MATEMATIKA „A”
11. évfolyam

2. modul:
Hatványozás kiterjesztése, hatványfüggvény

Készítette: Csákvári Ágnes és Darabos Noémi Ágnes

A modul célja	A hatványozás kiterjesztése pozitív alap esetén racionális kitevőkre. A hatványozás azonosságainak ismerete, műveletek végzése, alkalmazása feladatokban. Az *n*-edik gyökre vonatkozó azonosságok ismerete, műveletek végzése, alkalmazása feladatokban. Hatványfüggvény és gyökfüggvény grafikonjának ábrázolása, a függvények jellemzése. Gyökfüggvény mint a hatványfüggvény inverze.
Időkeret	7 óra
Ajánlott korosztály	11. osztály
Modulkapcsolódási pontok	*Tágabb környezetben*: Fizikai, kémiai, gazdasági folyamatok. *Szűkebb környezetben*: Geometriai transzformációk. A logaritmus fogalma, exponenciális kifejezések. Logaritmikus és exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek. Logaritmusfüggvény, exponenciális függvény. Vektorok. Sorozatok, kamatoskamat számítás. *Ajánlott megelőző tevékenységek*: A hatványozás értelmezése 0 és negatív egész kitevőre, a hatványozás azonosságai. A négyzetgyökre vonatkozó azonosságok, gyökjel alól való kihozatal, gyökjel alá való bevitel, törtek nevezőjének gyöktelenítése. Másodfokú, abszolútérték és négyzetgyök függvény grafikonjának ábrázolása, a függvények jellemzése. Vektorok, geometriai transzformációk. Másodfokú, abszolútértékes és négyzetgyökös egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása. *Ajánlott követő tevékenységek:* A logaritmus értelmezése. A logaritmus mint a hatványozás inverz művelete. Exponenciális kifejezések értelmezése. A logaritmus azonosságai. A logaritmus és az exponenciális függvény. Logaritmusos és exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek megoldása. Mértani sorozatok, kamatos-kamat számítás. Az analízis elemei.

A képességfejlesztés fókuszai	*Számolás, számlálás, számítás:* Hatványértékek kiszámítása. Függvényérték, zérushely, szélsőérték kiszámítása. Koordináta-rendszerben a grafikon pontjainak meghatározása. *Becslés, mérés, valószínűségi szemlélet*: Koordináta-rendszerben irracionális, illetve racionális koordinátájú pontok helyének meghatározása. *Szöveges feladatok, metakogníció:* Az elméleti anyag feldolgozása. *Rendszerezés, kombinatív gondolkodás:* A hatványozásra és a négyzetgyökre vonatkozó azonosságok átismétlése. A hatványozás azonosságainak alkalmazása. Az *n*. gyökre vonatkozó azonosságok alkalmazása. Összetett függvények grafikonjának rajzolása függvénytranszfromációkkal. Függvények jellemzése. Kapcsolat a hatvány- és a gyökfüggvény között. Kapcsolat a páros kitevőjű hatványfüggvények között. Kapcsolat a páratlan kitevőjű hatványfüggvények között. Kapcsolat a páros kitevőjű gyökfüggvények között. Kapcsolat a páratlan kitevőjű gyökfüggvények között. Értelmezési tartomány vizsgálata. *Induktív, deduktív következtetés:* A hatványozás azonosságainak alkalmazása általános és konkrét esetben. Az *n*. gyökre vonatkozó azonosságok alkalmazása általános és konkrét esetben. A hatványozás és gyök definíciójának kiterjesztése a permanencia-elv alapján. Hatványfüggvény és gyökfüggvény grafikonjának ábrázolása konkrét esetben, majd általánosítva. Függvénytranszformációk alkalmazása konkrét esetekben.

TÁMOGATÓ RENDSZER

- Táblázatok, grafikonok, kidolgozott elméleti anyag, totó.
- 6 darab kártyakészlet, 1 fólia (külön dokumentumokban).

JAVASOLT ÓRABEOSZTÁS

1. óra A hatványozásról tanultak ismétlése (1 óra)

2. óra A négyzetgyökről tanultak ismétlése (1 óra)

3. óra Az *n*-edik gyök (1 óra)

4. óra A hatványfüggvény és a gyökfüggvény (2 óra)

5. óra A hatványozás kiterjesztése racionális kitevőre (2 óra)

ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEK

Középszint

A hatványozás értelmezése racionális kitevő esetén. Ismerje és használja a hatványozás azonosságait. Definiálja és használja az $\sqrt[n]{a}$ fogalmát. Ismerje és alkalmazza a négyzetgyökvonás azonosságait. Az inverzfüggvény fogalmának szemléletes értelmezése. Tudjon értéktáblázat és képlet alapján függvényt ábrázolni, illetve adatokat leolvasni a grafikonról. Tudjon néhány lépéses transzformációt igénylő függvényeket függvénytranszformációk segítségével ábrázolni [$f(x) + c$; $f(x + c)$; $c\,f(x)$; $f(c\,x)$]. Tudja ábrázolni az $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2$ és $h(x) = x^3$ függvények grafikonját. Függvények jellemzése értékkészlet, zérushely, növekedés, fogyás, szélsőérték, paritás szempontjából.

Emelt szint

Permanencia-elv. Irracionális kitevőjű hatvány értelmezése szemléletesen. Bizonyítsa a hatványozás azonosságait egész kitevők esetén. Bizonyítsa a négyzetgyökvonás azonosságait. Tudja ábrázolni az $f(x) = x^n$ függvényt. Tudjon a témába tartozó függvényekből összetett függvényeket képezni, valamint e függvények transzformáltjainak grafikonját elkészíteni ($c\,f(ax + b) + d$).

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. A hatványozásról tanultak ismétlése (1 óra)			
1.	A hatványozás és a hatványozás azonosságainak ismétlése.	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás	2.1 kártyakészlet
2.	A hatványozás azonosságainak gyakorlása. A mintapéldák közös megbeszélése.	Számolás, számítás, kombinatív gondolkodás.	1. és 2. mintapéldák
3.	Feladatok megoldása		1–5. feladatokból válogatva
II. A négyzetgyökvonásról tanultak ismétlése (1 óra)			
1.	A négyzetgyökvonás, és a négyzetgyökvonás azonosságainak ismétlése. A mintapélda közös megbeszélése.	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás	3. mintapélda
2.	A négyzetgyökvonás azonosságainak gyakorlása.	Számolás, számítás, kombinatív gondolkodás.	2.2 kártyakészlet
3.	Feladatok megoldása		6–12. feladatokból válogatva
III.Az n-edik gyök (1 óra)			
1.	Az *n*-edig gyök fogalmának bevezetése.	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, induktív , deduktív gondolkodás	4. és 5. mintapéldák
2.	Minden csoportba osszunk ki A, B, C, D jelű kártyákat, differenciálva a tanulók képességei szerint. Szétválnak a csoportok az A, B, C, D jelek szerint, az azonos betűsök dolgoznak most együtt. Ha elkészültek a csoportok, mindenki visszamegy a saját csoportjába, és a többieknek elmondja a feladatának a megoldását	Számolás, számítás, kombinatív gondolkodás.	13–16. feladatokból válogatva
3.	Feladatok megoldása	Kombinatív gondolkodás	17., 18. feladatokból válogatva

IV. Hatványfüggvény és gyökfüggvény (2 óra)			
1.	Hatványfüggvény és az *n*-edik gyök függvény grafikonja és jellemzése: A tanulók 4 fős csoportokat alkotnak. A tanár minden csoportban kiosztja a 3. kártyakészletben található feladatkártyákat. Akik ugyanazt a kártyát kapták, menjenek egy közös asztalhoz, és készítsenek plakátot a kártyájukon található függvényekről: Határozzák meg a függvények értelmezési tartományát, majd ábrázolják azokat közös koordináta-rendszerben és jellemezzék is. Ha elkészültek, mindenki visszamegy a saját csoportjához, és csoportforgóval körbe mennek. Minden plakátnál az magyaráz, aki a plakát készítésében részt vett.	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás, induktív, deduktív gondolkodás, számolás, számlálás, metakogníció, becslés	2.3 és 2.4 kártyakészlet 2.7 fólia 6–10. mintapéldákból válogatva 19–21. feladatokból válogatva
2.	Kapcsolat a hatványfüggvény és a gyökfüggvény között: A tanulók a csoportokon belül párokban dolgoznak. A tanár minden csoportban szétosztja a feladatkártyákat és a betűket a 5. kártyakészletből. Mindenki a saját kártyájának megfelelően közös koordináta-rendszerben ábrázolja a függvé–nyeket, és jellemzi is a függvényeket egymás mellett, két oszlopban, ahogy a mintapéldákban is szerepel. Ha készen vannak a feladataikkal, elmondják egymásnak tapasztalataikat, kielemezve az oszlopok tartalmát.	Rendszerzés, kombinatív gondolkodás, számlálás	11., 12. mintapéldák 2.5 kártyakészlet
3.	Értelmezési tartomány vizsgálata: a mintapéldák feldolgozása, majd 2 fős csoportokban gyakorlás (egy csoporton belül a tanulók megoldanak 2-2 példát, majd kicserélik és kijavítják egymásét)	Kombinatív gondolkodás, számolás	13. mintapélda 22., 23. feladatok
4.	Függvények ábrázolása, és a függvény jellemzése: a mintapéldák feldolgozása, majd 2 fős csoportokban gyakorlás (egy csoporton belül a tanulók megoldanak 2-2 példát, majd kicserélik és kijavítják egymásét)	Kombinatív gondolkodás, deduktív gondolkodás, számlálás, számolás	14–16. mintapéldák 24–27. feladatokból válogatva

V. A hatványozás kiterjesztése racionális kitevőre (2 óra)			
1.	A hatványozás kiterjesztése racionális kitevőre. A mintapéldák közös megbeszélése.	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás	17–19. mintapéldák
2.	Dominó játék. A törtkitevős hatványok gyakorlására, a fogalom elmélyítésére. Minden csoportnak adjunk 16 darab kártyát. Feladatuk felfelé fordítva kirakni a dominókat úgy, hogy minden kifejezéshez megtalálják a hozzátartozó értéket.	Számolás, számítás, kombinatív gondolkodás.	2.6 kártyakészlet
3.	Feladatok megoldása		28–33. feladatokból válogatva
4.	Matematikai TOTÓ. Minden tanuló egyedül dolgozik a feladatokon. Ha letelt az idő, vagy elkészültek a tanulók, akkor mindenki átadja a padtársának a füzetét, aki a feladatok közös megbeszélése alapján kijavítja a TOTÓ-t. A hibátlan kitöltőket megjutalmazhatjuk.		TOTÓ

I. A hatványozásról tanultak ismétlése

Az előző évek során, megismerkedtünk a valós számok egész kitevőjű hatványaival, valamint a hatványozás azonosságaival, illetve a négyzetgyökvonással és a négyzetgyökös azonosságokkal. Ezeket az ismereteinket szeretnénk kibővíteni, de előbb ismételjük át a tanultakat.

Hatványozás egész kitevőre

$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ darab tényező}}$, ahol $a \in \mathbf{R}$, $n > 1, n \in \mathbf{N}$

$a^1 = a$, ha $a \in \mathbf{R}$.

