Matematika „A”

10. szakiskolai évfolyam

5. modul
Hatványozás, oszthatóság, normálalak

Készítette: Csákvári Ágnes

A modul célja	A hatványozás fogalmának kiterjesztése. Értelmezzük a hatványozást tetszőleges (valós) alap esetén 0, pozitív és negatív egész kitevőre. Megmutatjuk, hogy a kiterjesztést úgy végezzük, hogy a tanult műveleti tulajdonságok megmaradjanak. Hatványozás azonosságainak megmutatása. Műveletek nagyon kicsi és nagyon nagy mennyiségek normálalakban megadott mérőszámaival. Számok normálalakban történő felírása, műveletek végzése normálalakban adott számokkal. Összetett számok törzstényezőre bontása, törzstényezők hatványalakban történő felírása.
Időkeret	Ajánlott óraszám 18, a modulban kidolgozott órák száma 9.
Ajánlott korosztály	10. évf.
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Fizika, kémia, csillagászat, szakmai számítások. Szűkebb környezetben: Geometriai számítások. Kombinatorika. Ajánlott megelőző tevékenységek: Hatványozás pozitív egész kitevőre. Műveletek racionális számokkal. Maradékos osztás, oszthatósági szabályok. Összegek, különbségek szorzata, nevezetes azonosságok. Ajánlott követő tevékenységek: Számításos térgeometriai feladatok. Számsorozatok. Kombinatorika, valószínűség, statisztika.

A képességfejlesztés fókuszai	Számolás, számlálás, számítás: Hatványkitevő megállapítása szorzatalakból. Számok hatványainak kiszámítása. Hatványozás azonosságainak alkalmazása. Osztó, többszörös meghatározása. Műveletek racionális számokkal. Normálalak felírása, 10 hatványkitevőjének meghatározása. Rendszerezés, kombinatív gondolkodás: Új ismeretek beillesztése a már meglévő tananyagtartalomba. Hatványok felírása különböző alakban az azonosságok felhasználásával. Analóg gondolkodás. Induktív, deduktív következtetés: Permanencia-elv megismerése. Hatványozás kiterjesztése. Azonosságok alkalmazása. Konkrét példákon keresztül általános szabályok felismerése, majd a szabályok alkalmazása.

TÁMOGATÓ RENDSZER

Számológép, 5.1–5.6. kártyakészletek.

A TANANYAG JAVASOLT ÓRABEOSZTÁSA:

1. óra: Pozitív egész kitevőjű hatvány (ismétlés)
2. óra: Negatív egész és nulla kitevőjű hatvány
3. óra: A hatványozás azonosságainak kiterjesztése
4. óra: Gyakorlás
5. óra: Oszthatóság, számok törzstényezőkre bontása
6. óra: Közös osztó, közös többszörös
7. óra: Gyakorlás
8. óra: Számok normálalakja
9. óra: Műveletek normálalakban megadott számokkal

Mivel az anyagrészre 18 óra áll rendelkezésre, az órabeosztáson az igények szerint változtassunk!

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	**Kiemelt készségek, képességek**	**Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény**
I. Pozitív egész kitevőjű hatvány (ismétlés)			
1.	Hatványozás definíciójának átismétlése (csoportalakítás)	számlálás	5.1 kártyakészlet
2.	Azonosságok átismétlése	számlálás, induktív következtetés	5.2 kártyakészlet; 1. mintapélda
3.	Hatványozás számológéppel, gyakorlás csoportmunkában	számlálás, számolás, deduktív következtetés	5.3 kártyakészlet; 1–4. feladatok

II. Negatív egész és nulla kitevőjű hatvány			
1.	Definíció felfedezése és alkalmazása	rendszerezés, induktív- és deduktív következtetés, kombinatív gondolkodás	2., 3. mintapélda
2.	Gyakorlás feladatküldéssel majd önállóan	deduktív következtetés, számolás, kombinatív gondolkodás	5–8. feladatok
3.	Az azonosságok kiterjesztése		4. mintapélda
4.	Gyakorlás csoportmunkában (a hatványalap konkrét szám)	deduktív következtetés, számolás	9. feladat
5.	Gyakorlás csoportmunkában (feldarabolt négyzetek módszere; a hatványalap betű)	induktív-, deduktív következtetés, számolás, számítás	5.4. kártyakészlet 10. feladat
6.	Matematikai TOTÓ (a hatványalap betű)	számítás, deduktív következtetés	11. feladat

III. Oszthatóság			
1.	Oszthatóság, osztó, többszörös, prímszámok Mintapéldák és a definíciók megbeszélése után gyakorlás csoportmunkában, szakértői mozaikkal. Oszthatósági szabályok felfedezése.	szövegértés, induktív következtetés, számolás; rendszerezés, kombinatív gondolkodás	5., 6. mintapélda; 5.5 kártyakészlet; 12–14. feladatok
2.	Prímtényezőkre bontás	számolás	7. mintapélda; 15., 16. feladat
3.	Közös osztó, legnagyobb közös osztó Mintapéldák és a definíciók megbeszélése után gyakorlás csoportmunkában, szakértői mozaikkal.	induktív-, deduktív következtetés, számolás; rendszerezés, kombinatív gondolkodás	8., 9. mintapélda; 5.6. kártyakészlet; 17–20. feladatok
4.	Közös többszörös, legkisebb közös többszörös Mintapéldák és a definíciók megbeszélése után gyakorlás csoportmunkában, szakértői mozaikkal.		10., 11. mintapélda; 5.6. kártyakészlet; 21–24. feladatok

IV. Pozitív számok normálalakja			
1.	Normálalak definíciója A normálalak felfedezése után csoportmunkában vagy önállóan gyakorlás.	szövegértés, számlálás, számolás, induktív következtetés, rendszerezés	12., 13. mintapélda; 27–29. feladatok
2.	Műveletek normálalakú számokkal A mintapéldák megbeszélése után önálló gyakorlás.	számlálás, számolás, rendszerezés, kombinatív gondolkodás	14., 15. mintapélda; 30. feladat

I. Pozitív egész kitevőjű hatvány

(Ismétlő anyag)

Korábban már találkoztunk a hatványozás műveletével, például a Pitagorasz-tétel kapcsán, vagy a négyzet területének, kocka felszínének, térfogatának kiszámításakor. Elevenítsük fel ismereteinket!

Hatványozáskor egy tetszőleges számot szorzunk meg önmagával.

5.2 kártyakészlet alkalmazása

Módszertani ajánlás: Csoportalakítás az 5.1. kártyakészlettel.

