

A csoport

1. Számológép és táblázat használata nélkül számítsd ki, majd állítsd növekvő sorrendbe a következő logaritmusok értékeit!

$$\log_{\frac{1}{2}} 4; \quad \log_3 \sqrt{243}; \quad 8^{\log_2 \sqrt[3]{9}}. \quad (7 \text{ pont})$$

2. Ábrázold és jellemezd az $f(x) = 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} x - 1$ függvényt! (11 pont)

3. Oldd meg a $2 \log_3(6x - 5) = \log_3(12x - 7)$ egyenletet a valós számok halmazán! (10 pont)

4. Egy háromszög csúcsai $A(-4; 1)$, $B(6; 5)$ és $C(2; -5)$.

a) Határozd meg a B csúcsból kiinduló súlyvonal hosszát!

b) Számítsd ki a háromszög súlypontjának koordinátáit! (6 pont)

5. Egy téglalap BC oldala kétszer olyan hosszú, mint az AB oldal. Két csúcsának koordinátái: $A(-5; 0)$, $B(-3; -4)$, és a további pontok y koordinátái nemnegatívak. Számítsd ki a téglalap másik két csúcsának koordinátáit! (9 pont)

B csoport

1. Számológép és táblázat használata nélkül számítsd ki, majd állítsd növekvő sorrendbe a következő logaritmusok értékeit!

$$\log_9 \frac{1}{3}; \quad \log_{25} \sqrt{5}; \quad 81^{\log_3 \sqrt{7}}. \quad (7 \text{ pont})$$

2. Ábrázold és jellemezd az $f(x) = -\log_3(x + 1)$ függvényt! (11 pont)

3. Oldd meg a $2 \log_5(8x - 3) = \log_5(4x + 21)$ egyenletet a valós számok halmazán! (10 pont)

4. Egy háromszög csúcsai $A(-2; 2)$, $B(8; -1)$ és $C(1; -8)$.

a) Határozd meg az C csúcsból kiinduló súlyvonal hosszát!

b) Számítsd ki a háromszög súlypontjának koordinátáit! (6 pont)

5. Egy téglalap BC oldala háromszor olyan hosszú, mint az AB oldal. Két csúcsának koordinátái: $A(-4; 5)$, $B(-1; 7)$, és a további pontok x koordinátái pozitívak. Számítsd ki a téglalap másik két csúcsának koordinátáit! (9 pont)

MEGOLDÁSOK

A csoport

1. Számológép és táblázat használata nélkül számítsd ki, majd állítsd növekvő sorrendbe a következő logaritmusok értékeit!

$$\log_{\frac{1}{2}} 4; \quad \log_3 \sqrt{243}; \quad 8^{\log_2 \sqrt[3]{9}}.$$

Megoldás:

$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$	1 pont
$\log_3 \sqrt{243} = \frac{5}{2}$	2 pont
$8^{\log_2 \sqrt[3]{9}} = 9$	3 pont
Helyes sorrend	1 pont
Összesen	7 pont

2. Ábrázold és jellemezd az $f(x) = 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} x - 1$ függvényt!

Megoldás:

Ábrázolás:	
jó alapfüggvény	1 pont
y tengely menti 2-szeres nyújtás	1 pont
eltolás a $\mathbf{v}(0; -1)$ vektorral	1 pont
Jellemzés:	
ÉT: \mathbf{R}^+	1 pont
ÉK: \mathbf{R}	1 pont
zérushely: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	2 pont
monotonitás: szigorúan monoton csökkenő	1 pont
szélsőérték: nincs	1 pont
nem páros, nem páratlan	1 pont
invertálható	1 pont
Összesen	11 pont

3. Oldd meg a $2 \log_3(6x - 5) = \log_3(12x - 7)$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

Jól határozza meg az értelmezési tartományt: $6x - 5 > 0$, $12x - 7 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{6}$	2 pont
Jól alkalmazza a logaritmus azonosságát: $\log_3(6x - 5)^2 = \log_3(12x - 7)$	1 pont
Hivatkozik a logaritmus függvény szigorú monotonitására	1 pont
Felírja a $(6x - 5)^2 = (12x + 7)$ egyenletet	1 pont
Jól végzi el a kijelölt műveleteket: $36x^2 - 60x + 25 = 12x - 7$	1 pont
Jól rendezzi az egyenletet: $36x^2 - 72x + 32 = 0$	1 pont
Meghatározza ennek a gyökeit: $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$	2 pont
Az értelmezési tartománynak csak az $x = \frac{4}{3}$ az eleme, és ez megoldása az eredeti egyenletnek	1 pont
Összesen	10 pont

4. Egy háromszög csúcsai $A(-4; 1)$, $B(6; 5)$ és $C(2; -5)$.

a) Határozd meg az B csúcsból kiinduló súlyvonal hosszát!

b) Számítsd ki a háromszög súlypontjának koordinátáit!