$a^0 = 1$, ha $a \neq 0, a \in \mathbf{R}$. ($0^0$-t nem értelmezzük)

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, ha $a \neq 0, a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^+$

Módszertani megjegyzés: Minden csoportnak 4 pakli kártyát adunk. A csoport minden tagja választ magának egy paklit, majd megoldja a feladatokat. Az önálló feladat megoldása után a csoport megbeszéli minden feladat megoldását, valamint közösen megpróbálják felírni a hatványozás azonosságait. A tanár felír egyet az azonosságok közül, majd húz egy csoportszámot és egy jelet. Az a diák, akinek a jelét kihúzták, táblára felírja a hozzá tartozó kifejezéseket, a többiek ellenőrzik, hogy jót írt-e.

2.1 kártyakészlet

I. Pakli	$x^3 \cdot x^{-5}$	$\dfrac{x^6}{x^8}$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\left(x^{-1}\right)^2$
II. Pakli	$x^9 \cdot x^4 \cdot x^{-7}$	$\dfrac{x^{10}}{x^4}$	$\left(\dfrac{1}{x^6}\right)^{-1}$	$\left(x^2\right)^3$
III. Pakli	$x^{-2} \cdot x^{-7} \cdot x$	$\dfrac{x^{-5}}{x^3}$	$\left(\dfrac{1}{x^4}\right)^2$	$\left(x^{-2}\right)^4$
IV. Pakli	$x^7 \cdot x^5 \cdot x^0$	$\dfrac{x^{20}}{x^8}$	$\dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{1}{x^{10}}$	$\left(x^{-4}\right)^{-3}$

A hatványozás azonosságai

A hatványozás definíciójában felsorolt feltételek esetén:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\quad a \neq 0$

3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $\quad b \neq 0$

5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Mintapélda₁

Számítsuk ki a $\dfrac{28^{-4} \cdot 6^4 \cdot 10^{-4}}{35^{-4} \cdot 81 \cdot 4^{-2}}$ kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

Az alapokat írjuk fel prímszámok szorzataként és alkalmazzuk a hatványozás azonosságait:

$$\frac{(2^2 \cdot 7)^{-4} \cdot (2 \cdot 3)^4 \cdot (2 \cdot 5)^{-4}}{(5 \cdot 7)^{-4} \cdot 3^4 \cdot (2^2)^{-2}} = \frac{2^{-8} \cdot 7^{-4} \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^{-4} \cdot 5^{-4}}{5^{-4} \cdot 7^{-4} \cdot 3^4 \cdot 2^{-4}} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

Mintapélda₂

Az a-nak hányadik hatványa az $\dfrac{a^{-6}(a^7)^4(a^{-2})^5}{a^9(a^3)^{-4}}$ kifejezés?

Megoldás:

Bontsuk fel a zárójeleket és alkalmazzuk a hatványozás azonosságait, ha $a \neq 0$:

$\dfrac{a^{-6} \cdot a^{28} \cdot a^{-10}}{a^9 \cdot a^{-12}} = \dfrac{a^{12}}{a^{-3}} = a^{15}$. Tehát a kifejezés a-nak 15. hatványa.

Feladatok

1. Melyik szám a nagyobb?

a) $7^4 \cdot 7^3$ vagy $(7^2)^4$

b) $\dfrac{11^9}{11^5}$ vagy $11 \cdot 11^3$

c) $2^{10}\cdot 3^{10}$ vagy $6^5\cdot 6^6$

d) $\dfrac{72^6}{12^9}$ vagy $\dfrac{54^{10}}{9^{15}\cdot 2^5}$

e) $\dfrac{28^2\cdot 36^2\cdot 63}{4^2\cdot 6^3\cdot 54}$ vagy $\dfrac{21^2\cdot 30^2\cdot 6^3}{90^2\cdot 36}$

f) $\dfrac{25^3\cdot 14^{-4}\cdot 28^3}{70^3\cdot 35^{-4}}$ vagy $\dfrac{12^{-3}\cdot 36^5}{48^2\cdot 72^{-1}}$

Megoldás:

a) $7^7 < 7^8$

b) $11^4 = 11^4$

c) $6^{10} < 6^{11}$

d) $\dfrac{2^{18}\cdot 3^{12}}{2^{18}\cdot 3^9} = 3^3 = 27 \quad < \quad \dfrac{2^{10}\cdot 3^{30}}{3^{30}\cdot 2^5} = 2^5 = 32$

e) $\dfrac{2^8\cdot 3^6\cdot 7^3}{2^8\cdot 3^6} = 7^3 = 343 \quad > \quad \dfrac{2^5\cdot 3^7\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^4\cdot 3^6\cdot 5^2} = 7^2\cdot 3\cdot 2 = 294$

f) $\dfrac{2^2\cdot 5^6\cdot 7^{-1}}{2^3\cdot 5^{-1}\cdot 7^{-1}} = \dfrac{5^7}{2} \quad > \quad \dfrac{2^4\cdot 3^7}{2^5} = \dfrac{3^7}{2}$

2. Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $\dfrac{(a^3)^4\cdot (a^7)^2}{(a^5)^2\cdot (a^3)^8}$ b) $\dfrac{(b^{-2})^{-3}\cdot b^{-12}}{(b^{-2})^{-5}\cdot (b^{-5})^{-3}}$ c) $\dfrac{(c^4)^{-3}\cdot (c^2)^{-7}\cdot c^{20}}{(c^{-3})^6\cdot (c^{-5})^{-2}}$

d) $\dfrac{(a^4b^3)^5}{(a^2)^3\cdot (a^3b^5)^2}$ e) $\dfrac{(ab^{-2})^3\cdot (b^3a^{-2})^{-4}}{(a^7b^3)^{-2}\cdot (b^6a^{-4})^{-2}}$ f) $\left(\dfrac{3a}{b}\right)^3\cdot\left(\dfrac{ba^2}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{a^7}{b}\right)^{-1}$

Megoldás:

a) $\dfrac{a^{26}}{a^{34}} = a^{-8}$ b) $\dfrac{b^{-6}}{b^{25}} = b^{-31}$ c) $\dfrac{c^{-6}}{c^{-8}} = c^2$

d) $\dfrac{a^{20}b^{15}}{a^{12}b^{10}} = a^8b^5$ e) $\dfrac{a^{11}b^{-18}}{a^{-6}b^{-18}} = a^{17}$ f) 3

3. Rakd növekvő sorrendbe a következő számokat!

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^1;\ (-0{,}5)^3;\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^3;\ \left(-\dfrac{3}{4}\right)^0;\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2};\ -\left(\dfrac{3}{2}\right)^2;\ \left(-\dfrac{5}{2}\right)^2;\ \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-1}$

Megoldás:

$\dfrac{3}{2};\quad -\dfrac{1}{8} = -0{,}125;\quad \dfrac{1}{64} = 0{,}015625;\quad 1;\quad 4;\quad -\dfrac{9}{4} = -2{,}25;\quad \dfrac{25}{4} = 6{,}25;\quad \dfrac{3}{4}$

$-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 < (-0{,}5)^3 < \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 < \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-1} < \left(-\dfrac{3}{4}\right)^0 < \left(\dfrac{3}{2}\right)^1 < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} < \left(-\dfrac{5}{2}\right)^2$

4. Írd fel a következő kifejezéseket törtmentes alakban!

$$\frac{1}{3};\quad \frac{1}{9};\quad \frac{1}{27};\quad \frac{1}{64};\quad \frac{2}{25};\quad \frac{3}{16};\quad \frac{1}{a^2};\quad \frac{5}{b^6};\quad \frac{1}{a^3b^4};\quad \frac{1}{a^{-3}};\quad \frac{4}{b^{-5}};\quad \frac{1}{a^{-2}b^3}$$

Megoldás:

$$3^{-1};\quad 3^{-2};\quad 3^{-3};\quad 2^{-6};\quad 2\cdot 5^{-2};\quad 3\cdot 2^{-4};\quad a^{-2};\quad 5b^{-6};\quad a^{-3}b^{-4};\quad a^3;\quad 4b^5;\quad a^2b^{-3}$$

5. Írd fel a következő kifejezéseket negatív kitevő használata nélkül!

$$2^{-2};\quad 3^{-1};\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-2};\quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-1};\quad 3a^{-3};\quad 4b^{-2};\quad 7a^{-2}b^{-5};\quad \frac{3a^{-4}}{4b^{-3}}$$

Megoldás:

$$\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4};\quad \frac{1}{3};\quad 4^2=16;\quad \frac{5}{3};\quad \frac{3}{a^3};\quad \frac{4}{b^2};\quad \frac{7}{a^2b^5};\quad \frac{3b^3}{4a^4}$$

II. A négyzetgyökről tanultak ismétlése

A négyzetgyök

Ha $a \geq 0$, akkor $\sqrt{a}$ jelöli azt a nemnegatív számot, amelynek a négyzete a.

A négyzetgyökre vonatkozó azonosságok

1. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad a \geq 0, b \geq 0$
2. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad a \geq 0, b > 0$
3. $\sqrt{a^k} = \left(\sqrt{a}\right)^k \quad a > 0, k \in Z$

Mintapélda₃

Határozzuk meg az alábbi kifejezések értékét!

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$ b) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{10-\sqrt{51}} \cdot \sqrt{10+\sqrt{51}}$

d) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{192}\right) \cdot \sqrt{3}$ e) $\left(3\sqrt{7}-2\sqrt{5}\right)^2$ f) $3 \cdot \sqrt{20}+\sqrt{45}-\sqrt{80}$

Megoldás:

a) Alkalmazzuk a négyzetgyökre vonatkozó 1. azonosságot: $\sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt{\dfrac{72}{2}} = \sqrt{36} = 6$

c) Alkalmazzuk a négyzetgyökre vonatkozó 1. azonosságot, majd alkalmazzuk az összeg és a különbség szorzatára vonatkozó nevezetes azonosságot:

$$\sqrt{10-\sqrt{51}} \cdot \sqrt{10+\sqrt{51}} = \sqrt{\left(10-\sqrt{51}\right)\left(10+\sqrt{51}\right)} = \sqrt{10^2-\left(\sqrt{51}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{100-51} = \sqrt{49} = 7$$

d) Felbontjuk a zárójelet: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{192} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} - \sqrt{576} = 9 - 24 = -15$

e) Alkalmazzuk a kéttagú különbség négyzetére vonatkozó azonosságot:

$$\left(3\sqrt{7}-2\sqrt{5}\right)^2 = \left(3\sqrt{7}\right)^2 - 2 \cdot 3\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{5} + \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 9 \cdot 7 - 12\sqrt{7}\sqrt{5} + 4 \cdot 5 =$$
$$= 63 - 12\sqrt{35} + 20 = 83 - 12\sqrt{35}$$

f) Emeljünk ki a gyökjel alól:

$$3 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 3 \cdot \sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

Módszertani megjegyzés: Kártyajáték. A feladat a 4 összeillő kártya összegyűjtése. Egy megfelelő négyes azonos értékeket tartalmaz. A tanár minden asztalra kitesz egy összekevert (16 darabos) paklit írással lefelé. Egy csoporton belül valaki kiosztja a kártyákat. Mindenkinek 4-et ad. Körbe-körbe haladva mindenki letesz az asztal közepére egy számára felesleges lapot. Ha valakinek kell az a lap, felveheti középről, de le kell tennie egy másikat. Ha a megfelelő lapok nála vannak, akkor viszont ő győzött. A győzelemért 3 pont jár, a 2. helyért 2 pont, a 3.-ért 1 pont, a 4. helyért pedig 0. Ha van idő, több menetet is lejátszhatnak.