A tanár kiteszi az asztalokra az első oldalon található kártyákat, a 2., 3. és 4. oldalon lévőket pedig szétosztja a tanulók között. Azok a tanulók kerülnek egy csoportba, akiknek a száma ugyanazon a hatványon szerepel. Ahhoz az asztalhoz ülnek, amelyen a megfelelő hatványalakot találják. Miután mindenki megtalálta a helyét, felelevenítjük a hatványozás definícióját.

10. szakiskolai o. 5. modul Hatványozás, oszthatóság, normálalak 5.1. kártyakészlet 1

a^1	a^2	a^3	a^4
a^5	a^6	a^7	a^8

10. szakiskolai o. 5. modul Hatványozás, oszthatóság, normálalak 5.1. kártyakészlet 2

0,3	217	–4	$\frac{11}{3}$
0,3·0,3	217·217	(–4)·(–4)	$\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}$
0,3·0,3·0,3	217·217·217	(–4)·(–4)·(–4)	$\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}$
0,3·0,3·0,3·0,3	217·217·217·217	(–4)·(–4)·(–4)·(–4)	$\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}$

10. szakiskolai o. 5. modul Hatványozás, oszthatóság, normálalak 5.1. kártyakészlet 3

0,3·0,3·0,3·0,3·0,3	217·217·217·217·217
0,3·0,3·0,3·0,3·0,3·0,3	217·217·217·217·217·217
0,3·0,3·0,3·0,3·0,3·0,3·0,3	217·217·217·217·217·217·217
0,3·0,3·0,3·0,3·0,3·0,3·0,3·0,3	217·217·217·217·217·217·217·217

10. szakiskolai o. 5. modul Hatványozás, oszthatóság, normálalak 5.1. kártyakészlet 4

(–4)·(–4)·(–4)·(–4)·(–4)	$\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}$
(–4)·(–4)·(–4)·(–4)·(–4)·(–4)	$\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}$
(–4)·(–4)·(–4)·(–4)·(–4)·(–4)·(–4)	$\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}$
(–4)·(–4)·(–4)·(–4)·(–4)·(–4)·(–4)·(–4)	$\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{3}$

Egy 5 cm oldalú négyzet területe: $5\cdot5 = 5^2$ (cm^2).

Egy 3 cm élű kocka térfogata: $4\cdot4\cdot4 = 4^3$ (cm^3)

A megoldást mindkét esetben **azonos tényezőkből álló szorzat** adja.

Ezt a műveletet hatványozásnak nevezzük, az **azonos tényezőkből álló szorzat a hatvány**.

Az azonos tényező (az 5, illetve a 4) a hatvány alapja. A tényezők száma a kitevő (itt 2, illetve 3). Az 5^2 és 4^3 alakban felírt szorzat a hatvány.

Általánosan megfogalmazva:

a^n (ahol a tetszőleges valós szám és n pozitív egész) olyan n tényezős szorzatot jelent, amelynek minden tényezője a. a^n-t **hatvány**nak nevezzük, melyben a a **hatványalap** és n a **hatványkitevő**.

A műveletet **hatványozás**nak nevezzük.

Minden szám első hatványa önmaga, azaz $a^1 = a$ (*az 1 kitevőt nem szoktuk kiírni*)

5.2 kártyakészlet alkalmazása

Módszertani megjegyzés: A tanár minden csoportnak odaadja a 5.2. kártyakészletet. A csoportok feladata szétválogatni az egyes azonosságoknak megfelelően – ők próbálnak meg visszaemlékezni, illetve a kártyák alapján kikövetkeztetni az azonosságokat – a kártyákat, majd az egyes azonosságokon belül sorrendbe tenni úgy, hogy azok a műveleti sorrendnek megfelelően kövessék egymást. (Először a hatvány definícióját, majd a szorzás tulajdonságait alkalmazzuk.)

10. szakiskolai o. 5. modul Hatványozás, oszthatóság, normálalak 5.2 kártyakészlet 1

$(2\cdot3)^3$	$2^3\cdot3^3$	$2\cdot3\cdot2\cdot3\cdot2\cdot3$
$2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3$	$\left(\frac{5}{7}\right)^4$	$\frac{5^4}{7^4}$
$\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7}$	$\frac{5\cdot5\cdot5\cdot5}{7\cdot7\cdot7\cdot7}$	
$6^3\cdot6^4$	6^{3+4}	$\underbrace{6\cdot6\cdot6}_{3}\cdot\underbrace{6\cdot6\cdot6\cdot6}_{4}$

Ha készen vannak, írják le az azonosságokat általánosan!

Szorzat hatványozása: $(2\cdot 7)^3 = 14^3 = 2744$; $2^3\cdot 7^3 = 8\cdot 343 = 2744$.

Hányados hatványozása: $\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$; $\frac{4^2}{5^2} = \frac{16}{25} = 0{,}64$.

Azonos alapú hatványok szorzata: $3^3\cdot 3^2 = 27\cdot 9 = 243$; $3^{3+2} = 3^5 = 243$.

Azonos alapú hatványok hányadosa: $\frac{5^4}{5^2} = \frac{625}{25} = 25$, $5^{4-2} = 5^2 = 25$.

Hatvány hatványa: $\left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64$; $2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$.

Általánosan megfogalmazva:

A hatványozás azonosságai

Az alap minden esetben tetszőleges valós szám, a kitevők pozitív egész számok.

1. $(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$
3. $a^n\cdot a^m = a^{n+m}$
4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a \neq 0$ és $n > m$
5. $\left(a^n\right)^k = a^{n\cdot k}$

FONTOS!

Összeget és különbséget úgy hatványozunk, hogy a hatvány definíciója alapján szorzótényezőkre bontjuk a hatványt, majd minden tagot minden taggal megszorzunk. Például

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2 .$$

Mintapélda$_1$

Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait, illetve a definícióját!

a) $(5\cdot 8)^3$; b) $\left(\frac{5}{8}\right)^4$; c) $7^2\cdot 7^5$; d) $\frac{11^8}{11^3}$;

e) $\left(3^2\right)^3$; f) $(a+4)^3$; g) $2^3 + 2^4$.

Megoldás:

a) $(5\cdot8)^3 = 5^3\cdot8^3$; b) $\left(\frac{5}{8}\right)^4 = \frac{5^4}{8^4}$; c) $7^2\cdot7^5 = 7^{2+5} = 7^7$;

d) $\frac{11^8}{11^3} = 11^{8-3} = 11^5$; e) $\left(3^2\right)^3 = 3^{2\cdot3} = 3^6$;

f) $(a+4)^3 = (a+4)\cdot(a+4)\cdot(a+4) = \left(a^2+8a+16\right)\cdot(a+4) =$

$= a^3 + 4a^2 + 8a^2 + 32a + 16a + 64 = a^3 + 12a^2 + 48a + 64$;

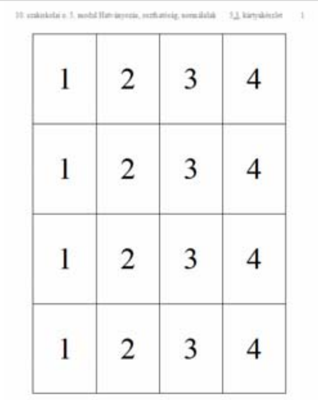
g) $2^3 + 2^4 = 2^3\cdot(1+2) = 2^3\cdot3$.

