A csoport

1. Számológép és táblázat használata nélkül számítsd ki a következő számokat, majd

rendezd növekvő sorrendbe: $9^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{-8}$. (7 pont)

2. Ábrázold és jellemezd az $f(x) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x} - 1$ függvényt! (9 pont)

3. Feri nem emlékszik a pénteki óráinak a sorrendjére, de tudja, hogy aznap angol, biológia, francia, kémia, magyar és testnevelés órája lesz.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy ha aznap reggel 20 percet késik, akkor lemarad a kémia órán a felelésről?

b) Ezen a napon – ünnepség miatt – elmarad az utolsó két óra. Mi a valószínűsége annak, hogy pont a magyar és testnevelés órák maradnak el?

(7pont)

4. Oldd meg az alábbi egyenleteket

a) $2^{x}\cdot\sqrt{8} = 16\cdot 4^{3x}$ a valós számok halmazán; (8 pont)

b) $2\cdot 9^{x} = 5\cdot 3^{x+1} + 27$ az egész számok halmazán! (11 pont)

5. Ha a mérés kezdetekor – 0 időpontban – N_0 számú bomlatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t időegység múlva a még bomlatlan atomok száma $N_t = N_0\cdot e^{-\lambda t}$ lesz ($e \approx 2{,}718$). A λ neve bomlási állandó (megadja, hogy időegység alatt az atomok hányad része bomlik el az adott anyagban). Az időszámításunk kezdetén még létező tóriumizotóp bomlási állandója $\lambda = \frac{1}{80000}\left(\frac{1}{év}\right)$.

A tóriumizotóp hány százaléka bomlik el 40 ezer illetve 120 ezer év alatt? (8 pont)

B csoport

1. Számológép és táblázat használata nélkül számítsd ki a következő számokat, majd rendezd növekvő sorrendbe: $27^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}$; $\sqrt[3]{-27}$. (7 pont)

2. Ábrázold és jellemezd $f(x) = -x^3 + 1$ függvényt! (9 pont)

3. Egy futóverseny egyik selejtezőjében heten indultak: Aladár, Balázs, Csaba, Dénes, Ede, Ferenc és Gábor. A rajtszámokat véletlenszerűen osztották ki.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy Csaba kapja az első rajtszámot?

b) Ha az első két helyezett jut tovább, mi a valószínűsége annak, hogy a két jó barát, Aladár és Balázs jutnak tovább?

(7 pont)

4. Oldd meg az alábbi egyenleteket

a) $9 \cdot 3^x = \sqrt[3]{27} \cdot 81^{2x}$ a valós számok halmazán; (8 pont)

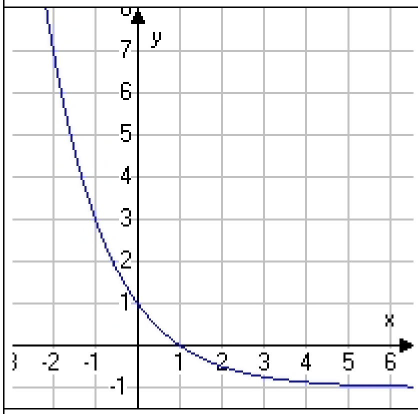
b) $7 \cdot 4^{x+1} + 8^2 = 2 \cdot 16^x$ az egész számok halmazán! (11 pont)

5. Ha a mérés kezdetekor – 0 időpontban – N_0 számú bomlatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t időegység múlva a még bomlatlan atomok száma $N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ lesz ($e \approx 2{,}718$). A λ neve bomlási állandó (megadja, hogy időegység alatt az atomok hányad része bomlik el az adott anyagban). A 226-os tömegszámú rádium (Ra) rádioaktív anyag bomlási állandója $\lambda = \frac{1}{1600}\left(\frac{1}{év}\right)$.