2.2 kártyakészlet

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{12}$	$2\sqrt{6}$	$\dfrac{12}{\sqrt{6}}$	$\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{3}}$
$\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}$	$6\sqrt{2}$	$\dfrac{12}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{216}}{\sqrt{3}}$
$\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}$	$4\sqrt{3}$	$\dfrac{12}{\sqrt{3}}$	$\dfrac{\sqrt{96}}{\sqrt{2}}$
$\sqrt{8}\cdot\sqrt{12}$	$4\sqrt{6}$	$\dfrac{24}{\sqrt{6}}$	$\dfrac{\sqrt{192}}{\sqrt{2}}$

Feladatok

6. Végezd el a következő műveleteket!

a) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{8}$ c) $\dfrac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$

e) $\sqrt{3^3}\cdot\sqrt{3}$ f) $\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{2}}$ g) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{125}\right)\cdot\sqrt{5}$ h) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{96}-\sqrt{24}\right)}{\sqrt{3}}$

Megoldás:

a) $\sqrt{36}=6$ b) $\sqrt{144}=12$ c) $\sqrt{49}=7$ d) $\sqrt{25}=5$ e) $\sqrt{81}=9$

f) $\sqrt{4}=2$ g) $\sqrt{25}+\sqrt{625}=5+25=30$ h) $\sqrt{64}-\sqrt{16}=8-4=4$

7. Melyik szám a nagyobb?

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}$ vagy $\frac{\sqrt{92}}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{90}}{\sqrt{2}}$ vagy $\frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{60}+\sqrt{135}\right)}{\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{7}$ vagy $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{12}$

Megoldás:

a) $\sqrt{45}<\sqrt{46}$ b) $\sqrt{225}=15=\sqrt{36}+\sqrt{81}=6+9=15$ c) $\sqrt{56}>\sqrt{54}$

8. Határozd meg az alábbi kifejezések pontos értékét!

a) $\sqrt{\sqrt{74}-7}\cdot\sqrt{\sqrt{74}+7}$

b) $\sqrt{\sqrt{37}-\sqrt{21}}\cdot\sqrt{\sqrt{37}+\sqrt{21}}$

Megoldás:

a) $\sqrt{74-49}=\sqrt{25}=5$

b) $\sqrt{37-21}=\sqrt{16}=4$

9. Határozd meg az alábbi kifejezések pontos értékét!

a) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{27}\right)^2$

b) $\left(\sqrt{3}-2\sqrt{12}\right)^2$

c) $\left(\sqrt{8+\sqrt{15}}+\sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2$

d) $\left(\sqrt{7-\sqrt{33}}-\sqrt{7+\sqrt{33}}\right)^2$

Megoldás:

a) $3+2\sqrt{3\cdot27}+27=30+2\sqrt{81}=30+2\cdot9=48$

b) $3-4\sqrt{3\cdot12}+4\cdot12=3-4\sqrt{36}+48=51-4\cdot6=27$

c) $8+\sqrt{15}+2\sqrt{64-15}+8-\sqrt{15}=16+2\sqrt{49}=16+2\cdot7=30$

d) $7-\sqrt{33}-2\sqrt{49-33}+7+\sqrt{33}=14-2\sqrt{16}=14-2\cdot4=6$

10. Végezd el a következő műveleteket!

a) $\sqrt{128}-\sqrt{98}+\sqrt{50}-\sqrt{18}+\sqrt{8}$

b) $\sqrt{147}+\sqrt{108}-\sqrt{75}+\sqrt{27}-\sqrt{12}$

c) $\sqrt{25a}-\sqrt{16a}+\sqrt{36a}-\sqrt{9a}$

d) $\sqrt{49b}-\sqrt{25b}+\sqrt{64b}-\sqrt{9b}$

Megoldás:

a) $8\sqrt{2}-7\sqrt{2}+5\sqrt{2}-3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

b) $7\sqrt{3}+6\sqrt{3}-5\sqrt{3}+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

c) $5\sqrt{a}-4\sqrt{a}+6\sqrt{a}-3\sqrt{a}=4\sqrt{a}$

d) $7\sqrt{b}-5\sqrt{b}+8\sqrt{b}-3\sqrt{b}=7\sqrt{b}$

11. Melyik szám a nagyobb?

a) $5\sqrt{3}$ vagy $6\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{5}$ vagy $4\sqrt{3}$

Megoldás:

a) $\sqrt{75} > \sqrt{72}$ b) $\sqrt{45} < \sqrt{48}$

12. Gyöktelenítsd a következő törtek nevezőjét!

a) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{6}{5\sqrt{2}}$ c) $\frac{5}{\sqrt{3}-1}$ d) $\frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ e) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

Megoldás:

a) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ c) $\frac{5\sqrt{3}+5}{2}$ d) $7\sqrt{3}+7\sqrt{2}$ e) $\frac{9+2\sqrt{14}}{5}$

III. Az n-edik gyök

Mintapélda$_4$

Egy kocka térfogata 125 cm^3. Mekkora a kocka élének a hossza?

Megoldás:

Mivel a kocka térfogata: $V = a^3$, ezért $125 = a^3$. Azt a számot keressük, amelynek a harmadik hatványa 125. Ez a szám az 5, mert $5^3 = 125$.

> Az *a* valós szám **köbgyöke** az a valós szám, amelynek harmadik hatványa *a*:
>
> $$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$$

Például $\sqrt[3]{125} = 5$, mert $5^3 = 125$.

Mintapélda$_5$

Két kocka térfogatának különbsége 504 cm^3, élhosszuk különbsége 6 cm. Számítsuk ki a térfogatuk arányát! Mekkora a hasonlóság aránya?

Megoldás:

Jelöljük a kisebbik kocka élének hosszát *a*-val, ekkor a térfogata: $V_1 = a^3$.

A nagyobbik kocka élének hossza ekkor $a + 6$, térfogata: $V_2 = (a+6)^3$.

Különbségük: $V_2 - V_1 = 504 \quad \Rightarrow \quad (a+6)^3 - a^3 = 504$.

Felhasználva a $(a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot ab^2 + b^3$ nevezetes azonosságot:

$a^3 + 18 \cdot a^2 + 108 \cdot a + 216 - a^3 = 504$.

A rendezés után egy másodfokú egyenletet kapunk: $a^2 + 6 \cdot a - 16 = 0$.

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva:

$$a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2 \quad a_2 = -8.$$

Egy kocka élhossza csak pozitív szám lehet, ezért $a = 2$.

Ebből $V_1 = 2^3 = 8$, $V_2 = (2+6)^3 = 8^3 = 512$

Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbével egyenlő:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{512} = \frac{1}{64} = \lambda^3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}, \text{ mert } \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}.$$

A kockák térfogatainak aránya $\frac{1}{64}$, a hasonlóság aránya $\frac{1}{4}$.

Az előzőek alapján definiáljuk a gyököt általános formában is, de meg kell különböztetnünk a páros és páratlan eseteket. Páros gyökkitevő esetén a definíció hasonló lesz a négyzetgyök, páratlan gyökkitevő esetén a köbgyök definíciójához.

Az n-edik gyök definíciója

Páros pozitív egész ***n*-re** az ***a* nemnegatív valós szám** n-edik gyöke az a nemnegatív valós szám, amelynek az n-edik hatványa a.

Például: $\sqrt[4]{81}=3$, mert $3^4=81$; $\sqrt[6]{64}=2$, mert $2^6=64$.

Páratlan, 1-nél nagyobb egész ***n*-re** az ***a* valós szám** n-edik gyöke az a valós szám, amelynek az n-edik hatványa a.

Például: $\sqrt[3]{27}=3$, mert $3^3=27$; $\sqrt[5]{-32}=-2$, mert $(-2)^5=-32$.

Jelölés: az a szám n-edik gyöke: $\sqrt[n]{a}$.

Megjegyzés: $n=1$-re az $\sqrt[n]{a}$-t nem értelmezzük.

Az *n*-edik gyökre vonatkozó azonosságok

A definíció által megengedett értékekre. ($n > 1$, $n \in \mathbf{N}$)

1. $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, ha $n = 2p$, akkor $a \geq 0$, $b \geq 0$ ($p \in \mathbf{N}^+$)

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$

3. $\sqrt[n]{a^k}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^k$

4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$

5. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$, $m, k \in \mathbf{Z}\setminus\{0; 1\}$, $n \in \mathbf{N}\setminus\{0; 1\}$

Feladatok

Minden csoportban osszuk ki az A, B, C, D jelű kártyákat, differenciálva a tanulók képességei szerint. Szétválnak a csoportok az A, B, C, D jelek szerint, az azonos betűsök dolgoznak most együtt. Ha elkészültek a csoportok, mindenki visszamegy a saját csoportjába, és a többieknek elmondja a feladatának a megoldását. A csoporton belül összekeverik az A, B, C, D jelű kártyákat, mindenki húz egyet. A feladat megoldását az ismerteti a táblánál, akinek a csoport számát és betűjelét kihúzza a tanár.

Az A jelűek feladata:

13. Számítsd ki a következő kifejezések értékét!

a) $\sqrt[4]{625}$ b) $\sqrt[4]{-81}$ c) $\sqrt[8]{256}$ d) $\sqrt[6]{729}$

e) $\sqrt[6]{-64}$ f) $\sqrt[3]{-8}$ g) $\sqrt[3]{-125}$ h) $\sqrt[5]{-100000}$

i) $\sqrt[7]{-128}$ j) $\sqrt[9]{-1}$ k) $\sqrt[3]{125}$ l) $\sqrt[3]{64}$

m) $\sqrt[5]{32}$ n) $\sqrt[11]{1}$ o) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$ p) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

Megoldás:

a) 5 b) $\varnothing$ c) 2 d) 3

e) $\varnothing$ f) -2 g) -5 h) -10

i) -2 j) -1 k) 5 l) 4

m) 2 n) 1 o) $\frac{1}{2}$ p) $\frac{1}{2}$

Az B jelűek feladata:

14. Számítsd ki a következő kifejezések értékét!

a) $\sqrt[4]{(-3)^4}$ b) $\sqrt[6]{7^6}$ b) $\sqrt[3]{(-3)^3}$ d) $\sqrt[5]{7^5}$

e) $\sqrt[4]{a^4}$ f) $\sqrt[6]{a^6}$ g) $\sqrt[3]{a^3}$ h) $\sqrt[5]{a^5}$

Megoldás:

a) 3 b) 7 c) -3 d) 7

e) $|a|$ f) $|a|$ g) a h) a

Az C jelűek feladata:

15. Melyik szám a nagyobb?

a) $\sqrt[5]{32}$ vagy $\sqrt[3]{27}$ b) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}}$ vagy $\sqrt[4]{16^{-1}}$

Megoldás:

a) $2 < 3$ b) $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$

Az D jelűek feladata:

16. Keresd meg a párját!

a) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}$ A) $\frac{\sqrt[4]{162}}{\sqrt[4]{2}}$

b) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ B) $\frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$

c) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{32}$ C) $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$

d) $\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{16}$ D) $\frac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}}$

Megoldás:

a) $\sqrt[5]{32} = 2$ B) $\sqrt[5]{32} = 2$ vagy C) $\sqrt[4]{16} = 2$

b) $\sqrt[4]{81} = 3$ A) $\sqrt[4]{81} = 3$

c) $\sqrt[4]{256} = 4$ D) $\sqrt[3]{64} = 4$

d) $\sqrt[6]{64} = 2$ B) $\sqrt[5]{32} = 2$ vagy C) $\sqrt[4]{16} = 2$

17. Határozd meg az alábbi kifejezések pontos értékét!

a) $\sqrt[3]{8-\sqrt{37}} \cdot \sqrt[3]{8+\sqrt{37}}$ b) $\sqrt[4]{\sqrt{27}-\sqrt{11}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{27}+\sqrt{11}}$

