = \mathbf{v}_n$.

Periodikusnak nevezzük azt a sorozatot, amelyhez van olyan *p* pozitív egész szám, hogy a sorozat bármely *n*-edik elemére $a_{n+p} = a_n$.

Mintapélda₅

Állapítsuk meg a következő sorozatok periódusát:

a) a_n = húrtrapéz +90°-os elforgatásai az átlók metszéspontja körül.

b) b_n = az *n* pozitív egész szám 5-tel való osztási maradékai.

c) c_n = az n^3 szám utolsó számjegye.

d) $d_n = 2 \cdot \sin\left(n \cdot 30^\circ\right) \cdot \cos\left(n \cdot 30^\circ\right)$.

Megoldás:

a) 4 különböző helyzet lehetséges, így $a_{n+4} = a_n$.

b) Írjuk fel a sorozat első néhány elemét: $b_1 = 1$ $b_2 = 2$ $b_3 = 3$ $b_4 = 4$ $b_5 = 0$ $b_6 = 1$ ...

A sorozat elemei ettől kezdve ismétlődnek, tehát a periódus 5, azaz $b_{n+5} = b_n$. Azt kell belátnunk, hogy *n* + 5 ugyanannyi maradékot ad 5-tel osztva, mint az *n*. Ez akkor következik be, ha a két szám különbsége osztható 5-tel. És valóban: $(n+5) - n = 5$.

c) Írjuk fel a sorozat első néhány elemét:

$c_1 = 1$ $c_2 = 8$ $c_3 = 7$ $c_4 = 4$ $c_5 = 5$ $c_6 = 6$ $c_7 = 3$ $c_8 = 2$ $c_9 = 9$ $c_{10} = 0$ $c_{11} = 1$...

Sejtésünk szerint az ismétlődés most már bekövetkezik. Sejtésünket igazoljuk is, azaz megmutatjuk, hogy a sorozat periódusa 10, azaz minden *n* esetén $c_{n+10} = c_n$.

Két szám utolsó számjegye akkor és csak akkor egyenlő, ha a két szám különbsége 0-ra végződik, azaz a két szám különbsége osztható 10-zel. Vizsgáljuk meg azt a két számot, melyeknek utolsó számjegye adja a sorozat megfelelő tagjait:

$(n+10)^3 = n^3 + 30n^2 + 300n + 1000$ valamint n^3.

A két szám különbsége: $(n+10)^3 - n^3 = n^3 + 30n^2 + 300n + 1000 - n^3 =$

$= 30n^2 + 300n + 1000 = 10 \cdot \left(3n^2 + 30n + 100\right)$ osztható 10-zel, tehát a két szám utolsó számjegye megegyezik, a periódus 10.

d) Abban biztosak lehetünk, hogy a $p = 12$ jó periódus lenne, hiszen a sorozat minden 12. tagjában olyan szögek szerepelnek, melyeknek mindkét szögfüggvénye azonos, hiszen a szögek eltérése 360º. De van-e vajon ennél kisebb lehetséges periódus?

Írjuk fel a sorozat első néhány elemét:

$d_1 = 2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = 0{,}8660$, $\quad d_2 = 2 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = 0{,}8660$.

Itt juthatnánk arra az elhamarkodott következtetésre, hogy a sorozat periódusa 1, azaz $d_{n+1} = d_n$, átrendezve $d_{n+1} - d_n = 0$, de ez csak bizonyos *n*-ekre lenne igaz.

Ha a sorozat néhány további tagját felírjuk:

$d_3 = 2 \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos 90^\circ = 0$ $\quad d_4 = 2 \cdot \sin 120^\circ \cdot \cos 120^\circ = -0{,}8660$

$d_5 = 2 \cdot \sin 150^\circ \cdot \cos 150^\circ = -0{,}8660$ $\quad d_6 = 2 \cdot \sin 180^\circ \cdot \cos 180^\circ = 0$

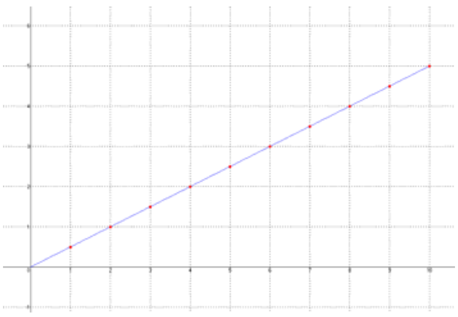
$d_7 = 2 \cdot \sin 210^\circ \cdot \cos 210^\circ = 0{,}8660 \ldots$, tehát $d_{n+6} = d_n$.

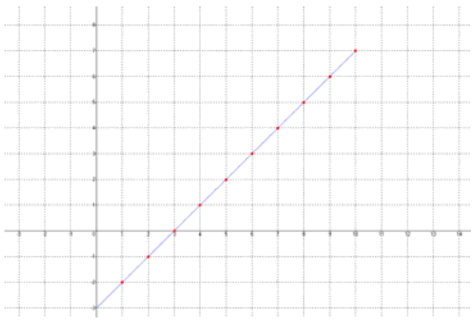
A továbbiakban csak számsorozatokat (röviden: sorozatokat) tekintünk, azaz olyan függvényeket, melyeknek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékkészletük pedig a valós számok egy részhalmaza. E függvények grafikonjai tehát mindig pontsorozatok.

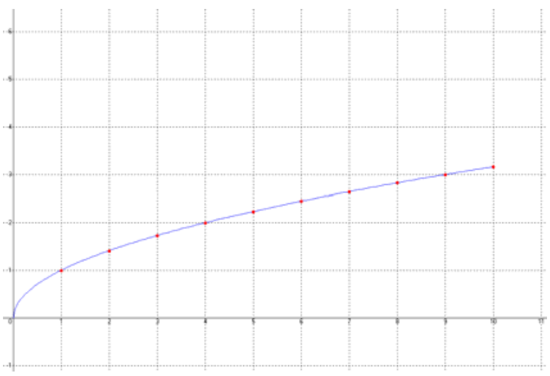
A most következő sorozat-tulajdonságokat **csak számsorozatokra** értelmezzük.

Az alábbi $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ függvényekről tudjuk, hogy szigorúan monoton növekedők:

$f(x) = \frac{1}{2}x$ $\qquad g(x) = x - 3$







$h(x) = \sqrt{x}$

Ha leszűkítjük az értelmezési tartományukat a pozitív egész számokra, akkor a $\mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$ függvények által megadott sorozat tagjai is növekednek (piros pontok):

$f_n = \frac{1}{2}n$, $g_n = n-3$, $h_n = \sqrt{n}$.

> Egy **sorozat monoton nő**, ha minden tagja legalább akkora, mint az előző tag: $a_n \geq a_{n-1}$.

Hasonlóképp definiálhatjuk a monoton csökkenő sorozatokat is:

> Egy **sorozat monoton csökken**, ha minden tagja legfeljebb akkora, mint az előző tag: $a_n \leq a_{n-1}$.

Mintapélda$_6$

Válaszd ki az alábbi sorozatokból a monoton csökkenőket és a monoton növekedőket ($n \in \mathbf{N}^+$)! Sejtésedet bizonyítsd!

a) $a_n = \frac{1}{n}$; b) $b_1 = 20$, $b_n = b_{n-1} + 3$;

c) $c_1 = -120$, $c_n = c_{n-1} \cdot 4$; d) $d_1 = 10$, $d_n = d_{n-1} \cdot (-2)$..

Megoldás:

Először számítsuk ki a sorozat néhány tagját, hogy megsejtsük, monoton sorozatok-e.

$n\to$ melyik sorozat↓	1	2	3	4	5	6
a_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
b_n	20	23	26	29	32	35
c_n	– 120	– 480	– 1920	– 7680	– 30720	– 122880
d_n	10	– 20	40	– 80	160	– 320

Az a_n sorozat tagjai egyre közelebb kerülnek a 0-hoz, sejtésünk szerint csökkenő sorozat.

És valóban: ha $n \geq 2$, $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} = \frac{n-1-n}{n(n-1)} = -\frac{1}{n(n-1)} < 0$, azaz $a_n < a_{n-1}$.

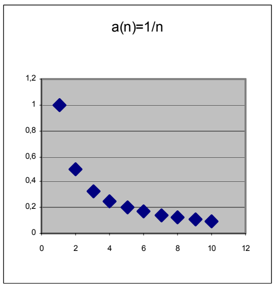
A b_n sorozat tagjai növekednek, mivel $b_n - b_{n-1} = b_{n-1} + 3 - b_{n-1} = +3 > 0$, azaz $b_n > b_{n-1}$.

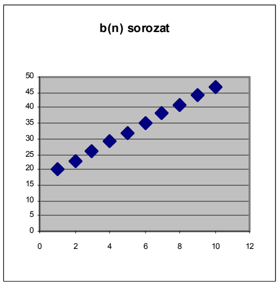
A c_n sorozat csökkenő, mivel $c_n - c_{n-1} = c_{n-1} \cdot 4 - c_{n-1} = 3 \cdot c_{n-1}$. Ennek előjele attól függ, hogy c_{n-1} pozitív, vagy negatív. Látható, hogy a sorozat minden eleme (köztük a c_{n-1} is) negatív, mivel a második elemtől kezdve mindig egy negatív szám háromszorosát számítjuk ki.

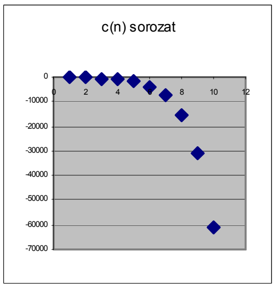
A d_n sorozat se nem csökkenő, se nem növekvő sorozat. Ha valaki mégis megpróbálná bebizonyítani, hogy csökkenő, vagy növekvő, a $d_n - d_{n-1}$ különbséget kellene vizsgálnia. Most próbaként tegyük ezt meg! $d_n - d_{n-1} = d_{n-1} \cdot (-2) - d_{n-1} = -3 \cdot d_{n-1}$. Ennek előjele d_{n-1} előjelétől függ, az viszont váltakozó.

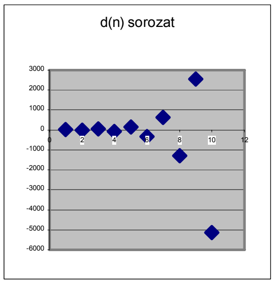
A sorozatok monotonitásának vizsgálatát megkönnyíti, ha ismerjük annak a függvénynek a grafikonját, amelyből a sorozat elemeit képezzük.

$x \mapsto \frac{1}{x}$ $\quad$ $x \mapsto 3x + 17$ $\quad$ $x \mapsto -120 \cdot 4^{x-1}$ $\quad$ $x \mapsto 10 \cdot (-2)^{x-1}$









Feladat

5. Írd fel a sorozatok első 10 elemét! Válaszd ki az alábbi sorozatok közül a periodikus sorozatokat. Add meg a periódusukat! Határozd meg a monoton növőket és a monoton csökkenőket ($n \in \mathbf{N}^+$)!

$a_n = 7 - 3 \cdot n$;

$b_n = (-2)^n$;

$c_n =$ az n^2 szám utolsó számjegye;

$d_n = (-5) \cdot 2^n$;

$e_n = \sin(n \cdot 10^\circ)$;

$f_n = \frac{2n}{n+1}$;

$g_n =$ az n szám osztóinak száma.

Megoldás:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	4	1	– 2	– 5	– 8	– 11	– 14	– 17	– 20	– 23
b_n	– 2	4	– 8	16	– 32	64	– 128	256	– 512	1024
c_n	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
d_n	– 10	– 20	– 40	– 80	– 160	– 320	– 640	– 1280	– 2560	– 5120
e_n	0,1736	0,3420	0,5	0,6428	0,7660	0,8660	0,9397	0,9848	1	0,9848
f_n	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{20}{11}$
g_n	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4

Periodikus sorozatok: c_n és e_n.

A c_n sorozat periódusa 10, mivel $n+10$ szám négyzete ugyanazt a maradékot adja 10-zel osztva, mint az n szám négyzete, ugyanis $(n+10)^2 = n^2 + 20n + 100$, és ennek az összegnek az utolsó két tagja osztható 10-zel, tehát a szám utolsó számjegye ugyanakkora lesz, mint az n^2-é.

e_n sorozat periódusa 36, mivel tudjuk, hogy az $f(x) = \sin x$ függvény periódusa $2\pi = 360°$.

Monoton csökkenő sorozatok: a_n és d_n. Az a_n sorozat csökkenő, mivel $a_n - a_{n-1} = 7 - 3n - [7 - 3(n-1)] = -3 < 0$, azaz $a_n < a_{n-1}$.

A d_n sorozat csökkenő, mivel

$d_n - d_{n-1} = (-5)\cdot 2^n - (-5)\cdot 2^{n-1} = (-5)\cdot 2^{n-1}\cdot(2-1) = -5\cdot 2^{n-1} < 0$, azaz $d_n < d_{n-1}$.

Az f_n sorozat monoton nő, mivel

$$f_n - f_{n-1} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2n-2}{n} = \frac{2n^2 - 2(n-1)(n+1)}{(n+1)n} = \frac{2}{(n+1)n} > 0, \text{ azaz } f_n > f_{n-1}.$$

A g_n sorozat nem rendelkezik a fenti tulajdonságok egyikével sem.

III. A számtani sorozat

Módszertani megjegyzés: Az általános iskolából ismerős fogalom a számtani sorozat. Könnyen lehetséges, hogy az előző órákon a diákok már felismerték és megnevezték, ha találkoztak ilyen sorozatokkal.

A középiskolás megközelítése ennek a fogalomnak annyiban más, hogy:

I. Nem elég a sejtés, a számtaninak látszó sorozatokról meg is kell mutatni, hogy azok számtaniak.

II. A képletek egy részét most már úgy használjuk, hogy előtte be is bizonyítottuk azokat.

III. Nagyobb matematikai apparátus áll rendelkezésünkre az egyes feladatok megoldásakor.

Vizsgáljuk meg, mi a közös az alábbi sorozatokban:

$a_n = 2n$,

$$2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 6 \xrightarrow{+2} 8 \xrightarrow{+2} 10$$

$b_1 = 10$, $\quad b_n = b_{n-1} - 3$,

$$10 \xrightarrow{-3} 7 \xrightarrow{-3} 4 \xrightarrow{-3} 1 \xrightarrow{-3} -2$$

$c_n =$ az *n*-edik olyan pozitív egész, melynek utolsó számjegye 2.

$$2 \xrightarrow{+10} 12 \xrightarrow{+10} 22 \xrightarrow{+10} 32 \xrightarrow{+10} 42$$

Valamennyi sorozat közös tulajdonsága, hogy az egymás utáni tagokat megkaphatjuk úgy is, ha az előző taghoz mindig ugyanazt a számot adjuk, tehát az egymást követő tagok különbsége (differenciája) állandó. Az ilyen sorozatokat számtani sorozatnak nevezzük.