A rádiumatomok hány százaléka bomlik el 1200 illetve 2400 év múlva? (8 pont)

MEGOLDÁSOK
A csoport

1. Számológép és táblázat használata nélkül számítsd ki a következő számokat, majd rendezd növekvő sorrendbe: $9^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{-8}$.	
$9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$	2 pont
$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$	3 pont
$\sqrt[3]{-8}=-2$	1 pont
$\sqrt[3]{-8}<\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}<9^{\frac{1}{2}}$	1 pont
Összesen	**7 pont**

2. Ábrázold és jellemezd az $f(x)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1$ függvényt!	
Grafikon:	
	
jó alapfüggvény:	1 pont
2-szeres nyújtás az *y* tengely irányában	1 pont
y tengely menti eltolás $(0;-1)$ vektorral	1 pont
Jellemzés:	
ÉT: $x\in\mathbf{R}$	1 pont
ÉK: $f(x)\in\mathbf{R}$ és $f(x)\in\left]-1;\infty\right[$	1 pont
zérushely: $x=1$	1 pont
monotonitás: szigorúan monoton csökkenő	1 pont
szélsőérték: nincs	1 pont
nem páros, nem páratlan	1 pont
Összesen	**9 pont**

3. Feri nem emlékszik a pénteki óráinak a sorrendjére, de tudja, hogy aznap angol, biológia, francia, kémia, magyar és testnevelés órája lesz.
a) Mi a valószínűsége annak, hogy ha aznap reggel 20 percet késik, akkor lemarad a kémia órán a felelésről?
b) Ezen a napon – ünnepség miatt – elmarad az utolsó két óra. Mi a valószínűsége annak, hogy pont a magyar és testnevelés órák maradnak el?

a) Az első órát 6-féleképpen lehet kiválasztani, ebből a kedvező lehetőség 1, tehát $P = \frac{\text{kedvező eset}}{\text{összes eset}} = \frac{1}{6}$			2 pont
b) Kombinációval számol (elég, ha csak a számolásból derül ki)	1 pont	Összes lehetséges órasorrend: 6!	1 pont
Az utolsó két órát $\binom{6}{2}$-féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	Kedvező: utolsó két óra 2-féle lehet: 2! első négy óra 4-féle lehet: 4!	1 pont
$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$	2 pont	Tehát kedvező: $2!\cdot 4!$	1 pont
Ebből 1 kiválasztás a kedvező, tehát $p = \frac{1}{15}$	1 pont	$P = \frac{\text{kedvező eset}}{\text{összes eset}} = \frac{2!\cdot 4!}{6!} = \frac{1}{15}$	2 pont
Összesen			**7 pont**

4) Oldd meg az alábbi egyenleteket
a) $2^x \cdot \sqrt{8} = 16 \cdot 4^{3x}$ a valós számok halmazán;
b) $2 \cdot 9^x = 5 \cdot 3^{x+1} + 27$ az egész számok halmazán!

a) Minden tényezőt 2 hatványként felírva: $2^x \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^4 \cdot 2^{6x}$	2 pont
Alkalmazza a hatványozás azonosságait: $2^{x+\frac{3}{2}} = 2^{4+6x}$	1 pont
Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:	1 pont
$x + \frac{3}{2} = 4 + 6x$	1 pont
Jó a megoldás: $x = -\frac{1}{2}$	1 pont
Ellenőrzés	2 pont
Összesen az a) feladat	**8 pont**
b) Alkalmazza a hatványozás azonosságait: $2 \cdot 9^x = 15 \cdot 3^x + 27$	1 pont
Új ismeretlen bevezetése: $y = 3^x$	1 pont
Jól írja fel a másodfokú egyenletet: $2 \cdot y^2 - 15 \cdot y - 27 = 0$	1 pont

Jól írja fel a megoldóképletet: $y_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-27)}}{2 \cdot 2}$	1 pont
Jó a megoldás: $y_1 = 9 \quad y_2 = -\frac{3}{2} = -1{,}5$	2 pont
$3^x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 2$	2 pont
$3^x = -1{,}5$, innen nincs megoldás	2 pont
Ellenőrzés	1 pont
Összesen a b) feladat	**11 pont**

