MATEMATIKA „A”
11. évfolyam

Exponenciális függvények és egyenletek

3. modul

Készítette: Csákvári Ágnes és Darabos Noémi Ágnes

A modul célja	Hatványozás kiterjesztése valós számokra, rögzített alap mellett a hatvány kiszámítása különböző kitevők esetén. Az exponenciális függvény ábrázolása, tulajdonságainak megállapítása, transzformációi. Alkalmazásuk a valós életben. Egyszerű, összetett és másodfokúra visszavezethető exponenciális egyenletek megoldása.
Időkeret	6 óra
Ajánlott korosztály	11. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Tágabb környezetben:* Környezeti, fizikai, kémiai, biológiai, közgazdasági folyamatok modellezése. *Szűkebb környezetben:* Logaritmus, hatványozás, analízis elemei. Geometriai transzformációk, vektorok. Sorozatok, kamatoskamat számítás. Egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek. *Ajánlott megelőző tevékenységek:* Hatvány- és gyökfüggvény, függvénytranszformációk, függvények jellemzése. Vektorok; másodfokú egyenletek megoldása. Hatványozás egész, illetve racionális kitevőre. A hatványozás azonosságai. *Ajánlott követő tevékenységek:* Logaritmusfüggvény. Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek. Sorozatok, kamatoskamat számítás. Analízis elemei.
A képességfejlesztés fókuszai	*Számolás, számlálás, számítás:* Függvényérték kiszámítása. Pontok ábrázolása a koordináta-rendszerben. Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. *Becslés, mérés, valószínűségi szemlélet:* Hatványozás irracionális hatványkitevő esetén. Racionális, irracionális koordinátájú pontok helyének meghatározása a koordináta-rendszerben. Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásai számának a meghatározása. *Szöveges feladatok, metakogníció:* Kémiai, biológiai, közgazdasági folyamatokban matematikai modellalkotás leírás alapján. *Rendszerezés, kombinatív gondolkodás:* Függvények ábrázolása függvénytranszformációkkal. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása. Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása a függvény tulajdonságainak ismeretében. Másodfokúra visszavezethető exponenciális egyenletek. *Induktív, deduktív következtetés:* Az exponenciális függvény ábrázolása és jellemzése konkrét esetben, majd paraméter megadásával.

TÁMOGATÓ RENDSZER

- 3.1 fólia (1. mintapéldát tartalmazza)
- 3.2 kártyakészlet koordináta-rendszerrel (függvényérték kiszámítása)
- 3.3 táblázat (függvénytranszformációhoz)
- 3.4 triminó (exponenciális egyenletek)
- 3.5 torpedó (exponenciális egyenletek)

Ezeken kívül táblázatok, grafikonok, kidolgozott elméleti anyag, torpedó játék.

JAVASOLT ÓRABEOSZTÁS

1. óra	Hatványozás kiterjesztése, exponenciális függvény
2. óra	Exponenciális függvény ábrázolása függvénytranszformációkkal
3. óra	A grafikon ismeretében megoldható egyenletek, egyenlőtlenségek
4. óra	Az exponenciális függvény ismeretében megoldható exponenciális egyenletek
5. óra	Összetettebb exponenciális egyenletek
6. óra	Másodfokúra visszavezethető exponenciális egyenletek

ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEK

Középszint

Egyenletek megoldása új ismeretlen bevezetésével. Másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása. Tudjon definíciók és azonosságok közvetlen alkalmazását igénylő exponenciális egyenleteket megoldani. Ismerje és alkalmazza a függvényeket gyakorlati problémák megoldásánál. Tudjon értéktáblázat és képlet alapján függvényt ábrázolni, illetve adatokat leolvasni a grafikonról. Ismerje, tudja ábrázolni és jellemezni az $x \mapsto a^x$ hozzárendeléssel megadott függvényt. Tudjon néhány lépéses transzformációt igénylő függvényeket függvénytranszformációk segítségével ábrázolni [$f(x) + c$; $f(x + c)$; $c\,f(x)$; $f(c\,x)$]. Függvények jellemzése értékkészlet, zérushely, növekedés, fogyás, szélsőérték, paritás szempontjából.

Emelt szint

Értelmezési tartomány, illetve értékkészlet vizsgálatával, valamint szorzattá alakítással megoldható egyenletek. Tudjon egyszerű exponenciális egyenlőtlenségeket megoldani. Tudja ábrázolni az $f(x)=a^x$ függvény transzformáltjainak grafikonját $\left(c \cdot f(ax+b)+d\right)$.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Exponenciális függvény (3 óra)			
1. Hatványozás kiterjesztése, az exponenciális függvény (1 óra)			
1.	Ismerkedés az exponenciális függvény grafikonjával: A tanulók párokban dolgoznak. Kitöltik az első feladatban található értéktáblázatot. Ezután gyorsan ellenőrzik a számításokat, majd ábrázolják is a függvényeket.	számlálás, számítás, becslés	1. és 2. feladat
2.	A tapasztalatok összegzése csoportmegbeszéléssel: A tanulók 4 fős csoportokban dolgoznak. Minden csoport kap egy sorszámot, és a tanárnál is maradnak sorszám kártyák. A tanár felolvassa a kérdéseket. Minden kérdés elhangzása után hagy időt a válasz megbeszélésére, majd húz egy kártyát. Az adott sorszámú csoport egy képviselője megosztja a többiekkel a csoport válaszát. Az osztály ellenőriz, javít ha kell.	rendszerezés, valószínűségi szemlélet	3. feladat
3.	Exponenciális függvény definíciója: A tanár összegez, és elmondja az exponenciális függvény definícióját.	rendszerezés, induktív következtetés	3.1 fólia 1. mintapélda

4.	Függvényérték-számítás: A tanulók 4 fős csoportokban dolgoznak. A tanár minden csoportnak odaadja az első kártyakészletet, valamint a koordináta-rendszert (koordrsz.bmp). Minden tanuló húz 4-4 kártyát. A feladat az adott hozzárendelési utasítás alapján a függvényérték kiszámítása az adott helyen, majd az így kapott pont becsült helyének berajzolása a koordináta-rendszerbe		2. és 3. mintapélda 4–7. feladatokból válogatva 3.2 kártyakészlet

2. Exponenciális függvény ábrázolása függvénytranszformációkkal (1 óra)			
1.	Függvénytranszformációk átismétlése kerekasztallal: A tanulók 4 fős csoportokban dolgoznak. Az egyik gyerek körbeindít egy lapot. Ráírja, ő milyen függvénytranszformációkra emlékszik, és ír 1–1 példát is rá. A példában elegendő, ha a függvény hozzárendelési utasítása szerepel. Ha nem emlékszik többre, odaadja a lapot a mellette ülőnek, aki kiegészíti. Ezek után osztályszinten is megbeszélik, ki mit gyűjtött össze. A tanár rendszerez, a táblára egymás mellé, oszlopokban felírja a transzformációkat. Minden csoportból kimegy egy tanuló, és felírja a csoport példáit.	rendszerezés, induktív, deduktív gondolkodás	8. feladat

2.	Egyszerű függvények ábrázolása függvénytranszformációkkal és a függvény jellemzése A tanár kiosztja nekik az első táblázatot, és a hozzá tartozó 12 db kártyát. Az eszközkészletben található táblázatból két példányt készít. Az egyikből lesznek a kártyák, a másikból pedig kitörli 12 cella tartalmát, és úgy adja oda. A tanulók szétosztják egymás között a kártyákat. Feladatuk azok helyrerakása. Egy sorban a függvény hozzárendelési utasítása, grafikonja található, illetve az, hogy ezt a grafikont milyen transzformációval kapjuk az alapfüggvény grafikonjából.	deduktív gondolkodás, kombinatív gondolkodás, számlálás	4. és 5. mintapélda 9–11. feladatokból válogatva 3.3 táblázat
3.	Egyszerű exponenciális egyenlőtlenség megoldása grafikon alapján.	kombinatív gondolkodás, számlálás	12. feladat
4.	Összetettebb függvények ábrázolása függvénytranszformációval	deduktív gondolkodás, kombinatív gondolkodás, számlálás	13–15. feladatokból válogatva

3. A grafikon ismeretében megoldható egyenletek, egyenlőtlenségek (1 óra)			
1.	Grafikon segítségével megoldható egyenletek	kombinatív gondolkodás, valószínűségi szemlélet	6. és 7. mintapélda 16. feladat
2.	Grafikon segítségével megoldható egyenlőtlenségek	kombinatív gondolkodás, valószínűségi szemlélet	8. mintapélda (12. feladat)

II. Exponenciális egyenletek (3 óra) **4. Az exponenciális függvény ismeretében megoldható egyenletek** (1 óra)			
1.	A mintapéldák közös megbeszélése	számítás, számolás, kombinatív gondolkodás	9. és 10. mintapélda
2.	Szakértői mozaik. Alakítsunk ki négy fős csoportokat! Minden csoportban mindenki kap egy-egy kártyát. A kártyákon az *A, B, C, D* betűk szerepelnek. Ezután egy munkacsoportot alkotnak azok a tanulók, akik azonos betűt kaptak. A betűk a feladatok nehézségi fokát jelentik: *A* a legkönnyebb, a *D* pedig a legnehezebb. A munkacsoportok megoldják a kapott feladatot, majd visszamennek az eredeti csoportjukhoz. A négy fős csoportokban megbeszélik mind a négy feladat megoldását. Ezután a tanár tetszőlegesen kiválaszt négy tanulót, és mindegyiküktől egy feladat ismertetését kéri a táblánál.	számítás, számolás, kombinatív gondolkodás	17–20. feladatokból válogatva

5. Összetettebb exponenciális egyenletek (1 óra)			
1.	Triminó játék Alakítsunk ki csoportokat az osztályban. Minden csoport kap 9 db szabályos háromszöget. A kis háromszögek oldalait összeillesztve minden csoport elkészít egy nagy háromszöget. Úgy kell az oldalakat összeilleszteni, hogy az élek mentén egy egyenlet és a megoldása álljon.	számítás, számolás, kombinatív gondolkodás	3.4 triminó
2.	A mintapéldák közös megbeszélése	számítás, számolás, kombinatív gondolkodás	11. és 12. mintapélda