Számtani sorozatnak nevezzük az olyan sorozatot,
amelyben az egymást követő tagok különbsége állandó.
Ezt az állandót **differenciának** (latin: különbség) nevezzük, jele: *d*.

A számtani sorozatban a második tagtól kezdve minden tagot úgy kapunk meg, hogy a sorozat előző tagjához hozzáadjuk a differenciát. A számtani sorozatot általában úgy adjuk meg, hogy megadjuk az első tagját és a differenciát. Nézzük meg, ennek segítségével hogyan lehet meghatározni a sorozat többi tagját!

$a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$; $a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$ …

$$\boxed{a_1} \xrightarrow{+d} \boxed{a_2} \xrightarrow{+d} \boxed{a_3} \xrightarrow{+d} \cdots \xrightarrow{+d} \boxed{a_n} \xrightarrow{+d} \cdots$$

A sorozat n-edik tagjához úgy jutunk el, hogy a sorozat első tagjához $n-1$-szer hozzáadjuk a d-t.

A számtani sorozat *n*-edik tagját így számoljuk ki: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Mintapélda₇

Ismerjük egy számtani sorozat első tagját és differenciáját:

a) $a_1 = -17$, $d = 3$; b) $b_1 = 15$, $d = 0{,}64$; c) $c_1 = 12{,}4$, $d = -2$.

Számítsuk ki a számtani sorozatok tizedik, huszadik, századik tagját!

Megoldás:

a) $a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot d = -17 + 9 \cdot 3 = 10$;

$a_{20} = a_1 + (20-1) \cdot d = -17 + 19 \cdot 3 = 40$;

$a_{100} = a_1 + (100-1) \cdot d = -17 + 99 \cdot 3 = 280$.

b) $b_{10} = b_1 + 9d = 15 + 9 \cdot 0{,}64 = 20{,}76$;

$b_{20} = b_1 + (20-1) \cdot d = 15 + 19 \cdot 0{,}64 = 27{,}16$;

$b_{100} = b_1 + (100-1) \cdot d = 15 + 99 \cdot 0{,}64 = 78{,}36$.

c) $c_{10} = c_1 + 9d = 12{,}4 + 9 \cdot (-2) = -5{,}6$;

$c_{20} = c_1 + (20-1) \cdot d = 12{,}4 + 19 \cdot (-2) = -25{,}6$;

$c_{100} = c_1 + (100-1) \cdot d = 12{,}4 + 99 \cdot (-2) = -185{,}6$.

Észrevehetjük, hogy a számtani sorozat monoton csökken, ha $d < 0$,
monoton nő, ha $d > 0$.

Ha a differencia nulla, a sorozat minden tagja azonos.

Az ilyen sorozatot **konstans sorozatnak** nevezzük.

Mintapélda$_8$

Számítsd ki a sorozat tizedik elemét, ha tudjuk, hogy $a_9 = 14$ és $a_{11} = 29$.

Megoldás:

1. módszer: Alkalmazzuk a számtani sorozat mindkét tagjára az ismert képletet, majd megoldjuk a kapott egyenletrendszert:

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$, tehát $\left.\begin{matrix} 14 = a_1 + 8d \\ 29 = a_1 + 10d \end{matrix}\right\}$. Innen (kivonással): $d = 7{,}5$.

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe:

$14 = a_1 + 8\cdot 7{,}5$

$a_1 = 14 - 8\cdot 7{,}5 = -46$.

Alkalmazva képletünket a 10. elemre $a_{10} = -46 + 9\cdot 7{,}5 = 21{,}5$.

2. módszer: Tudjuk, hogy $a_{10} = a_9 + d$, átrendezve $a_9 = a_{10} - d$, valamint $a_{11} = a_{10} + d$,

tehát $a_9 + a_{11} = a_{10} - d + a_{10} + d = 2a_{10}$.

a_{10}-et megkaphatjuk tehát a $\frac{a_9 + a_{11}}{2} = \frac{14+29}{2} = 21{,}5$ számítás eredményeként.

Az első módszer mindig alkalmazható, ha adott a számtani sorozat két tagja, és meg akarjuk határozni az első tagot és a differenciát.

A második módszerből az derült ki számunkra, hogy a számtani sorozat tizedik eleme a kilencedik és tizenegyedik elem **számtani közepe**. (Innen származik az ilyen tulajdonságú sorozatok „számtani” jelzője.)

Ez általában is érvényes:

Az első tag kivételével a számtani sorozat bármely tagja a hozzá képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagok számtani közepe. Képlettel:

$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, ha $n > k > 0$ egészek.

Feladat

6. Mutasd meg az alábbi sorozatokról, hogy számtani sorozatot alkotnak, és add meg a differenciájukat!

a) $a_n = 5n - 2$; b) $b_n = 10 - n$; c) $c_n = n^2 - (n-1)^2$.

Megoldás:

a) Írjuk fel a sorozat néhány tagját: 3, 8, 13, 18…

Sejtésünk az, hogy a sorozat számtani, és a differencia 5. Valóban, $a_n - a_{n-1} = (5n-2) - [5(n-1) - 2] = 5$.

b) Írjuk fel a sorozat néhány tagját: 9, 8, 7, 6…

Sejtésünk az, hogy a differencia -1. Valóban, $b_n - b_{n-1} = (10-n) - [10 - (n-1)] = -1$.

c) Írjuk fel a sorozat néhány tagját: 1, 3, 5, 7…

Sejtésünk, hogy ez is számtani sorozat, és a differencia 2. Írjuk fel c_n-et összeg alakban: $c_n = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$.

Így c_{n-1} így alakul: $c_{n-1} = 2(n-1) - 1 = 2n - 3$.

Valóban, $c_n - c_{n-1} = (2n-1) - (2n-3) = 2$.

7. Néhány számtani sorozat első tagját és differenciáját adtuk meg. Számítsd ki a keresett tagokat!

a) $a_1 = -37$, $d = 3$, $a_8 = ?$ $a_{21} = ?$

b) $b_1 = 5$, $d = \frac{2}{3}$, $b_8 = ?$ $b_{34} = ?$

c) $c_1 = 103{,}9$, $d = -0{,}4$, $c_{20} = ?$ $c_{51} = ?$

Megoldás:

a) $a_8 = -16$; $a_{21} = 23$; b) $b_8 = \frac{29}{3}$; $b_{34} = 27$; c) $c_{20} = 96{,}3$; $c_{51} = 83{,}9$.

8. Egy nagyon erős dohányos szilveszterkor megfogadja, hogy leszokik a dohányzásról. Január elsején még elszívja az addig szokásos két doboz (40 szál) cigarettáját, majd ettől kezdve minden nap 3 szállal csökkenti az adagját.

Ha tartja magát elhatározásához, sikerül-e a születésnapjáig (január 20-ig) leszoknia a dohányzásról?

Megoldás:

A naponta elszívott cigaretták száma számtani sorozatot alkot, melynél

$a_1 = 40$, $d = -3$.

Kérdés, hogy hányadik napra éri el, hogy a cigaretták száma ne legyen pozitív szám, azaz milyen *n*-re lesz $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 40 + (n-1)\cdot(-3) \le 0$.

Az egyenlőtlenséget megoldva $n \ge 14\frac{1}{3}$-ot kapunk, ez azt jelenti, hogy január 15-én már egyáltalán nem gyújt rá, tehát sikerül megtartani fogadalmát.

9. Add meg a számtani sorozat jellemzőit (a_1-et és *d*-t), ha elemei között fennáll a következő algebrai kapcsolat: $\left.\begin{matrix} a_{15} - a_9 = 36 \\ a_2 \cdot a_1 = 16 \end{matrix}\right\}$

Megoldás:

$a_{15} - a_9 = 6d = 36 \Rightarrow d = 6$

$(a_1 + 6)\cdot a_1 = 16$

$a_1^2 + 6a_1 - 16 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásából: $a_1 = -8$, illetve $a_1 = 2$ következik, így $d_1 = -2$, $d_2 = 8$..

10. Egy háromszög szögei egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Leghosszabb és legrövidebb oldala 4, illetve 2 cm.

a) Számítsd ki a háromszög területét!

b) Számítsd ki a háromszög harmadik oldalát!

Megoldás:

a) A háromszög belső szögeinek összege 180º. Legyen $\alpha < \beta < \gamma$. Mivel a háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van, a szokásos jelöléseket használva *a* = 2 cm, *c* = 4 cm. Ha a szögek számtani sorozat egymást követő tagjai, α és γ felírhatók $\alpha = \beta - d$, $\gamma = \beta + d$ alakban.

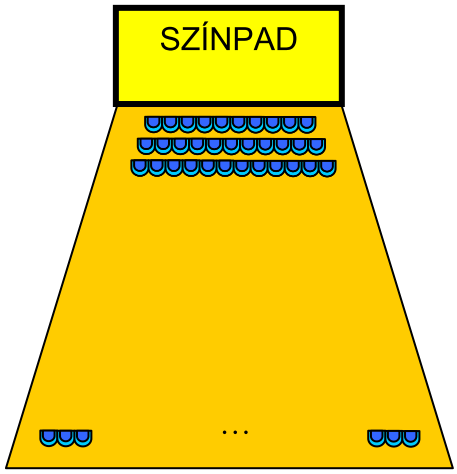
Így $\alpha + \beta + \gamma = 3\beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 60^\circ$.

A két kérdésre pedig már akkor is tudunk válaszolni, ha csak a β-t ismerjük:

$$T_\Delta = \frac{a\cdot c\cdot \sin\beta}{2} = 4\cdot\sin 60^\circ = 2\cdot\sqrt{3} \approx 3{,}46\,\text{cm}^2.$$

b) A koszinusztétel segítségével kiszámíthatjuk a *b* oldalt: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta = 4 + 16 - 2\cdot2\cdot4\cdot\cos 60^\circ = 20 - 8 = 12 \Rightarrow b = \sqrt{12} \approx 3{,}46\,\text{cm}$.

IV. A számtani sorozat első *n* tagjának összege



Egy trapéz alakú nézőtéren 20 sor van. Minden sorban kettővel több szék van, mint az előtte levőben. Hány néző fér el a színházban, ha az első sorba tízen ülhetnek le?

A sorokban levő székek száma számtani sorozatot alkot, melynek első tagja 10, differenciája pedig 2. Ha arra vagyunk kíváncsiak, hányan férnek el a nézőtéren, az $S_{20} = a_1 + a_2 + ... + a_{20}$ összeget kell kiszámítanunk, és ehhez a számtani sorozat mind a 20 tagját meg kell állapítanunk, és azokat összegezni kell. Vajon nincs ennél egyszerűbb módszer?

Egy sorozat tagjainak összegére gyakran van szükségünk. Egy sorozat első *n* elemének összegén következőt értjük:

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. (Az S_n kifejezés S betűje a summa=összeg latin szóból ered.)

Az ilyen típusú összegeket szokás röviden így is írni: $a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. (Σ a görög „nagy szigma” betű.)

A számtani sorozat első *n* elemének összegének meghatározásához Gauss ötletét alkalmazzuk.

> **Gauss,** Karl Friedrich (1777–1855) német matematikus, fizikus és csillagász.
> A matematikusok „fejedelme”. Korának legnagyobb matematikusa volt, aki megújította szinte az egész matematikát. A szászországi Braunschweigben született szegény családból. Tehetségét tanítója fedezte fel. A több osztállyal foglalkozó tanító a tizenéveseknek gyakorlásul feladta a számok összeadását 1-től 100-ig. Palatábláján Gauss rögtön megmutatta az eredményt: 5050. A csodálkozó tanítónak elmagyarázta, hogy nem a szokásos módon számolt, hanem az 1+100 = 101 összeget vette 50-szer.

Két különböző sorrendben adjuk össze a tagokat, először az első, majd az utolsó (*n*-edik) tagtól kezdve:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$$

Adjuk össze a két sort úgy, hogy az egymás alatt álló tagokat összepárosítjuk:

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_k + a_{n-k}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Vizsgáljuk meg, hogy milyen összefüggés van az egy zárójelben szereplő tagok között!

$a_2 + a_{n-1}$ felírható $a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n$ alakban, de ez igaz lesz minden zárójelben szereplő kifejezésre, hiszen

$$\left.\begin{aligned} a_k &= a_1 + (k-1)\cdot d \\ a_{n-k} &= a_n - (k-1)\cdot d \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_k + a_{n-k} = a_1 + (k-1)\cdot d + a_n - (k-1)\cdot d = a_1 + a_n .$$

Így egyenletünk jobb oldalán minden zárójelben levő kifejezés helyettesíthető $a_1 + a_n$-nel, tehát $2S_n = n\cdot(a_1 + a_n)$, tehát $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$.

Gyakran előfordul, hogy a számtani sorozatot első elemével és a differenciával adják meg, így célszerű az $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ kifejezés behelyettesítése után kapott következő képlettel is megbarátkozni: $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\cdot d}{2}\cdot n$.

Ha egy **számtani sorozat** első tagja a_1, n-edik tagja a_n és differenciája d, akkor a sorozat **első n elemének összegét** a következő képlettel tudjuk kiszámítani:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)\cdot d}{2}\cdot n$$

Oldjuk most meg a fejezet elején felvetett problémát!

Mintapélda$_9$

Egy trapéz alakú nézőtéren 20 sor van. Minden sorban kettővel több szék van, mint az előtte levőben. Hány néző fér el a színházban, ha az első sorba tízen ülhetnek le?

Megoldás:

$a_1 = 10$, $d = 2$. Képletünket alkalmazva $S_{20} = \frac{2\cdot 10 + (20-1)\cdot 2}{2}\cdot 20 = 580$.