5.3 kártyakészlet alkalmazása

Módszertani megjegyzés: A tanulók legfeljebb négyfős csoportokban dolgoznak. Egy csoporton belül minden tanuló kap egy sorszámot. A sorszámnak megfelelő feladatból válogatott példákat oldják meg. Ha készen vannak, megbeszélik a megoldásokat. A tanár felszólít feladatonként egy tanulót, aki a táblánál megoldja a példát.

A sorszámok az **5.3. kártyakészlet**ben találhatók.

Az első feladat megoldása előtt osztályszinten megbeszélik, hogyan lehet magasabb hatványokat számolni számológéppel.



1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4

Hatványozás számológéppel

Mielőtt rátérünk a feladatok megoldására megnézzük, hogyan tudunk magasabb hatványokat számolni számológéppel.

Megjegyzés: Érdemes megnézni és gyakorolni az egyes gépeken a hatványozást. Például a hatványozás jele szokott lenni a zsebszámológép gombján ez a felfelé mutató ék-forma: **^** .

A következő leírás a legtöbb számológépre érvényes, de előfordulhat, hogy a műveleti sorrend eltér, vagy nincs külön **x**$^{\mathbf{y}}$ hatvány gomb, hanem **2nd** vagy **SHIFT** funkcióval érhetjük el úgy, hogy először megnyomjuk a **2nd** vagy **SHIFT** gombot, és utána azt a gombot, amelyik felett található $\mathbf{x}^{\mathbf{y}}$.

Számoljuk ki a 17^2 hatvány értékét!

Megoldás:

Begépeljük a 17-et, majd lenyomjuk x^2 gombot. A kijelzőn megjelenik az eredmény: 289

Most számoljuk ki 3^5 értékét!

Megoldás:

Először megadjuk a hatványalapot, ami most 3, majd lenyomjuk a x^y gombot. Végül megadjuk a hatványkitevőt, ami most 5. A kijelzőn megjelenik az eredmény: 243.

Feladatok

1. Számítsd ki számológép segítségével a következő hatványok értékét!

a) 1^{1222}; b) 3^4; c) 10^5; d) 15^2;
e) 100^2; f) $0{,}1^3$; g) $(-1)^3$; h) $(-1)^2$;
i) $(-2)^3$; j) $(-2)^4$; k) $3{,}24^2$; l) $0{,}15^2$.

Megoldás:

a) $1^{1222} = 1$; b) $3^4 = 81$; c) $10^5 = 100\,000$; d) $15^2 = 225$; e) $100^2 = 10\,000$;
f) $0{,}1^3 = 0{,}001$; g) $(-1)^3 = -1$; h) $(-1)^2 = 1$; i) $(-2)^3 = -8$; j) $(-2)^4 = 16$;
k) $3{,}24^2 = 10{,}4976$; l) $0{,}15^2 = 0{,}0225$.

2. A hatványozás azonosságainak segítségével bontsd fel a zárójelet, majd számold ki számológép segítségével a kifejezések értékét!

a) $(4\cdot 3)^2$; b) $(5\cdot 2)^3$; c) $(-3\cdot 7)^2$; d) $(-2\cdot 9)^3$;
e) $\left(\frac{7}{4}\right)^3$; f) $\left(\frac{1}{10}\right)^4$; g) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$; h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$.

Megoldás:

a) $(4\cdot 3)^2 = 4^2\cdot 3^2 = 16\cdot 9 = 144$; b) $(5\cdot 2)^3 = 5^3\cdot 2^3 = 125\cdot 8 = 1000$;

c) $(-3\cdot7)^2 = (-3)^2\cdot7^2 = 9\cdot49 = 441$; d) $(-2\cdot9)^3 = (-2)^3\cdot9^3 = (-8)\cdot729 = -5832$;

e) $\left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{7^3}{4^3} = \frac{343}{64} = 5{,}359375 \approx 5{,}36$; f) $\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1^4}{10^4} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$;

g) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{(-3)^2}{5^2} = \frac{9}{25} = 0{,}36$; h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{(-2)^5}{3^5} = \frac{32}{243} \approx 0{,}13$.

3. Alkalmazd a hatványozás azonosságait, majd számold ki számológép segítségével a kifejezések értékét!

a) $2^3\cdot3^3$; b) $5^2\cdot4^2$; c) $(-2)^3\cdot(-3)^3$; d) $5^2\cdot(-2)^2$;

e) $\frac{5^3}{2^3}$; f) $\frac{1^2}{10^2}$; g) $\frac{(-3)^2}{(-6)^2}$; h) $\frac{(-10)^5}{5^5}$.

Megoldás:

a) $2^3\cdot3^3 = (2\cdot3)^3 = 6^3 = 216$; b) $5^2\cdot4^2 = (5\cdot4)^2 = 20^2 = 400$;

c) $(-2)^2\cdot(-3)^3 = [(-2)\cdot(-3)]^3 = 6^3 = 216$; d) $5^2\cdot(-2)^2 = [5\cdot(-2)]^2 = (-10)^2 = 100$;

e) $\frac{5^3}{2^3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = 2{,}5^3 = 15{,}625$; f) $\frac{1^2}{10^2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0{,}1^2 = 0{,}01$;

g) $\frac{(-3)^2}{(-6)^2} = \left(\frac{-3}{-6}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}5^2 = 0{,}25$; h) $\frac{(-10)^5}{5^5} = \left(\frac{-10}{5}\right)^5 = (-2)^5 = -32$.

4. Alkalmazd a hatványozás azonosságait, majd számold ki számológép segítségével a kifejezések értékét!

a) $2^3\cdot2^2$; b) $10^3\cdot10^5$; c) $(-0{,}2)^2\cdot(-0{,}2)$; d) $\frac{3{,}2^5}{3{,}2^3}$;

e) $\frac{10^{13}}{10^8}$; f) $\left(2^3\right)^2$; g) $\left[(-2)^3\right]^2$; h) $\left[\left(\frac{1}{10}\right)^2\right]^3$.