3.	Szakértői mozaik. Alakítsunk ki négy fős csoportokat! Minden csoportban mindenki kap egy-egy kártyát. A kártyákon az *A, B, C, D* betűk szerepelnek. Ezután egy munkacsoportot alkotnak azok a tanulók, akik azonos betűt kaptak. A betűk a feladatok nehézségi fokát jelentik: *A* a legkönnyebb, a *D* pedig a legnehezebb. A munkacsoportok megoldják a kapott feladatot, majd visszamennek az eredeti csoportjukhoz. A négy fős csoportokban megbeszélik mind a négy feladat megoldását. Ezután a tanár tetszőlegesen kiválaszt négy tanulót, és mindegyiküktől egy feladat ismertetését kéri a táblánál.	számítás, számolás, kombinatív gondolkodás	21. és 22. feladatokból válogatva

6. Másodfokúra visszavezetető exponenciális egyenletek (1 óra)			
1.	A mintapélda közös megbeszélése	számítás, számolás, kombinatív gondolkodás	13. mintapélda
2.	Torpedó játék. A játékban páros számú csoportra bontjuk az osztályt, majd megbeszéljük, hogy melyek a szembenálló csoportok. Minden csoport elhelyezi saját flottáját a bal oldali 10x10-es táblán. A csoportnak az a feladata, hogy a 7. feladatot legjobb tudása szerint megoldja. Minden jó feladatért adjunk 5 torpedót. Ha végeztek a feladatmegoldással, összegezzük, hogy melyik csoport hány lövéssel rendelkezik, majd kezdődhet az ütközet. A játék nyertese az a csoport, aki előbb lövi ki az ellenfél összes hajóját.	számlálás, számítás, számolás, kombinatív gondolkodás	23. feladat 3.5 torpedó játék

I. Exponenciális függvény

Eddigi tanulmányaink során találkoztunk abszolútérték függvénnyel, trigonometrikus függvényekkel, gyökfüggvényekkel, valamint hatványfüggvénnyel. Ez utóbbinál a hatványalap állandóan változott, a hatványkitevőt pedig rögzítettük. Most megnézzük, mi lesz a függvény képe, és milyen tulajdonságú lesz a függvény, ha a hatványalapot rögzítjük, és a hatványkitevőt változtatjuk.

Módszertani megjegyzés: A tanulók párokban dolgoznak. Kitöltik az első feladatban található értéktáblázatot. Ezután ellenőrzik a számításokat, majd ábrázolják is a függvényeket.

Először megnézzük egynél nagyobb, majd egynél kisebb szám hatványait. Ezek után az egy oszlopba tartozó számokból rendezett értékpárokat képezünk, amelyeket koordináta-rendszerben ábrázolunk.

Feladatok

1. Töltsd ki az alábbi értéktáblázatokat!

a)

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
2^x										

b)

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$										

c)

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
1^x										

Megjegyzés: Ha az alap 1, akkor a már ismert konstans függvényt kapjuk, mivel 1-nek minden hatványa 1. Ezért az 1 alapot nem választjuk az exponenciális függvény alapjának.

Megoldás:

a)

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt{2}$	2	4	8

b)

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	$\sqrt{8}$	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

c)

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
1^x	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

2. Képezz pontokat az 1.a) és az 1.b) feladatok alapján az értéktáblázatok oszlopaiból, és ábrázold külön koordináta-rendszerben az 1.a) pontjait, és az 1.b) pontjait!

Módszertani megjegyzés: A tanulók az ábrák alapján válaszolnak a következő kérdésekre, amit közösen meg is beszélnek majd.
A tanulók 4 fős csoportokban dolgoznak. Minden csoport választ egy szóvivőt, kap egy sorszámot és a tanárnál is maradnak sorszám kártyák. A tanár felolvassa a kérdéseket. Minden kérdés elhangzása után hagy időt a válasz megbeszélésére, majd húz egy kártyát. Az adott sorszámú csoport szóvivője megosztja mindenkivel a csoport válaszát. Az osztály ellenőriz és javít, ha kell.

3. Válaszolj a következő kérdésekre!

1. Milyen előjelű lehet a hatványozás eredménye?
2. Eddigi ismereteid alapján milyen számok szerepelhetnek a hatványkitevőben?

3. Az elkészített grafikonoknak lehet-e közös pontjuk az x tengellyel? Miért?
4. Mit tudsz mondani a két grafikon monotonitásáról?
5. A valóságban elhelyezkedhetnek-e ezek a pontok sűrűbben?
6. Az $f(x)=2^x$, illetve a $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ tetszőleges x értékéhez egyetlen hatvány tartozik-e? Igaz-e ez fordítva?

A fentieket általánosíthatjuk: létezik az $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ függvény. Ez a függvény kölcsönösen egyértelmű. Megfigyelésünkben azt is láttuk, hogy a grafikon tetszőlegesen megközelíti az x tengelyt, de azt soha nem éri el. Az ilyen egyeneseket **aszimptotának** nevezik. Ezért az x tengely a függvény grafikonjának az aszimptotája. Ez azt jelenti, hogy a függvény alulról korlátos, mégpedig alsó korlátja a 0. Abszolút minimuma nincs, azaz nincs olyan legkisebb szám, amelynél kisebb értéket a függvény ne venne fel!
Mivel az értelmezési tartomány a racionális számok halmaza, ezért a függvény grafikonja diszkrét pontokból áll függetlenül attól, hogy ezek a pontok tetszőlegesen közel helyezkedhetnek el egymáshoz.
Az értelmezési tartomány – a permanencia-elv alapján – kiterjeszthető a valós számok halmazára úgy, hogy a hatványozás azonosságai és a függvény tulajdonságai érvényben maradnak. Ekkor a grafikon is folytonos lesz.

Módszertani megjegyzés: Jobb csoportban érdemes elmondani a hatványozás kiterjesztését irracionális kitevőre.

Kiegészítő anyag:

Számítsuk ki a $3^{\sqrt{2}}$ értékét!

Azt már korábban láttuk, hogy egy irracionális szám tetszőleges pontosan megközelíthető racionális számmal. Adjunk egy tetszőleges közelítést a $\sqrt{2}$-re.

$$1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$$

$$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$$

$$1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$$

$$1{,}4142<\sqrt{2}<1{,}4143$$

Kihasználva a függvény szigorú monotonitását $3^{\sqrt{2}}$-re a következő közelítést kapjuk:

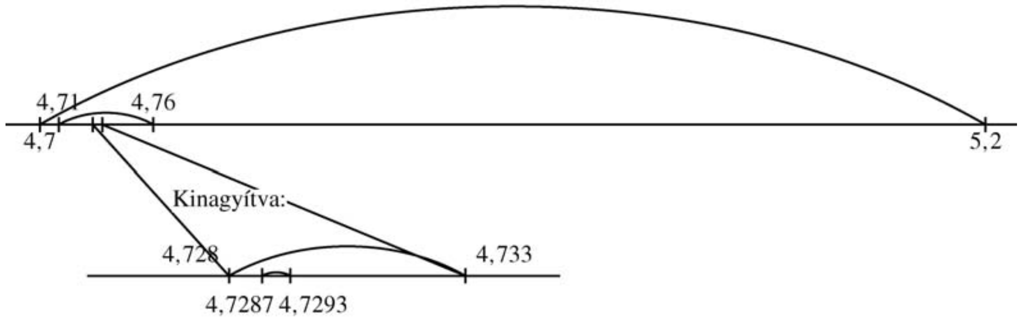
$$4{,}7 \approx 3^{1{,}4} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1{,}5} \approx 5{,}2$$

$$4{,}71 \approx 3^{1{,}41} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1{,}42} \approx 4{,}76$$

$$4{,}728 \approx 3^{1{,}414} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1{,}415} \approx 4{,}733$$

$$4{,}7287 \approx 3^{1{,}4142} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{1{,}4143} \approx 4{,}7293$$

Ábrázoljuk számegyenesen ezeket az intervallumokat!



Az ábráról látszik, hogy tulajdonképpen egymásba skatulyázott intervallumokról van szó. Bebizonyítható, hogy bármeddig folytatjuk ezen egymásba skatulyázott intervallumok képzését, egyetlen olyan pont van, amelyik mindegyik intervallumnak közös pontja. Ehhez a ponthoz rendelt valós számmal definiáljuk a $3^{\sqrt{2}}$ hatványt.

Az eddigi tapasztalatok általánosításával eljutunk az **exponenciális függvény** fogalmához.

Legyen a pozitív valós szám, $a \neq 1$, $x \in \mathbf{R}$. Ekkor az $f(x) = a^x$ függvényt **exponenciális függvény**nek nevezzük.

Megjegyzés: A későbbiek során a fenti hozzárendelési utasítással megadott függvényt tekintjük alapfüggvénynek. A név az *exponens* latin szóból származik, mely kitevőt jelent. Vagyis az ismeretlen a hatványkitevőben található.

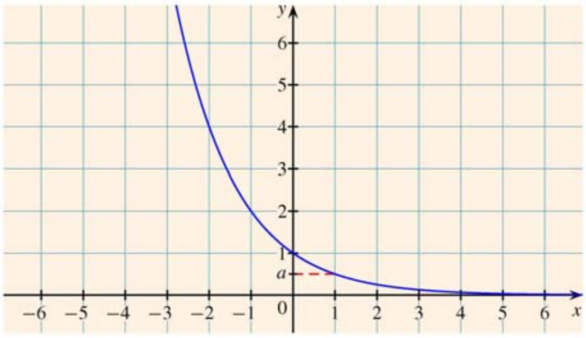
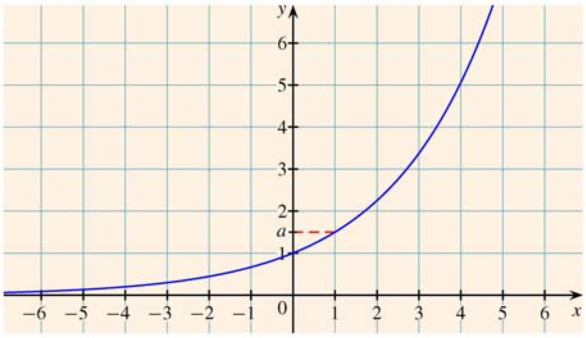
Módszertani megjegyzés: Az első mintapélda az ***3.1 fólián*** is megtalálható (kinyomtatható).

Mintapélda₁

Ábrázoljuk és jellemezzük a valós számok halmazán értelmezett exponenciális függvényt (alapfüggvényt)!