Mintapélda$_{10}$

Hány sor van abban a kör alakú arénában, amelyről tudjuk, hogy az első sorban 100 ülőhely van, majd minden sorban 4-gyel több a helyek száma, mint az eggyel alacsonyabban levő sorban? Az egész arénában 3700 néző fér el.

Megoldás:

Jelöljük a sorok számát *n*-nel! Az egyes sorokban levő ülőhelyek száma számtani sorozatot alkot, melynek differenciája 4.

Ismerjük még a számtani sorozat első tagját: $a_1 = 100$, valamint az első *n* elem összegét: $S_n = 3700$. Ha az ismert adatokat beírjuk képletünkbe, egyetlen ismeretlenünk marad, az *n*.

$$3700 = \frac{2 \cdot 100 + (n-1) \cdot 4}{2} \cdot n \qquad /\cdot 2$$

$$7400 = [200 + (n-1) \cdot 4] \cdot n$$

Rendezés után a $0 = n^2 + 49n - 1850$ másodfokú egyenlethez jutunk.

A megoldóképletet alkalmazva:

$$n_{1,2} = \frac{-49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot (-1850)}}{2} = \frac{-49 \pm 99}{2} \Rightarrow n_1 = -74;\ n_2 = 25.$$

A negatív eredmény nem jöhet szóba, így $n = 25$, tehát az arénában 25 sor van.

Ellenőrzés: $S_{25} = \frac{2 \cdot 100 + 24 \cdot 4}{2} \cdot 25 = 3\,700$.

Mintapélda$_{11}$

Egy számtani sorozat 113. tagja 23. Mennyi az első 225 tag összege?

Megoldás:

$a_{113} = 23 = a_1 + 112d$. Látható, hogy kevés az adatunk ahhoz, hogy megállapítsuk a számtani sorozat első elemét és differenciáját, ugyanis végtelen sok ilyen számtani sorozat van. Szerencsére az összeg megállapításához nincs szükségünk a fenti adatokra, ugyanis az olyan sorozatokban, melyeknek 113. tagja 23, mind azonos az első 225 tag összege.

Használjuk most az $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ képletet az összeg kiszámítására:

$$S_{225} = \frac{a_1 + a_{225}}{2} \cdot 225.$$

Mivel a 113. taghoz képest az első és a 225. tag szimmetrikusan helyezkedik el, $\frac{a_1 + a_{225}}{2} = a_{113}$. Így $S_{225} = a_{113} \cdot 225 = 23 \cdot 225 = 5175$.

Ha egy számtani sorozatnak páratlan sok tagját adjuk össze, mindig megtehetjük, hogy a középső tagot szorozzuk meg a tagok számával.

Feladatok

11. Számítsd ki a hiányzó adatokat!

a)	$a_1 = 12;$	$d = 2{,}5.$	$S_{12} = ?$	
b)	$b_1 = 12;$	$d = -1{,}5.$	$S_{10} = ?$	
c)	$c_1 = -4{,}3;$	$S_{15} = 9.$	$d = ?$	
d)	$d = -2{,}1;$	$S_{20} = 1661.$	$a_1 = ?$	
e)	$d = 0{,}2;$	$S_5 = 57.$	$e_1 = ?$	
f)	$S_{10} = 13;$	$S_{20} = -34.$	$f_1 = ?$	$f_{10} = ?$

Megoldás:

a) $S_{12} = 309$; b) $S_{10} = 52{,}5$; c) $d = 0{,}7$; d) $a_1 = 103$; e) $e_1 = 11$;

f) $f_1 = 4$ $f_{10} = -1{,}4$.

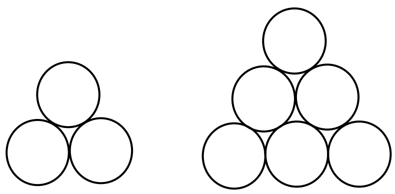
12. Valaki összeadta az összes olyan – legfeljebb 4 jegyű – pozitív egész számot, amelyre igaz, hogy a számjegyek összege osztható 9-cel. Mennyi lett ez az összeg?

Megoldás:

Azokra és csak azokra a számokra lesz a számjegyek összege osztható 9-cel, amelyekre maga a szám is osztható 9-cel, tehát keressük a 9-cel osztható, legfeljebb 4 jegyű számok összegét. A 9-cel osztható számok számtani sorozatot alkotnak, $d = 9,\ a_1 = 9,\ a_n = 9999$.

$9999 = 9 + (n-1)\cdot 9 \Rightarrow n = 1111$, tehát az összeg $S_{1111} = \dfrac{9+9999}{2}\cdot 1111 = 5559444$.

13. Egyforintosokból az ábrán látható alakzatokat raktuk ki. Hány forint szükséges a 100. ilyen alakzat megformálásához?



Megoldás:

A „piramisok” olyanok, hogy fentről lefelé nézve minden sorban eggyel több érme van, mint az előzőben, tehát egy-egy piramis soraiban levő érmék száma 1 differenciájú számtani sorozatot alkot. A 100. ilyen alakzat alsó sorában 101 ilyen érme van, tehát ez a 101. tagja a számtani sorozatnak. Az érmék száma $S_{101}=\frac{1+101}{2}\cdot 101=5151$. Tehát a 101. piramishoz 5151 Ft kell.

14. Egy sorozatot az $a_n=(n+5)^2-n^2$ képlettel adtak meg.

a) Számítsd ki a sorozat első 10 elemének összegét!

b) Milyen képlet adja meg a sorozat első n elemének összegét?

Megoldás:

a) Hozzuk egyszerűbb alakra a sorozatot megadó képletet!

$a_n=n^2+10n+25-n^2=10n+25$.

Ha felírjuk a sorozat első néhány tagját: 35, 45, 55, 65,… az a sejtésünk támad, hogy számtani sorozat tagjait kaptuk.

Valóban, az egymást követő tagok különbsége állandó, hiszen

$a_n-a_{n-1}=10n+25-[10(n-1)+25]=10n+25-(10n+15)=10=d$.

A sorozat első tagja $a_1=35$, tehát $S_{10}=\frac{2\cdot 35+9\cdot 10}{2}\cdot 10=800$.

b) $S_n=\frac{2\cdot 35+(n-1)\cdot 10}{2}\cdot n=[35+(n-1)\cdot 5]\cdot n=(5n+30)\cdot n=5n^2+30n$.

15. Nagymama vastag fonalból babakocsiba való lábzsákot köt a kisunokájának. A szabásminta szerint a zsák hátsó része trapéz alakú. Ezt a formát úgy alakította ki, hogy az első sorban 40 szemet kötött, majd minden ötödik sorban 2 szemet szaporított. Az utolsó 5 sorban 80 szemet kötött. Milyen hosszú lesz a lábzsák, ha minden kötéssor 0,5 cm-nek felel meg? Összesen hány szemet kötött, míg elkészült a munkával?

Megoldás:

Ha csak minden ötödik sor szemszámát tekintjük, akkor azok számtani sorozatot alkotnak.

$a_1 = 40$; $d = 2$; $a_n = 80$. Az $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ képletet használva $n = 21$-et kapunk. Ez azt jelenti, hogy $21 \cdot 5 = 105$ sort kötött a nagyi, ezért $105 \cdot 0{,}5 = 52{,}5$ cm hosszú lesz a lábzsák.

Ha összeadnánk, hogy minden ötödik sorban hány szem van, a fenti számtani sorozat első 21 tagjának összegét kapnánk. De nagymama ötször ennyit kötött, hiszen minden sorhosszúságból 5 van, így $5 \cdot S_{21} = 5 \cdot \frac{40 + 80}{2} \cdot 21 = 6300$ szemet kötött.

V. A mértani sorozat

Vizsgáljuk meg, mi a közös az alábbi sorozatokban:

a) $a_1 = -\frac{1}{9}$; $\quad a_n = a_{n-1} \cdot 3$.

$$\boxed{-\frac{1}{9}} \xrightarrow{\cdot 3} \boxed{-\frac{1}{3}} \xrightarrow{\cdot 3} \boxed{-1} \xrightarrow{\cdot 3} \boxed{-3}$$

b) $b_n = 2^n$

$$\boxed{2} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{4} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{8} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{16}$$

c) $c_1 = 32$; $\quad \frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{32} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \boxed{16} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \boxed{8} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \boxed{4}$$

Az a közös a sorozatokban, hogy mind a háromnál úgy kapjuk meg a sorozat tagjait az előzőből, hogy ugyanazzal a számmal megszorozzuk.

Mértani sorozatnak nevezzük az olyan sorozatot, amelyben a szomszédos tagok hányadosa – a sorozatra jellemző – nullától különböző állandó. Ezt az állandót **hányadosnak** (kvóciensnek) nevezzük, jele *q*.

A kvóciens elnevezés a latin quotiens = hányados szóból származik, ezért szoktuk q-val jelölni. **A mértani sorozatokban a második tagtól kezdve minden tagot úgy kapunk meg, hogy a sorozat előző tagját *q*-val (a kvócienssel) megszorozzuk.**

(a_n), (b_n), (c_n) sorozatok tehát mértani sorozatok.

Mintapélda$_{12}$

Mutassuk meg, hogy az előző három sorozat mindkét definíciónak megfelel!

Megoldás:

Az (a_n) sorozat tagjai úgy keletkeznek, hogy minden tag az őt megelőző 3-szorosa, tehát az egy 3 kvóciensű sorozat.

Ha a (b_n) sorozat bármely tagját 2-vel szorozzuk, a következő tagot kapjuk: $b_n \cdot 2 = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1} = b_{n+1}$.

A (c_n) sorozat képletét átrendezve $c_n = \frac{1}{2} \cdot c_{n-1}$, tehát ez egy $q = \frac{1}{2}$ kvóciensű mértani sorozat.

Látható, hogy az (a_n) és (b_n) sorozatoknál állandó az egymást követő tagok hányadosa:

$$a_1 = -\frac{1}{9}, \qquad a_n = a_{n-1} \cdot 3, \qquad \frac{a_n}{a_{n-1}} = 3;$$

$$b_n = 2^n, \qquad b_{n-1} = 2^{n-1}, \qquad \frac{b_n}{b_{n-1}} = 2.$$

A harmadik sorozat megadása eleve olyan volt, hogy az egymást követő tagok hányadosa $\frac{1}{2}$ legyen.

A mértani sorozatok esetében gyakran megadjuk az első tagot és a q-t.

Hogyan tudjuk meghatározni a_1 és q ismeretében a sorozat tagjait anélkül, hogy az összes előzőt ki kellene számolnunk?

$$a_1 \xrightarrow{\cdot a} a_2 \xrightarrow{\cdot a} a_3 \xrightarrow{\cdot a} \dots \xrightarrow{\cdot a} a_n \xrightarrow{\cdot a} \dots$$

A sorozat n-edik tagját úgy kapjuk meg, hogy az első tagot $n-1$-szer megszorozzuk q-val, tehát $a_n = a \cdot q^{n-1}$.

A mértani sorozat *n*-edik tagját így számoljuk ki: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Mintapélda$_{13}$

Számítsuk ki a bevezetésben szereplő sorozatok hatodik tagjait!

Megoldás:

$$a_1 = -\frac{1}{9}; \qquad q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = 3; \qquad a_6 = \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot 3^{6-1} = \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot 243 = -27;$$

$$b_1 = 2; \qquad q = \frac{b_n}{b_{n-1}} = 2; \qquad b_6 = 2 \cdot 2^{6-1} = 2^6 = 64;$$

$$c_1 = 32; \qquad q = \frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{1}{2}; \qquad c_6 = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 32 \cdot \frac{1}{32} = 1.$$

Mintapélda$_{14}$

Egy mértani sorozat két tagját ismerjük: $a_{20} = 10$, $a_{22} = 1000$. Számítsuk ki a sorozat 21. tagját!

Megoldás:

1. módszer:

Az $a_n = a \cdot q^{n-1}$ egyenlet segítségével állítsunk fel egyenletrendszert a_1 és q kiszámítására: $\left.\begin{matrix} 10 = a_1 \cdot q^{19} \\ 1000 = a_1 \cdot q^{21} \end{matrix}\right\}$.

A két egyenlet megfelelő oldalait elosztjuk egymással (másodikat az elsővel):

$q^2 = 100$ innen $q_1 = 10$ vagy $q_2 = -10$.

A két értéket behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{matrix} q = 10 \\ a_1 = \dfrac{10}{10^{19}} = 10^{-18} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_{21} = a_1 \cdot q^{20} = 10^{-18} \cdot 10^{20} = 10^2 = 100, \text{ vagy}$$

$$\left.\begin{matrix} q = -10 \\ a_1 = \dfrac{10}{(-10)^{19}} = -10^{-18} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_{21} = \left(-10^{-18}\right) \cdot (-10)^{20} = \left(-10^{-18}\right) \cdot 10^{20} = -10^2 = -100.$$

2. módszer:

a_{20} értékét megkaphatjuk úgy, hogy a_{21}-et elosztjuk q-val, vagy a_{19}-et megszorozzuk q-val:

$$\begin{matrix} a_{20} = \dfrac{a_{21}}{q} \Rightarrow & a_{21} = a_{20} \cdot q \\ a_{20} = a_{19} \cdot q \Rightarrow & a_{19} = \dfrac{a_{20}}{q} \end{matrix}.$$

Tehát $a_{19} \cdot a_{21} = \frac{a_{20}}{q} \cdot (a_{20} \cdot q) = (a_{20})^2$.

Így $(a_{20})^2 = 10 \cdot 1000 = 10000 \Rightarrow a_{20} = -100$ vagy $a_{20} = 100$.

Az első módszer alkalmazható minden olyan esetben, amikor adott a mértani sorozat két tagja, és meg akarjuk határozni az első tagot és a kvócienst. A második módszerben kapott összefüggés általánosan is igaz:

A mértani sorozat bármely tagjának négyzete megegyezik a hozzá képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagok szorzatával, azaz $(a_n)^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$.

Ha kikötjük, hogy a mértani sorozat összes tagja pozitív, akkor a fenti összefüggésből $a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$ következik. Kimondhatunk a számtani sorozatban megismerthez hasonló jellegű tételt:

A pozitív tagú mértani sorozat bármely tagja a hozzá képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagok mértani közepe. Képlettel:

$a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$ ha $n > k$ és minden $a_i > 0$, $i \in \mathbf{N}^+$.

(Ezért nevezik az ilyen tulajdonságú számsorozatokat mértani sorozatnak.)