5. Ha a mérés kezdetekor – 0 időpontban – N_0 számú bomlatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t időegység múlva a még bomlatlan atomok száma $N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ lesz ($e \approx 2{,}718$). A λ neve bomlási állandó (megadja, hogy időegység alatt az atomok hányad része bomlik el az adott anyagban). Az időszámításunk kezdetén még létező tóriumizotóp bomlási állandója $\lambda = \frac{1}{80000}\left(\frac{1}{év}\right)$. A tóriumizotóp hány százaléka bomlik el 40 ezer illetve 120 ezer év alatt?	
t idő elteltével a bomlatlan tóriumizotópok száma $N_t = N_0 \cdot 2{,}718^{-0{,}0000125\, t}$	1 pont
$\frac{N_t}{N_0} \cdot 100$ adja meg, hogy t idő elteltével a tóriumizotópok hány százaléka marad bomlatlan	1 pont
A bomlatlan tóriumizotópok százalékban: $\left(1 - \frac{N_t}{N_0}\right) \cdot 100 = \left(1 - 2{,}718^{-0{,}0000125 \cdot t}\right) \cdot 100$	2 pont
40 000 év múlva: $\left(1 - 2{,}718^{-0{,}0000125 \cdot 40000}\right) \cdot 100 = 39{,}3\ \%$	2 pont
120 000 év múlva: $\left(1 - 2{,}718^{-0{,}0000125 \cdot 120000}\right) \cdot 100 = 77{,}7\ \%$	2 pont
Összesen	**8 pont**

Összesen a dolgozat:	**50 pont**

Javasolt ponthatárok:

42 – 50: jeles

32 – 41: jó

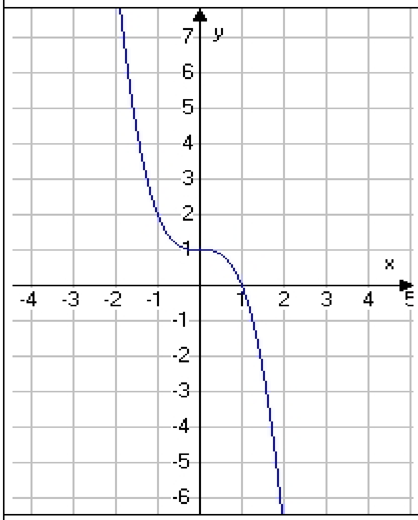
22 – 31: közepes

12 – 21: elégséges

0 – 11: elégtelen

B csoport

1) Számológép és táblázat használata nélkül számítsd ki a következő számokat, majd rendezd növekvő sorrendbe: $27^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}$; $\sqrt[3]{-27}$.	
$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$	2 pont
$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$	3 pont
$\sqrt[3]{-27} = -3$	1 pont
$\sqrt[3]{-27} < \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}} < 27^{\frac{1}{3}}$	1 pont
Összesen a feladat	**7 pont**

2. Ábrázold és jellemezd az $f(x) = -x^3 + 1$ függvényt!	
Grafikon:	
	
jó alapfüggvény	1 pont
tükrözés az x tengelyre	1 pont
y tengely menti eltolás $(0;1)$ vektorral	1 pont
Jellemzés:	
ÉT: $x \in \mathbf{R}$	1 pont
ÉK: $f(x) \in \mathbf{R}$	1 pont
zérushely: $x = 1$	1 pont
monotonitás: szigorúan monoton csökkenő	1 pont
szélsőérték: nincs	1 pont
nem páros, nem páratlan	1 pont
Összesen	**9 pont**

3. Egy futóverseny egyik selejtezőjében heten indultak: Aladár, Balázs, Csaba, Dénes, Ede, Ferenc és Gábor. A rajtszámokat véletlenszerűen osztották ki.
a) Mi a valószínűsége annak, hogy Csaba kapja az első rajtszámot?
b) Ha az első két helyezett jut tovább, mi a valószínűsége annak, hogy a két jó barát, Aladár és Balázs jutnak tovább?