Megoldás:

a)

AC felezőpontja: $F(-1; -2)$	2 pont
A súlyvonal hossza F és B távolsága: $7\sqrt{2} \approx 9,9$ egység	2 pont

b)

A súlypont: $S\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$	2 pont
Összesen	6 pont

5. Egy téglalap BC oldala kétszer olyan hosszú, mint az AB oldal. Két csúcsának koordinátái:

$A(-5; 0)$, $B(-3; -4)$, és a további pontok y koordinátái nemnegatívak. Számítsd ki a téglalap másik két csúcsának koordinátáit!

Megoldás:

$\vec{AB} (2; -4)$	2 pont
\vec{AB} elforgatása 90° -kal: $\mathbf{v}(4; 2)$, helyes választás	2 pont
$2\mathbf{v}(8; 4)$	1 pont
$2\mathbf{v}$ „felmérése” az A pontból: $D(3; 4)$	2 pont
$2\mathbf{v}$ „felmérése” a B pontból: $C(5; 0)$	2 pont
Összesen	9 pont

A dolgozatra kapható maximális pontszám: 43 pont

Javasolt ponthatárok:

36 – 43: jeles

28 – 35: jó

20 – 27: közepes

12 – 19: elégséges

0 – 11: elégtelen

B csoport

1. Számológép és táblázat használata nélkül számítsd ki, majd állítsd növekvő sorrendbe a következő logaritmusok értékeit!

$$\log_9 \frac{1}{3}; \quad \log_{25} \sqrt{5}; \quad 81^{\log_3 \sqrt{7}}.$$

Megoldás:

$\log_9 \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$	1 pont
$\log_{25} \sqrt{5} = \frac{1}{4}$	2 pont
$81^{\log_3 \sqrt{7}} = 49$	3 pont
Helyes sorrend	1 pont
Összesen	7 pont

2. Ábrázold jellemezd az $f(x) = -\log_3(x+1)$ függvényt!

Ábrázolás:	
jó alapfüggvény	1 pont
eltolás a $\mathbf{v}(-1; 0)$ vektorral	1 pont
tükrözés az x tengelyre	1 pont
Jellemzés:	
ÉT: $]-1; \infty[$	1 pont
ÉK: \mathbf{R}	1 pont
zérushely: $x = 0$	2 pont
monotonitás: szigorúan monoton csökkenő	1 pont
szélsőérték: nincs	1 pont
nem páros, nem páratlan	1 pont
invertálható	1 pont
Összesen	11 pont

3. Oldd meg a $2\log_5(8x-3) = \log_5(4x+21)$ egyenletet a valós számok halmazán!

Jól határozza meg az értelmezési tartományt: $8x - 3 > 0, 4x + 21 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{8}$	2 pont
Jól alkalmazza a logaritmus azonosságát: $\log_5(8x - 3)^2 = \log_5(4x + 21)$	1 pont
Hivatkozik a logaritmus függvény szigorú monotonitására	1 pont
Felírja a $(8x - 3)^2 = 4x + 21$ egyenletet	1 pont
Jól végzi el a kijelölt műveleteket: $64x^2 - 48x + 9 = 4x + 21$	1 pont
Jól rendezzi az egyenletet: $64x^2 - 52x - 12 = 0$	1 pont
Meghatározza ennek a gyökeit: $x_1 = 1, x_2 = -\frac{3}{16}$	2 pont
Az értelmezési tartománynak csak az $x = 1$ az eleme, és ez megoldása az eredeti egyenletnek	1 pont
Összesen	10 pont

4. Egy háromszög csúcsai $A(-2; 2)$, $B(8; -1)$ és $C(1; -8)$.

a) Határozd meg az C csúcsból kiinduló súlyvonal hosszát!

b) Számítsd ki a háromszög súlypontjának koordinátáit!

Megoldás:

a)

AB felezőpontja: $F(3; 0,5)$	2 pont
A súlyvonal hossza F és C távolsága:	2 pont
$\sqrt{2^2 + 8,5^2} = \sqrt{76,25} \approx 8,7$ egység	

b)

A súlypont: $S\left(\frac{7}{3}; -\frac{7}{3}\right)$	2 pont
Összesen	6 pont

5. Egy téglalap BC oldala háromszor olyan hosszú, mint az AB oldal. Két csúcsának koordinátái: $A(-4; 5)$, $B(-1; 7)$, és a további pontok x koordinátái pozitívak. Számítsd ki a téglalap másik két csúcsának koordinátáit!

Megoldás:

$\vec{AB} (3; 2)$	2 pont
\vec{AB} elforgatása -90° -kal: $\mathbf{v}(2; -3)$, helyes választás	2 pont
$3\mathbf{v}(6; -9)$	1 pont
$3\mathbf{v}$ „felmérése” az A pontból: $D(2; -4)$	2 pont
$3\mathbf{v}$ „felmérése” a B pontból: $C(5; -2)$	2 pont
Összesen	9 pont

A dolgozatra kapható maximális pontszám: 43 pont

Javasolt ponthatárok:

36 – 43: jeles

28 – 35: jó

20 – 27: közepes

12 – 19: elégséges

0 – 11: elégtelen