Megoldás:

a) $\sqrt[3]{8-\sqrt{37}} \cdot \sqrt[3]{8+\sqrt{37}} = \sqrt[3]{64-37} = \sqrt[3]{27} = 3$

b) $\sqrt[4]{\sqrt{27}-\sqrt{11}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{27}+\sqrt{11}} = \sqrt[4]{27-11} = \sqrt[4]{16} = 2$

18. Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[3]{a^5}}\quad (a\neq 0)$

b) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{a^4}\right)^2\cdot\sqrt[3]{a^{-2}}\cdot\sqrt[3]{a^{-5}}}{\sqrt[3]{a^{-1}}\cdot\sqrt[3]{a^{-7}}}\quad (a\neq 0)$

c) $\dfrac{\sqrt[5]{b^2}\cdot\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[4]{\sqrt[5]{b^4}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt[4]{b^3}}}\quad (b>0)$

d) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{b}}\cdot\sqrt[4]{b^2}\cdot\sqrt{b^{-3}}}{\sqrt[3]{b^{-2}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt[3]{b^4}}\cdot\sqrt{b^3}}\quad (b>0)$

Megoldás:

a) $\sqrt[3]{a^5}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^1}}{\sqrt[3]{a^{-8}}}=\sqrt[3]{a^9}=a^3$

c) $\dfrac{\sqrt[5]{b^2}\cdot\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[4]{\sqrt[5]{b^4}}\cdot\sqrt[5]{\sqrt[4]{b^3}}}=\dfrac{\sqrt[20]{b^8\cdot b^{15}}}{\sqrt[20]{b^4\cdot b^3}}=\sqrt[20]{b^{16}}=\sqrt[5]{b^4}$

d) $\dfrac{\sqrt[6]{b}\cdot\sqrt[4]{b^2}\cdot\sqrt{b^{-3}}}{\sqrt[3]{b^{-2}}\cdot\sqrt[12]{b^4}\cdot\sqrt{b^3}}=\dfrac{\sqrt[12]{b^2\cdot b^6\cdot b^{-18}}}{\sqrt[12]{b^{-8}\cdot b^4\cdot b^{18}}}=\sqrt[12]{b^{-24}}=b^{-2}$

IV. Hatványfüggvények, gyökfüggvények

Módszertani megjegyzés: Eddig tanult függvények átismétlése kerekasztal módszerrel. A tanulók 4 fős csoportokat alkotnak. Előkészítenek három lapot. Az egyikre felírják a „Függvények”, a másikra a „Függvénytranszformációk”, a harmadikra pedig a „Jellemzési szempontok” szót. A lapokat indítsák el körbe. Az egyiket ellentétes irányba. A „Függvények” lapra írjanak össze minél több, eddig tanult alapfüggvényt. A „Függvénytranszformációk” lapra a függvénytranszformációkat 3-4 konkrét példával (képletben hogyan jelenik meg, és az mit jelent). A harmadik lapon pedig gyűjtsék össze az eddigi 6 (+1 invertálhatóság) jellemzési szempontot. Mindenki fölírja a lapra, amit tud, illetve kiegészíti a már leírtakat. Ha készen vannak, közösen megbeszélik. Itt lehet pontozni a csoport hatékonyságát is.

A hatványfüggvény és az *n*-edik gyökfüggvény ábrázolása

A tanulók alkossanak 4 fős csoportokat. A tanár minden csoportban kiosztja a 11.3. kártyakészletben található feladatkártyákat.

2.3 kártyakészlet, 2.7 fólia

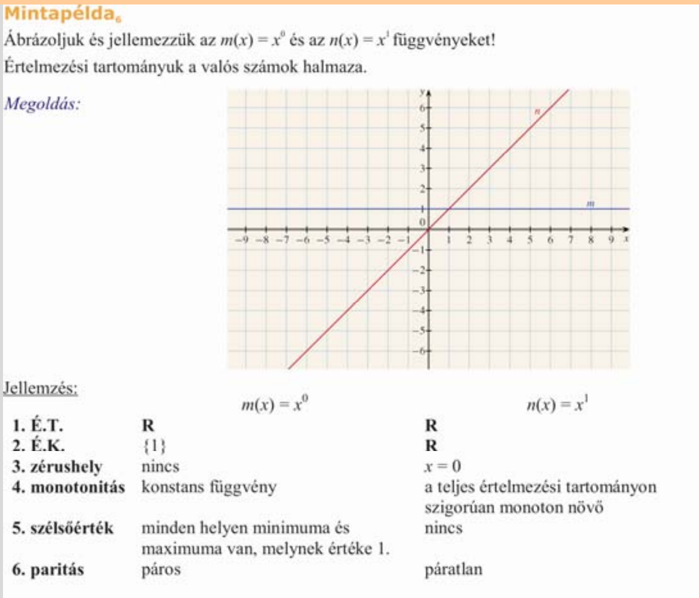
Akik ugyanazt a kártyát kapták, menjenek egy közös asztalhoz, és készítsenek plakátot a kártyájukon található függvényekről: Határozzák meg a függvények értelmezési tartományát, majd ábrázolják azokat közös koordináta-rendszerben és jellemezzék is. A tanár bevezetésként ismerteti az $m(x)=x^0$, illetve az $n(x)=x^1$ függvényeket (11.8. fólia).

1. feladatkártya: $f(x) = x^2$; $g(x) = x^4$
2. feladatkártya: $h(x)=x^3$; $k(x) = x^5$
3. feladatkártya: $a(x) = \sqrt{x}$; $b(x) = \sqrt[4]{x}$
4. feladatkártya: a $c(x) = \sqrt[3]{x}$; $d(x) = \sqrt[5]{x}$

Készítsd el az $f(x) = x^2$, illetve a $g(x) = x^4$ függvények grafikonját, és jellemezd a függvényeket!
Készítsd el a $h(x)=x^3$, illetve a $k(x) = x^5$ függvények grafikonját, és jellemezd a függvényeket!
Készítsd el az $a(x) =\sqrt{x}$, illetve a $b(x) = \sqrt[4]{x}$ függvények grafikonját, és jellemezd a függvényeket!
Készítsd el a $c(x) = \sqrt[3]{x}$, illetve a $d(x) =\sqrt[5]{x}$ függvények grafikonját, és jellemezd a függvényeket!

Ha elkészültek, mindenki visszamegy a saját csoportjához, és csoportforgóval körbe mennek. Minden plakátnál az magyaráz, aki a plakát készítésében részt vett.

2.7 fólia

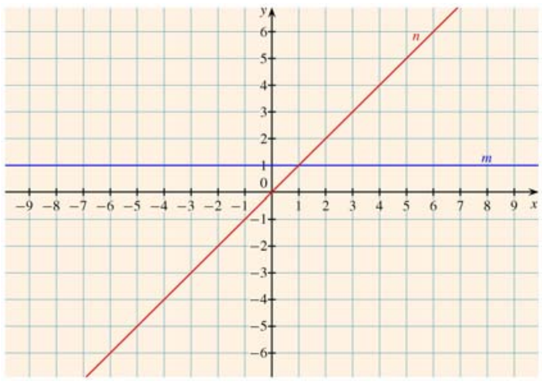


Mintapélda6

Ábrázoljuk és jellemezzük az $m(x) = x^0$ és az $n(x) = x^1$ függvényeket!

Értelmezési tartományuk a valós számok halmaza.

Megoldás:



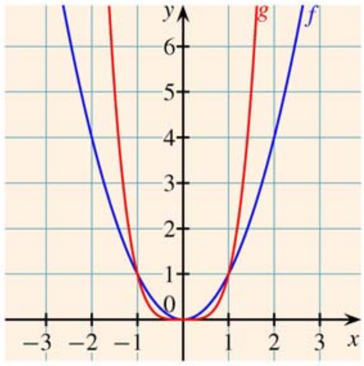
Jellemzés:

	$m(x) = x^0$	$n(x) = x^1$
1. É.T.	**R**	**R**
2. É.K.	{1}	**R**
3. zérushely	nincs	$x = 0$
4. monotonitás	konstans függvény	a teljes értelmezési tartományon szigorúan monoton növő
5. szélsőérték	minden helyen minimuma és maximuma van, melynek értéke 1.	nincs
6. paritás	páros	páratlan

Mintapélda$_7$

Ábrázoljuk és jellemezzük a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2$ és $g(x) = x^4$ függvényeket!

Megoldás:



Ha szükséges, készítsünk értéktáblázatot.

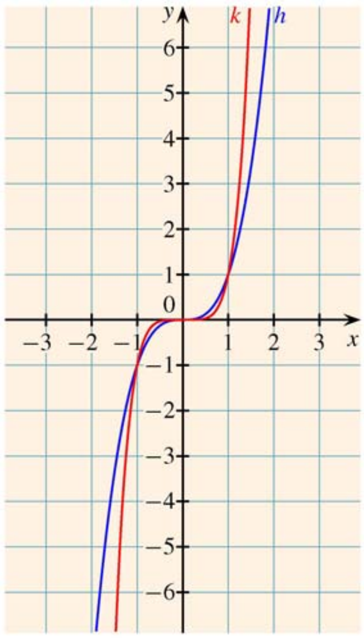
<u>Jellemzés:</u> Mindkét függvényre egyaránt érvényesek az alábbi tulajdonságok

1. É.T.	**R**
2. É.K.	$\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$
3. zérushely	$x = 0$
4. monotonitás	$x \le 0$: szig. mon. csökk.
	$x \ge 0$: szig. mon. növő
5. szélsőérték	abszolút minimumhely: $x = 0$
	abszolút minimumérték: $f(0) = 0$
6. paritás	páros

Mintapélda$_8$

Készítsük el a valós számok halmazán értelmezett $h(x) = x^3$ és $k(x) = x^5$ függvények grafikonját, és jellemezzük a függvényeket!

Megoldás:



Ha szükséges, készítsünk értéktáblázatot.

<u>Jellemzés:</u> Mindkét függvényre egyaránt érvényesek az alábbi tulajdonságok

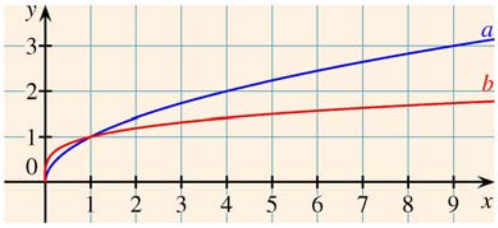
1. É.T.	**R**
2. É.K.	**R**
3. zérushely	$x = 0$
4. monotonitás	az teljes értelmezési tartományon szigorúan monoton növő
5. szélsőérték	nincs
6. paritás	páratlan

Mintapélda$_9$

Ábrázoljuk és jellemezzük a nemnegatív valós számok halmazán értelmezett $a(x) = \sqrt{x}$ és $b(x) = \sqrt[4]{x}$ függvényeket!

Megoldás:

Ha szükséges, készítsünk értéktáblázatot.



Jellemzés: Mindkét függvényre egyaránt érvényesek az alábbi tulajdonságok

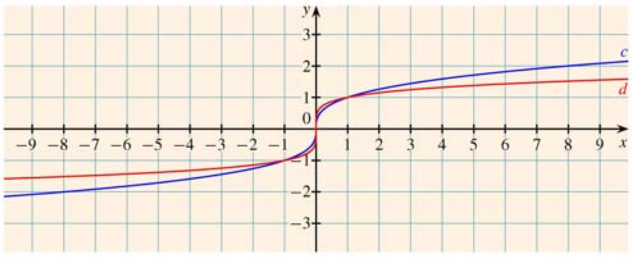
1. É.T.	$\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$
2. É.K.	$\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$
3. zérushely	$x = 0$
4. monotonitás	szigorúan monoton növő
5. szélsőérték	abszolút minimumhely: $x = 0$
	abszolút minimumérték: $f(0) = 0$
6. paritás	nem páros, nem páratlan

Mintapélda$_{10}$

Ábrázoljuk és jellemezzük a valós számok halmazán értelmezett $c(x) = \sqrt[3]{x}$ és a $d(x) = \sqrt[5]{x}$ függvényeket!