Megoldás:

Az *a* értékétől függően 2 esetet különböztetünk meg:

Első eset: $0 < a < 1$	Második eset: $a > 1$
	

	Jellemzés	
R	**1. ÉT**	**R**
$\mathbf{R}^+$	**2. ÉK**	$\mathbf{R}^+$
nincs	**3. zérushely**	nincs
szigorúan monoton csökkenő	**4. monotonitás**	szigorúan monoton növő
nincs	**5. szélsőérték**	nincs
nem páros, nem páratlan	**6. paritás**	nem páros, nem páratlan
invertálható	**7. invertálhatóság**	invertálható

3.2 kártyakészlet

Módszertani megjegyzés: A tanulók 4 fős csoportokban dolgoznak. A tanár minden csoportnak odaadja az első kártyakészletet, valamint a koordináta-rendszert (koordrsz.bmp). Minden tanuló húz 4-4 kártyát. A feladat az adott hozzárendelési utasítás alapján a függvényérték kiszámítása az adott helyen, majd az így kapott pont becsült helyének berajzolása a koordináta-rendszerbe. (4. feladat)

4. Számítsd ki számológép használatával a függvényértékeket az alábbi helyeken, majd becsüld meg a pont helyét a koordinátasíkon! A koordináta-rendszerben egy egység 0,2-nek feleljen meg. A függvényértékeket két tizedesjegy pontosan határozd meg!

	$-\frac{3}{2}$	–0,9	–0,5	$-\frac{10}{3}$	0,01	0,42	0,8	$\frac{5}{4}$
3^x								
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$								

Megoldás:

	$-\frac{3}{2}$	*–0,9*	*–0,5*	$-\frac{1}{3}$	*0,01*	*0,42*	*0,8*	$\frac{5}{4}$
3^x	*0,19*	*0,37*	*0,58*	*0,69*	*1,01*	*1,59*	*2,41*	*3,95*
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	*5,20*	*2,69*	*1,73*	*1,44*	*0,99*	*0,63*	*0,42*	*0,25*

Megjegyzés: A számolást megkönnyíti, ha figyelembe vesszük, hogy $\frac{1}{3} = 3^{-1}$.

Exponenciális függvényekkel a valós életben is találkozhatunk, amikor bizonyos folyamatokat szeretnénk leírni. Ilyen folyamatok például:

- tőke növekedése
- termelés növekedése
- kamatos kamat
- piaci folyamatok
- élőlények szaporodása
- radioaktív anyag bomlatlan atomjainak száma az eltelt idő függvényében
- légnyomás csökkenése a magasság függvényében

Megjegyzés: Az első három folyamattal a sorozatoknál majd részletesen foglalkozunk.

Mintapélda$_2$

Ha a 0 időpontban N_0 számú bomlatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor *t* idő múlva a még bomlatlan atomok száma $N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ lesz ($e \approx 2{,}718$). A λ neve bomlási állandó (megadja, hogy időegység alatt az atomok hányad része bomlik el az adott anyagban), értéke pedig a ^{14}C szénizotóp esetén $\lambda = 1{,}24 \cdot 10^{-4} \left(\frac{1}{év}\right)$.

a) A ^{14}C atomok szénatomok hány százaléka bomlik el 5, 10, 20, illetve 100 év múlva?

b) A ^{14}C atomok hány százaléka bomlik el évente?

A radioaktív anyagok $t_{1/2}$ felezési ideje megmutatja, hogy mennyi idő alatt bomlik el az anyagban a radioaktív atomok fele.

Megoldás:

a) Tudjuk, hogy a kiindulási évben a bomlatlan szénatomok száma N_0, majd *t* idő elteltével ez az érték $N_t = N_0 \cdot 2{,}718^{-0{,}000124 \cdot t}$ lesz. Az $\frac{N_t}{N_0} \cdot 100$ érték adja meg, hogy *t* idő elteltével a szénatomok hány százaléka marad bomlatlan. Ebből következik, hogy a szénatomok

$$\left(1 - \frac{N_t}{N_0}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{N_0 \cdot 2{,}718^{-0{,}000124 \cdot t}}{N_0}\right) \cdot 100 = \left(1 - 2{,}718^{-0{,}000124 \cdot t}\right) \cdot 100$$ százaléka bomlik el.

t helyébe behelyettesítjük a konkrét értékeket:

5 év múlva: $\left(1 - 2{,}718^{-0{,}000124 \cdot 5}\right) \cdot 100 = 0{,}06197\ \%$

10 év múlva: $\left(1 - 2{,}718^{-0{,}000124 \cdot 10}\right) \cdot 100 = 0{,}1239\ \%$

20 év múlva: $\left(1 - 2{,}718^{-0{,}000124 \cdot 20}\right) \cdot 100 = 0{,}2477\ \%$

100 év múlva: $\left(1 - 2{,}718^{-0{,}000124 \cdot 100}\right) \cdot 100 = 1{,}232\ \%$

b) Tudjuk, hogy a *t* időpontban a bomlatlan atomok száma $N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, a következő évben pedig $N_{t+1} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot (t+1)}$. Az $\frac{N_{t+1}}{N_t}$ hányados adja meg, hogy a következő évben az atomoknak hány százaléka maradt bomlatlan. Behelyettesítve kapjuk: $\frac{N_0 \cdot e^{-\lambda (t+1)}}{N_0 \cdot e^{-\lambda t}}$.

A hatványozás azonosságainak felhasználásával egyszerűsítés után az eredmény

$\frac{N_{t+1}}{N_t} = e^{-\lambda} = 2{,}718^{-0{,}000124} = 0{,}99988$. Vagyis a radioaktív szénatomok 99,988%-a marad bomlatlan évente. Tehát 0,012%-a bomlik el évente.

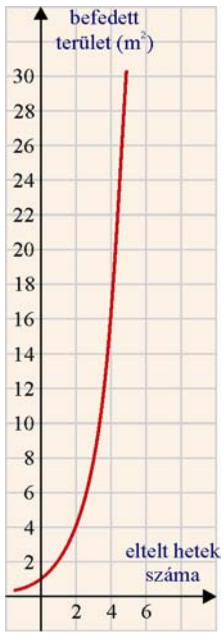
Feladatok

5. Egy tavirózsa a megfigyelés kezdetekor 1 m^2 vízfelületet fed be, majd hetente megduplázza a befedett felületet.

a) Ábrázold, hogyan függ a befedett terület a hetekben mért időtől!

b) Olvasd le a grafikonról, hogy mennyi idő alatt lesz a befedett terület 8 m^2, 15 m^2, 30 m^2!

Megoldás:



a) Az ábrázolandó függvény az $f(x) = 2^x$, ahol $x \in \mathbf{R}^+$

b) 8 m^2 befedéséhez pontosan a 3. hét szükséges. 15 m^2 a 3. hét vége felé lesz fedve, és a 30 m^2-es lefedettséget a 15 m^2-es időpont után pontosan 1 héttel ér el.

6. Az úgynevezett fékezett (logisztikus) növekedés matematikai modellje szerint egy populáció egyedszáma időben nem a végtelenségig nő, hanem a vizsgálat kezdetétől eltelt t idő múlva a lélekszám $N(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0) \cdot a^t}$, ahol N_0 az induló egyedszám, K a körülmények szerint „eltartható” maximális egyedszám, a pedig a növekedésre jellemző állandó.

Tudjuk, hogy egy populáció induló egyedszáma 20 000 volt, $K = 240\,000$, $a = 0{,}6$; a t időt években mérjük. Hány tagú lesz a populáció 2, 4, 8, 10 év múlva?

Megoldás:

Be kell helyettesíteni az eltelt évek számát a képletbe, felhasználva, hogy $N_0 = 20\,000$, $K = 240\,000$, $a = 0{,}6$:

$N(2) = \dfrac{240000 \cdot 20000}{20000 + (240000 - 20000) \cdot 0{,}6^2} \approx 48000$, hasonlóan kapjuk: $N(4) \approx 99\,000$;

$N(8) \approx 200\,000$; $N(10) \approx 225\,000$

Látható, hogy gyorsan telítődik a létszám, K az elérhető maximum, és ezt már majdnem 10 év alatt el is éri a populáció létszáma.

7. Ha a 0 időpontban N_0 számú bomlatlan atomot tartalmazott a radioaktív anyag, akkor t idő múlva a még bomlatlan atomok száma $N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ lesz ($e \approx 2{,}718$). A λ neve bomlási állandó (megadja, hogy időegység alatt az atomok hányad része bomlik el az adott anyagban). A gyógyászatban daganatos területek kezelésére ún. kobaltágyút használtak, amelyben a 60-as tömegszámú kobaltizotóp a radiokatív (gamma-sugár) forrás. A kobaltizotóp bomlási állandója $\lambda = 0{,}1323\ \left(\dfrac{1}{\textit{év}}\right)$.

a) A kobaltatomok hány százaléka bomlik el 2, 5, 10, 15 év alatt?

b) A radioaktív atomok hány százaléka bomlik el évente?

Megoldás:

a) Tudjuk, hogy a kiindulási évben a bomlatlan kobaltatomok száma N_0, majd t idő elteltével ez az érték $N_t = N_0 \cdot 2{,}718^{-0{,}1323\,t}$ lesz. Az $\dfrac{N_t}{N_0} \cdot 100$ érték adja meg, hogy t idő elteltével a kobaltatomok hány százaléka marad bomlatlan. Ebből következik, hogy a kobaltatomok

$$\left(1 - \frac{N_t}{N_0}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{N_0 \cdot 2{,}718^{-0{,}1323 \cdot t}}{N_0}\right) \cdot 100 = \left(1 - 2{,}718^{-0{,}1323 \cdot t}\right) \cdot 100 \text{ százaléka}$$

bomlik el.

t helyébe behelyettesítjük a konkrét értékeket:

2 év múlva: $\left(1 - 2{,}718^{-0{,}1323 \cdot 2}\right) \cdot 100 = 23{,}25\ \%$

5 év múlva: $\left(1 - 2{,}718^{-0{,}1323 \cdot 5}\right) \cdot 100 = 48{,}39\ \%$

10 év múlva: $\left(1 - 2{,}718^{-0{,}1323 \cdot 10}\right) \cdot 100 = 73{,}36\ \%$

15 év múlva: $\left(1-2{,}718^{-0{,}1323\cdot 15}\right)\cdot 100 = 86{,}25\ \%$

b) Tudjuk, hogy a t időpontban a bomlatlan kobaltatomok száma $N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$, a következő évben pedig $N_{t+1} = N_0 \cdot e^{-\lambda\cdot(t+1)}$. Az $\frac{N_{t+1}}{N_t}$ hányados adja meg, hogy a következő évben az atomoknak hány százaléka maradt bomlatlan. Behelyettesítve kapjuk: $\frac{N_0 \cdot e^{-\lambda(t+1)}}{N_0 \cdot e^{-\lambda t}}$. A hatványozás azonosságainak felhasználásával egyszerűsítés után az eredmény $\frac{N_{t+1}}{N_t} = e^{-\lambda} = 2{,}718^{-0{,}1323} \approx 0{,}8761$. Vagyis a radioaktív kobaltatomok 87,61 %-a marad bomlatlan évente, azaz 12,39 % bomlik el.