Megoldás:

a) $2^3\cdot2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$; b) $10^3\cdot10^5 = 10^{3+5} = 10^8 = 100\,000\,000$;

c) $(-0{,}2)^2\cdot(-0{,}2) = (-0{,}2)^{2+1} = (-0{,}2)^3 = -0{,}008$;

d) $\frac{3{,}2^5}{3{,}2^3} = 3{,}2^{5-3} = 3{,}2^2 = 10{,}24$; e) $\frac{10^{13}}{10^8} = 10^{13-8} = 10^5 = 100\,000$;

f) $\left(2^3\right)^2 = 2^{3\cdot2} = 2^6 = 64$; g) $\left[(-2)^3\right]^2 = (-2)^{3\cdot2} = (-2)^6 = 64$;

h) $\left[\left(\frac{1}{10}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^{2\cdot3} = \left(\frac{1}{10}\right)^6 = 0{,}1^6 = 0{,}000001$.

II. Negatív egész és nulla kitevőjű hatvány

Nulla és negatív egész kitevőjű hatvány definíciója

Bizonyos gyakorlati problémák szükségessé teszik, hogy a hatványozás fogalmát kiterjesszük negatív egész és nulla hatványkitevőre is. Kiterjesztés közben fontos, hogy a tanult azonosságok érvényben maradjanak. Ez a permanencia-elv.

Például a tizedestörtek használata is igényli a hatványozás kiterjesztését.

Mintapélda$_2$

Helyezzük el a 345914,6127 számot a helyiérték-táblázatban!

Helyiérték	100 000	10 000	1 000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$
A szám:	**3**	**4**	**5**	**9**	**1**	**4**	**6**	**1**	**2**	**7**
Hatvány	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	?	?	?	?	?
Hatvány-kitevő	5	4	3	2	1	?	?	?	?	?

Százezertől tízig a hatványkitevők folyamatosan csökkennek. Ha következetesen szeretnénk a táblázat 3. és 4. sorának többi oszlopát is kitölteni, akkor folytassuk ezt a csökkenő sorozatot. Így az 1 helyi értékhez tíz 0 kitevőjű hatványát rendeljük, $\frac{1}{10}$-hez a –1 kitevőjű hatványt, $\frac{1}{100}$-hoz a –2 kitevőjű hatványt, és így tovább:

Helyiérték	100 000	10 000	1 000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$
A szám:	**3**	**4**	**5**	**9**	**1**	**4**	**6**	**1**	**2**	**7**
Hatvány	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
Hatvány-kitevő	5	4	3	2	1	0	– 1	– 2	– 3	– 4

Itt már a hatvány eddig megismert definíciójának nincs értelme, ezért nulla és negatív egész kitevő értelmezéséhez a hatványozás tulajdonságait hívhatjuk segítségül.

Ahhoz, hogy a tulajdonságok érvényben maradjanak, a nulla és negatív egész kitevőjű hatványt a következőképpen definiáljuk:

Bármely, nullától különböző szám **nulladik hatványa 1**, vagyis $a^0 = 1$, és $a \neq 0$ (0^0-t nem értelmezzük).

Bármely, nullától különböző szám **negatív egész kitevőjű hatványa egyenlő ugyanezen alap pozitív kitevőjű hatványának reciprokával**, vagyis $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, ahol $a \neq 0$.

Mintapélda₃

Írjuk fel a következő hatványokat negatív kitevő használata nélkül!

a) 3^{-1}; b) 3^{-2}; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$;

e) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1}$; f) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-4}$; g) 1^0; h) $504{,}613^0$.

Megoldás:

a) $3^{-1} = \frac{1}{3}$; b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$;

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$; d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{2^3}}\right) = 2^3 = 8$;

e) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1} = \frac{7}{5}$; f) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-4} = \left(\frac{7}{5}\right)^4 = \frac{7^4}{5^4}$;

g) $1^0 = 1$; h) $504{,}613^0 = 1$.

Megjegyzés: A c), d), e) és f) feladatok azt mutatják, hogy tetszőleges, 0-tól különböző alapot úgy is emelhetünk negatív egész hatványkitevőre, hogy vesszük az alap reciprokát, és a reciprokot emeljük a megfelelő pozitív hatványkitevőre.

Feladatküldés módszer alkalmazása

Módszertani megjegyzés: A tanulók továbbra is az eddig kialakított csoportokban dolgoznak. Egy írólapra (vagy papírlapra) összeírnak 4 – 4 feladatot a mintapélda alapján, majd két-két csoport kicseréli a feladatsorát. Megoldják, visszacserélik és ellenőrzik a feladatsorokat. Végül megbeszélik a javítást. Ezek után önállóan gyakorolnak.

Feladatok

5. Írd fel a következő hatványokat negatív kitevő használata nélkül!

a) 6^{-2}; b) 4^{-3}; c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$;

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$; f) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$; g) $0{,}13^{-2}$; h) $(-6)^0$;

i) $\left(\frac{1}{k+2}\right)^4$, $k \neq -2$.

Megoldás:

a) $\frac{1}{6^2}$; b) $\frac{1}{4^3}$; c) 5; d) 3^5; e) $\frac{5}{2}$; f) $\frac{5^3}{2^3}$; g) $\frac{1}{0{,}13^2}$; h) 1; i) $(k+2)^{-4}$.

6. Írd fel a következő hatványokat negatív kitevő használata nélkül!

a) $5 \cdot 3^{-2}$; b) $5^2 \cdot 4^{-3}$; c) $\left(-\frac{3}{8}\right)^{-3}$; d) $(-1{,}2)^{-4}$;

e) a^{-3}, $a \neq 0$; f) $(m+2)^{-3}$; g) $\left(\frac{1}{b}\right)^{-5}$ $,(b \neq 0)$;

h) $\left(\frac{1}{c-1}\right)^{-2}$ $,(c \neq 1)$; i) $\left(\frac{9}{23}\right)^0$.

Megoldás:

a) $\frac{5}{3^2}$; b) $\frac{5^2}{4^3}$; c) $-\frac{8^3}{3^3}$; d) $\frac{1}{1{,}2^4}$; e) $\frac{1}{a^3}$; f) $\frac{1}{(m+2)^3}$; g) b^5; h) $(c-1)^2$; i) 1.

7. Írd fel törtmentes alakban a következő hatványokat!

a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{5^3}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{2^3}{3^2}$; e) $\frac{1}{a}$; f) $\frac{1}{b^2}$.

Megoldás:

a) 5^{-1}; b) 5^{-3}; c) $2 \cdot 3^{-1}$; d) $2^3 \cdot 3^{-2}$; e) a^{-1}; f) b^{-2}.