Megoldás:

Ha szükséges, készítsünk értéktáblázatot.



Jellemzés:

1. É.T.	**R**
2. É.K.	**R**
3. zérushely	$x = 0$
4. monotonitás	szigorúan monoton növő
5. szélsőérték	nincs
6. paritás	páratlan

Válaszolnak az alábbi kérdésekre diákkvartettel. (***2.4 kártyakészlet***)

Diákkvartett menete:

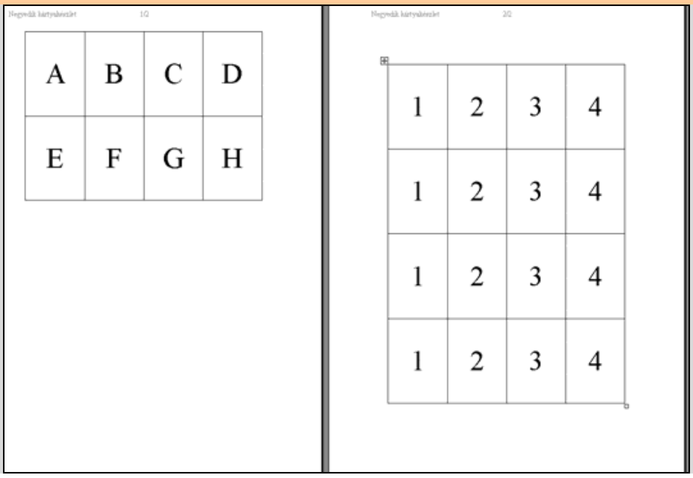
1. A tanár ad a csoportoknak egy betűjelet, valamint a csoport tagjainak 1-től 4-ig egy sorszámot. De magánál is tart egy betű- és egy számsorozatot.

2. Felolvassa az első kérdést. Hagy pár percet, hogy a csoportokon belül a tanulók megbeszélhessék a választ.

3. Húz egy sorszámot és egy betűt. A kihúzott betűjelű csoport kihúzott sorszámú tagja válaszol a kérdésre.

4. Jó válasz esetén a tanár felolvassa a következő kérdést. Rossz válasz esetén megbeszélik a jót osztály szinten.

2.4 kártyakészlet



A	B	C	D
E	F	G	H

1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4

Feladatok

19. Válaszolj az alábbi kérdésekre! (Az 1 – 8. kérdések az $f(x) = x^2$, a $g(x) = x^4$, a $h(x) = x^3$ és a $k(x) = x^5$ függvényekre vonatkoznak.)

1. Milyen összefüggést veszel észre az értékkészlet, és az x kitevője között?
2. Milyen összefüggést veszel észre ezen kitevő és a függvény paritása között?
3. Melyek azok a pontok, amelyeken minden páros kitevőjű hatványfüggvény grafikonja áthalad?
4. Melyek azok a pontok, amelyeken minden páratlan kitevőjű hatványfüggvény grafikonja áthalad?
5. E pontok segítségével mit tudsz mondani az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = x^4$ függvények grafikonjának egymáshoz való viszonyáról? Tudnád-e általánosítani ezt az észrevételt?
6. E pontok segítségével mit tudsz mondani az $h(x) = x^3$ és a $k(x) = x^5$ függvények grafikonjának egymáshoz való viszonyáról? Tudnád-e általánosítani ezt az észrevételt?

7. Elmondható-e a páratlan függvényekről, hogy minden x helyhez pontosan egy függvényérték tartozik és fordítva, minden függvényértékhez pontosan egy x hely tartozik, vagyis a függvény kölcsönösen egyértelmű?
8. Elmondható-e ez a páros függvényekről is? Ha nem, tudsz-e az értelmezési tartománynak olyan részhalmazát mondani, amelyre teljesül?

Most vizsgáljuk az $a(x) = \sqrt{x}$, a $b(x) = \sqrt[4]{x}$, a $c(x) = \sqrt[3]{x}$ és a $d(x) = \sqrt[5]{x}$ függvényeket!

9. Milyen összefüggést veszel észre az értékkészlet, és a gyökkitevő között?
10. Milyen összefüggést veszel észre a gyökkitevő és a függvény paritása között?
11. Melyek azok a pontok, amelyeken minden páros gyökkitevőjű függvény grafikonja áthalad?
12. Melyek azok a pontok, amelyeken minden páratlan gyökkitevőjű függvény grafikonja áthalad?
13. E pontok segítségével mit tudsz mondani az $a(x) = \sqrt{x}$ és a $b(x) = \sqrt[4]{x}$ függvények grafikonjának egymáshoz való viszonyáról? Tudnád-e általánosítani ezt az észrevételt?
14. E pontok segítségével mit tudsz mondani a $c(x) = \sqrt[3]{x}$ és a $d(x) = \sqrt[5]{x}$ függvények grafikonjának egymáshoz való viszonyáról? Tudnád-e általánosítani ezt az észrevételt?
15. Kölcsönösen egyértelműek-e ezek a függvények?

Definíciók:

Minden valós számhoz egyértelműen hozzárendelhetjük annak n-edik hatványát, ahol $n \in \mathbf{N}^+$. Az $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}^+$ hozzárendelési utasítással kapott függvényeket **hatványfüggvények**nek nevezzük.

Ha $n > 1$ és páratlan, akkor minden valós számhoz hozzá tudjuk rendelni annak n-edik gyökét. Ha pedig páros, akkor a nem negatív valós számokhoz tudjuk egyértelműen hozzárendelni annak n-edik gyökét. A $g(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$ hozzárendelési utasítással kapott függvényeket **gyökfüggvények**nek nevezzük.

Egy függvény **invertálható**, ha kölcsönösen egyértelmű.

20. Számítsd ki a függvények értékét a megadott helyeken!

a) $f(x) = (x+2)^4$ $\qquad x \in \{-3{,}5; -2; -\frac{3}{2}; 0; 0{,}5; 1\}$

b) $g(x) = -x^3-1$ $\qquad x \in \{-2; -\frac{3}{2}; 0; 0{,}5; 3\}$

c) $h(x)=\sqrt[3]{x-3}$ $\qquad x \in \{-61; -\frac{101}{8}; 2; 3{,}125; 3\}$

d) $k(x) = 2\sqrt[4]{x}$ $\qquad x \in \{-81; -1; 0; \frac{1}{16}; 2{,}0736; 625\}$

Megoldás:

a) $f(-3{,}5) = 5{,}0625; f(-2) = 0;\ f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{81}{16} = 5{,}0625$; $f(0) = 16; f(0{,}5) = 0{,}0625; f(1)=81$

b) $g(-2) = 7;\ g\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{19}{8}$; $g(0) = -1; g(0{,}5) = -1{,}125; g(3) = -28$

c) $h(-61) = -4;\ h\left(-\frac{101}{8}\right) = \frac{5}{2}$; $h(2) = -1; h(3{,}125) = 0{,}5; h(3) = 0$

d) A k függvény negatív x-ekre nincs értelmezve; $k(0) = 0;\ k\left(\frac{1}{16}\right) = 1$; $k(2{,}0736) = 2{,}4$; $k(625) = 10$

21. Állapítsd meg, hogy az adott pontok mely függvények grafikonján találhatók! Egy pont több függvény grafikonján is rajta lehet, illetve találhatsz olyan pontot is, amelyik egyik függvény hozzárendelési utasításának sem felel meg.

Pontok:

$A(-1; 1)$ $\quad B(1; -1)$ $\quad C(-1; -1)$ $\quad D(-8; -2)$ $\quad E(256; 4)$ $\quad F(-2; -32)$

$G(7; 16807)$ $\quad H\left(5; \frac{1}{125}\right)$ $\quad I(0{,}027; 0{,}3)$ $\quad J(-0{,}3; -37{,}\dot{0}3\dot{7})$ $\quad K(-0{,}4; 6{,}25)$

$L(-0{,}3; 0{,}000729)$ $\quad M(0{,}6; -0{,}07776)$ $\quad N\left(-1{,}2; -\frac{125}{216}\right)$ $\quad O\left(1{,}5; \frac{729}{64}\right)$

$P\left(-\frac{125}{512}; -\frac{5}{8}\right)$ $\quad Q\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{2}\right)$ $\quad R\left(\frac{7}{4}; \frac{63}{343}\right)$ $\quad S\left(\frac{1}{7}; 49\right)$ $\quad T\left(-\frac{2}{3}; -\frac{32}{243}\right)$

Függvények:

$a(x) = \sqrt[3]{x}$: ....

$b(x) = \sqrt[4]{x}$: ....

$c(x) = x^{-3}$: ....

$d(x) = x^{-4}$: ....

$e(x) = x^{5}$: ....

$f(x) = x^{6}$: ....

Megoldás:

A B, K, S és az M pont nincs rajta egyetlen függvény grafikonján sem.

Az a függvény grafikonján rajta vannak a C, D, I, P pontok.

A b függvény grafikonján rajta vannak a Q, E pontok.

A c függvény grafikonján rajta vannak a C, H, J, N, R pontok.

A d függvény grafikonján rajta van az A pont.

Az e függvény grafikonján rajta vannak a C, F, G, T pontok.

Az f függvény grafikonján rajta vannak az A, L, O pontok.

Kapcsolat a hatványfüggvény és a gyökfüggvény között

A tanulók alkossanak ismét 4 fős csoportokat! A tanulók a csoportokon belül párokban dolgoznak. A tanár minden csoportban szétosztja a feladatkártyákat és a betűket a 5. kártyakészletből. Mindenki a saját kártyájának megfelelően közös koordináta-rendszerben ábrázolja a függvények grafikonját, és jellemzi is a függvényeket egymás mellett, két oszlopban, ahogy a mintapéldákban is szerepel. Ha készen vannak a feladataikkal, elmondják egymásnak tapasztalataikat, kielemezve az oszlopok tartalmát.

2.5 kártyakészlet

Ábrázold és jellemezd az $f(x) = x^4$, illetve a $g(x) = \sqrt[4]{x}$ függvényeket!

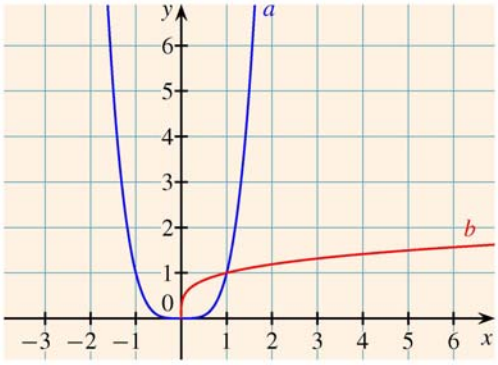
Ábrázold és jellemezd a $h(x)=x^3$, illetve a $k(x) = \sqrt[3]{x}$ függvényeket!

I	H

Mintapélda$_{11}$

Ábrázoljuk és jellemezzük az $a(x) = x^4$ és a $b(x) = \sqrt[4]{x}$ függvényeket a legtágabb értelmezési tartományon!