Módszertani megjegyzés: **Szóforgós játék**

A játék szabálya az, hogy mindenkinek felváltva kell egy-egy taggal folytatni a sorozatot úgy, hogy a megelőző két számmal hol számtani, hol mértani sorozatot alkosson. Például legyen az első két szám 0 és 2. – 1. játékos folytatja 4-gyel, mert 0; 2; 4 számtani.

Most a két folytatandó szám a 2 és 4. – 2. játékos folytatja 8-cal, mert 2; 4; 8 mértani.

A két folytatandó szám a 4 és 8. – 3. játékos folytatja 12-vel, mert 4; 8; 12 számtani.

A két folytatandó szám a 8 és 12. – 4. játékos folytatja 18-cal, mert 8; 12; 18 mértani.

Tehát a sorozatunk így alakul: 0; 2; 4; 8; 12; 18;…

Az alábbi sorozatokat a megadott szabály szerint két változatban is játszhatják:

I. az első két számot **először** számtani sorozatként kell folytatni, majd az utolsó kettő tagot mértanivá kiegészíteni, és így tovább (ilyen szerepelt a példánkban is)…

II. az első két számot **először** mértani sorozattá kell kiegészíteni egy 3. számmal, majd az utolsó kettőt számtanivá és így tovább…

Az első két szám legyen:

a) $a_1 = -1,$ $a_2 = 1;$

b) $b_1 = +1,$ $a_2 = -2;$

c) $c_1 = 3,$ $c_2 = 1;$

d) $d_1 = 2,$ $d_2 = 1;$

e) $e_1 = 6,$ $e_2 = 4.$

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A 16. feladatot házi feladatnak javasoljuk. Ha foglalkoztak a tanulók a monotonitással, a mértani sorozatokat érdemes általánosan is osztályozni monotonitás szempontjából:

Monoton csökken a mértani sorozat, ha $a_1 < 0$ *és* $q > 1$,

vagy ha $a_1 > 0$ *és* $0 < q < 1$.

Monoton nő a mértani sorozat, ha $a_1 > 0$ *és* $q > 1$,

vagy ha $a_1 < 0$ *és* $0 < q < 1$.

16. Írd fel a következő mértani sorozatok első 5 elemét! Állapítsd meg a sorozatok monotonitását! Sejtésedet igazold!

a) $a_1 = 100;$ $q = 0{,}5.$

b) $b_1 = -64;$ $q = 0{,}25.$

c) $c_1 = 1{,}2;$ $q = -3.$

d) $d_1 = 72;$ $q = 1{,}5.$

e) $e_1 = -36;$ $q = 2.$

Megoldás:

a) $a_2 = 50$, $a_3 = 25$, $a_4 = 12{,}5$, $a_5 = 6{,}25$, a sorozat monoton csökken, hiszen

$$a_n - a_{n-1} = 100 \cdot 0{,}5^{n-1} - 100 \cdot 0{,}5^{n-2} = 100 \cdot 0{,}5^{n-2} \cdot (0{,}5 - 1) =$$

$$= -100 \cdot 0{,}5^{n-1} < 0, \text{ azaz } a_n < a_{n-1}.$$

b) $b_2 = -16$, $b_3 = -4$, $b_4 = -1$, $b_5 = -0{,}25$, a sorozat monoton nő, mert

$$b_n - b_{n-1} = -64 \cdot 0{,}25^{n-1} - (-64) \cdot 0{,}25^{n-2} = (-64) \cdot 0{,}25^{n-2} \cdot (0{,}25 - 1) =$$

$= 64 \cdot 0,75 \cdot 0,25^{n-2} > 0$ azaz $b_n > b_{n-1}$.

c) $c_2 = -3,6 \quad c_3 = 10,8 \quad c_4 = -32,4 \quad c_5 = 97,2$ a sorozat nem nő és nem csökken.

d) $d_2 = 108 \quad d_3 = 162 \quad d_4 = 243 \quad d_5 = 364,5$ a sorozat monoton nő, mert

$d_n - d_{n-1} = 72 \cdot 1,5^{n-1} - 72 \cdot 1,5^{n-2} = 72 \cdot 1,5^{n-2} \cdot (1,5 - 1) = 0,5 \cdot 72 \cdot 1,5^{n-2} =,$

$= 36 \cdot 1,5^{n-2} > 0$, azaz $d_n > d_{n-1}$.

e) $e_2 = -72 \quad e_3 = -144 \quad e_4 = -288 \quad e_5 = -576$ monoton csökken, hiszen

$e_n - e_{n-1} = (-36) \cdot 2^{n-1} - (-36) \cdot 2^{n-2} = (-36) \cdot 2^{n-2} \cdot (2-1) < 0,$ azaz $e_n < e_{n-1}$.

17. Számítsd ki a megadott mértani sorozatok hiányzó adatait:

a) $a_1 = -4;\ q = 3;\ a_5 = ?$

b) $b_1 = 4;\ q = -3;\ a_5 = ?$

c) $c_1 = \frac{2}{3};\ c_4 = \frac{9}{4};\ q = ?$

d) $d_1 = \frac{2}{3};\ d_5 = \frac{27}{8};\ q = ?$

e) $e_1 = 1;\ e_5 = -16;\ q = ?$

Megoldás:

a) $a_5 = (-4) \cdot 3^{5-1} = (-4) \cdot 81 = -324;$

b) $b_5 = 4 \cdot (-3)^{5-1} = 4 \cdot (-3)^4 = 4 \cdot 81 = 324;$

c) $c_4 = \frac{2}{3} \cdot q^{4-1} = \frac{9}{4} \Rightarrow q^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow q = \frac{3}{2};$

d) $d_5 = \frac{2}{3} \cdot q^4 = \frac{27}{8} \Rightarrow q^4 = \frac{81}{16} \Rightarrow q = -\frac{3}{2}$ vagy $q = \frac{3}{2}$.

e) $e_5 = 1 \cdot q^4 = -16 \Rightarrow q^4 = -16$, a valós számok körében nincs megoldás, azaz ilyen mértani sorozat nem létezik.

18. Adott egy mértani sorozat az első elemével és a kvóciensével. Döntsd el, hogy tagja-e a sorozatnak a t-vel jelölt szám, és ha igen, akkor hányadik tagja ez a sorozatnak?

a) $a_1 = 256;\ q = 0,5;\ t = 16;$

b) $b_1 = 125;\ q = 0,24;\ t = 0,41472;$

c) $c_1 = 1800;\ q = 0,3;\ t = 20000$.

Megoldás:

Tekintsük úgy, mintha a *t* szám a sorozat *n*-edik tagja lenne.

a) $16 = 256 \cdot 0{,}5^{n-1}$

$$2^4 = 2^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$n = 5.$

b) $0{,}41472 = 125 \cdot 0{,}24^{n-1}$

$$0{,}24^{n-1} = 3{,}31776 \cdot 10^{-3}$$

Mindkét oldalon pozitív szám van, így vehetjük a logaritmusukat:

$(n-1) \cdot \lg 0{,}24 = \lg\left(3{,}31776 \cdot 10^{-3}\right) \quad \Rightarrow n = 5$.

c) $20000 = 1800 \cdot 0{,}3^{n-1}$

$$\frac{100}{9} = \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$

$n = -1.$

Nincs megoldás, mert *n*-re nem pozitív egész számot kaptunk. (A sorozatnak nincs (– 1)-edik tagja.)

VI. Kamatos kamat

Először ismételjük át a százalékszámításról tanultakat!

Egy *A* mennyiség *p* százaléka az adott összeg $\frac{p}{100}$-ad része, tehát ha ki akarjuk számítani az *A* mennyiség *p* százalékát, meg kell szoroznunk *A*-t $\frac{p}{100}$-zal.

Az *A* mennyiség *p* %-a: $\frac{p}{100}\cdot A$.

Ha az *A* mennyiséget *p* %-kal növeljük, akkor az *A*-hoz hozzá kell adni az *A* mennyiség $\frac{p}{100}$-szorosát:

Az A mennyiség p %-kal növelve: $A+\frac{p}{100}\cdot A=\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot A$.

Hasonlóan, ha most p%-kal csökkenteni akarjuk *A*-t:

Az A mennyiség p %-kal csökkentve: $A-\frac{p}{100}\cdot A=\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot A$.

Mintapélda15

A havi kötelező felelősségbiztosítás összege 4942 Ft-ról 5125 Ft-ra változott. Hány százalékkal nőtt a havi díj?

Megoldás:

1. módszer:

Először számítsuk ki, hányszorosa az új díj az eredetinek: $\frac{5125}{4942}\approx 1{,}037$. Ez 103,7 századrészt, azaz 103,7 százalékot jelent. Tehát a növekedés (100%-ról) 3,7%.

2. módszer:

Azt nézzük meg, hogy a növekedés hányadrésze az eredeti összegnek!

$\frac{5125-4942}{4942}=\frac{183}{4942}\approx 0{,}037$. Ez az eredeti összeg 3,7 századrésze, tehát 3,7%-a.

Mintapélda$_{16}$

Egy üzlet forgalma az előző hónaphoz képest 7%-kal nőtt. Ebben a hónapban 9846000 Ft volt. Mekkora volt az elmúlt hónapban?

Megoldás:

Jelölje x az eredeti forgalom értékét. Ez 7%-kal növekedett, vagyis

$$x + \frac{7}{100}x = 9846000\,.$$

$$1{,}07x = 9846000$$

$$x = \frac{9846000}{1{,}07} \approx 9201869$$

Tehát az elmúlt hónap forgalma 9201869 Ft volt.

Mintapélda$_{17}$

Magyarországon a halálozások száma 2005-ben 135732 volt, 2006-ban pedig 131500 (KSH adat). Hány százalékkal csökkent a halálozások száma 2005-ről 2006-ra?

Megoldás:

1. módszer:

Először megvizsgáljuk, hányadrésze (hányszorosa) a 2006. évi halálozások száma a 2005. évihez képest: $\frac{131500}{135732} \approx 0{,}969$, százalékban megadva 96,9 %, tehát a csökkenés 3,1%-os.

2. módszer:

Vizsgáljuk meg, hogy a csökkenés hányadrésze (hányszososa) a 2005. évi adatnak:

$\frac{135732 - 131500}{135732} \approx 0{,}031$. Ez 3,1 századrésznek, azaz 3,1%-nak felel meg.

Mintapélda$_{18}$

A bankba berakott pénzem havonta kamatozik úgy, hogy 0,9%-át minden hónap végén jóváírják a számlámon.

Vizsgáljuk meg, milyen összegek szerepelnek a számlámon hónapról hónapra, ha január 1-én beteszek 10 000 Ft-ot, és egész évben nem nyúlok a számlámhoz!

Megoldás:

Ha *x* összeg van a számlán, ez az összeg a 0,9% kamat miatt 1,009-szorosára nő.

2007. január 1.	10000
február 1.	$10000 \cdot 1{,}009$
március 1.	$10000 \cdot 1{,}009 \cdot 1{,}009 = 10000 \cdot 1{,}009^2$
április 1.	$10000 \cdot 1{,}009^2 \cdot 1{,}009 = 10000 \cdot 1{,}009^3$
május 1.	$10000 \cdot 1{,}009^3 \cdot 1{,}009 = 10000 \cdot 1{,}009^4$
június 1.	$10000 \cdot 1{,}009^4 \cdot 1{,}009 = 10000 \cdot 1{,}009^5$
július 1.	$10000 \cdot 1{,}009^5 \cdot 1{,}009 = 10000 \cdot 1{,}009^6$
augusztus 1.	$10000 \cdot 1{,}009^6 \cdot 1{,}009 = 10000 \cdot 1{,}009^7$
szeptember 1.	$10000 \cdot 1{,}009^7 \cdot 1{,}009 = 10000 \cdot 1{,}009^8$
október 1.	$10000 \cdot 1{,}009^8 \cdot 1{,}009 = 10000 \cdot 1{,}009^9$
november 1.	$10000 \cdot 1{,}009^9 \cdot 1{,}009 = 10000 \cdot 1{,}009^{10}$
december 1.	$10000 \cdot 1{,}009^{10} \cdot 1{,}009 = 10000 \cdot 1{,}009^{11}$
2008. január 1.	$10000 \cdot 1{,}009^{11} \cdot 1{,}009 = 10000 \cdot 1{,}009^{12} \approx 10000 \cdot 1{,}1135 = 11135\,\text{Ft}$

Észrevehetjük, hogy az egymást követő pénzösszegek mértani sorozatot alkotnak. A 2008. január 1-én felvehető pénzt kiszámíthattuk volna a mértani sorozat *n*-edik elemének képlete segítségével is:

$a_1 = 10000$; $q = 1{,}009$; $n = 13$; $a_{13} = 10000 \cdot 1{,}009^{12} \approx 11135.$

Amikor egy bizonyos pénzösszegnek azonos mértékű ismételt kamatát számítjuk ki (vagyis a kamattal növelt összeg kamatát számítjuk), **kamatos kamatról** beszélünk.

Mintapélda$_{19}$

Egy természetvédelmi területen egy növény egyedszáma úgy változik, hogy évről-évre 4%-kal nő. Ha a körülmények nem változnak, hány év múlva lesz a növények egyedszáma az eredeti szám másfélszerese?

Megoldás:

Legyen a növények eredeti egyedszáma *N*, ekkor a feladat:

$$a_1 = N; \qquad q = 1{,}04; \qquad a_n = 1{,}5N; \qquad n = ?$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$1{,}5N = N \cdot 1{,}04^{n-1} \qquad / : N$$

$$1{,}5 = 1{,}04^{n-1}$$

Most az ismeretlen a kitevőben szerepel, a megoldást ezért megkapjuk, ha vesszük az egyenlet mindkét oldalának logaritmusát. Ezt megtehetjük, hiszen ha két pozitív mennyiség egyenlő, akkor (és csak akkor) a logaritmusuk is egyenlő. (Az $x \mapsto \log x$ függvény kölcsönösen egyértelmű a pozitív valós számokra.)

$$\lg 1{,}5 = \lg(1{,}04)^{n-1}$$

A hatvány logaritmusának azonosságát alkalmazva:

$$\lg 1{,}5 = (n-1)\cdot \lg 1{,}04 \qquad / : \lg 1{,}04$$

$$n - 1 = \frac{\lg 1{,}5}{\lg 1{,}04} \approx 10{,}34 \text{, innen}$$

$$n \approx 11{,}34 \,.$$

A sorozat első tagjának mondtuk az induló egyedszámot, ami igazából a 0. év, így a másfélszeres populációt a 10,34-edik évben éri el a növény. Tehát10 év elteltével még nem, de 11 év elteltével a populáció egyedszáma már meg is haladja az eredeti másfélszeresét. Észrevehetjük, hogy a feladat megoldása nem függ az eredeti egyedszámtól.