8. Melyik az a szám, amelynek

a) 2. hatványa (négyzete) 25?

b) 2. hatványa (négyzete) $\frac{9}{25}$?

c) 3. hatványa (köbe) –8?

d) 1. hatványa $\frac{4}{7}$?

e) –1. hatványa $\frac{1}{3}$?

f) –1. hatványa $\frac{4}{7}$?

g) –2. hatványa $\frac{1}{4}$?

h) –2. hatványa 4?

i) 3. hatványa (köbe) $-\frac{64}{27}$?

j) –3. hatványa $\frac{27}{8}$?

k) 0. hatványa 1?

l) 2. hatványa (négyzete) –1?

m) 23. hatványa 0?

Megoldás:

a) 5 vagy –5; b) $\frac{3}{5}$ vagy $-\frac{3}{5}$; c) –2; d) $\frac{4}{7}$; e) 3; f) $\frac{7}{4}$; g) 2 vagy –2;

h) $\frac{1}{2}$ vagy $-\frac{1}{2}$; i) $-\frac{4}{3}$; j) $\frac{2}{3}$; k) bármely 0-tól különböző valós szám;

l) nincs ilyen valós szám; m) 0.

A hatványozás azonosságai

Mintapélda$_4$

Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait, majd határozzuk meg a hatványok értékét!

a) $7^2 \cdot 7^{-5}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$;

b) $\frac{5^3}{5^7}$; $\frac{2^{-2}}{2^{-5}}$;

c) $\left(7^{-3}\right)^{-4}$; $\left(7^{-4}\right)^{-3}$;

d) $(2 \cdot 5)^{-3}$; $\left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$;

e) $\frac{4^{-2}}{7^{-2}}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$.

Megoldás:

a) $7^2 \cdot 7^{-5} = 7^{2+(-5)} = 7^{2-5} = 7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343}$;

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3+(-4)} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-7} = 3^7 = 2187;$$

b) $\frac{5^3}{5^7} = 5^{3-7} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$; $\frac{2^{-2}}{2^{-5}} = 2^{-2-(-5)} = 2^{-2+5} = 2^3 = 8$;

c) $\left(7^{-1}\right)^{-2} = 7^{(-1)\cdot(-2)} = 7^2 = 49$; $\left(7^{-2}\right)^{-1} = 7^{(-2)\cdot(-1)} = 7^2 = 49$;

d) $(2 \cdot 3)^{-3} = 2^{-3} \cdot 3^{-3} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{216}$;

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot 6^2 = \left(\frac{5}{3} \cdot 6\right)^2 = 10^2 = 100;$$

e) $\frac{4^{-2}}{7^{-2}} = \left(\frac{4}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$;

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 : \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}\right)^3 = \left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1}{5^3} = -\frac{1}{125}.$$

Kiegészítő anyag

Megmutatjuk, hogy az azonosságok valóban érvényesek maradnak. Végezzük el a következő műveleteket!

1. $3^{-3} \cdot 3^{-4}$

A negatív egész kitevőjű hatvány definíciója szerint $3^{-3} = \frac{1}{3^3}$ és $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$, azaz

$$3^{-3} \cdot 3^{-4} = \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3^{3+4}} = \frac{1}{3^7}.$$

Ha az $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ azonosságot alkalmazzuk, akkor a következőt kapjuk:

$$3^{-3} \cdot 3^{-4} = 3^{-3+(-4)} = 3^{-7} = \frac{1}{3^7}.$$

A két eredmény megegyezik, ez az azonosság érvényes marad.

2. $\frac{2^{-2}}{2^{-5}}$

A negatív egész kitevőjű hatvány definíciója szerint $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$ és $2^{-5} = \frac{1}{2^5}$, azaz

$$\frac{2^{-2}}{2^{-5}} = \frac{1}{2^2} : \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{2^5}{1} = \frac{32}{4} = 8.$$

Ha az $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ azonosságot alkalmazzuk, akkor a következőt kapjuk:

$$\frac{2^{-2}}{2^{-5}} = 2^{-2-(-5)} = 2^{-2+5} = 2^3 = 8\,.$$

A két eredmény megegyezik, ez az azonosság érvényes marad.

A hatványozás azonosságai

Az alap tetszőleges valós szám, a kitevő egész szám.

1. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$
3. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a \neq 0$
5. $\left(a^n\right)^k = a^{n \cdot k}$

Feladatok

Módszertani ajánlás: A mintapéldák megoldása után a tanulók legfeljebb négyfős csoportokban megoldják a 9. feladatban szereplő példákat. Felosztják egymás között a példákat, mindenkinek 2 feladat jut. Utána megbeszélik a megoldásokat. Végül osztályszinten is megbeszélik a megoldásokat.

9. Alkalmazd a hatványozás azonosságait, majd határozd meg a hatványok értékét! Végül rakd növekvő sorrendbe a kifejezéseket!

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$; b) $(-3)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; c) $\frac{5^{-7}}{5^{-10}}$;

d) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$; e) $(-4)^{-2} \cdot 7^{-2}$; f) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} : \left(-\frac{4}{3}\right)^{3}$;

g) $\left(7^0\right)^{273}$; h) $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}\right]^2$.

Megoldás:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3} = \frac{5^3}{2^3} = 15{,}625$;

b) $(-3)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=-3^3\cdot 3^2=-3^{3+2}=-3^5=-243$;

c) $\frac{5^{-7}}{5^{-10}}=5^{-7+10}=5^3=125$;

d) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}:\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-3+2}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}=\frac{7}{3}$;

e) $(-4)^{-2}\cdot 7^{-2}=\frac{1}{(-4)^2}\cdot\frac{1}{7^2}=\frac{1}{(-4\cdot 7)^2}=\frac{1}{(-28)^2}=\frac{1}{784}$;

f) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}:\left(-\frac{4}{3}\right)^{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}:\left(-\frac{4}{3}\right)^{3}=\left[\frac{2}{3}:\left(-\frac{4}{3}\right)\right]^{3}=\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)^{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}=-\frac{1}{8}$;

g) $\left(7^0\right)^{273}=1^{273}=1$, vagy $7^{0\cdot 273}=7^0=1$;

h) $\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}\right)^{2}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-3\cdot 2}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-6}=\left(\frac{3}{5}\right)^{6}=\frac{3^6}{5^6}\approx 0{,}047$.

Növekvő sorrend:

$$(-3)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}<\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}:\left(-\frac{4}{3}\right)^{3}<(-4)^{-2}\cdot 7^{-2}<\left[\left(\frac{5}{3}\right)^{-3}\right]^{2}<\left(7^0\right)^{273}<\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}:\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}<$$

$$<\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}<\frac{5^{-7}}{5^{-10}}$$

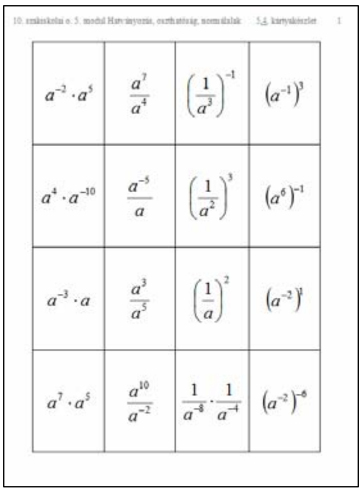
A továbbiakban megpróbáljuk eddigi tapasztalatainkat olyan kifejezések esetén alkalmazni, amelyekben nem számok, hanem betűk szerepelnek.