Az exponenciális függvények ábrázolása

A tanulók 4 fős csoportokban dolgoznak. A csoporton belül két fő az a) részt oldja meg, a másik pár pedig a b)-t.

Mintapélda₃

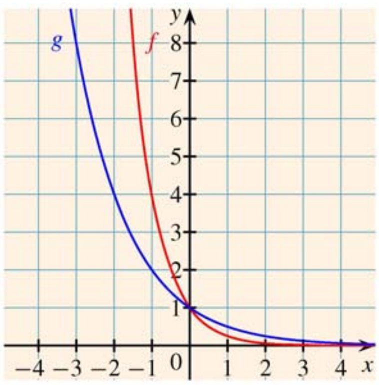
Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a következő valós számok halmazán értelmezett függvényeket! Számítsuk ki a függvényértékeket a megadott helyeken! Állapítsuk meg a monotonitásukat!

a) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$; $f(0) = ?$; $f(1) = ?$; $f(-1) = ?$ $g(x) = \left(\frac{2}{4}\right)^x$; $g(0) = ?$; $g(1) = ?$; $g(-1) = ?$

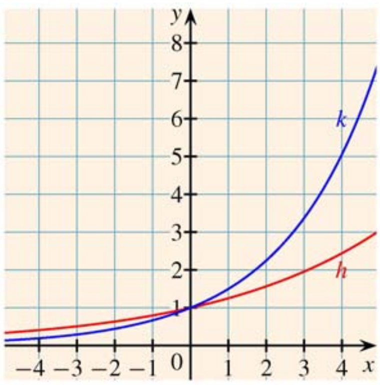
b) $h(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$; $h(0) = ?$; $h(1) = ?$; $h(-1) = ?$ $k(x) = \left(\frac{6}{4}\right)^x$; $k(0) = ?$; $k(1) = ?$; $k(-1) = ?$

Megoldás:

a)



b)



$f(0) = 1$; $f(1) = \frac{1}{4}$; $f(-1) = 4$

$g(0) = 1$; $g(1) = \frac{1}{2}$; $g(-1) = 2$

szigorúan monoton csökkenők

$h(0) = 1$; $h(1) = \frac{5}{4}$; $h(-1) = \frac{4}{5}$

$k(0) = 1$; $k(1) = \frac{3}{2}$; $k(-1) = \frac{2}{3}$

szigorúan monoton növekedők

Módszertani megjegyzés: A tanulók 4 fős csoportokban dolgoznak. Az egyik gyerek körbeindít egy lapot. Ráírja, ő milyen függvénytranszformációkra emlékszik, és ír 1-1 példát is rá. A példában elegendő, ha a függvény hozzárendelési utasítása szerepel. Ha nem emlékszik többre, odaadja a lapot a mellette ülőnek, aki kiegészíti.

Ezek után osztályszinten is megbeszélik, ki mit gyűjtött össze. A tanár rendszerez, a táblára egymás mellé, oszlopokban felírja a transzformációkat. Minden csoportból kimegy egy tanuló, és felírja a csoport példáit.

Ezek után analógiát használva megpróbálnak válaszolni az 8. feladat kérdéseire. Dolgozhatnak csoportosan, vagy osztályszinten, tanári irányítással is megbeszélhetik.

Feladat

8. Válaszolj az alábbi kérdésekre!

1. Van-e olyan pont, amelyik minden alapfüggvény grafikonján rajta van. Ha igen, melyik ez?
2. Hogyan változik az $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ függvény hozzárendelési utasítása, ha grafikonját eltoljuk az y tengely mentén pozitív irányba 2 egységgel?
3. Mi lesz annak a függvénynek a hozzárendelési utasítása, melynek grafikonját az $f(x) = 3^x$ függvény grafikonjából annak x tengely menti –3 egységgel történő eltolásával kapjuk?
4. Mi lesz annak a függvénynek a hozzárendelési utasítása, melynek a grafikonját úgy kapjuk az $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ függvény grafikonjából, hogy minden függvényértéket megszorzunk 3-mal?

5. Hogyan változik az $f(x) = 2^x$ függvény hozzárendelési utasítása, ha grafikonját tükrözzük az x tengelyre?

6. Hogyan változik az $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ függvény hozzárendelési utasítása, ha grafikonját tükrözzük az y tengelyre? Felhasználva a hatványozás negatív kitevőre vonatkozó azonosságát, hogyan tudnád másképp felírni ezt a hozzárendelési utasítást?

Megoldás:

1. Van, a (0;1) pont; 2. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$; 3. $f(x) = 3^{x+3}$;

4. $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$; 5. $f(x) = -2^x$; 6. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^{-(-x)} = 2^x$.

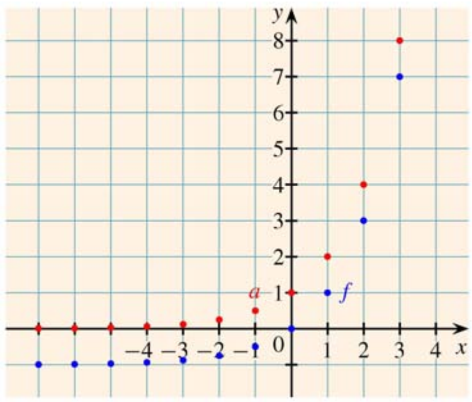
Mintapélda$_4$

Ábrázoljuk az alábbi függvények grafikonját, és jellemezzük a függvényeket!

a) $f(x) = 2^x - 1;\ x \in \mathbf{Z}$ b) $g(x) = 3^{x+2};\ x \in\ ]-5; 0[$ c) $h(x) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^x;\ x \in [-1; 2[$

Megoldás:

a)



Transzformációs lépések:

1. $a(x) = 2^x$ az alapfüggvény ábrázolása

2. $f(x) = 2^x - 1$ a grafikonjának eltolása a $\mathbf{v}(0; -1)$ vektorral

<u>Jellemzés:</u>

1. ÉT: $\mathbf{Z}$

2. ÉK: $]-1; \infty[$

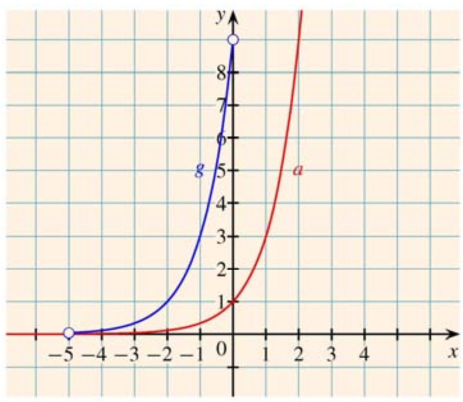
3. Zérushely: $2^x - 1 = 0$, ebből $x = 0$

4. Monotonitás: szigorúan monoton növő

5. Szélsőérték: nincs

6. Paritás: nem páros, nem páratlan

7. Invertálható



b)

Transzformációs lépések:

1. $a(x) = 3^x$, az alapfüggvény ábrázolása

2. $g(x) = 3^{x+2}$ a grafikonjának eltolása a $\mathbf{v}(-2; 0)$ vektorral

Jellemzés:

1. ÉT: $]-5; 0[$

2. ÉK: $\left]\frac{1}{27}; 9\right[$

3. Zérushely: nincs

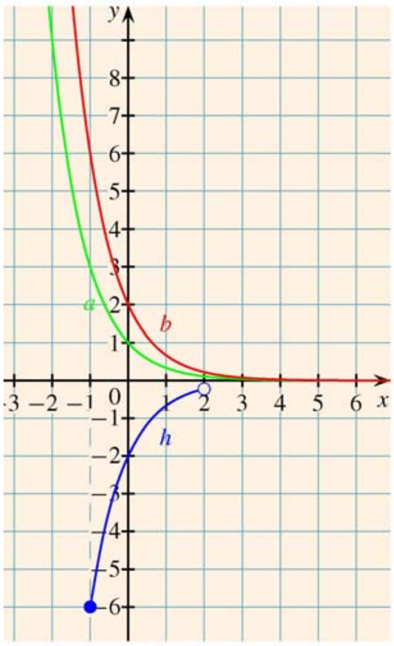
4. Monotonitás: szigorúan monoton növő

5. Szélsőérték: nincs

6. Paritás: nem páros, nem páratlan

7. Invertálható

c) Transzformációs lépések:



1. $a(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ az alapfüggvény ábrázolása

2. $b(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ a grafikonjának kétszeres nyújtása

3. $h(x) = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ b grafikonjának tükrözése az x tengelyre.

Jellemzés:

1. ÉT: $[-1; 2[$

2. ÉK: $\left[-6; -\frac{2}{9}\right[$

3. Zérushely: nincs

4. Monotonitás: szigorúan monoton növő

5. Szélsőérték: minimumhely: $x = -1$

minimumérték: $h(-1) = -6$

6. Paritás: nem páros, nem páratlan

7. Invertálható

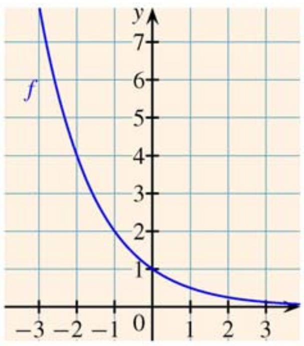
Mintapélda₅

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! Határozzuk meg az értelmezési tartományukat és az értékkészletüket is!

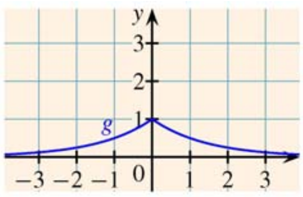
a) $f(x)=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right|$ b) $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ c) $h(x)=\frac{4^x-4}{2^x+2}$

Megoldás:

a) Mivel az $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ hatvány értéke mindig pozitív, ezért $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Tehát az ábrázolandó függvény az $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Az értelmezési tartomány a valós számok halmaza, az értékkészlet a pozitív valós számok halmaza.



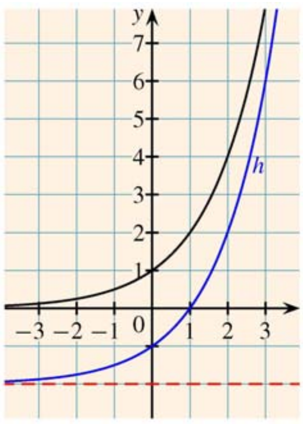
b) A $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ függvény grafikonjának ábrázolásához használjuk az abszolútérték definícióját:



$$g(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x, & \text{ha } x\ge 0\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}, & \text{ha } x<0\end{cases}$$

A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Értékkészlete a]0; 1] intervallumbeli valós számok.

c) A függvény ott nincs értelmezve, ahol a nevező 0:



$2^x + 2 = 0$, de $2^x > 0$ miatt $2^x + 2 > 0$. Vagyis a függvény mindenütt értelmezhető.