Feladatok

19. Magyarországon 2005-ben az élveszületések száma 97496 volt, 2006-ban pedig 99850 (KSH adat). Hány százalékkal változott az élveszületések száma 2005-ről 2006-ra?

Megoldás

$\frac{99850}{97496} \approx 1{,}024$, tehát 2,4%-kal nőtt.

20. Egy személygépkocsi árát 5%-kal megemelték, majd ebből az árból egy akció alkalmával 5%-ot elengedtek. Hogyan változott a gépkocsi ára az eredeti árhoz képest?

Megoldás:

Legyen a gépkocsi eredeti ára *A*. Az áremelés után az ár $1{,}05A$ lesz, majd ennek az árnak csak a 95%-át kell kifizetni, azaz $0{,}95 \cdot (1{,}05A) = (0{,}95 \cdot 1{,}05)A = 0{,}9975A$. Tehát az új ár az eredeti ár 99,75%-a lesz, ez 0,25%-os csökkenésnek felel meg.

21. Egy nagymama unokája születésekor olyan 500000 forintos betétet helyezett el számára a bankban, mely évente 8%-ot kamatozik. Unokája ezt 18 éves korában felveszi, hogy a továbbtanulását anyagilag fedezze. Mekkora összeget tud ekkor felvenni?

Megoldás:

A betett pénz a sorozat első tagja, 18 év elteltével már a sorozat 19. tagja lesz a számlán.

$a_1 = 500000$; $q = 1{,}08$; $n = 18$; $a_{19} = 500000 \cdot 1{,}08^{18} \approx 1998010$.

Tehát az unoka majdnem kétmillió forintot tud felvenni.

22. Egy ország 2007-ben vállalja, hogy a károsanyag-kibocsátást évi 3%-kal csökkenti. Hány év kell ahhoz, hogy a szennyezés a mostani érték 70%-a legyen?

Megoldás:

Jelöljük *K*-val a 2007-ben kibocsátott károsanyag mennyiségét.

$a_{2007} = K$; $q = 0{,}97$; $a_n = 0{,}7K$; $n = ?$

$a_{2007} = a_1 \cdot 0{,}97^{2006}$;

$a_n = a_1 \cdot 0{,}97^{n-1} \quad \Rightarrow \frac{a_n}{a_{2007}} = 0{,}97^{n-1-2006}$.

Itt szerepel egy olyan mennyiség, a_1, aminek valójában nincsen értelme. Azt jelenti, hogy Krisztus születése évében mennyi lett volna a károsanyag-kibocsátás, ha azóta is minden évben 3%-kal csökkentjük. Ezt azért vezettük be mégis, mert így *n* értéke azt az évszámot adja meg, amelyet a feladat kérdez.

Másrészt $\frac{a_n}{a_{2007}} = \frac{0{,}7K}{K} = 0{,}7$.

Tehát $0{,}97^{n-2007} = 0{,}7$; innen $n \approx 2018{,}7$.

Ez az eredmény azt jelenti, hogy 2019-re a károsanyag-kibocsátás a 2007-es adat 70%-ára fog csökkenni, vagyis körülbelül 12 év kell a szennyezés megadott mértékű csökkenéséhez.

VII. A mértani sorozat első *n* tagjának összege

Mintapélda$_{20}$

A legenda szerint egy indiai király udvari bölcse volt a sakk feltalálója. Az uralkodó annyira örült az új játéknak, hogy felajánlotta a bölcsnek, kérjen, amit csak akar, megkapja. A bölcs kérése szerénynek látszott:

„Tégy a sakktábla első mezőjére egy búzaszemet, a másodikra kettőt, a harmadikra négyet és így tovább, minden mezőre kétszer annyit, amennyi az előtte lévőn volt. Annyi búzaszem legyen a jutalmam, amennyi ilyen módon a sakktáblán van!”

Számítsuk ki, hány szem búza lett volna a 64. kockán, ha a bölcs „szerény” kérését a király teljesíteni tudja!

Megoldás:

A kérés szerint az elhelyezett búzaszemek száma 2 kvóciensű mértani sorozatot alkot, mert első tagja $a_1 = 1$, a másodikat úgy kapjuk meg, hogy az elsőt szorozzuk kettővel, és így tovább:

$$a_2 = 2,$$
$$a_3 = 2 \cdot 2 = 2^2, \ \ldots$$
$$a_4 = 2^2 \cdot 2 = 2^3,$$
$$\ldots a_{64} = 2^{63} \approx 9{,}22 \cdot 10^{18}.$$

Tehát az utolsó mezőn több mint 9 trillió búzaszemnek kellene elférnie.

A tudós azonban nemcsak a 64. mezőre jutó búzát kérte, hanem a sakktáblára elhelyezett összes búzát. Ki kellene számítanunk a mértani sorozat első 64 tagjának összegét!

A mértani sorozat első n elemének összegének kiszámításakor hasonló „cselt” alkalmazunk, mint a számtani sorozat képletének levezetésekor. Itt is kétszer írjuk fel az összeget, de a második sorban az összeg helyett az összeg q-szorosa szerepel:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$
$$q \cdot S_n = \qquad a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

Észrevehetjük ugyanis, hogy a két egymás alatt álló összegben nagyon sok azonos tag van, ezért, ha a két egyenletet kivonjuk egymásból, a következőt kapjuk:

$$q \cdot S_n - S_n = a_1q^n - a_1 \quad \Rightarrow \quad S_n \cdot (q-1) = a_1 \cdot (q^n - 1),$$

innen, ha $q \neq 1$, $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Ha $q = 1$, a sorozat minden tagja azonos, konstans sorozat keletkezik, tehát $S_n = n \cdot a_1$.

A mértani sorozat első n elemének összege

$S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, ha $q \neq 1$ és $S_n = n \cdot a_1$, ha $q = 1$.

Mintapélda₂₁

Számítsuk ki, hány szem búza járt volna a sakk feltalálójának!

Megoldás:

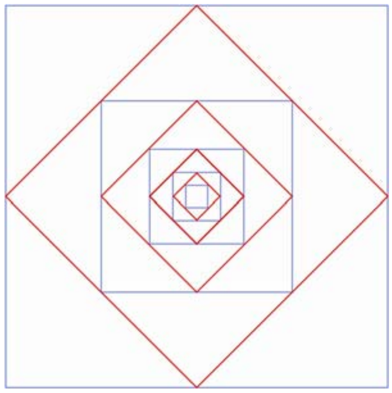
$a_1 = 1, \quad q = 2, \quad n = 64.$

Alkalmazzuk a képletet: $S_{64} = 1 \cdot \dfrac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1{,}84 \cdot 10^{19}$.

Észrevehetjük, hogy ez az érték az utolsó négyzetre tett búzaszemek kétszerese, azaz a legutolsó mezőn annyi búza van, mint a másik 63 mezőn összesen.

Ha egy szem búza tömegét kb. 0,04 g-nak tekintjük, akkor ez a búzamennyiség $7{,}36 \cdot 10^{11}$ tonna, és a Földön ennyi búza eddig még összesen nem termett.

Mintapélda$_{22}$



Kerítésünket olyan 1-szer 1 méteres négyzet alakú elemekből akarjuk elkészíteni, amit betonacél rudakból hegesztünk össze a következő módon: Az 1 méteres oldalú négyzet oldalfelező pontjaiba rudakat hegesztve kisebb négyzetet formálunk, majd eljárásunkat addig folytatjuk, míg az eredetivel együtt már 7 négyzet van a mintánkban.

a) Mekkora lesz a legkisebb négyzet oldala?

b) Hány m acélrúd kell egy ilyen kerítéselem elkészítéséhez?

Megoldás:

a) A legnagyobb négyzet oldala 1 m, a következőé egy $\frac{1}{2}$ oldalú négyzet átlója, tehát $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ami az előző adat (1 m) $\frac{\sqrt{2}}{2}$-szöröse. Minden kis négyzetoldal az előzőnek ennyiszerese, tehát az oldalak hosszai mértani sorozatot alkotnak, melynek kvóciense $\frac{\sqrt{2}}{2}$, első tagja 1, és keressük a hetedik tagot:

$a_7 = 1\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 = \frac{1}{8} = 0{,}125$ m. Tehát a legrövidebb rúd hossza 12,5 cm.

b) A négyzetek kerületei is mértani sorozatot alkotnak, melynek kvóciense szintén $\frac{\sqrt{2}}{2}$, hiszen $K = 4a$, $\qquad K' = 4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(4a) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot K$.

A mértani sorozat első tagja most $K_1 = 4$, a kvóciens $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$, de most az első hét tag összegét keressük:

$$S_7 = 4\cdot\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^7 - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-1} = 4\cdot\frac{\frac{\sqrt{2}}{16}-1}{\frac{\sqrt{2}-2}{2}} = 4\cdot\frac{\sqrt{2}-16}{8\cdot\left(\sqrt{2}-2\right)} = \frac{\sqrt{2}-16}{2\cdot\left(\sqrt{2}-2\right)} \approx 12{,}45\,.$$

Egy kerítéselem elkészítéséhez tehát körülbelül1 2,5 m anyag kell.

Mintapélda$_{23}$

Egy mértani sorozat első öt tagjának összege –28989, kvóciense 11. Határozzuk meg a mértani sorozat első tagját!

Megoldás:

Alkalmazzuk az összegképletet:

$$-28989 = a_1 \cdot \frac{11^5 - 1}{11 - 1},$$

$$-28989 = a_1 \cdot 16105,$$

$$a_1 = -1{,}8.$$

Mintapélda$_{24}$

Egy mértani sorozat első tagja 24, kvóciense $q = -2{,}5$. A sorozat első néhány tagját összeadtuk, és azt kaptuk, hogy $S_n = 676{,}5$. Hány tagot adtunk össze?

Megoldás:

Alkalmazzuk a mértani sorozat első *n* elemének összegére vonatkozó képletet:

$$676{,}5 = 24 \cdot \frac{(-2{,}5)^n - 1}{-2{,}5 - 1}$$

$$28{,}1875 = \frac{(-2{,}5)^n - 1}{-3{,}5}$$

$$-98{,}65625 = (-2{,}5)^n - 1$$

$$-97{,}65625 = (-2{,}5)^n$$

Most az ismeretlenünk a kitevőben van. Ilyenkor a logaritmust szoktuk segítségül hívni, de ebben az esetben azt most sajnos nem tehetjük, hiszen negatív számnak nem vehetjük a logaritmusát. Szerencsére az *n* számot a pozitív egész számok körében keressük, így egy kicsit ügyeskedhetünk:

$$-97{,}65625 = (-1)^n \cdot 2{,}5^n.$$

Tudjuk, hogy $[(-1) \cdot a]^n = (-1)^n \cdot a^n$, és $a > 0$ esetén ez csak akkor lesz negatív, ha az *n* szám páratlan, tehát a jelen esetben $(-1)^n = -1$.

Osszuk el az egyenlet mindkét oldalát -1-gyel, és ezután már vehetjük mindkét oldal logaritmusát:

$$97{,}65625 = 2{,}5^n$$
$$\lg 97{,}65625 = n \cdot \lg 2{,}5$$
$$n = \frac{\lg 97{,}65625}{\lg 2{,}5} = 5$$

Tehát a mértani sorozat első 5 tagját adtuk össze.

Mintapélda₂₅

Számítsuk ki a mértani sorozat kvóciensét, ha tudjuk, hogy az első három tag összege 39,368, és az első tag $a_1 = 3{,}8$.

Megoldás:

1. módszer:

Tudjuk, hogy $a_2 = 3{,}8 \cdot q$ és $a_3 = 3{,}8 \cdot q^2$, tehát a $39{,}368 = 3{,}8 + 3{,}8q + 3{,}8q^2$ másodfokú egyenlethez jutunk. Ezt átrendezve és a megoldóképletet alkalmazva:

$$3{,}8q^2 + 3{,}8q - 35{,}568 = 0 \qquad / : 3{,}8$$
$$q^2 + q - 9{,}36 = 0$$
$$q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 9{,}36}}{2} = \frac{-1 \pm 6{,}2}{2} \Rightarrow \text{a } q_1 = -3{,}6 \qquad \text{és a } q_2 = 2{,}6$$

megoldásokat kapjuk. És valóban, ha $q = -3{,}6$; $\quad 3{,}8 + (-13{,}68) + 49{,}248 = 39{,}368$;

és ha $q = 2{,}6$; $\quad 3{,}8 + 9{,}88 + 25{,}688 = 39{,}368$.

2. módszer:

Alkalmazzuk az összegképletet:

$$39{,}368 = 3{,}8 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1}$$
$$10{,}36 = \frac{q^3 - 1}{q - 1}$$

Ha most beszoroznánk az egyenlet mindkét oldalát $(q-1)$-gyel $(q \neq 1)$, harmadfokú egyenlethez jutnánk. Ha viszont alkalmazzuk az $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ azonosságot, átalakíthatjuk a törtünk számlálóját, majd egyszerűsíthetünk $(q-1)$-gyel:

$\frac{q^3 - 1}{q - 1} = \frac{q^3 - 1^3}{q - 1} = \frac{(q-1)(q^2 + q + 1)}{q - 1} = q^2 + q + 1$. Tehát egyenletünk így alakul:

$q^2 + q + 1 = 10{,}36 \Rightarrow q^2 + q - 9{,}36 = 0$, ami az előzőekben megoldott egyenlet.

Mindkét esetben látszik, hogy $n > 3$ esetén az ilyen típusú feladatok megoldására nincs módszerünk, hiszen harmad- vagy annál magasabbfokú egyenlethez jutnánk. $n > 5$ esetén olyan egyenlethez jutunk, melynek megoldása algebrai eszközökkel általában nem lehetséges, csak közelítő módszerek vannak, amikkel viszont tetszőleges pontosságú megoldáshoz eljuthatunk. Ilyen módszert alkalmaznak a bankok bizonyos törlesztési részletek kiszámolásánál is.