5.4 kártyakészlet alkalmazása

Módszertani javaslat: Feldarabolt négyzetek módszere.

A tanulók legfeljebb négy fős csoportokat alkotnak. A tanár minden csoportnak odaadja az 5.4. kártyakészletet.

A tanulók feladata megtalálni azt az összetartozó 4 kártyát, amelyen ugyanaz a hatványérték szerepel. A gyűjtögetés közben a csoporttagok egymással nem beszélhetnek, egymáshoz nem nyúlhatnak át. A felesleges kártyát az asztal közepére tehetik, és a hiányzó darabokat onnét vehetik el. A kártyakészletben található kifejezések megtalálhatók a 10. feladatban is.



$a^{-2}\cdot a^{5}$	$\frac{a^7}{a^4}$	$\left(\frac{1}{a^3}\right)^{-1}$	$\left(a^{-1}\right)^{3}$
$a^{4}\cdot a^{-10}$	$\frac{a^{-5}}{a}$	$\left(\frac{1}{a^2}\right)^{3}$	$\left(a^{6}\right)^{-1}$
$a^{-3}\cdot a$	$\frac{a^3}{a^5}$	$\left(\frac{1}{a}\right)^{2}$	$\left(a^{-2}\right)^{1}$
$a^{7}\cdot a^{5}$	$\frac{a^{10}}{a^{-2}}$	$\frac{1}{a^{-8}}\cdot\frac{1}{a^{-4}}$	$\left(a^{-2}\right)^{-6}$

10. Végezd el a következő műveleteket! Az eredményt egyetlen hatványként írd fel!

a) $a^{-2} \cdot a^5$; b) $\frac{a^7}{a^4}$; c) $\left(\frac{1}{a^3}\right)^{-1}$; d) $\left(a^{-1}\right)^3$; e) $a^4 \cdot a^{-10}$;

f) $\frac{a^{-5}}{a}$ g) $\left(\frac{1}{a^2}\right)^3$; h) $\left(a^6\right)^{-1}$; i) $a^{-3} \cdot a$; j) $\frac{a^3}{a^5}$;

k) $\left(\frac{1}{a}\right)^2$; l) $\left(a^{-2}\right)^1$ m) $a^7 \cdot a^5$; n) $\frac{a^{10}}{a^{-2}}$; o) $\frac{1}{a^{-8}} \cdot \frac{1}{a^{-4}}$;

p) $\left(a^{-2}\right)^{-6}$.

Megoldás:

a), b), c) és d) értéke a^3; e), f), g) és h) értéke a^{-6};

i), j), k) és l) értéke a^{-2}; m), n), o) és p) értéke a^{12}.

Matematikai TOTÓ alkalmazása

Módszertani javaslat: Minden tanuló egyedül dolgozik a feladatokon. Ha letelt az idő, vagy elkészültek a tanulók, akkor mindenki átadja a padtársának a füzetét, aki a feladatok közös megbeszélése alapján kijavítja a TOTÓ-t. A hibátlan kitöltőket megjutalmazhatjuk.

11. Töltsd ki a következő TOTÓ szelvényt!

	Hatványok	A	B	C
1	$x\cdot x\cdot x\cdot x$	x^{6}	x^{4}	x^{-1}
2	$a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b$	$a^{2}\cdot b^{3}$	$a^{3}\cdot b^{2}$	$a^{-2}\cdot b^{3}$
3	$\frac{c\cdot c\cdot c\cdot d}{d\cdot e}$	$\frac{c^{3}}{e}$	$\frac{c^{3}\cdot d}{e}$	$\frac{c^{3}}{d\cdot e}$
4	$k^{8}\cdot k^{-6}$	k^{-2}	k^{-48}	k^{2}
5	$\frac{g^{12}}{g^{3}}$	g^{4}	g^{9}	g^{-9}
6	$\frac{1}{m^{4}}$	m^{-3}	m^{4}	m^{-4}
7	$(x\cdot y)^{5}$	$x^{5}\cdot y^{5}$	$x\cdot y^{5}$	$x^{5}\cdot y$
8	$\frac{v}{v^{-2}}$	v^{-1}	v^{-3}	v^{3}
9	$\left(z^{3}\right)^{-5}$	z^{-2}	z^{15}	z^{-15}
10	$\frac{h^{5}}{i^{-5}}$	$h^{-5}\cdot i^{5}$	$(h\cdot i)^{5}$	$\left(\frac{h}{i}\right)^{5}$
11	$q^{0},\quad q\neq 0$	0	1	q
12	$\left(\frac{1}{q^{3}}\right)^{4}$	$\frac{1}{q^{12}}$	q^{7}	$\frac{1}{q}$
13	$s^{-4}\cdot r^{4}$	$\frac{s^{4}}{r^{4}}$	$\left(\frac{s}{r}\right)^{4}$	$\left(\frac{r}{s}\right)^{4}$
+1	$\frac{a^{0}\cdot b^{4}\cdot c^{5}}{b^{7}\cdot c^{2}}$	$\left(\frac{c}{b}\right)^{3}$	$a\cdot b^{3}\cdot c^{3}$	$a\cdot\frac{c^{3}}{b^{3}}$

Megoldás:

1–B; 2–A; 3–A; 4–C; 5–B; 6–C; 7–A; 8–C; 9–C; 10–B; 11–B; 12–A; 13–C; +1–A.

III. Oszthatóság

Oszthatóság, osztó, többszörös, prímszámok

Mintapélda$_5$

Van 241 forintom. Hány darab 32 forintos cukrot tudok venni belőle, és mennyi pénzem marad?

Megoldás:

241 : 32 = 7, és marad 17.

7 db cukrot tudok vásárolni, és 17 forintom marad.

Korábban számtalan ehhez hasonló feladattal találkoztunk. A megoldás során maradékos osztást végeztünk.

A fenti példában a 241-et **osztandó**nak nevezzük, a 32-t **osztó**nak, 7 a **hányados** és 17 a **maradék**.

Mintapélda$_6$

Van 216 forintom. Legfeljebb hány darab 24 forintos tojást tudok venni belőle, és mennyi pénzem marad?

Megoldás:

216 : 24 = 9, és nem marad semmi.