Az ábrázoláshoz végezzük el a következő átalakítást:

Vegyük észre, hogy $4^x - 4 = \left(2^x\right)^2 - 2^2$.

Az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosság felhasználásával a tört egyszerűsíthető.

Így az ábrázolandó függvény a $h(x) = 2^x - 2$.

Az ábrázolást megkönnyíti, ha felveszünk egy, a

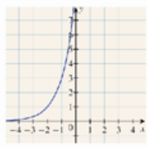
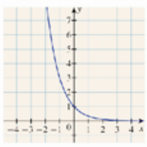
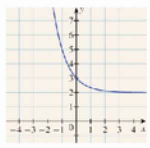
(0; –2) ponton átmenő, az *x* tengellyel párhuzamos egyenest, hiszen a grafikon ehhez az egyeneshez közelít majd, ez lesz a függvénygörbe aszimptotája.

ÉT: **R**; ÉK:] –2; ∞ [

Feladatok

3.3 táblázat

Módszertani megjegyzés a 9. feladathoz: A tanulók 3 vagy 4 fős csoportokban dolgoznak. A tanár kiosztja nekik az első táblázatot, és a hozzá tartozó 12 db kártyát. Az eszközkészletben található táblázatból két példányt készít. Az egyikből lesznek a kártyák, a másikból pedig kitörli 12 cella tartalmát, és úgy adja oda.

$a(x) = 3^{x+2}$	*x* tengely menti eltolás		$d(x) = 3^{0,5x}$	*x* tengely menti zsugorítás/nyújtás	
$b(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$	*y* tengely menti zsugorítás/nyújtás		$e(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$	*x* tengelyre tükrözés	
$c(x) = 3^{-x}$	*y* tengelyre tükrözés		$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$	*y* tengely menti eltolás	

A tanulók szétosztják egymás között a kártyákat. Feladatuk azok helyére rakása. Egy sorban a függvény hozzárendelési utasítása, grafikonja található, illetve az, hogy ezt a grafikont milyen transzformációval kapjuk az alapfüggvény grafikonjából.

Ha a frontális feldolgozást választják, akkor a feladat a függvények jellemzését is tartalmazza, míg a táblázatos feldolgozásban ez nincs.

9. Készítsd el a valós számok halmazán értelmezett alábbi függvények grafikonját, és jellemezd a függvényeket!

$a(x)=3^{x+2}$ $\qquad b(x)=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ $\qquad c(x)=3^{-x}$

$d(x)=3^{0,5x}$ $\qquad e(x)=-\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ $\qquad f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+2$

Megoldási útmutató: Ezek a függvények elemi függvénytranszformációkkal ábrázolhatók. A jellemzéshez a mintapéldák nyújtanak segítséget.

10. Ábrázold a következő függvények grafikonját! Határozd meg a függvények értékkészletét és onotonitását is!

$a(x) = 2^x,\ x \in\ ]-2; 3]$ $\qquad b(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ x \in \mathbf{Z}$ $\qquad c(x) = 3^x,\ x \in\ ]-4; 4[$

Megoldási útmutató: Ábrázoljuk a függvényeket a megadott értelmezési tartományon!

a) ÉK: $\left]\frac{1}{4};8\right]$; szig. mon. nő.

b) ÉK: $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$; szig. mon. csökk.

c) ÉK: $\left]\frac{1}{81};81\right[$; szig. mon. nő.

11. Ábrázold a következő valós számok halmazán értelmezett függvények grafikonját, és jellemezd a függvényeket!

$a(x) = \frac{1}{2}\cdot 2^x+1$ $\qquad b(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+2$ $\qquad c(x) = 3^{-x}$

Megoldási útmutató: Ezek a függvények elemi függvénytranszformációkkal ábrázolhatók. A jellemzés az alapfüggvények és a transzformáció segítségével megállapítható.

12. A függvények grafikonja alapján döntsd el, *x* milyen értékeire lesz

a) $2^x < 8$ $\qquad$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 8$ $\qquad$ c) $\frac{1}{2} < 2^x < 4$ $\qquad$ d) $\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 4$

e) $-3 < 2^x < 16$ f) $2^x > 1024$ g) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1024$

Megoldás: a) $x < 3$; b) $x > -3$; c) $-1 < x < 2$; d) $-2 < x < 1$.

13. Ábrázold közös koordináta-rendszerben a valós számok halmazán értelmezett következő függvények grafikonját!

$f(x) = 1 - 2^x$ $g(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $h(x) = |\,2^x - 1\,|$

Megoldási útmutató: Az f és g függvények közvetlenül, a h függvény az abszolútérték definíciójának felhasználása után elemi függvénytranszformációkkal ábrázolható.

14. Ábrázold a következő függvények grafikonját! Határozd meg az értelmezési tartományukat is!

$a(x) = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$ $b(x) = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{2}$ $c(x) = 2^{\frac{x^2-9}{x-3}}$ $d(x) = \dfrac{4^x - 1}{2^x - 1}$

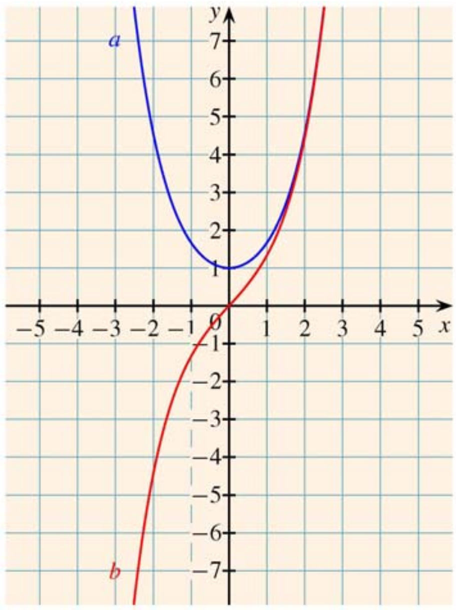
Megoldási útmutató:

Az a és b függvények megrajzolása értéktáblázat készítésével a legegyszerűbb.

A c és d függvények az alábbi átalakítások után elemi függvénytranszformációkkal ábrázolhatók.

$$\frac{x^2-9}{x-3} = x+3,\ x \neq 3 \ \Rightarrow\ c(x) = 2^{x+3}$$

$$\frac{4^x-1}{2^x-1} = 2^x+1,\ x \neq 0 \ \Rightarrow\ d(x) = 2^x+1$$



15. Vizsgáld a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = -2\left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} - 4$ függvényt!

a) Melyik alapfüggvény transzformációjáról van szó?

b) Milyen transzformációkat, milyen sorrendben kell végrehajtani? (Több jó sorrend is lehetséges.)

Megoldás:

a) az alapfüggvény: $a(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$

b) a transzformációk és ezek egy helyes sorrendje:

1. x tengely menti eltolás negatív irányba 2 egységgel, azaz a **v**(–2; 0) vektorral;
2. y tengely menti kétszeres nyújtás;
3. tükrözés az x tengelyre;
4. y tengely menti eltolás negatív irányba 4 egységgel, azaz a **v**(0; –4) vektorral.

Grafikon felhasználásával megoldható egyenletek, egyenlőtlenségek

Vannak olyan egyenletek, amelyek közvetlenül, hagyományos algebrai úton nem oldhatók meg. Az ilyen egyenletek bal, illetve jobb oldalából külön-külön képezünk függvényt. Ezeket közös koordináta-rendszerben, a megfelelő értelmezési tartományon ábrázolva, leolvassuk a metszéspont *x* helyét, amely egyben a megoldás is.

Megjegyzés: A grafikus megoldás sok esetben csak közelítő megoldást ad. Az eredményt algebrai (vagy egyéb) módszerekkel lehet pontosítani.

Mintapélda$_6$

Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

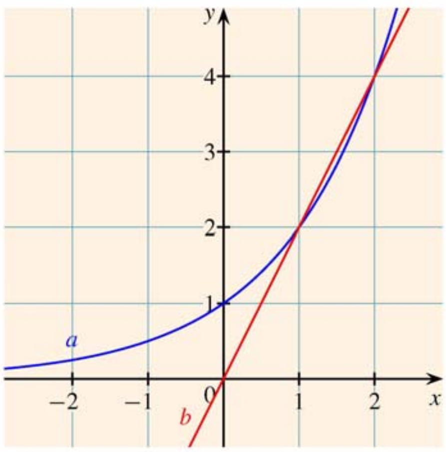
a) $2^x = 2x$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{x^2}{3}$

Megoldás:

a) Az egyenlet bal oldalából képezzük az $a(x) = 2^x$, a jobb oldalából a $b(x) = 2x$ függvényt. Készítsük el a két függvény grafikonját közös koordináta-rend-szerben!

Az ábráról leolvasható a megoldás:

$x_1 = 1$; $x_2 = 2$

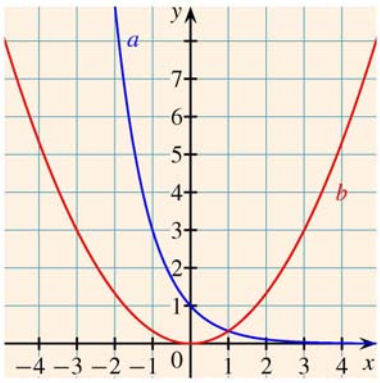


A függvények szigorúan monoton növők. Ebből következik, hogy más megoldás nincs.

b) Az a) részhez hasonlóan járunk el: $a(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$,

$b(x) = \frac{x^2}{3}$

Az ábráról leolvasható a megoldás: $x = 1$



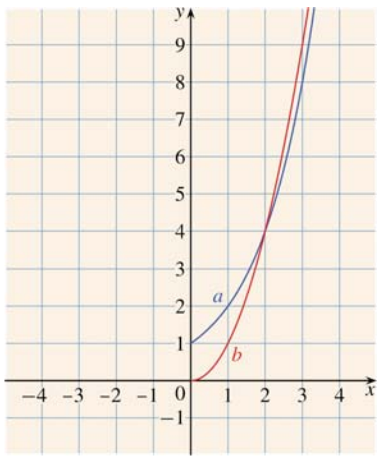
Mintapélda₇

Oldjuk meg grafikusan a következő egyenleteket!

a) $2^x = x^2$, $x > 0$ b) $\left(\frac{4}{3}\right)^x + 1 = \cos x$

Megoldás:

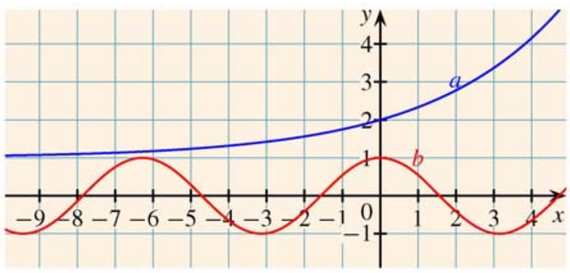
a) Az egyenlet bal oldalán lévő kifejezés legyen az $a(x) = 2^x$ függvény, míg a jobb oldalon található kifejezés legyen a $b(x) = x^2$ függvény. Ábrázoljuk *a*-t és *b*-t közös koordináta-rendszerben!