Megoldás:



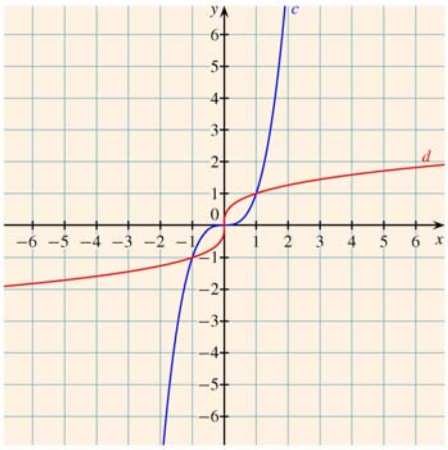
Jellemzés:

	$a(x) = x^4$	$b(x) = \sqrt[4]{x}$
1. É.T.	**R**	$\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$
2. É.K.	$\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$	$\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$
3. zérushely	$x = 0$	$x = 0$
4. monotonitás	$x \le 0$: szig. mon. csökk. $x \ge 0$: szig. mon. növő	szigorúan monoton növő
5. szélsőérték	abszolút minimumhely: $x = 0$ abszolút minimumérték: $a\,(0) = 0$	abszolút minimumhely: $x = 0$ abszolút minimumérték: $b\,(0) = 0$
6. paritás	páros	nem páros, nem páratlan
7. invertálhatóság	a megfelelő leszűkítés után invertálható: $x \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ vagy $x \in \mathbf{R}^- \cup \{0\}$	invertálható

Mintapélda$_{12}$

Ábrázoljuk és jellemezzük a valós számok halmazán értelmezett $c(x) = x^3$ és a $d(x) = \sqrt[3]{x}$ függvényeket!

Megoldás:



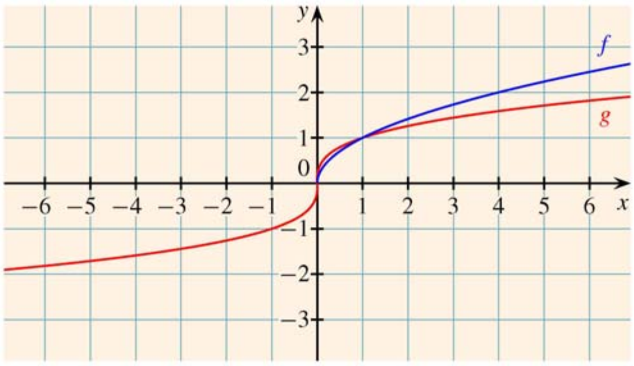
Jellemzés:

	$c(x) = x^3$	$d(x) = \sqrt[3]{x}$
1. É.T.	**R**	**R**
2. É.K.	**R**	**R**
3. zérushely	$x = 0$	$x = 0$
4. monotonitás	szigorúan monoton növő	szigorúan monoton növő

5. szélsőérték	nincs	nincs
6. paritás	páratlan	páratlan
7. invertálha–tóság	invertálható	invertálható

Általánosítva: Az eddigiekben a hatvány és a gyökfüggvények kapcsolatát vizsgáltuk. Megállapítottuk, hogy azonos páratlan kitevő esetén egymás inverzei. A gyökfüggvények vizsgálatához figyelembe kell venni, hogy, ha a kitevő páros, akkor a gyök csak nem negatív számokra értelmezhető. Ha a kitevő páratlan, akkor tetszőleges valós számnak létezik gyöke.

A megfelelő gyökfüggvények grafikonja:



<u>A gyökfüggvények jellemzése:</u>

	$f(x) = \sqrt[2k]{x}$	$g(x) = \sqrt[2k+1]{x}$
1. É.T.	$\mathbf{R}^{+} \cup \{0\}$	$\mathbf{R}$
2. É.K.	$\mathbf{R}^{+} \cup \{0\}$	$\mathbf{R}$
3. zérushely	$x = 0$	$x = 0$
4. monotonitás	szigorúan monoton növő	szigorúan monoton növő
5. szélsőérték	abszolút minimumhely: $x = 0$ abszolút minimumérték: $f(0) = 0$	nincs
6. paritás	nem páros, nem páratlan	páratlan
7. invertálha–tóság	invertálható	invertálható

A tanulók ismét 4 fős csoportokat alkotnak. Egy csoporton belül 2 –2 fő dolgozik együtt. Az egyik 2 fős csoport a 13. mintapéldát dolgozza fel, míg a másik a 14.-et. Ha átnézték és feldolgozták, elmagyarázzák egymásnak, majd megoldanak néhány feladatot a saját szintjüknek megfelelően. Jobb csoportoknál a 15. mintapélda is előkerülhet.

Mintapélda$_{13}$

Melyik az a legbővebb számhalmaz, amelyen a következő függvények értelmezhetők?

a) $a(x) = \sqrt{x+1}$ b) $b(x) = \sqrt[3]{x+1}$ c) $c(x) = \sqrt[10]{x^2 - 2x + 3}$

d) $d(x) = \sqrt[11]{x^2 - 2x + 3}$ e) $e(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$

Megoldás:

a) Mivel a gyökkitevő páros, ezért a gyökjel alatti kifejezés nem lehet negatív.
$x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -1$, azaz a megoldás a $[-1; \infty[$ halmaz.

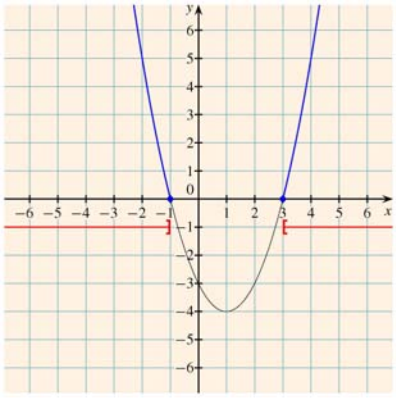
b) Mivel a gyökkitevő páratlan, azért az értelmezési tartomány a valós számok halmaza.

c) Mivel a gyökkitevő páros, ezért a gyökjel alatti kifejezés nem lehet negatív.

Oldjuk meg az $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ egyenlőtlenséget!

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$, ebből $x_1 = 3$ és $x_2 = -1$

A keresett tartomány: $]-\infty; -1] \cup [3; \infty[$



d) Mivel a gyökkitevő páratlan, azért az értelmezési tartomány a valós számok halmaza.

e) Mivel a gyökkitevő páratlan, ezért a gyökjel alatti kifejezés a valós számok halmazán értelmezett. Csak azt kell megvizsgálni, hogy a nevező hol veszi fel a nulla értéket, mert ott nincs értelmezve a tört.

$\sqrt[5]{x} = 0$, ebből $x = 0$, vagyis az *e* függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, kivéve a 0-át.

Mintapélda$_{14}$

Ábrázoljuk és jellemezzük az $f(x) = -(x+1)^3 - 2$ függvényt!

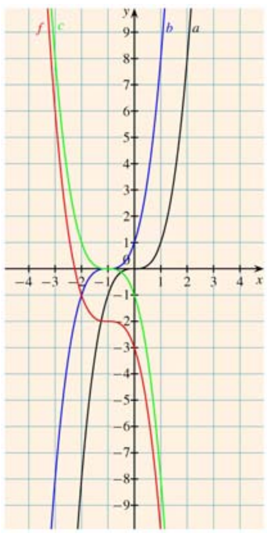
Megoldás:

Transzformációs lépések:

1. $a(x) = x^3$	alapfüggvény ábrázolása
2. $b(x) = (x+1)^3$	*a* grafikonjának eltolása a $\mathbf{v}(-1; 0)$ vektorral
3. $c(x) = -(x+1)^3$	*b* grafikonjának tükrözése az *x* tengelyre
4. $f(x) = -(x+1)^3 - 2$	*c* grafikonjának eltolása a $\mathbf{v}(0; -2)$ vektorral

<u>Jellemzés:</u>

1. É.T.	**R**
2. É.K.	**R**
3. zérushely	$-(x+1)^3 - 2 = 0$, ebből $x = \sqrt[3]{-2} - 1$
4. monotonitás	szigorúan monoton csökkenő



5. szélsőérték nincs
6. paritás nem páros, nem páratlan
7. invertálható

Mintapélda$_{15}$

Ábrázoljuk és jellemezzük az $g(x)=2\sqrt[4]{x-2}+1$ függvényt!

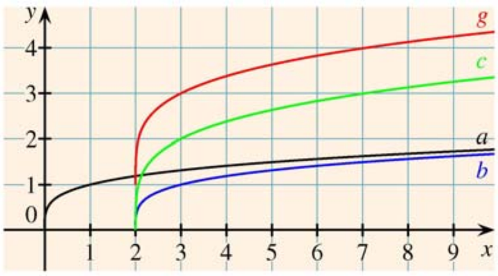
Megoldás:

Transzformációs lépések:

1. $a(x)=\sqrt[4]{x}$ alapfüggvény ábrázolása
2. $b(x)=\sqrt[4]{x-2}$ *a* grafikonjának eltolása a $\mathbf{v}(2;\,0)$ vektorral
3. $c(x)=2\sqrt[4]{x-2}$ *b* grafikonjának kétszeres nyújtása az *y* tengely mentén
4. $g(x)=2\sqrt[4]{x-2}+1$ *c* grafikonjának eltolása a $\mathbf{v}(0;\,1)$ vektorral

Jellemzés:

1. É.T. $[\,2;\,\infty\,[$
2. É.K. $[\,1;\,\infty\,[$
3. zérushely nincs
4. monotonitás szigorúan monoton növő
5. szélsőérték abszolút minimumhely: $x=2$
abszolút minimumérték: $g(2)=1$
6. paritás nem páros, nem páratlan
7. invertálható



Mintapélda$_{16}$

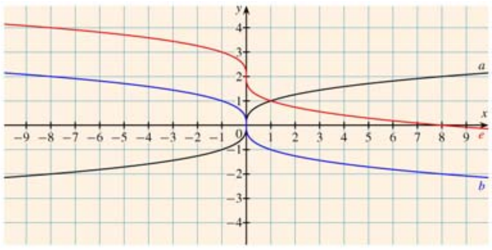
Ábrázoljuk és jellemezzük az alábbi függvényeket!

a) $e(x)=2-\sqrt[3]{x}$ b) $f(x)=\sqrt[4]{32-16x}$

Megoldás:

a) Transzformációs lépések:

1. $a(x)=\sqrt[3]{x}$ alapfüggvény ábrázolása
2. $b(x)=-\sqrt[3]{x}$ *a* grafikonjának tükrözése az *x* tengelyre
3. $e(x)=2-\sqrt[3]{x}$ *b* grafikonjának eltolása a $\mathbf{v}(0;\,2)$ vektorral



Jellemzés:

1. É.T. **R**
2. É.K. **R**

3. zérushely $2-\sqrt[3]{x}=0$
$2\sqrt[3]{x}=2$

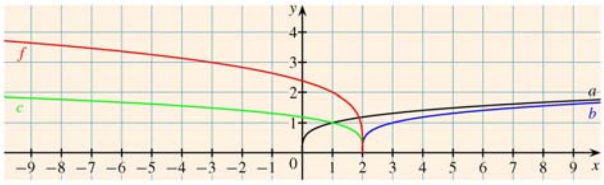
	$x = 8$
4. monotonitás	szigorúan monoton csökkenő
5. szélsőérték	nincs
6. paritás	nem páros, nem páratlan
7. invertálható	

b) Az ábrázoláshoz végezzük el a következő átalakítást:

$\sqrt[4]{32-16x} = \sqrt[4]{-(16x-32)} = \sqrt[4]{-16(x-2)} = 2\cdot\sqrt[4]{-(x-2)}$