Mintapélda$_{26}$

Egy mértani sorozat első 6 tagjának összege 49,6496. Ha csak a páratlan sorszámú tagokat adjuk össze, akkor 22,568-t kapunk, azaz $a_1 + a_3 + a_5 = 22{,}568$.

Mekkora a sorozat első tagja?

Megoldás:

A mértani sorozat páratlanadik tagjai szintén mértani sorozatot alkotnak, hiszen $a_1;\ a_1q^2;\ a_1q^4$ olyan mértani sorozat egymást követő tagjai, melynek első tagja $b_1 = a_1$ és kvóciense $q' = q^2$. Írjuk fel mindkét sorozat esetén a megfelelő tagok összegét:

$$49{,}6496 = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

$$22{,}568 = b_1 \cdot \frac{\left(q^2\right)^3 - 1}{q^2 - 1} = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{(q+1)(q-1)}.$$

Ha a második egyenlet mindkét oldalát $(q+1)$-gyel szorozzuk, az $a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1}$ kifejezés helyére 49,6469-ot helyettesíthetünk:

$$22{,}568 = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{(q-1)(q+1)}$$

$$22{,}568 \cdot (q+1) = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} \Rightarrow 22{,}568 \cdot (q+1) = 49{,}6496.$$ Innen

$$q + 1 = 2{,}2$$
$$q = 1{,}2.$$

A sorozat első tagjának kiszámításához újra elő kell vennünk valamelyik összegképletet:

$$49{,}6496 = a_1 \cdot \frac{1{,}2^6 - 1}{1{,}2 - 1}$$

$$a_1 = \frac{49{,}6496 \cdot 0{,}2}{1{,}2^6 - 1} = 5$$

A sorozat első tagja tehát 5.

$(q+1)$-gyel azért szorozhatunk, mert $q \neq -1$, ugyanis abban az esetben $S_6 = 0$ lenne.

Mintapélda₂₇

Hogyan írható fel a legnagyobb 7-jegyű szám a 3-as számrendszerben? Add meg ennek értékét tízes számrendszerben!

(Ahogy a tízes számrendszerben pl. a 120 szám értéke $120 = 0 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2$, úgy a hármas számrendszerben a $120_3 = 0 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 = 15$.)

Megoldás:

A hármas számrendszerben a legnagyobb számjegy a 2, így a legnagyobb hétjegyű szám a $2222222_3 = 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + \ldots + 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot \frac{3^7 - 1}{3 - 1} = 3^7 - 1 = 2186$.

Az eredmény nem túl meglepő, hiszen a legnagyobb hétjegyű után a legkisebb nyolcjegyű következik, ami a $10000000_3 = 3^7 = 2187$. A feladat tehát azzal az ötlettel is megoldható, hogy a 3-as számrendszer legkisebb nyolcjegyű számából $\left(3^7\right)$ 1-et levonunk.

Feladatok

23. Írd fel tízes számrendszerben a következő 5-ös számrendszerbeli számot: 333333_5.

(Ahogy a tízes számrendszerben pl. a 769 szám értéke $9 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3$, úgy az ötös számrendszerben pl. a $234_5 = 4 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 = 69$.)

Megoldás:

$$333333_5 = 3 \cdot 5^0 + 3 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^5 = 3 \cdot 5^0 \cdot \frac{5^6 - 1}{5 - 1} = 11718.$$

24. Számítsd ki a mértani sorozat első n tagjának összegét!

a) $a_1 = 2{,}7$; $q = 0{,}4$; $n = 9$.

b) $b_1 = 3{,}2$; $q = -0{,}5$; $n = 10$.

c) $c_1 = -3{,}2;$ $q = -0{,}5;$ $n = 10.$

d) $d_1 = -3{,}2;$ $q = 0{,}5;$ $n = 10.$

e) $e_1 = 0{,}36;$ $q = -1;$ $n = 11.$

f) $f_1 = 0{,}36;$ $q = -1;$ $n = 12.$

g) $g_1 = 0{,}36;$ $q = 1;$ $n = 12.$

Megoldás:

a) $S_9 = 2{,}7 \cdot \dfrac{0{,}4^9 - 1}{0{,}4 - 1} \approx 4{,}499$; b) $S_{10} = 3{,}2 \cdot \dfrac{(-0{,}5)^{10} - 1}{-0{,}5 - 1} = 2{,}13125$;

c) $S_{10} = -3{,}2 \cdot \dfrac{(-0{,}5)^{10} - 1}{-0{,}5 - 1} = -2{,}13125$; d) $S_{10} = -3{,}2 \cdot \dfrac{0{,}5^{10} - 1}{0{,}5 - 1} = -6{,}39375$;

e) $S_{11} = 0{,}36 \cdot \dfrac{(-1)^{11} - 1}{-1 - 1} = 0{,}36 \cdot \dfrac{-2}{-2} = 0{,}36$; f) $S_{12} = 0{,}36 \cdot \dfrac{(-1)^{12} - 1}{-1 - 1} = 0{,}36 \cdot \dfrac{0}{-2} = 0$;

g) $S_{12} = 12 \cdot 0{,}36 = 4{,}32$.

25. Egy mértani sorozat első tagja 12, első három tagjának összege 57.

Írd fel a sorozat első három tagját!

Megoldás:

A feladat szerint $12 + 12q + 12q^2 = 57$, azaz

$12q^2 + 12q - 45 = 0$ innen $q_1 = -2{,}5$ vagy $q_2 = 1{,}5.$

Ha $q = -2{,}5$, akkor $a_2 = -30$ $a_3 = 75$ $(\text{Ell}: 12 + (-30) + 75 = 57)$,

ha $q = 1{,}5$ $a_2 = 18$ $a_3 = 27$ $(\text{Ell}: 12 + 18 + 27 = 27)$.

26. Számítsd ki a mértani sorozat első tagját, ha

a) $q = 4$ $S_6 = -13650$;

b) $q = 0{,}2$ $S_7 = -390{,}62$.

Megoldás:

a) $-13650 = a_1 \cdot \dfrac{4^6 - 1}{4 - 1}$, innen $a_1 = \dfrac{-13650 \cdot 3}{(4^6 - 1)} = -10.$

b) $390{,}62 = a_1 \cdot \dfrac{0{,}2^7 - 1}{0{,}2 - 1}$, innen $a_1 = \dfrac{-390{,}62 \cdot (-0{,}8)}{0{,}2^7 - 1} = -312{,}5$.

VIII. A mértani sorozat gyakorlati példákban

Mintapélda₂₈

Két üzlet közül az első forgalma január elején 1,5-szer akkora, mint a másodiké. Az első üzlet forgalmát később havi 10%-kal, a másodikét havi 20%-kal sikerül növelni.

a) Melyik hónapban lesz a második üzlet forgalma legalább akkora, mint az elsőé?

b) Melyik hónapban éri el az addigi forgalom összege a második üzletben az elsőét?

Megoldás:

a) Mindkét üzlet havi forgalmát mértani sorozatnak tekintjük. Jelölje F a második üzlet eredeti forgalmát, ekkor

az első üzlet esetében: $a_1 = 1{,}5F$, $q = 1{,}1$ $a_n = 1{,}5F \cdot 1{,}1^{n-1}$,

a második üzlet esetében: $b_1 = F$, $q = 1{,}2$ $b_n = F \cdot 1{,}2^{n-1}$.

Azt akarjuk megtudni, milyen n esetén lesz $b_n \geq a_n$.

$$F \cdot 1{,}2^{n-1} \geq 1{,}5 \cdot F \cdot 1{,}1^{n-1}$$

$$1{,}2^{n-1} \geq 1{,}5 \cdot 1{,}1^{n-1} \qquad / : 1{,}1^{n-1} > 0$$

$$\frac{1{,}2^{n-1}}{1{,}1^{n-1}} \geq 1{,}5$$

$$\left(\frac{1{,}2}{1{,}1}\right)^{n-1} \geq 1{,}5.$$

Az ismeretlen a kitevőben van, tehát az egyenlőtlenség mindkét oldalának logaritmusát vesszük. Tehetjük ezt, mivel az $x \mapsto \lg x$ függvény szigorúan monoton nő, így ha $a \geq b$, akkor $\lg a \geq \lg b$ is teljesül.

$$(n-1)\lg\left(\frac{1{,}2}{1{,}1}\right) \geq \lg 1{,}5 \qquad / : \lg\left(\frac{1{,}2}{1{,}1}\right) > 0$$

$$n - 1 \geq 4{,}66$$

$$n \geq 5{,}66.$$

A fenti eredmény azt mutatja, hogy az indulástól számított hatodik hónapban lesz először a második üzlet forgalma nagyobb, mint az elsőé.

b) Most ismét az előbbi sorozatokkal számolva azt kell megtudnunk, hogy milyen n esetén lesz $s_n \geq S_n$. (S_n-nel az első, s_n-nel pedig a második üzlethez tartozó bevétel összegét jelöltük.) $S_n = 1{,}5F \cdot \dfrac{1{,}1^n - 1}{1{,}1 - 1}$, $s_n = F \cdot \dfrac{1{,}2^n - 1}{1{,}2 - 1}$,

$$1{,}5F\cdot\frac{1{,}1^n-1}{1{,}1-1}\le F\cdot\frac{1{,}2^n-1}{1{,}2-1}$$

$$1{,}5\cdot\frac{1{,}1^n-1}{0{,}1}\le\frac{1{,}2^n-1}{0{,}2}$$

$$3\cdot\left(1{,}1^n-1\right)\le 1{,}2^n-1$$

$$3\cdot 1{,}1^n-3\le 1{,}2^n-1$$

$$3\cdot 1{,}1^n\le 1{,}2^n+2$$

$$3\cdot 1{,}1^n-1{,}2^n\le 2$$

Az ilyen típusú feladatokat algebrai módszerrel általában nem tudjuk megoldani. Mivel most csak pozitív egész számok körében keressük a megoldást, sőt azt is tudjuk, hogy $n\ge 6$, hiszen csak abban a hónapban érte utol a második üzlet forgalma az elsőét, próbálgatással igyekszünk választ adni. Készítsünk táblázatot!

n	6	7	8	9	10
$3\cdot 1{,}1^n-1{,}2^n$	2,33	2,26	2,13	1,91	1,59

A táblázatból látható, hogy a második üzlet összegzett forgalma az indulástól számított 9. hónapban már meghaladja az elsőét:

$$S_9=1{,}5\cdot F\cdot\frac{1{,}1^9-1}{1{,}1-1}\approx 20{,}37F,\qquad s_9=F\cdot\frac{1{,}2^9-1}{1{,}2-1}\approx 20{,}80F..$$

Mintapélda$_{29}$

Karcsinak édesapja azt ígérte, ha minden évben saját zsebpénzéből 10 könyvet vásárol, pontosan tizedannyi (általa kiválasztott) könyvet vesz neki karácsonyra, mint ahány a polcán sorakozik. Ekkor éppen 200 saját könyve volt. A könyveket nagyon szereti, de a zsebpénze kevés, így évente pontosan 10 könyvet tudott vásárolni.

Hány könyve lesz így 5 év elteltével?

Megoldás:

Ha édesapja tizedannyi könyvet vásárol, mint ahány éppen volt, a könyvek számát azok $\frac{1}{10}$-ével növeli, tehát a könyvek száma 1,1-szeresére nő.

	Év végén
1	$(200+10)\cdot 1{,}01 = 200\cdot 1{,}1 + 10\cdot 1{,}1$
2	$(200\cdot 1{,}1 + 10\cdot 1{,}1 + 10)\cdot 1{,}1 = 200\cdot 1{,}1^2 + 10\cdot 1{,}1^2 + 10\cdot 1{,}1$
3	$(200\cdot 1{,}1^2 + 10\cdot 1{,}1^2 + 10\cdot 1{,}1 + 10)\cdot 1{,}1 = 200\cdot 1{,}1^3 + 10\cdot 1{,}1^3 + 10\cdot 1{,}1^2 + 10\cdot 1{,}1$
4	$(200\cdot 1{,}1^3 + 10\cdot 1{,}1^3 + 10\cdot 1{,}1^2 + 10\cdot 1{,}1 + 10)\cdot 1{,}1 = 200\cdot 1{,}1^4 + 10\cdot 1{,}1^4 + 10\cdot 1{,}1^3 + 10\cdot 1{,}1^2 + 10\cdot 1{,}1$
5	$(200\cdot 1{,}1^4 + 10\cdot 1{,}1^4 + 10\cdot 1{,}1^3 + 10\cdot 1{,}1^2 + 10\cdot 1{,}1 + 10)\cdot 1{,}1 = 200\cdot 1{,}1^5 + 10\cdot 1{,}1^5 + 10\cdot 1{,}1^4 + \ldots + 10\cdot 1{,}1$

Észrevehetjük, hogy az 5. év végén megjelenő összegben megjelenik a kezdetben meglevő könyvek évi 10%-kal növelt száma, valamint az éves könyvvásárlások számának évenként 1,1-szeresére növelt értéke. Az összeadandó tagok egy mértani sorozatot alkotnak, ahol az első tag $10\cdot 1{,}1$, a kvóciens pedig 1,1. Így az 5. év végén Karcsi könyveinek száma:

$$200\cdot 1{,}1^5 + S_5 = 200\cdot 1{,}1^5 + 10\cdot 1{,}1\cdot \frac{1{,}1^5 - 1}{1{,}1 - 1} = 200\cdot 1{,}1^5 + 110\cdot\left(1{,}1^5 - 1\right) = 310\cdot 1{,}1^5 - 110 \approx 389{,}26.$$

0,26 könyv nincsen, így a valós eredmény nyilván nem pont ennyi, de alig tér el tőle. A könyvek száma végül is attól függ, hogy az apa (ha a könyvek száma nem osztható 10-zel) merrefelé kerekít.

Így 5 év elteltével körülbelül 389 könyve lesz Karcsinak.

Mintapélda$_{30}$

Egy gazdaságban 4000 nyúl van. A gazdaságnak érvényes szerződése van arra, hogy 4 havonta 5000 nyulat átvesznek tőle. Havonta átlagosan 25%-kal nő a nyulak száma. Ilyen feltételek mellett hány nyúl lesz a gazdaságban 1 év elteltével?