$x = 2$ megoldást ad, mert $2^2 = 2^2$.

Az ábráról leolvasható, hogy $0 < x < 2$ esetén nincs megoldás, mert a hatványfüggvény az exponenciális görbe alatt halad, $x > 2$ esetén pedig fordítva.

b) Ismét ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben az $a(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x + 1$ és a



$b(x) = \cos x$ függvényeket!

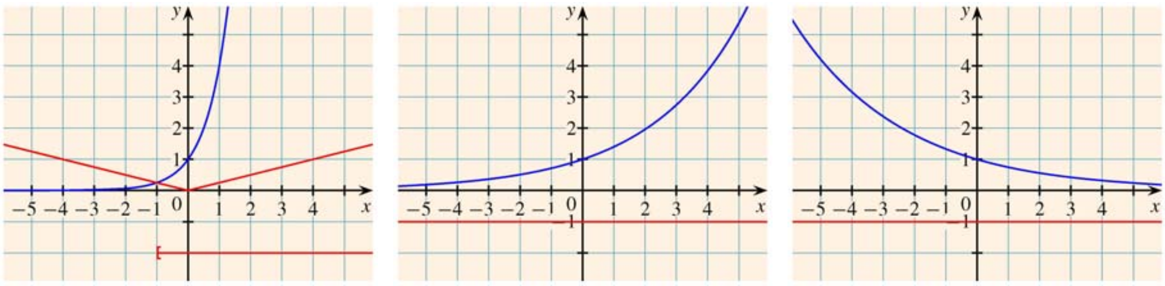
Az ábráról is leolvasható, hogy nincs megoldás, mert az a függvény tetszőlegesen megközelíti az 1-et, de sohasem éri el: $\left(\frac{4}{3}\right)^x > 0$. A b függvény értéke pedig legfeljebb 1 lehet.

Mintapélda₈

Oldjuk meg grafikusan a valós számok halmazán értelmezett következő egyenlőtlenségeket!

a) $4^x \geq 0{,}25 \cdot |x|$ b) $\left(\frac{3}{4}\right)^x > -1$ c) $\left(\frac{7}{5}\right)^x \leq -1$

Megoldás:



a) $x \geq -1$ b) $x \in \mathbf{R}$ c) nincs megoldás

Megjegyzés: b) és c) megoldása közvetlenül következik a függvények értékkészletéből.

Feladatok

16. Oldd meg grafikusan a valós számok halmazán értelmezett következő egyenleteket!

a) $\left(\frac{5}{7}\right)^x = -\frac{7}{5}x$ b) $\left(\frac{5}{3}\right)^x = -5^x + 2$ c) $-x^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^x$

Megoldás:

Ábrázolás után a megoldások a grafikonról leolvashatók.

a) $x = -1$; b) $x = 0$; c) nincs megoldás.

II. Exponenciális egyenletek

A korábban megismert első- és másodfokú egyenletek úgynevezett algebrai egyenletek, amelyek algebrailag, tehát csak a négy alapművelettel és négyzetgyökvonással megoldhatóak. Most olyan egyenletekkel ismerkedünk meg, melyek nem algebrai egyenletek, ezért új megoldási módokat kell keresnünk, az ismeretlenek meghatározásához.

Azokat az egyenleteket, ahol az ismeretlen a hatványkitevőben szerepel, **exponenciális egyenleteknek** nevezzük.

Az exponenciális függvények ismeretében megoldható egyenletek

Először nézzük meg azokat az eljárásokat, melyeknél az a cél, hogy azonos alapú hatványok szerepeljenek az egyenlet mindkét oldalán.

Mintapélda₉

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $2^{2x} = 64$

b) $9^x = 27 \cdot \sqrt[3]{81}$

c) $4^x \cdot 16 = 64^{x-2}$

Megoldás:

a) Mivel $64 = 2^6$, ezért az egyenletet $2^{2x} = 2^6$ alakba is írhatjuk. Az $f(x) = 2^x$ szigorúan monoton növekvő függvény, ezért a függvényértékek csak akkor egyeznek meg, ha a kitevők azonosak. Tehát $2x = 6$, innen $x = 3$.

Ellenőrzés: Bal oldal: $2^{2\cdot3} = 2^6 = 64$. Jobb oldal: 64.

b) Írjuk fel az egyenlet mindkét oldalát 3 hatványaként: $3^{2x} = 3^3 \cdot 3^{\frac{4}{3}}$. Azonos alapú hatványokat úgy szorzunk, hogy a kitevőket összeadjuk: $3^{2x} = 3^{\frac{13}{3}}$. A 3-as alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt a függvényértékek egyenlőségéből a kitevők egyenlősége következik: $2x = \frac{13}{3}$ amiből: $x = \frac{13}{6}$. Megoldáshalmaz: $M = \left\{\frac{13}{6}\right\}$. A megoldás helyessége az eredeti egyenletbe való behelyettesítéssel ellenőrizhető.

c) Mindkét oldalt 4-es alapú hatvánnyá alakítjuk: $4^x \cdot 4^2 = \left(4^3\right)^{x-2}$, majd alkalmazzuk a hatványozás azonosságait: $4^{x+2} = 4^{3x-6}$. A 4-es alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt a függvényértékek egyenlőségéből a kitevők egyenlősége következik: $x+2 = 3x-6$ amiből: $x = 4$. A megoldás helyességét visszahelyettesítéssel ellenőrizzük.

Mintapélda$_{10}$

Oldjuk meg a következő egyenleteket a pozitív egész számok halmazán!

a) $7^{|3x-1|} = 49^{2x-3}$

b) $125 \cdot 2^{x-2} = 2 \cdot 5^x$

c) $8^{3x^2+10x-8} = 1$

Megoldás:

a) Mivel $49 = 7^2$, ezért az egyenletet $7^{|3x-1|} = \left(7^2\right)^{2x-3}$ alakba is írhatjuk. Hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük: $7^{|3x-1|} = 7^{4x-6}$.
A 7-es alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt a függvényértékek egyenlőségéből a kitevők egyenlősége következik, azaz $|3x-1| = 4x-6$.

Ha $x \geq \frac{1}{3}$, akkor $3x-1$ nemnegatív, így abszolútértéke önmaga, azaz elhagyhatjuk az abszolútérték jelet: $3x-1 = 4x-6$, ebből $x = 5$, ami beletartozik az egyenlet alaphalmazába.

Ha $x < \frac{1}{3}$, akkor a $3x-1$ negatív, abszolútértéke az ellentettje: $-(3x-1) = 4x-6$, azaz $x = 1$, ez a feltételben megadott tartományon kívül esik, ezért ebben a tartományban nem kapunk megoldást.

Ellenőrzés: Bal oldal: $7^{|3 \cdot 5-1|} = 7^{14}$. Jobb oldal: $49^{2 \cdot 5-3} = 49^7 = \left(7^2\right)^7 = 7^{14}$.

b) Azokat a hatványokat, melyeknek a kitevőjében különbség szerepel, azonos alapú hatványok hányadosaként is felírhatjuk: $5^3 \cdot \frac{2^x}{2^2} = 2 \cdot 5^x$. Az ismeretleneket egy oldalra rendezve kapjuk, hogy $\frac{2^x}{5^x} = \frac{2^3}{5^3}$, azaz: $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^3$.

A $\left(\frac{2}{5}\right)$-öd alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt a függvényértékek egyenlőségéből a kitevők egyenlősége következik, azaz $x = 3$. Megoldáshalmaz: $M = \{3\}$. A megoldás eleme az alaphalmaznak, helyességét visszahelyettesítéssel ellenőrizzük.

c) Felírjuk az 1-et 8 hatványaként: $8^{3x^2+10x-8} = 8^0$. A 8-as alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt a függvényértékek egyenlőségéből a kitevők egyenlősége következik, azaz $3x^2 + 10x - 8 = 0$ ebből $x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3} = \frac{-10 \pm 14}{6}$ azaz, $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{2}{3}$, ezek egyike sem eleme az egyenlet alaphalmazának.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A tanulók négy fős csoportokban dolgoznak. Minden csoporttag kap egy-egy kártyát, amelyen *A, B, C* vagy *D* betűk szerepelnek. Ezután egy munkacsoportot alkotnak azok a tanulók, akik azonos betűt kaptak. A munkacsoportok megoldják a kapott feladatot, majd visszamennek az eredeti csoportjukhoz. A négy fős csoportokban megbeszélik mind a négy feladat megoldását. Ezután a tanár tetszőlegesen kiválaszt négy tanulót, és mindegyiküktől egy feladat ismertetését kéri a táblánál.