A transzformáció lépései:

1. $a(x) = \sqrt[4]{x}$ alapfüggvény ábrázolása
2. $b(x) = \sqrt[4]{x-2}$ a grafikonjának eltolása a $\mathbf{v}(2;0)$ vektorral
3. $c(x) = \sqrt[4]{-(x-2)}$ b grafikonjának tükrözése az $x = 2$ egyenesre
4. $f(x) = 2\sqrt[4]{-(x-2)}$ c grafikonjának kétszeres nyújtása az y tengely mentén



<u>Jellemzés:</u>

1. É.T.	$]-\infty; 2]$
2. É.K.	$\mathbf{R}^+$
3. zérushely	$x = 2$
4. monotonitás	szigorúan monoton csökkenő
5. szélsőérték	abszolút minimumhely: $x = 2$ abszolút minimumérték: $f(2) = 0$
6. paritás	nem páros, nem páratlan
7. invertálható	

Feladatok

22. Határozd meg mindazokat az x-eket, amelyekre értelmezhető a függvény!

a) $f(x) = \sqrt[4]{x-2}$ b) $g(x) = \sqrt[5]{5+x}$ c) $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x+1}}$

d) $i(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ e) $j(x) = \sqrt{\dfrac{5}{-2-x}}$ f) $k(x) = \sqrt{2x-7}$

g) $l(x) = \sqrt[3]{2x-7}$

Megoldás:

a) $x \ge 2$; b) $x \in \mathbf{R}$; c) $x > -1$; d) $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$; e) $-2 > x$; f) $x \ge 3{,}5$; g) $x \in \mathbf{R}$;

23. Határozd meg mindazokat az x-eket, amelyekre értelmezhető a függvény!

a) $a(x) = \sqrt[6]{|x|-5}$ b) $b(x) = \sqrt[8]{\dfrac{4-x}{2+x}}$ c) $c(x) = \sqrt[7]{\dfrac{2x+5}{2-x}}$

d) $d(x) = \sqrt{(x-3)(2x+8)}$ e) $e(x) = \sqrt[12]{36-x^2}$ f) $f(x) = \sqrt[5]{-x^2+6x-8}$

g) $g(x) = \sqrt[4]{x^2-x-6}$ h) $h(x) = \sqrt[6]{x^2+1}$

Megoldás:

a) $x \le -5$ vagy $x \ge 5$; b) $-2 < x \le 4$; c) $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$; d) $x \ge 3$ vagy $-4 \ge x$; e) $-6 \le x \le 6$; f) $x \in \mathbf{R}$; g) $x \ge 3$ vagy $-2 \ge x$; h) $x \in \mathbf{R}$.

24. Ábrázold és jellemezd az alábbi hatványfüggvényeket a megadott értelmezési tartományokon!

a) $f(x) = x^4 - 1$; $x \in \mathbf{Z}$ b) $g(x) = x^3 + 2$; $x \in [-2; 1\,[$

c) $h(x) = \dfrac{x^4}{4}$; $x \in \,]-1,5; 1,5\,[$ d) $i(x) = -2x^3$; $x \in \mathbf{N}$

e) $j(x) = (x-1)^4$; $x \in [-1; 2]$ f) $k(x) = (x+3)^3$; $x \in [-5; -1]$

Megoldás:

Ezek a függvények elemi függvénytranszformációkkal ábrázolhatók. A függvények jellemzése a korábbi mintapéldák alapján történhet.

25. Ábrázold és jellemezd az alábbi gyökfüggvényeket a megfelelő értelmezési tartományokon!

a) $a(x) = \sqrt[4]{x} + 1$ b) $b(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ c) $c(x) = -\sqrt[4]{x}$ d) $d(x) = 2\sqrt[3]{x}$

e) $e(x) = \sqrt[3]{x-1}$ f) $f(x) = \sqrt[4]{x+2}$

Megoldás:

Ezek a függvények elemi függvénytranszformációkkal ábrázolhatók. A függvények jellemzése a korábbi mintapéldák alapján történhet.

26. Ábrázold és jellemezd az alábbi hatványfüggvényeket a valós számok halmazán!

a) $f(x) = -x^4 + 1$ b) $g(x) = 2 - x^3$ c) $h(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + 3$

d) $k(x) = 2x^4 - 4$ e) $l(x) = (x-1)^4 + 3$ f) $m(x) = (x+2)^3 - 1$

Megoldás:

Ezek a függvények elemi függvénytranszformációkkal ábrázolhatók. A függvények jellemzése a korábbi mintapéldák alapján történhet.

27. Ábrázold és jellemezd az alábbi gyökfüggvényeket a megfelelő értelmezési tartományokon!

a) $a(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{x} - 4$ b) $b(x) = 2\sqrt[4]{x-2}$ c) $c(x) = -\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{x+3}$

d) $d(x) = \sqrt[4]{3+x} - 2$ e) $e(x) = \sqrt[3]{x-3} + 1$

Megoldás:

Ezek a függvények elemi függvénytranszformációkkal ábrázolhatók. A függvények jellemzése a korábbi mintapéldák alapján történhet.

V. A hatványozás kiterjesztése racionális kitevőre

A hatvány fogalmát az eddig megismert egész kitevőkről tört kitevőkre is szeretnénk kiterjeszteni úgy, hogy az ismert azonosságaink továbbra is érvényben maradjanak. Az ilyen jellegű követelményt a matematikában **permanencia-elvnek** nevezzük.

Mintapélda17

Egy sejttenyészet óránként duplázódik meg. Kezdetben 1 sejtünk van. Mennyi lesz 1 óra, 2óra, 3óra, 4 óra, 4,5 óra múlva?

Megoldás:

1 óra múlva: $1\cdot 2 = 2 = 2^1$

2 óra múlva: $2\cdot 2 = 4 = 2^2$

3 óra múlva: $4\cdot 2 = 8 = 2^3$

4 óra múlva: $8\cdot 2 = 16 = 2^4$

4,5 óra múlva: $2^{4,5}$

A $2^{4,5}$ értékét akarjuk meghatározni. legyen $x = 2^{4,5}$, ahol $x > 0$. Az egyenletet mindkét oldalát négyzetre emelve: $x^2 = \left(2^{4,5}\right)^2$. Alkalmazzuk a hatvány hatványára vonatkozó azonosságot: $x^2 = 2^9$. Ennek a pozitív megoldása az $x = \sqrt{2^9}$.

Azaz azt kaptuk, hogy $x = 2^{4,5} = 2^{\frac{9}{2}} = \sqrt{2^9} = \sqrt{512} \approx 22,63$.

Megközelítőleg ennyi sejtünk van 4,5 óra múlva.

Mintapélda18

Próbáljunk értelmet adni az alábbi törtkitevőjű hatványoknak az előző feladat gondolatmenete alapján!

a) $16^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $(-16)^{\frac{1}{2}}$

b) $64^{\frac{1}{3}}$ $\qquad$ $(-64)^{\frac{1}{3}}$

Megoldás:

a) Legyen $x = 16^{\frac{1}{2}}$, $\quad y = (-16)^{\frac{1}{2}}$, ahol $x > 0$, mert pozitív számok hatványait pozitívnak értelmezzük.

Négyzetre emelve: $x^2 = \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 16$, $y^2 = \left[(-16)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = -16$.

Ebből: $x = \sqrt{16} = 4$, mert $x > 0$; $y = \sqrt{-16}$ pedig nem értelmezhető.

Innen: $x = 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

b) Legyen $x = 64^{\frac{1}{3}}$, $y = (-64)^{\frac{1}{3}}$, ahol $x > 0$, mert pozitív számok hatványait pozitívnak értelmezzük.

Harmadik hatványra emelve: $x^3 = \left(64^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 64$, $y^3 = \left[(-64)^{\frac{1}{3}}\right]^3 = -64$.

Ebből: $x = \sqrt[3]{64} = 4$, $y = \sqrt[3]{-64} = -4$.

Mivel $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, vizsgáljuk meg az $x = 64^{\frac{2}{6}}$ és az $y = (-64)^{\frac{2}{6}}$ számokat.

$x = \left(64^2\right)^{\frac{1}{6}} = 4096^{\frac{1}{6}}$, $y = \left[(-64)^2\right]^{\frac{1}{6}} = 4096^{\frac{1}{6}}$

Hatodik hatványra emelve: $x^6 = \left(4096^{\frac{1}{6}}\right)^6 = 4096$, $y^6 = \left[4096^{\frac{1}{6}}\right]^6 = 4096$

Ebből: $x = \sqrt[6]{4096} = 4$, $y = \sqrt[6]{4096} = 4$

Észrevehetjük, hogy $x = 64^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{2}{6}} = 4$, de $y = (-64)^{\frac{1}{3}} = (-64)^{\frac{2}{6}}$ eredménye nem határozható meg egyértelműen (először – 4-et, másodszor 4-et kaptunk eredményül), ezért **negatív alap esetén nem értelmezzük a törtkitevőjű hatványokat**.

Egy pozitív valós szám $\frac{n}{k}$-adik hatványa az alap n-edik hatványából vont k-adik gyök.

$$a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n} \quad a > 0,\ a \in \mathbf{R} \quad n \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{N} \setminus \{0; 1\}$$

Megállapodás: Ha $\frac{n}{k} > 0$, akkor $0^{\frac{n}{k}} = 0$.

Mintapélda$_{19}$

Számítsuk ki a következő hatványok pontos értékét!

a) $64^{\frac{5}{6}}$ b) $256^{\frac{3}{4}}$ c) $81^{-\frac{3}{4}}$ d) $125^{-\frac{2}{3}}$ e) $243^{0,2}$ f) $144^{-0,5}$

Megoldás:

a) $64^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{64^5} = \left(\sqrt[6]{64}\right)^5 = 2^5 = 32$

b) $256^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{256^3} = \left(\sqrt[4]{256}\right)^3 = 4^3 = 64$

c) $81^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^{-3}} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

d) $125^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125^{-2}} = \left(\sqrt[3]{125}\right)^{-2} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

e) $243^{0,2} = 243^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{243} = 3$

f) $144^{-0,5} = 144^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{144^{-1}} = \left(\sqrt{144}\right)^{-1} = 12^{-1} = \frac{1}{12}$

Módszertani megjegyzés: Dominó játék (a törtkitevős hatványok gyakorlására, a fogalom elmélyítésére). Minden csoportnak adjunk 16 darab kártyát. Feladatuk felfelé fordítva kirakni a dominókat úgy, hogy minden hatványhoz megtalálják a hozzátartozó értéket.