Legfeljebb 9 db tojást tudok vásárolni, és ekkor nem marad pénzem.

Ezúttal az osztás eredményeképpen a maradék 0. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a 216 **osztható** 24-gyel, vagy fordítva, a 24-nek **többszörös**e a 216.

Az is igaz, hogy a 216-nak **osztó**ja a 9, vagy a 9-nek **többszörös**e a 216.

Legyenek *a* és *b* pozitív egész számok.

Az *a* számnak **osztója** a *b* szám, ha *b* maradék nélkül megvan *a*-ban.

Ekkor azt is mondhatjuk, hogy az *a* **többszöröse** *b*-nek.

Azokat a számokat, amelyeknek pontosan 2 osztójuk van, **prímszám**oknak nevezzük.

Ha egy számnak kettőnél több osztója van, akkor azt **összetett szám**nak nevezzük.

A prímszámokat törzsszámoknak is nevezzük. A prímszámok két osztója 1 és önmaguk. Másképp fogalmazva: egy 1-nél nagyobb pozitív egészszámot prímszámnak nevezünk, ha 1-en és önmagán kívül más pozitív egész osztója nincsen.

Példák:

1. 24 osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. A 24-nek 8 db osztója van.
2. 4 többszörösei: 4, 8, 12, 16, 20, stb.
3. Prímszámok: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, stb.

Megjegyzés:

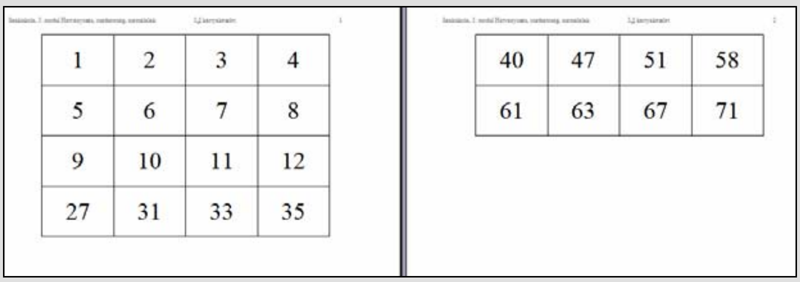
1. Az 1 minden számnak osztója.
2. A 0 minden számnak többszöröse, mivel bármely számot 0-val szorozva 0-t kapunk.
3. Egy számnak végtelen sok többszöröse van.
4. Az 1 nem prímszám, mivel csak egyetlen osztója van.
5. Az osztó és a többszörös fogalma tetszőleges egész szám esetén értelmezhető, kivéve a 0-val való osztást.
6. Ebben a fejezetben csak pozitív egész számokkal foglalkozunk.

5.5 kártyakészlet alkalmazása

Módszertani megjegyzés: A tanulók legfeljebb négyfős csoportokat alkotnak. A tanár odaadja minden csoportnak az 5.5. kártyakészletet. A tanulók feladata csoportosítani a kártyákon szereplő számokat aszerint, hogy az prímszám, összetett szám vagy egyik sem.

Ezek után a tanár 8 részre osztja a táblát. Az egyik részbe a 2-vel, a másik részbe a 3-mal, a harmadik részbe a 4-gyel, majd az 5-tel, 6-tal, 8-cal(!), 9-cel illetve 10-zel osztható számok kerülnek. A tanulók kórusban diktálják, hogy a kártyakészletben szereplő számok közül melyik hova tartozik. Egy szám több helyen is megjelenhet.

Végül megbeszélik a fenti számok oszthatósági szabályait, és ezek alapján diktálnak még néhány számot a táblára.



1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
27	31	33	35

40	47	51	58
61	63	67	71

Feladatok

12. Csoportosítsd a következő számokat a szerint, hogy az prímszám, összetett szám vagy egyik sem!

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 27; 31; 33; 35; 40; 47; 51; 58; 61; 63; 67; 71.

Megoldás:

Prímszámok: 2; 3; 5; 7; 11; 31; 47; 61; 67; 71.

Összetett számok: 4; 6; 8; 9; 10; 12; 27; 33; 35; 40; 51; 58; 63.

Nem prím és nem összetett szám: 1.

13. Csoportosítsd a fenti számokat a következők alapján, majd egészítsd ki még 2-2 számmal!

2-vel osztható számok;	3-mal osztható számok;	4-gyel osztható számok;
5-tel osztható számok;	6-tal osztható számok;	8-cal osztható számok;
9-cel osztható számok;	10-zel osztható számok.	

Megoldás:

2-vel osztható számok: 2; 4; 6; 8; 10; 12; 40; 58.

3-mal osztható számok: 3; 6; 9; 12; 27; 33; 51; 63.

4-gyel osztható számok: 4; 8; 12; 40.

5-tel osztható számok: 5; 10; 35; 40.

6-tal osztható számok: 6; 12.

8-cal osztható számok: 8; 40.

9-cel osztható számok: 9; 27; 63.

10-zel osztható számok: 10; 40.

Ismételjük át az oszthatósági szabályokat!

Megjegyzés: Ezeket korábban, a törtekkel való műveletek kapcsán vettük.

Oszthatósági szabályok:

Egy szám osztható 2-vel, ha 0-ra, 2-re, 4-re, 6-ra vagy 8-ra végződik.

Egy szám osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal.

Egy szám osztható 4-gyel, ha utolsó két számjegye osztható 4-gyel.

Egy szám osztható 5-tel, ha 0-ra vagy 5-re végződik.

Egy szám osztható 6-tal, ha 2-vel is és 3-mal is osztható.

Egy szám osztható 8-cal, ha utolsó 3 jegye osztható 8-cal.

Egy szám osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel.

Egy szám osztható 10-zel, ha 0-ra végződik.

Módszertani megjegyzés: A következő feladatok megoldását csoportmunkában javasoljuk.

14. Keresd meg a következő számok összes, 1-től és önmagától különböző osztóját!

4; 6; 8; 12; 15; 21; 36; 45; 54; 60; 81; 100; 132; 195.

Megoldás:

4 osztói: 2; 6 osztói: 2; 3; 8 osztói: 2; 4; 12 osztói: 2; 3; 4; 6;

15 osztói: 3; 5; 21 osztói: 3; 7; 36 osztói: 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18;

45 osztói: 3; 5; 9; 15; 54 osztói: 2; 3; 6; 9; 18; 27;

60 osztói: 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 81 osztói: 3; 9; 27;

100 osztói: 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50;

132 osztói: 2; 3; 4; 6; 11; 12; 22; 33; 44; 66; 195 osztói: 3; 5; 13; 15; 39; 65.

Egy szám egytől és önmagától különböző osztóit **valódi osztó**knak nevezzük.

A **prímszám** definíciója másképp: olyan szám, amelynek nincs valódi osztója.