Megoldás:

	A nyulak száma az egyes hónapokban:
1.	$4000\cdot 1{,}25$
2.	$4000\cdot 1{,}25^2$
3.	$4000\cdot 1{,}25^3$
4.	$4000\cdot 1{,}25^4-5000$
5.	$\left(4000\cdot 1{,}25^4-5000\right)\cdot 1{,}25=4000\cdot 1{,}25^5-5000\cdot 1{,}25$
6.	$\left(4000\cdot 1{,}25^5-5000\cdot 1{,}25\right)\cdot 1{,}25=4000\cdot 1{,}25^6-5000\cdot 1{,}25^2$
7.	$\left(4000\cdot 1{,}25^6-5000\cdot 1{,}25^2\right)\cdot 1{,}25=4000\cdot 1{,}25^7-5000\cdot 1{,}25^3$
8.	$\left(4000\cdot 1{,}25^7-5000\cdot 1{,}25^3\right)\cdot 1{,}25-5000=4000\cdot 1{,}25^8-5000\cdot 1{,}25^4-5000$
9.	$\left(4000\cdot 1{,}25^8-5000\cdot 1{,}25^4-5000\right)\cdot 1{,}25=4000\cdot 1{,}25^9-5000\cdot 1{,}25^5-5000\cdot 1{,}25$
10.	$\left(4000\cdot 1{,}25^9-5000\cdot 1{,}25^5-5000\cdot 1{,}25\right)\cdot 1{,}25=4000\cdot 1{,}25^{10}-5000\cdot 1{,}25^6-5000\cdot 1{,}25^2$
11.	$\left(4000\cdot 1{,}25^{10}-5000\cdot 1{,}25^6-5000\cdot 1{,}25^2\right)\cdot 1{,}25=4000\cdot 1{,}25^{11}-5000\cdot 1{,}25^7-5000\cdot 1{,}25^3$
12.	$\left(4000\cdot 1{,}25^{11}-5000\cdot 1{,}25^7-5000\cdot 1{,}25^3\right)\cdot 1{,}25-5000=4000\cdot 1{,}25^{12}-5000\cdot 1{,}25^8-5000\cdot 1{,}25^4-5000$

A 12. hónap végén tehát $4000\cdot 1{,}25^{12}-5000\cdot 1{,}25^8-5000\cdot 1{,}25^4-5000$ nyúl van a gazdaságban. Ez a szám egyrészt tartalmazza azt a nyúlszámot, ami akkor adódna, ha nem adtunk volna el egy nyulat sem az év folyamán, másrészt kivonódik belőle az eladott nyulak száma, de nem a $3\cdot 5000=15000$, mert a számítás azt is figyelembe veszi, hogy az eladott nyulak szaporulata is elvész. Ez utóbbi rész – amit kivonunk – egy mértani sorozat összege. A mértani sorozat első tagja $a_1=5000$, $q=1{,}25^4$.

Az év végén tehát a nyulak száma

$$4000\cdot 1{,}25^{12}-S_3=4000\cdot 1{,}25^{12}-5000\cdot\frac{\left(1{,}25^4\right)^3-1}{1{,}25^4-1}\approx 58208-47009\approx 11200.$$

Egy év elteltével 11200 nyúl lesz a gazdaságban.

Feladatok

27. Egy gazdaságban 20000 sertést nevelnek. A sertések száma évről évre megháromszorozódik, de kétévente (az állomány megújítása érdekében) vásárolnak 4000 sertést. Hány sertésük lesz 10 év múlva, ha évi 41000 sertést a vágóhídra visznek?

Megoldás:

	Sertések száma az egyes években:
1.	$20000 \cdot 3 - 41000$
2.	$(20000 \cdot 3 - 41000) \cdot 3 - 41000 + 4000 = 20000 \cdot 3^2 - 41000 \cdot 3 - 41000 + 4000$
3.	$(20000 \cdot 3^2 - 41000 \cdot 3 - 41000 + 4000) \cdot 3 - 41000 = 20000 \cdot 3^3 - 41000 \cdot 3^2 - 41000 \cdot 3 - 41000 + 4000 \cdot 3$
4.	$(20000 \cdot 3^3 - 41000 \cdot 3^2 - 41000 \cdot 3 - 41000 + 4000 \cdot 3) \cdot 3 - 41000 + 4000 =$ $= 20000 \cdot 3^4 - 41000 \cdot 3^3 - 41000 \cdot 3^2 - 41000 \cdot 3 - 41000 + 4000 \cdot 3^2 + 4000$
5.	$(20000 \cdot 3^4 - 41000 \cdot 3^3 - 41000 \cdot 3^2 - 41000 \cdot 3 - 41000 + 4000 \cdot 3^2 + 4000) \cdot 3 - 41000 =$ $= 20000 \cdot 3^5 - 41000 \cdot 3^4 - 41000 \cdot 3^3 - 41000 \cdot 3^2 - 41000 \cdot 3 - 41000 + 4000 \cdot 3^3 + 4000 \cdot 3$

A táblázat alapján észrevehetjük a sertések számára vonatkozó törvényszerűségeket, így:

10.	$20000 \cdot 3^{10} -$
	$-(41000 \cdot 3^9 + 41000 \cdot 3^8 + \ldots + 41000 \cdot 3 + 41000) +$
	$+(4000 \cdot 3^8 + 4000 \cdot 3^6 + \ldots + 4000 \cdot 3^2 + 4000)$

A megoldás során egy-egy mértani sorozat egymást követő tagjainak összegével számolhatunk:

I. $a_1 = 41000$, $q = 3$, $n = 10$, azaz $S_{10} = 41000 \cdot \dfrac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 1210484000$;

II. $b_1 = 4000$, $q = 3^2$, $n = 5$, azaz $s_5 = 4000 \cdot \dfrac{(3^2)^5 - 1}{3^2 - 1} = 29524000$.

Így a sertések száma a 10. év végén: $20000 \cdot 3^{10} - S_{10} + s_5 = 20000$.

28. Egy 200000 fős kisvárosban sokan születnek, de kevesen halnak meg, ennek következtében lakossága 10 év alatt 10%-kal nő. Ha évente 1000 új lakos érkezne a városba, hány fővel nőne a lakosság 10 év alatt?

Megoldás:

Először számoljuk ki, hogy ha 10 év alatt 10% a természetes növekedés, 1 év alatt ez hányszoros növekedést jelent.

$200000 \cdot q^{10} = 200000 \cdot 1{,}1$

$q^{10} = 1{,}1 \qquad \Rightarrow q = 1{,}1^{0,1}$, vagyis a növekedés körülbelül 0,95%-os.

Tételezzük fel, hogy a betelepülők körében ugyanakkora a gyermekvállalási kedv, és közülük senki nem halt meg a vizsgált időszakban. Ekkor az egymást követő években így alakul a város népessége:

$$n_1 = 200000 \cdot q + 1000,$$
$$n_2 = (200000 \cdot q + 1000) \cdot q + 1000 = 200000 \cdot q^2 + 1000 \cdot q + 1000,$$
$$....$$
$$n_{10} = 200000 \cdot q^{10} + \left(1000 \cdot q^9 + 1000 \cdot q^8 + ... + 1000 \cdot q + 1000\right) =$$
$$= 200000 \cdot \left(1{,}1^{0,1}\right)^{10} + 1000 \cdot \frac{\left(1{,}1^{0,1}\right)^{10} - 1}{1{,}1^{0,1} - 1},$$
$$n_{10} = 200000 \cdot 1{,}1 + 1000 \cdot \frac{1{,}1 - 1}{1{,}1^{0,1} - 1} \approx 230442.$$

Ha az eredeti 200000-ről 230442-re nő a város lakossága, az $\frac{230442}{200000} \approx 1{,}152$-szeres, ami 10 év elteltével 15,2%-os növekedést jelent.

IX. Számtani és mértani sorozatokat is tartalmazó feladatok

Mintapélda31

Három szám egy számtani sorozat három egymást követő tagja. Ha az első számhoz 3,6-et adunk, egy mértani sorozat három egymást követő tagját kapjuk, melyek összege 15,6. Határozzuk meg ezeket a számokat!

Megoldás:

Jelölje a számtani sorozat három egymást követő tagját $a-d,\ a,\ a+d$. Ha a mértani sorozat három tagjához úgy jutunk, hogy a számtani első tagjához 3,6-et adtunk, akkor a számtani sorozat három egymást követő tagjának összegét megkapjuk, ha a mértani sorozat összegéből levonunk 3,6-et.

	1. tag	2. tag	3. tag	Összeg
Számtani	$a-d$	a	$a+d$	12
	↓+3,6			↑–3,6
Mértani	$a-d+3{,}6$	a	$a+d$	15,6

Ha tudjuk, hogy a számtani sorozat három egymást követő tagjának összege 12, a középső tagot megkaphatjuk úgy, hogy az összeget osztjuk 3-mal, tehát $a=4$. Még azt nem használtuk ki, hogy a $4-d+3{,}6,\ 4,\ 4+d$ számok egy mértani sorozat egymást követő tagjai. A mértani sorozatról tudjuk, hogy bármely tag négyzete a hozzá képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagok szorzatával egyenlő, tehát: $(7{,}6-d)\cdot(4+d)=4^2$, ezt 0-ra redukálva a $-d^2+3{,}6d+14{,}4=0$ másodfokú egyenlethez jutunk.

Ennek gyökei $d_1=6$ és $d_2=-2{,}4$.

A két sorozat tagjai tehát:

Számtani	–2	4	10	VAGY	6,4	4	1,6
Mértani	1,6	4	10		10	4	1,6

Ellenőrzés: Az 1,6; 4; 10 számhármas valóban mértani sorozat egymást követő elemei, hiszen $q=2{,}5$ és összegük $1{,}6+4+10=15{,}6$.

Hasonlóan, a 10; 4; 1,6 számhármas is mértani sorozatot alkot, ekkor $q=0{,}4$. Összegük ugyanannyi, mint az előbb, hiszen a tagok ugyanazok, csak más sorrendben.

Mintapélda$_{32}$

Két városban (nevezzük őket **A** és **B** városnak) 2006. január 1-én elhatározzák, hogy a buszbérlet árát hónapról hónapra emelve 2008. január 1-ig felemelik 100 fabatkáról 200 fabatkára. Ezt **A** város úgy valósította meg, hogy havonta azonos %-kal, **B** város pedig úgy, hogy havonta azonos összeggel növelte az árat.

a) Hány százalékkal nőtt hónapról hónapra **A** városban a bérlet ára?

b) Hány fabatkával nőtt havonta **B** városban a bérlet ára?

c) Ha egy polgár minden hónapban vásárol bérletet, melyik városban költ rá többet a 24 hónap alatt?

d) Hány százalékkal költ többet bérletre egy **B** városban lakó a második évben, mint az elsőben?

Megoldás:

a) **A** városban a bérlet havi költsége a mértani sorozat szabályai szerint nő:

$$a_1\,(2006.\ \text{jan.}1\text{-i állapot}) = 100, \qquad a_{25}\,(2008.\ \text{jan.}1\text{-i állapot}) = 200.$$

$$100 \cdot q^{24} = 200$$

$$q^{24} = 2 \qquad \Rightarrow q = 2^{\frac{1}{24}} \approx 1{,}0293,$$

tehát a növekedés havi 2,93%.

b) **B** városban a bérlet havi költsége a számtani sorozat szabályai szerint nő:

$$b_1 = 100, \qquad b_{25} = 200\,.$$

$$200 = 100 + 24 \cdot d$$

$$24d = 100$$

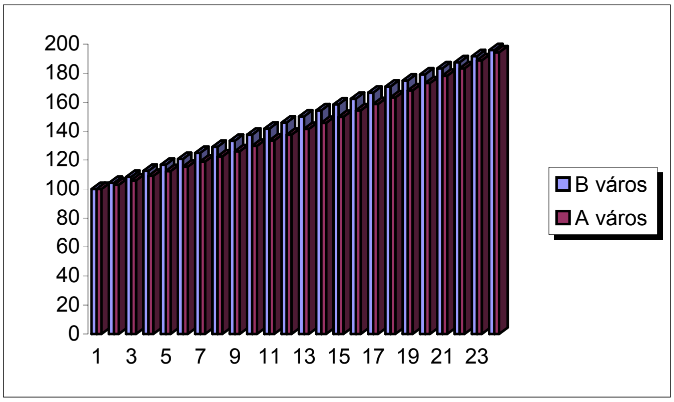
$$d = \frac{25}{6} \approx 4{,}17$$

Tehát a növekedés körülbelül havi 4,17 fabatka.

c) Számítsuk ki mindkét sorozat az első 24 tagjának összegét!

$$S_A = 100 \cdot \frac{\left(2^{\frac{1}{24}}\right)^{24} - 1}{2^{\frac{1}{24}} - 1} = 100 \cdot \frac{2-1}{2^{\frac{1}{24}} - 1} \approx 3412{,}71; \qquad S_B = \frac{2 \cdot 100 + 23 \cdot \frac{25}{6}}{2} \cdot 24 = 3550.$$

Tehát **B** városban költenek többet bérletre két év alatt. (Grafikonunkon is látszik, hogy a kék oszlopok összmagassága nagyobb.)



d) A **B** városban lakó az első évben $S_{12} = \dfrac{2\cdot 100 + 11\cdot \frac{25}{6}}{2}\cdot 12 = 1475$ fabatkát, a második évben pedig $3550 - 1475 = 2075$ fabatkát költ bérletre. A növekedés tehát $\dfrac{2075}{1475} \approx 1{,}407$-szeres, tehát 40,7%-kal költ többet a második évben bérletre, mint az elsőben.

Feladatok

A 11–12. óra anyaga arra fektet hangsúlyt, hogy a tanulók akkor is felismerjék a számtani és mértani sorozatot, ha arra a feladat szövege nem utal. Az alábbi feladatok ezért szándékosan összevissza tartalmaznak számtani és mértani sorozatos feladatokat. A gyorsabb áttekinthetőség kedvéért azért felsoroljuk a megfelelő feladatszámokat:

Csak számtani sorozat: 34.

Csak mértani sorozat: 31.

Mindkét sorozat: 27, 28, 29, 30, 32, 33, 35.