A jelűek feladata

17. Oldd meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $3^x = 27$ b) $2^{-x} = 32$ c) $3^{-2x} = 729$ d) $2^{2x+3} = 16$

Megoldás:

a) $x = 3$ b) $x = -5$ c) $x = -3$ d) $x = \frac{1}{2}$

B jelűek feladata

18. Oldd meg az alábbi egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$ b) $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+2} = \frac{16}{9}$ c) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{25}{4}$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2-3x} = \frac{81}{16}$

Megoldás:

a) $x = -4$ b) $x = 0$ c) $x = -2$ d) $x = 2$

C jelűek feladata

19. Oldd meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $6^{-3x} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ b) $\sqrt{8^{x+3}} = \sqrt[3]{16^{x-2}}$ c) $4^{|x+2|} = \frac{1}{128}$ d) $5^{|2x-3|} = 125$

Megoldás:

a) $x = \frac{1}{6}$ b) $x = -43$ c) Nincs megoldás d) $x_1 = 3; x_2 = 0$

D jelűek feladata

20. Oldd meg az alábbi egyenleteket a nem negatívszámok halmazán!

a) $3^x = 2^x$ b) $9^2 \cdot 5^x = 25 \cdot 3^{2x}$ c) $9 \cdot 4^x - 64 \cdot 3^{x-1} = 0$ d) $11^{2x^2+x-15} = 1$

Megoldás:

a) $\frac{3^x}{2^x} = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Rightarrow x = 0$

b) $\frac{9^2}{25} = \frac{3^{2x}}{5^x} \Rightarrow \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \left(\frac{9}{5}\right)^x \Rightarrow x = 2$

c) $9 \cdot 4^x = 64 \cdot \frac{3^x}{3} \Rightarrow \frac{27}{64} = \frac{3^x}{4^x} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^x \Rightarrow x = 3$

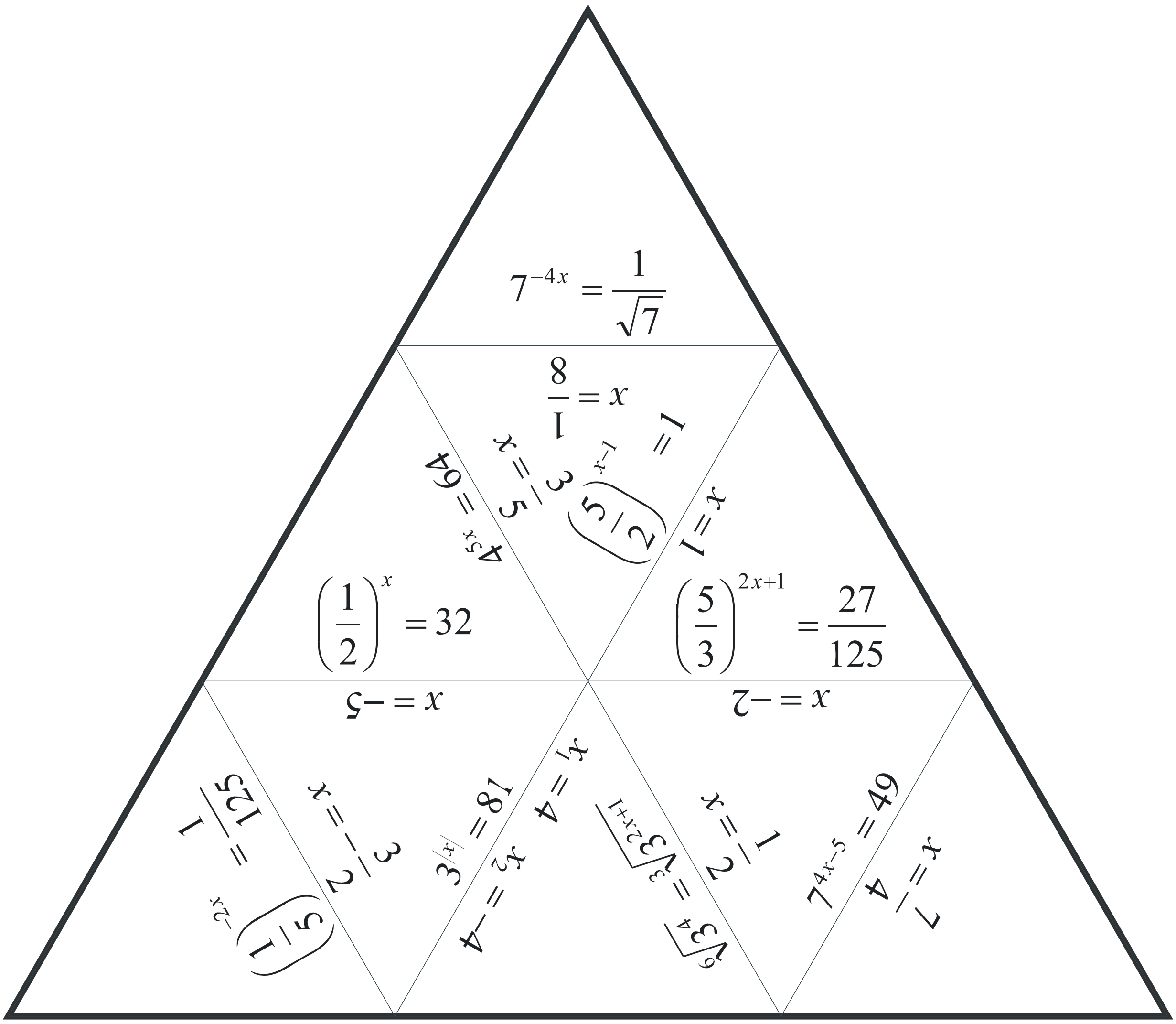
d) $11^{2x^2+x-15} = 11^0 \Rightarrow 2x^2 + x - 15 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}; \quad x_2 = -3$ ez utóbbi nem tartozik az alaphalmazhoz, így az egyenlet megoldása: $x = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

Összetettebb exponenciális egyenletek

3.4 triminó

Módszertani megjegyzés: Triminó játék! Alakítsunk ki csoportokat az osztályban. Minden csoport kap 9 db szabályos háromszöget. A kis háromszögek oldalait összeillesztve minden csoport elkészít egy nagy háromszöget. Úgy kell az oldalakat összeilleszteni, hogy az élek mentén egy egyenlet és a megoldása álljon.

Természetesen aki nem akarja a triminót használni, az frontális munka formájában is megoldhatja az ott található egyenleteket.



Az exponenciális egyenletek egy másik csoportját alkotják azok az egyenletek, amelyek az exponenciális tagban válnak elsőfokú egyenletté. Ezeken az egyenleteken a hatványozás azonosságai segítségével tudunk olyan átalakításokat végezni, hogy abból az együtthatók leolvashatók legyenek.

Mintapélda$_{11}$

Oldjuk meg a $3^{x+3} - 3^{x-1} + 3^{x+2} = 107$ egyenletet az egész számok halmazán!

Megoldás:

Azokat a hatványokat, melyeknek a kitevőjében összeg szerepel, azonos alapú hatványok szorzataként, ahol különbség, azokat azonos alapú hatványok hányadosaként is felírhatjuk: $3^x \cdot 3^3 - \frac{3^x}{3} + 3^x \cdot 3^2 = 107$

Innen $3^x\left(3^3-\frac{1}{3}+3^2\right)=107$

$$3^x\cdot\frac{107}{3}=107$$

$3^x=3$, ebből: $x=1$.

Ellenőrzés: Bal oldal: $3^{1+3}-3^{1-1}+3^{1+2}=3^4-3^0+3^3=81-1+27=107$.

Jobb oldal: 107. Megoldáshalmaz: $M=\{1\}$.

Mintapélda$_{12}$

Oldjuk meg a $6^{2x}\cdot 4^{x+2}=9^x\cdot 8^{x+18}$ egyenletet a pozitív számok halmazán!

Megoldás:

Bontsuk fel a hatványalapokat prímtényezőkre: $(2\cdot 3)^{2x}\cdot\left(2^2\right)^{x+2}=\left(3^2\right)^x\cdot\left(2^3\right)^{x+18}$

Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait: $2^{2x}\cdot 3^{2x}\cdot 2^{2x+4}=3^{2x}\cdot 2^{3x+54}$

Az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk 3^{2x}-nel (ez *x*-től függetlenül mindig pozitív):

$$2^{2x}\cdot 2^{2x+4}=2^{3x+54}$$

Innen $2^{4x+4}=2^{3x+54}$

A 2-es alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt a függvényértékek egyenlőségéből a kitevők egyenlősége következik: $4x+4=3x+54$, azaz $x=50$.

Ellenőrzés: Bal oldal: $6^{2\cdot 50}\cdot 4^{50+2}=6^{100}\cdot 4^{52}=2^{100}\cdot 3^{100}\cdot 2^{104}=2^{204}\cdot 3^{100}$.

Jobb oldal: $9^{50}\cdot 8^{50+18}=3^{100}\cdot 8^{68}=3^{100}\cdot 2^{204}$. Megoldáshalmaz: $M=\{50\}$.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: A tanulók négy fős csoportokban dolgoznak. Minden csoporttag kap egy-egy kártyát, amelyen az *A, B, C* vagy *D* betűk szerepelnek. Ezután egy munkacsoportot alkotnak azok a tanulók, akik azonos betűt kaptak. A betűk a feladatok nehézségi fokát jelentik: *A* a legkönnyebb, a *D* pedig a legnehezebb. A munkacsoportok megoldják a kapott feladatot, majd visszamennek az eredeti csoportjukhoz. A négy fős csoportokban megbeszélik mind a négy feladat megoldását. Ezután a tanár tetszőlegesen kiválaszt négy tanulót, és mindegyiküktől egy feladat ismertetését kéri a táblánál.

21. Oldd meg a következő exponenciális egyenleteket az egész számok halmazán!

A jelűek feladatai

a) $5^{x+1} - 4\cdot 5^x + 5^{x+2} = 3250$ b) $7^{x+2} + 6\cdot 7^x - 7^{x+1} = 2352$

B jelűek feladatai

c) $2^x - 2^{x-1} + 2^{x+2} = 36$ d) $2^{x+5} - 3^{x+3} = 5\cdot 3^{x+2} - 2^{x+4}$

C jelűek feladata

e) $3^{2x-3} + 9^{x-1} = 12$

Megoldás:

a) $5^x\cdot(5-4+25) = 3250 \Rightarrow 26\cdot 5^x = 3250 \Rightarrow 5^x = 125 \Rightarrow x = 3$

b) $7^x\cdot(49+6-7) = 2352 \Rightarrow 48\cdot 7^x = 2352 \Rightarrow 7^x = 49 \Rightarrow x = 2$

c) $2^x\cdot\left(1-\frac{1}{2}+4\right) = 36 \Rightarrow 4{,}5\cdot 2^x = 36 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

d) $32\cdot 2^x - 27\cdot 3^x = 5\cdot 9\cdot 3^x - 16\cdot 2^x \Rightarrow 32\cdot 2^x + 16\cdot 2^x = 27\cdot 3^x + 5\cdot 9\cdot 3^x \Rightarrow$

$2^x(32+16) = 3^x(27+45) \Rightarrow \frac{2^x}{3^x} = \frac{72}{48} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x = -1$

e) $\frac{3^{2x}}{27} + \frac{9^x}{9} = 12 \Rightarrow 9^x + 9^x\cdot 3 = 324 \Rightarrow 4\cdot 9^x = 324 \Rightarrow 9^x = 81 \Rightarrow x = 2$

22. Oldd meg a következő exponenciális egyenleteket a valós számok halmazán!

C jelűek feladata

a) $\left(6^{x-3}\right)^{3x-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{5x-5}$

D jelűek feladatai

b) $4^{x^2} = 8\cdot 2^{9x+2}$ c) $5^{2x^2}\cdot 5^{3x-1} = 5^{3-4x}$

Megoldás:

a) $6^{(x-3)(3x-1)} = 6^{-(5x-5)} \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = -\frac{1}{3}$

b) $2^{2x^2} = 2^{3+9x+2} \Rightarrow 2x^2 - 9x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

c) $5^{2x^2+3x-1} = 5^{3-4x} \Rightarrow 2x^2 + 7x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -4 \quad x_2 = \frac{1}{2}$

Másodfokú egyenletekre visszavezethető exponenciális egyenletek

Vannak olyan exponenciális egyenletek, amelyek az exponenciális tagban válnak másodfokú egyenletté. Itt a másodfokú egyenlet megoldása után, ismét a függvény tulajdonságára hivatkozva tudjuk meghatározni az ismeretlen értékét.