2.6 kártyakészlet

$9^{\frac{1}{2}}$	1,5	$25^{-\frac{1}{2}}$	4	$49^{0,5}$	$\frac{1}{32}$	$\left(\frac{64}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{2}$
$81^{\frac{3}{4}}$	3	$27^{-\frac{1}{3}}$	0,2	$25^{1,5}$	7	$\left(\frac{25}{4}\right)^{0,5}$	1,25
$125^{\frac{2}{3}}$	27	$8^{-\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{3}$	$32^{-0,6}$	125	$\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$	$\frac{5}{2}$
$64^{\frac{1}{3}}$	25	$16^{-\frac{5}{4}}$	0,25	$16^{-0,25}$	$\frac{1}{8}$	$2,25^{\frac{1}{2}}$	2,25

Feladatok

28. Írd fel gyökjelekkel a következő hatványokat!

a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $7^{\frac{2}{3}}$ c) $6^{-\frac{1}{3}}$ d) $8^{-\frac{3}{4}}$ e) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{4}{3}}$ f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}}$

g) $(9x)^{\frac{1}{2}}$ h) $(16y)^{\frac{1}{4}}$ i) $\left(\frac{z}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ j) $\left(\frac{x}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$ k) $\left(\frac{y}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$ l) $\left(\frac{z}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

Megoldás:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{7^2}$ c) $\sqrt[3]{6^{-1}}$ d) $\sqrt[4]{8^{-3}}$ e) $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{5}\right)^4}$ f) $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{-5}}$

g) $3\cdot\sqrt{x}\quad x\geq 0$ h) $2\cdot\sqrt[4]{y}\quad y\geq 0$ i) $\frac{\sqrt[3]{z}}{2}$

j) $\frac{5}{\sqrt{x}}\quad x>0$ k) $\frac{27}{\sqrt[4]{y^3}}\quad y>0$ l) $\frac{9}{\sqrt[3]{z^2}}\quad z\neq 0$

29. Írd át törtkitevős alakra a következő gyököket!

a) $\sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[3]{5}$ c) $\sqrt[3]{2^5}$ d) $\sqrt[4]{3^3}$ e) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ f) $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^4}$

Megoldás:

a) $3^{\frac{1}{4}}$ b) $5^{\frac{1}{3}}$ c) $2^{\frac{5}{3}}$ d) $3^{\frac{3}{4}}$ e) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$ f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}}$

30. Keresd meg a párját!

a) $3^{\frac{1}{5}}$ A) $\sqrt[3]{16}$

b) $2^{\frac{4}{3}}$ B) $\sqrt[5]{\frac{9}{4}}$

c) $2^{-\frac{3}{4}}$ C) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{5}}$ D) $\sqrt[5]{3}$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{4}}$ E) $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

f) $3^{-\frac{1}{3}}$ F) $\sqrt[4]{\frac{27}{8}}$

Megoldás:

a) – D), b) – A), c) – E), d) – B), e) – F), f) – C).

31. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat!

$2^{\frac{1}{3}}$ $\quad \sqrt{8}$ $\quad 4^{\frac{1}{3}}$ $\quad \sqrt[3]{16}$ $\quad 2^{-1}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\quad 2^{-\frac{4}{3}}$ $\quad \sqrt{2}$

Megoldás:

$2^{\frac{1}{3}}$ $\quad \sqrt{8}=2^{\frac{3}{2}}$ $\quad 4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$ $\quad \sqrt[3]{16}=2^{\frac{4}{3}}$ $\quad 2^{-1}$ $\quad \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}=2^{-\frac{1}{3}}$ $\quad 2^{-\frac{4}{3}}$ $\quad \sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$

$$2^{-\frac{4}{3}} < 2^{-1} < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < 2^{\frac{1}{3}} < \sqrt{2} < 4^{\frac{1}{3}} < \sqrt[3]{16} < \sqrt{8}$$

32. Írd fel 3 hatványaként a következő kifejezéseket!

a) $\sqrt[7]{3}$ b) $\sqrt[5]{3^4}$ c) $\sqrt[3]{81}$ d) $\sqrt[4]{27^3}$ e) $\sqrt{9\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{81}}\cdot\sqrt[5]{27}$

f) $\sqrt[9]{\dfrac{1}{3^4}}$ g) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$ h) $\sqrt[6]{\sqrt[3]{3}}$ i) $\sqrt{3^4}\cdot\sqrt[3]{3^7}$ j) $\dfrac{\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[8]{243}\cdot\sqrt{81}\cdot\sqrt[4]{3^{13}}\cdot\sqrt[8]{27}}{\sqrt[3]{81}\cdot\sqrt[3]{3^{11}}}$

Megoldás:

a) $3^{\frac{1}{7}}$ b) $3^{\frac{4}{5}}$ c) $3^{\frac{4}{3}}$ d) $3^{\frac{9}{4}}$ e) $3^{\frac{287}{120}}$

f) $3^{-\frac{4}{9}}$ g) $3^{-\frac{2}{3}}$ h) $3^{\frac{1}{18}}$ i) $3^{\frac{13}{3}}$ j) 3^2

33. Hozd egyszerűbb alakra a következő hatványokat!

a) $\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{3}{2}}\right)^{-2}$ b) $\left(b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ c) $\left(c^{\frac{2}{3}}\cdot c^{-\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{5}}$

d) $\left(d^{\frac{2}{3}}\cdot d^{\frac{3}{2}}\right)^{-4}$ e) $\left(e^{\frac{3}{4}}\cdot e^{-\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ f) $\left(f^{\frac{2}{5}}\cdot f^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

Megoldás:

a) $\left(a^2\right)^{-2}=a^{-4}$ b) $\left(b^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=b^{\frac{5}{2}}$ c) $\left(c^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{5}}=c^{\frac{3}{10}}$

d) $\left(d^{\frac{13}{6}}\right)^{-4}=d^{-\frac{26}{3}}$ e) $\left(e^{-\frac{11}{12}}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{-\frac{11}{24}}$ f) $\left(f^{\frac{19}{10}}\right)^{-\frac{1}{3}}=f^{-\frac{19}{30}}$

Matematikai TOTÓ

Módszertani megjegyzés: Minden tanuló egyedül dolgozik a feladatokon. Ha letelt az idő, vagy elkészültek a tanulók, akkor mindenki átadja a padtársának a füzetét, aki a feladatok közös megbeszélése alapján kijavítja a TOTÓ-t. A hibátlan kitöltőket megjutalmazhatjuk.

Matematikai TOTÓ

	Határozd meg a következő kifejezések értékét!	**1**	**2**	**X**
1.	$2\cdot 5^3+15\cdot 5^2$	25375	625	6625
2.	$2\sqrt{45}+3\sqrt{80}-\sqrt{125}$	$13\sqrt{5}$	205	$41\cdot\sqrt{5}$
3.	$\sqrt{7+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{6}}$	31	$\sqrt{31}$	5
4.	$\sqrt[4]{-\frac{1}{81}}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	**Nem értelmezzük**
5.	$\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	**Nem értelmezzük**
6.	$\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[4]{80}$	100	10	10000
7.	$\frac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}}$	$\sqrt[5]{124}$	32	2
8.	$(0{,}25)^{-\frac{3}{2}}$	8	0,125	$\frac{1}{4}$
9.	$\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
10.	$\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$	-16	$\frac{1}{16}$	16
11.	$125^{-\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{25}$	25	-25
12.	$\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}$	$\sqrt{a^3}$	$\sqrt[3]{a^2}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$
13.	$\left(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{2}{3}}$	$\sqrt[9]{\frac{1}{a^7}}$	$-\sqrt[9]{a^7}$	$\sqrt[7]{\frac{1}{a^9}}$

Megoldás:

1.) 2	2.) 1	3.) X	4.) X	5.) 1	6.) 2	7.) X
8.) 1	9.) X	10.) X	11.) 1	12.) 2	13) 1	

Vegyes feladatok

34. Határozd meg az alábbi kifejezések pontos értékét!

a) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{12}\right)^2$ b) $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)^2$

c) $\left(\sqrt{6+\sqrt{20}}-\sqrt{6-\sqrt{20}}\right)^2$ d) $\left(\sqrt{9-\sqrt{17}}+\sqrt{9+\sqrt{17}}\right)^2$

Megoldás:

a) $3-2\sqrt{3\cdot 12}+12=15-2\sqrt{36}=15-2\cdot 6=3$

b) $4\cdot 2+4\sqrt{2\cdot 18}+18=8+4\sqrt{36}+18=26+4\cdot 6=50$

c) $6+\sqrt{20}-2\sqrt{36-20}+6-\sqrt{20}=12-2\sqrt{16}=12-2\cdot 4=4$

d) $9-\sqrt{17}+2\sqrt{81-17}+9+\sqrt{17}=18+2\sqrt{64}=18+2\cdot 8=34$

35. Határozd meg mindazokat az x-eket, amelyekre értelmezhető a függvény!

a) $a(x)=\dfrac{\sqrt[10]{3-x}}{2}$ b) $b(x)=\dfrac{\sqrt[9]{7-x}}{-3}$ c) $c(x)=\sqrt[3]{\dfrac{-3}{x+1}}$

d) $d(x)=\sqrt[6]{|x|}$ e) $e(x)=\sqrt[7]{|x|}$

Megoldás:

a) $3\ge x$; b) $x\in\mathbf{R}$; c) $x\ne -1$; d) $x\in\mathbf{R}$; e) $x\in\mathbf{R}$

36. Határozd meg mindazokat az x-eket, amelyekre értelmezhető a függvény!

a) $a(x)=\sqrt[5]{|x|-1}$ b) $b(x)=\sqrt[4]{|x|+2}$ c) $c(x)=\dfrac{\sqrt[13]{3x-5}}{4-\sqrt{x}}$

d) $d(x)=\sqrt[15]{2x^2-8}$ e) $e(x)=\sqrt[5]{x^2+2}$ f) $f(x)=\sqrt{-x^2-1}$

g) $g(x)=\dfrac{\sqrt[10]{12-3x}}{\sqrt[9]{x+4}}$

Megoldás:

a) $x\in\mathbf{R}$; b) $x\in\mathbf{R}$; c) $x\ge 0$ és $x\ne 16$; d) $x\in\mathbf{R}$; e) $x\in\mathbf{R}$; f) nincs értelmezve; g) $4>x$

Kislexikon

Köbgyök: Az a valós szám köbgyöke az a valós szám, amelynek harmadik hatványa a:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a.$$

n-edik gyök:

- **Páros** pozitív egész ***n*-re** az ***a* nemnegatív valós szám *n*-edik gyöke** az a nemnegatív valós szám, amelynek az n-edik hatványa a ($n \in \mathbf{N}^+ \setminus \{1\}$).
- **Páratlan,** 1-nél nagyobb egész ***n*-re** az ***a* valós szám *n*-edik gyöke** az a valós szám, amelynek az n-edik hatványa a. Jelölés: az a szám n-edik gyöke: $\sqrt[n]{a}$.

Az n-edik gyökre vonatkozó azonosságok:

A definíció által megengedett értékekre. ($n > 1$, $n \in \mathbf{N}$)

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, ha $n = 2p$, akkor $a \ge 0, b \ge 0$ ($p \in \mathbf{N}^+$)

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \ne 0$

3. $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$

4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

5. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$, $m, k \in \mathbf{Z} \setminus \{0; 1\}, n \in \mathbf{N} \setminus \{0; 1\}$

Egy pozitív valós szám $\frac{n}{k}$-adik hatványa az alap n-edik hatványából vont k-adik gyök.

$$a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n} \quad a > 0, a \in \mathbf{R} \quad n \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N} \setminus \{0; 1\}$$

Megállapodás: Ha $\frac{n}{k} > 0$, akkor $0^{\frac{n}{k}} = 0$.

Hatványfüggvény: A valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}^+$ függvényeket **hatványfüggvényeknek** nevezzük.

Gyökfüggvény: A $g(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1\}$ függvényeket **gyökfüggvényeknek** nevezzük. Ha $n > 1$ és páratlan, akkor minden valós számhoz hozzá tudjuk rendelni annak n-edik gyökét.

Ha pedig páros, akkor a nem negatív valós számokhoz tudjuk egyértelműen hozzárendelni annak *n*-edik gyökét.

Invertálható függvény: Egy függvény **invertálható**, ha kölcsönösen egyértelmű.

Permanencia-elv: Azt jelenti, hogy egy művelet értelmezését úgy terjesztjük ki bővebb számhalmazra, hogy a szűkebb halmazban érvényes műveleti szabályok a bővebb halmazban is érvényesek maradjanak.