29. Folytasd a sorozatot még 5 taggal úgy, hogy

I. számtani sorozat legyen!

II. mértani sorozat legyen!

a) 2; 4 …

b) 2; -2 …

c) 6; 3 …

d)	$\frac{3}{4}$;	$\frac{1}{4}$	…			
e)	$-\frac{1}{2}$;	$\frac{1}{2}$	…			
f)	$\sin 90^\circ$;	$\sin 270^\circ$	…			

Megoldás:

a)	számtani:	6;	8;	10;	12;	14…
	mértani:	8;	16;	32;	64;	128…
b)	számtani:	– 6;	– 10;	– 14;	– 18;	– 22…
	mértani:	2;	– 2;	2;	– 2;	2…
c)	számtani:	0;	– 3;	– 6;	– 9;	– 12…
	mértani:	1,5;	0,75;	0,375;	0,1875;	0,09375…
d)	számtani:	$-\frac{1}{4}$;	$-\frac{3}{4}$;	$-\frac{5}{4}$;	$-\frac{7}{4}$;	$-\frac{9}{4}$…
	mértani:	$\frac{1}{12}$;	$\frac{1}{36}$;	$\frac{1}{108}$;	$\frac{1}{324}$;	$\frac{1}{972}$…
e)	számtani:	$\frac{3}{2}$;	$\frac{5}{2}$;	$\frac{7}{2}$;	$\frac{9}{2}$;	$\frac{11}{2}$…
	mértani:	$-\frac{1}{2}$;	$\frac{1}{2}$;	$-\frac{1}{2}$;	$\frac{1}{2}$;	$-\frac{1}{2}$…
f)	számtani:	– 3;	– 5;	– 7;	– 9;	– 11…
	mértani:	1;	– 1;	1;	– 1;	1; – 1…

30. Body Béla és Gyúró Gyula elhatározták, hogy a strandszezon előtt formába hozzák magukat. Béla napi 10 fekvőtámasszal kezdte, de elhatározta, hogy naponta 1-gyel növeli a gyakorlatok számát. Gyúró Gyula óvatosabb volt, napi 5 fekvőtámasszal kezdte az első hét minden napján, de elhatározta, hogy hétről hétre megduplázza napi adagját. Mindketten február 1-jén, hétfőn kezdték az önsanyargatást.

Február végéig ki csinált meg több fekvőtámaszt? (Történetünk nem szökőévben játszódik.)

Megoldás:

Body Béla napi fekvőtámaszai számtani sorozatot alkotnak,

$a_1 = 10,\ d = 1, \qquad n = 28.$

Gyula heti teljesítménye mértani sorozat egymást követő tagjai: $b_1 = 35,\ \ q = 2,\ n = 4.$

Számítsuk ki mindkét esetben az összes fekvőtámaszt!

Béla: $s_{28} = \dfrac{2\cdot 10 + 27\cdot 1}{2}\cdot 28 = 658$, Gyula: $S_4 = 35\cdot\dfrac{2^4-1}{2-1} = 525$.

Tehát Body Béla végzett több fekvőtámaszt február végéig.

31. Egy üzletlánc tagjai feladatul kapták, hogy forgalmukat hónapról hónapra 2 év, azaz 24 hónap alatt rendszeresen növelve, havi 10 000 000 Ft-ról 15 000 000 Ft-ra növeljék. Ezt az üzletlánc két tagja is teljesítette, de az utasítást másképp értelmezték. Az egyik üzlet havonta ugyanakkora összeggel növelte bevételét, a másik pedig hónapról hónapra ugyanannyi %-kal.

a) Mennyivel növelte havonta forgalmát az első üzlet?

b) Hány %-kal növelte havonta forgalmát a második üzlet?

c) A két év alatt összesen mekkora forgalmat bonyolított le a két üzlet külön-külön?

Megoldás:

a) Az első üzlet havi forgalmai számtani sorozatot alkotnak. $a_1 = 10\,000\,000$ Ft, $a_{24} = 15\,000\,000$ Ft, kérdés, hogy mekkora a d?

A $15\,000\,000 = 10\,000\,000 + (24-1)\cdot d$ egyenletből a $d \approx 217\,391$ értéket kapjuk, tehát havi 217 391 Ft-tal növelte forgalmát az első üzlet.

b) A második üzlet adatai mértani sorozatot alkotnak, $b_1 = 10\,000\,000$ Ft, $b_{24} = 15\,000\,000$ Ft, a kérdés a hányados. Most a $15\,000\,000 = 10\,000\,000\cdot q^{24-1}$ egyenletet kapjuk, amit átrendezve $q = \sqrt[23]{1{,}5}$. Innen $q \approx 1{,}0178$, azaz havi 1,78%-kal növelték a forgalmat.

Az első üzlet esetében a számtani sorozat első 24 elemének összegét kell kiszámítani, azaz $s_{24} = \dfrac{a_1 + a_{24}}{2}\cdot 24 = \dfrac{10\,000\,000 + 15\,000\,000}{2}\cdot 24 = 300\,000\,000$ Ft lesz a forgalom két év alatt.

A második üzlet esetében a mértani sorozat első 24 elemének összegét kell kiszámítani, azaz $s_{24} = a_1\dfrac{q^{24}-1}{q-1} = 10\,000\,000\dfrac{1{,}0178^{24}-1}{0{,}0178} \approx 296\,185\,310$ Ft lesz a forgalom két év alatt.

32. Egy egyetem két kara is azt az utasítást kapta, hogy az eddig évente felvett tanulók számát 1000-ről 5 év alatt évi 600-ra csökkentsék. Az utasítást az egyik kar úgy hajtotta végre, hogy évente azonos számmal csökkentette a felvehető tanulók számát, a másik pedig úgy, hogy a keretszámot évről évre azonos százalékkal csökkentette. Hány hallgatót vett fel 5 év alatt az egyetem egyik, illetve másik kara?

Megoldás:

Az első karon az évente fölvett diákok száma számtani sorozatot alkot, $a_1 = 1000$, $a_5 = 600$, tehát $s_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 = \frac{1000 + 600}{2} \cdot 5 = 4000$.

A második karon az öt év létszáma mértani sorozatot alkot, ahol az első 5 elem összegképletében szerepel a q, tehát először azt kell kiszámítani.

$b_5 = b_1 \cdot q^4$, ahol $b_1 = 1000$, $b_5 = 600$, tehát $q^4 = \frac{1000}{600} = \frac{5}{3}$, tehát $q = \sqrt[4]{\frac{5}{3}}$.

$$s_5' = b_5 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 600 \cdot \frac{\frac{5}{3} \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{3}} - 1}{\sqrt[4]{\frac{5}{3}} - 1} \approx 3936.$$

Tehát az első karon 4000, a második karon 3936 hallgatót vettek fel 5 év alatt.

33. Egy henger alakú medencéből minden nap elpárolog a víz 5%-a. Ha a feltöltés után 20 nappal 10 cm magasan áll a víz, milyen magasan állt feltöltéskor?

Megoldás:

A víz napi magasságai olyan mértani sorozat egymást követő tagjait adják, melynek 20. tagja 10, kvóciense pedig 0,95. Az első tagot kell meghatároznunk.

$10 = a_1 \cdot 0{,}95^{19} \Rightarrow a_1 = \frac{10}{0{,}95^{19}} \approx 26{,}5$, tehát feltöltéskor kb. 26,5 cm magasan állt a víz.

34. Helyezz el 8 számot a 10 és a 100 közé úgy, hogy a 10 szám egymást kövesse egy

a) számtani sorozatban; b) mértani sorozatban.

Megoldás:

a) $a_1 = 10$, $a_{10} = 100$, $100 = 10 + 9d \Rightarrow d = 10$, tehát a 10 egymást követő szám: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

b) $b_1 = 10$, $b_{10} = 100$, $100 = 10 \cdot q^9 \Rightarrow q = 10^{\frac{1}{9}}$, tehát a 10 egymást követő szám:

10, $10^{\frac{10}{9}}$, $10^{\frac{11}{9}}$, $10^{\frac{4}{3}}$, $10^{\frac{13}{9}}$, $10^{\frac{14}{9}}$, $10^{\frac{5}{3}}$, $10^{\frac{16}{9}}$, $10^{\frac{17}{9}}$, 100, , illetve

közelítő értékekkel: 10 12,92 16,68 21,54 27,83 35,94 46,42 59,95 77,43 100.

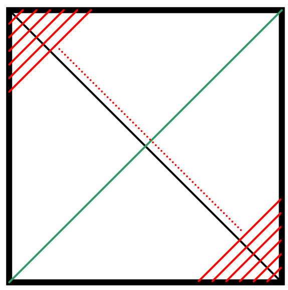
35. Számítsd ki a 3 első 7 hatványának a) összegét; b) szorzatát!

Megoldás:

a) $3 + 3^2 + \ldots + 3^7 = 3 \cdot \dfrac{3^7 - 1}{3 - 1} = 3279$;

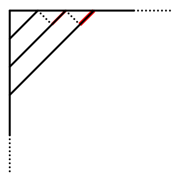
b) $3 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 3^7 = 3^{1+2+\ldots+7} = 3^{\frac{1+7}{2} \cdot 7} = 3^{28} \approx 2{,}28768 \cdot 10^{13}$.

36. Egy 10 cm oldalú négyzet átlóját 20 egyenlő részre osztottuk, és minden osztópontban merőlegeset állítottunk az átlóra. Mekkora a merőlegesek négyzetbe eső részeinek összege?



Megoldás:

Ha az átlót 20 egyenlő részre osztottuk, 19 osztópont keletkezett. Tehát 19 szakasz összegére vagyunk kíváncsiak. Ha elhagyjuk a középső (zöld) szakaszt, ami a négyzet másik átlója, akkor két egybevágó szakaszsorozathoz jutunk. A szakaszok hossza számtani sorozatot alkot, mert minden kis szakasz az előzőnél pontosan ugyanannyival (az ábrán piros szakasszal) hosszabb. Tehát a számtani sorozat differenciája egy ilyen pici szakasz hossza, ami viszont pontosan fele akkora, mint a sorozat első tagja. Mekkora a legrövidebb szakasz? Hasonlóság miatt egy 10 cm/10 = = 1 cm-es befogójú egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója, tehát $\sqrt{2}$ (cm), így a differencia $d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. A merőleges szakaszok együttes hossza tehát



$$2 \cdot S_9 + 10 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2} + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} + 10 \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2} \approx 22{,}6\,\text{cm}.$$

37. Három szám egy mértani sorozat három egymást követő tagja. Szorzatuk 1728. Ha az első számból 6-ot levonunk, egy számtani sorozat három egymást követő tagjához jutunk. Mekkora ennek a számtani sorozatnak a differenciája?

Megoldás:

Legyen a mértani sorozat első 3 tagja: $\frac{a}{q}$, a és aq. Ezek szorzata

$\frac{a}{q} \cdot a \cdot (aq) = a^3 = 1728 \Rightarrow a = 12$, tehát a három tag: $\frac{12}{q}$, 12, $12q$. Ha az első számból levonunk 6-ot, számtani sorozatot kapunk. A számtani sorozat definíciója szerint a két szélső tag számtani közepe a középső, így $\frac{\left(\frac{12}{q} - 6\right) + 12q}{2} = 12$.

Átrendezve az egyenletet a $2q^2 - 5q + 2 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek megoldása

$q_1 = 2$ és $q_2 = \frac{1}{2}$.

$q_1=2$	mértani	6	12	24	számtani	0	12	24	$d_1 = 12$
$q_2=0{,}5$	mértani	24	12	6	számtani	18	12	6	$d_2 = -6$

Kislexikon

Sorozat: az a függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza. Az ilyen függvénynél az értékkészlet elemeit a sorozat **tagjainak** vagy elemeinek nevezzük.

Rekurzív megadás: ha egy sorozat tagjait úgy adjuk meg, hogy az *n*-edik tag kiszámolásához szükség van a sorozat előző tagjaira is.

Periodikus a sorozat, ha van olyan pozitív egész *p* szám, hogy a sorozat bármely *n*-edik elemére igaz, hogy $a_n = a_{n+p}$.

Egy **sorozat monoton nő**, ha minden tagja legalább akkora, mint az előző tag.
$a_n \geq a_{n-1}$.

Egy **sorozat monoton csökken**, ha minden tagja legfeljebb akkora, mint az előző tag.
$a_n \leq a_{n-1}$.

Számtani sorozatnak nevezzük az olyan sorozatot, amelynél a második tagtól kezdve minden tagot úgy kapunk meg, hogy a sorozat előző tagjához – a sorozatra jellemző – állandó számot hozzáadjuk. Ezt az állandót **differenciának** (latin: különbség) nevezzük.

A számtani sorozat *n*-edik tagját így számoljuk ki: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

A számtani sorozat bármely tagja a hozzá képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagoknak számtani közepe. Képlettel:

$a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ ha $n > k$.

Ha egy **számtani sorozat** első tagja a_1, n-edik tagja pedig a_n, a sorozat **első *n* elemének összege**:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n$$

Mértani sorozatnak nevezzük az olyan sorozatot, amelynél a második tagtól kezdve minden tagot úgy kapunk meg, hogy a sorozat előző tagját – a sorozatra jellemző – állandó, nullától különböző számmal megszorozzuk. Ezt az állandót **hányadosnak** (kvóciensnek) nevezzük.

A mértani sorozat *n*-edik tagját így számoljuk ki: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

A pozitív tagú mértani sorozat bármely tagja a hozzá képest szimmetrikusan elhelyezkedő tagok mértani közepe. Képlettel:

$a_n = \sqrt{a_{n-k} \cdot a_{n+k}}$ ha $n > k$ és minden $a_i > 0$.

Negatív tagokat is tartalmazó sorozat esetén: $a_n^{\ 2} = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$.

A mértani sorozat első *n* elemének összege:

$S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, ha $q \neq 1$ és $S_n = n \cdot a_1$, ha $q = 1$.

Konstans sorozat: ha egy sorozat minden tagja azonos. Számtani sorozat esetén $d = 0$, mértani sorozat esetén $q = 1$.

Kamatos kamat számítása: egy bizonyos mennyiség azonos mértékű ismételt kamatozását úgy számítjuk, hogy a kamattal növelt összeg kamatát számítjuk. Ezt nevezzük. Ha a t_0 kiindulási összeg n évig kamatozik, p százalékos kamattal, akkor a kamatokkal felnövekedett összeg értéke: $t = t_0 \cdot \left(1 + \dfrac{p}{100}\right)^n$.