Mintapélda$_{13}$

Oldjuk meg a $3^{2x} + 4 \cdot 3^x - 21 = 0$ egyenletet az egész számok halmazán!

Megoldás:

Észrevehetjük, hogy a $3^{2x} = \left(3^x\right)^2$, ezért bevezetjük az $3^x = y$ új ismeretlent.

A következő másodfokú egyenletet kapjuk: $y^2 + 4y - 21 = 0$.

Ebből $y_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-21)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-4 \pm 10}{2}$ azaz, $y_1 = 3,\quad y_2 = -7$.

Ha $y_1 = 3$, akkor $3^x = 3$, innen $x = 1$.

Ha $y_2 = -7$, akkor $3^x = -7$, innen nem kapunk megoldást, hiszen minden x-re $3^x > 0$.

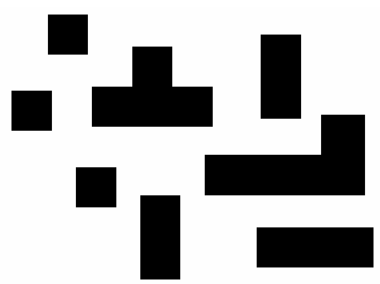
Az egyenlet megoldása $x = 1$.

Ellenőrzés: Bal oldal: $3^{2 \cdot 1} + 4 \cdot 3^1 - 21 = 9 + 4 \cdot 3 - 21 = 0$. Jobb oldal: 0.

Feladatok

3.5 torpedó játék

Módszertani megjegyzés: A játékban páros számú csoportra bontjuk az osztályt, majd megbeszéljük, hogy melyek a szembenálló csoportok. A csoportok egy-egy hadiflottának a parancsnokai; céljuk az ellenfél flottájának elsüllyesztése. Az első teendő a flotta elhelyezése a bal oldali 10x10-es táblán úgy, hogy a többi csoport ne láthassa. Minden csoportnak 3 db 1-mezős, 2 db 2-mezős, 1-1 db 3-, 4- és 5 mező nagyságú hajója van. Ügyeljünk arra, hogy az elhelyezett hajók ne érintsék egymást, de a hajók mezőinek kapcsolódni kell egymáshoz (l. az ábrát). Ha az összes csoport minden hajóját elhelyezte, kezdődhet a munka. Minden csoportnak az a feladata, hogy a 23. feladatot legjobb tudása szerint megoldja. Minden jó feladatért adjunk 5 torpedót. Ha a feladatok megoldása nem tökéletes, de bizonyos része értékelhető adhatunk érte résztöltényeket is. Ezután



összegezzük, hogy melyik csoport hány lövéssel rendelkezik, majd kezdődhet az ütközet. A csoportok felváltva indítják a torpedóikat, és bemondják az éppen célzott mezőt (pl. C2). Válaszul az ellenfél bemondja, hogy sikeres volt-e a találat (pl.: nem talált, talált, süllyedt). A jobb oldali táblán jelölhetik a csoportok az ellenfél flottájának elhelyezkedését. A játék nyertese az a csoport, aki előbb lövi ki az ellenfél összes hajóját.

23. Oldd meg a következő exponenciális egyenleteket a természetes számok halmazán!

a) $4^x - 5\cdot 2^x + 4 = 0$ b) $3^{2x} - 7\cdot 3^x = 18$ c) $25^x - 6\cdot 5^{x+2} + 3125 = 0$

d) $9^{x+1} + 3^{x+3} = 162$ e) $4^{x+1} = 128 + 2^{x+4}$ f) $5^{2x+1} + 5^{x+2} = 2\cdot 5^3$

g) $2^{2x+2} - 192 = 2^{x+3}$ h) $3^x - 79 = \dfrac{162}{3^x}$

Megoldás:

a) $2^x = y \;\Rightarrow\; y^2 - 5\cdot y + 4 = 0 \;\Rightarrow\; y_1 = 4;\; y_2 = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = 2;\; x_2 = 0$

b) $3^x = y \;\Rightarrow\; y^2 - 7\cdot y - 18 = 0 \;\Rightarrow\; y_1 = 9;\; y_2 = -2 \;\Rightarrow\; x = 2$

c) $5^{2x} - 150\cdot 5^x + 3125 = 0 \;\Rightarrow\; 5^x = y \;\Rightarrow\; y^2 - 150y + 3125 = 0 \;\Rightarrow$

$y_1 = 25;\; y_2 = 125 \;\Rightarrow\; x_1 = 2;\; x_2 = 3$

d) $9\cdot 3^{2x} + 27\cdot 3^x - 162 = 0 \;\Rightarrow\; 3^x = y \;\Rightarrow\; 3y^2 + 9y - 54 = 0 \;\Rightarrow$

$y_1 = 3;\; y_2 = -6 \;\Rightarrow\; x = 1$

e) $4\cdot 2^{2x} - 16\cdot 2^x - 128 = 0 \;\Rightarrow\; 2^x = y \;\Rightarrow\; y^2 - 4y - 32 = 0 \;\Rightarrow$

$y_1 = 8;\; y_2 = -4 \;\Rightarrow\; x = 3$

f) $5\cdot 5^{2x} + 25\cdot 5^x - 250 = 0 \;\Rightarrow\; 5^x = y \;\Rightarrow\; y^2 + 5y - 50 = 0 \;\Rightarrow$

$y_1 = 5;\; y_2 = -10 \;\Rightarrow\; x = 1$

g) $4\cdot 2^{2x} - 8\cdot 2^x - 192 = 0 \;\Rightarrow\; 2^x = y \;\Rightarrow\; y^2 - 2y - 48 = 0 \;\Rightarrow$

$y_1 = 8;\; y_2 = -6 \;\Rightarrow\; x = 3$

h) $3^x = y \;\Rightarrow\; y - 79 = \dfrac{162}{y} \;\Rightarrow\; y^2 - 79y - 162 = 0 \;\Rightarrow$

$y_1 = 81;\; y_2 = -2 \;\Rightarrow\; x = 4$

24. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $6^{3x+2} = 216$ b) $5^{3x-2} = 125$ c) $36^{3x-1} = 6$ d) $27^{4x+1} = 81$

Megoldás:

a) $x=\frac{1}{3}$ b) $x=\frac{5}{3}$ c) $x=\frac{1}{2}$ d) $x=\frac{1}{12}$

25. Oldd meg az alábbi egyenleteket a racionális számok halmazán!

a) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x+3}=\left(\frac{27}{8}\right)^{x-2}$ b) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x}=\frac{1}{32}$ c) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}=\frac{1}{27}$ d) $0{,}75^{3x+1}=\frac{64}{27}$

Megoldás:

a) $x=0$ b) $x=\frac{5}{3}$ c) $x=-\frac{1}{2}$ d) $x=-\frac{4}{3}$

26. Oldd meg az alábbi egyenleteket a nemnegatív számok halmazán!

a) $5^{x-3}=4^{x-3}$ b) $13^{2x^2-5x-12}=1$ c) $5^{2x-3}=7^{x-1,5}$ d) $6^{x-3}=11^{2x-6}$

e) $12^{x}=1$ f) $256\cdot 4^{x-1}=36\cdot 6^{x+1}$ g) $5\sqrt{5}\cdot 2^{x}=\sqrt{8}\cdot 5^{x}$ h) $7^{x}=0$

Megoldás:

a) $\frac{5^{x-3}}{4^{x-3}}=1 \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{x-3}=\left(\frac{5}{4}\right)^{0} \Rightarrow x=3$

b) $13^{2x^2-5x-12}=13^{0} \Rightarrow 2x^2-5x-12=0 \Rightarrow x_1=4;\ x_2=-\frac{3}{2}$ ez utóbbi nem tartozik az alaphalmazhoz, így az egyenlet megoldása: $x=4$.

c) $5^{2(x-1,5)}=7^{x-1,5} \Rightarrow 1=\frac{7^{x-1,5}}{25^{x-1,5}} \Rightarrow \left(\frac{7}{25}\right)^{0}=\left(\frac{7}{25}\right)^{x-1,5} \Rightarrow x=1{,}5$

d) $1=\frac{11^{2x-6}}{6^{x-3}} \Rightarrow \left(\frac{121}{6}\right)^{0}=\left(\frac{121}{6}\right)^{x-3} \Rightarrow x=3$

e) $12^{x}=12^{0} \Rightarrow x=0$

f) $256\cdot\frac{4^{x}}{4}=36\cdot 6^{x}\cdot 6 \Rightarrow \frac{64}{216}=\frac{6^{x}}{4^{x}} \Rightarrow \left(\frac{6}{4}\right)^{-3}=\left(\frac{6}{4}\right)^{x} \Rightarrow x=-3$, ez nem tartozik az alaphalmazhoz, ezért az egyenletnek nincs megoldása.

g) $\frac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{8}}=\frac{5^{x}}{2^{x}} \Rightarrow \frac{5^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{5^{x}}{2^{x}} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{x} \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

h) Nincs megoldás.

Kislexikon

Exponenciális függvény: az $f(x) = a^x$ $(a \neq 1,\ x \in \mathbf{R})$ hozzárendelési utasítással megadott függvény.

Exponenciális egyenlet: Azok az egyenletek, amelyekben az ismeretlen a hatványkitevőben szerepel.

Aszimptota: Egy végtelenbe nyúló görbeív aszimptotája olyan egyenes, amelyet a görbe tetszőleges pontossággal közelít meg a végtelen felé haladva.

Algebrai kifejezés: Változók, számok és matematikai műveletek összekötése, ha a változóval (változókkal) csak algebrai műveleteket kell végezni.