a) Az első embert 7-féleképpen lehet kiválasztani, ebből a kedvező lehetőség 1, tehát $P=\frac{\text{kedvező eset}}{\text{összes eset}}=\frac{1}{7}$			2 pont
b) Kombinációval számol (elég, ha csak a számolásból derül ki)	1 pont	Összes lehetséges órasorrend:7!	1 pont
Az első két helyezettet $\binom{7}{2}$-féleképpen lehet kiválasztani.	1 pont	Kedvező: elsőkét ember 2-féle lehet: 2! utolsó öt ember 5-féle lehet: 5!	1 pont
$\binom{7}{2}=\frac{7!}{5!\cdot 2!}=21$	2 pont	Tehát kedvező: $2!\cdot 5!$	1 pont
Ebből 1 kiválasztás a kedvező, tehát $p=\frac{1}{21}$	1 pont	$P=\frac{\text{kedvező eset}}{\text{összes eset}}=\frac{2!\cdot 5!}{7!}=\frac{1}{21}$	2 pont
Összesen			**7 pont**

4. Oldd meg az alábbi egyenleteket
a) $9\cdot 3^x=\sqrt[3]{27}\cdot 81^{2x}$ a valós számok halmazán;
b) $7\cdot 4^{x+1}+8^2=2\cdot 16^x$ az egész számok halmazán!

a) Minden tényezőt 3 hatványként felírva: $3^2\cdot 3^x=3^1\cdot 3^{8x}$	2 pont
Alkalmazza a hatványozás azonosságait: $3^{2+x}=3^{1+8x}$	1 pont
Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt:	1 pont
$2+x=1+8x$	1 pont
Jó a megoldás: $x=\frac{1}{7}$	1 pont
Ellenőrzés	2 pont
Összesen az a) feladat	**8 pont**
b) Alkalmazza a hatványozás azonosságait: $28\cdot 4^x+64=2\cdot 16^x$	1 pont
Új ismeretlen bevezetése: $y=4^x$	1 pont
Jól írja fel a másodfokú egyenletet: $y^2-14\cdot y-32=0$	1 pont
Jól írja fel a megoldóképletet: $y_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 1\cdot(-32)}}{2\cdot 1}$	1 pont

Jó a megoldás: $y_1 = 16 \quad y_2 = -2$	2 pont
$4^x = 16 \quad \Rightarrow \quad x = 2$	2 pont
$4^x = -2$, innen nincs megoldás	2 pont
Ellenőrzés	1 pont
Összesen a b) feladat	**11 pont**

5. Ha a mérés kezdetekor – 0 időpontban – N_0 számú bomlatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t időegység múlva a még bomlatlan atomok száma $N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ lesz ($e \approx 2{,}718$). A λ neve bomlási állandó (megadja, hogy időegység alatt az atomok hányad része bomlik el az adott anyagban). A 226-os tömegszámú rádium (Ra) rádioaktív anyag bomlási állandója $\lambda = \frac{1}{1600}\left(\frac{1}{év}\right)$. A rádiumatomok hány százaléka bomlik el 1200 illetve 2400 év múlva?	
t idő elteltével a bomlatlan rádiumatomok száma $N_t = N_0 \cdot 2{,}718^{-0{,}000625\,t}$	1 pont
$\frac{N_t}{N_0} \cdot 100$ adja meg, hogy t idő elteltével a rádiumatmok hány százaléka marad bomlatlan	1 pont
A bomlatlan rádiumatomok százalékban: $\left(1 - \frac{N_t}{N_0}\right) \cdot 100 = \left(1 - 2{,}718^{-0{,}000625 \cdot t}\right) \cdot 100$	2 pont
1200 év múlva: $\left(1 - 2{,}718^{-0{,}000625 \cdot 1200}\right) \cdot 100 = 52{,}8$ %	2 pont
2400 év múlva: $\left(1 - 2{,}718^{-0{,}000625 \cdot 2400}\right) \cdot 100 = 77{,}7$ %	2 pont
Összesen	**8 pont**

Összesen a dolgozat:	**50 pont**

Javasolt ponthatárok:

42 – 50: jeles

32 – 41: jó

22 – 31: közepes

12 – 21: elégséges

0 – 11: elégtelen