Prímtényezőkre bontás

15. Az előző feladatban szereplő számok osztói közül válogasd ki a prímszámokat!

Megoldás:

4 prímosztói: 2;	6 prímosztói: 2; 3;	8 prímosztói: 2;
12 prímosztói: 2; 3;	15 prímosztói: 3; 5;	21 prímosztói: 3; 7;
36 prímosztói: 2; 3;	45 prímosztói: 3; 5;	54 prímosztói: 2; 3;
60 prímosztói: 2; 3; 5;	81 prímosztói: 3;	100 prímosztói: 2; 5;
132 prímosztói: 2; 3; 11;		195 prímosztói: 3; 5; 13.

Megjegyzés: Összehasonlítva a 14. és 15. feladatok megoldásait látható, hogy minden osztó előáll a prímosztók szorzataként vagy hatványaként.

Minden szám felírható ezen törzsszámok hatványainak szorzataként. A felírási módszert „**akasztófá**nak” is szokták nevezni. A lényege, hogy a szám jobb oldalára húzunk egy egyenes vonalat. A vonaltól jobbra azokat a prímszámokat írjuk, amelyekkel osztunk, bal oldalra a következő sorba pedig a hányadost. Addig osztunk, míg a bal oldalon 1-et nem kapunk. Célszerű a lehető legkisebb prímszámmal kezdeni az osztást, és addig nem átváltani a következőre, amíg a hányados osztható az aktuális prímszámmal.
Megszámoljuk, hogy az egyes prímszámokkal hányszor osztottunk. Ezek a darabszámok lesznek a prímek hatványkitevői. Végül felírjuk a számot e hatványok szorzataként.

Mintapélda$_7$

Bontsuk fel prímtényezők szorzatára a 60-at!

Megoldás:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Megjegyzés: 60 osztóit a következőképpen írhatjuk fel:

- Minden prímtényezőt leírunk egyszer: 2; 3; 5.
- Vesszük a tényezők összes lehetséges kombinációját:

  $2{\cdot}2$; $2{\cdot}3$; $2{\cdot}5$; $3{\cdot}5$; $2{\cdot}2{\cdot}3$; $2{\cdot}2{\cdot}5$; $2{\cdot}3{\cdot}5$ és $2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}5$.

Feladatok

16. Bontsuk fel prímtényezők szorzatára a következő számokat!

24; 90; 1323; 2250; 56 595; 3388; 2730.

Megoldás:

$24 = 2^3{\cdot}3$; $90 = 2{\cdot}3^2{\cdot}5$; $1323 = 3^3{\cdot}7^2$; $2250 = 2{\cdot}3^2{\cdot}5^3$;

$56\,595 = 3{\cdot}5{\cdot}7^3{\cdot}11$; $3388 = 2^2{\cdot}7{\cdot}11^2$; $2730 = 2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}13$.

Közös osztó, legnagyobb közös osztó

Mintapélda$_8$

Egyszerűsítsük a $\frac{15246}{40425}$ törtet!

Megoldás:

Bontsuk fel prímtényezők szorzatára mindkét számot!

15246	2
7623	3
2541	3
847	7
121	11
11	11
1	

40425	3
13475	5
2695	5
539	7
77	7
11	11
1	

Felírjuk a számokat prímszámok szorzataként, majd a megfelelő szorzótényezőkkel egyszerűsítünk:

$$\frac{15246}{40425} = \frac{2\cdot3\cdot3\cdot7\cdot11\cdot11}{3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot11} = \frac{2\cdot3\cdot11}{5\cdot5\cdot7} = \frac{66}{175}.$$

Megjegyzés: Írjuk fel a fenti szorzatot hatványok segítségével!

$$\frac{2\cdot3\cdot3\cdot7\cdot11\cdot11}{3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot11} = \frac{2\cdot3^2\cdot7\cdot11^2}{3\cdot5^2\cdot7^2\cdot11} =$$

Egyszerűsítéskor közös tényezők esetén a nagyobb hatványkitevőből vonjuk ki a kisebbet, a többi tényezőt pedig változatlanul írjuk le:

$$=\frac{2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11^2}{3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11}=\frac{2\cdot 3^{2-1}\cdot 11^{2-1}}{5^2\cdot 7^{2-1}}=\frac{2\cdot 3\cdot 11}{5^2\cdot 7}.$$

Egyszerűsítéskor olyan hatványokat keresünk, amelyek mindkét szorzatban megtalálhatók, vagyis mindkét számnak osztói. Ezek a tényezők a két szám közös osztói.

Két szám **közös osztó**ja az a szám, amely mindkét számnak osztója.
Két számnak több közös osztója is lehet. A közös osztók közül a legnagyobbat **legnagyobb közös osztó**nak nevezzük.
Ha a két szám *a* és *b*, akkor a legnagyobb közös osztójuk jelölése: (*a*; *b*).
Ha a két számnak 1-en kívül más közös osztója nincs, akkor a két szám **relatív prím**.

Megjegyzés: Két szám közös osztói egyúttal a legnagyobb közös osztónak is osztói.
(Egy szám osztóinak meghatározásával már találkoztunk a 7. mintapéldánál.)
Most mutatunk egy másik módszert a legnagyobb közös osztó megkeresésére és a tört egyszerűsítésére.

Mintapélda₉

a) Keressük meg a 28875 és az 1386 legnagyobb közös osztóját: (28875; 1386) = ?

b) Egyszerűsítsük a $\frac{28875}{1386}$ törtet!

Megoldás:

a) Törzstényezőkre bontjuk a két számot:

28875	3	1386	2
9625	5	693	3
1925	5	231	3
385	5	77	7
77	7	11	11
11	11	1	
1			

$28875 = 3\cdot 5^3\cdot 7\cdot 11$ $1386 = 2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11$

A legnagyobb közös osztó olyan szorzat, melynek tényezői a közös prímtényezők, az előforduló legkisebb hatványkitevőn.

$$(28875;\ 1386) = 3 \cdot 7 \cdot 11 = 231.$$

A 7 és a 11 mindkét felbontásban azonos hatványkitevőn szerepel, ezért változatlanul leírjunk.

A 3 is szerepel mindkét felbontásban, de az egyikben első, a másikban 2. hatványkitevőn. A szorzatba a $3^1 = 3$ -t írunk, mert 3-nak az 1. hatványával osztható mindkét szám.

b) A számláló is és a nevező is osztható 231-gyel, és ennél nagyobb számmal nem.

$$231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$$

A hatványozás azonosságait alkalmazva elvégezzük az osztásokat:

$$\frac{28875}{231} = \frac{3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11}{3 \cdot 7 \cdot 11} = 5^3 = 125,$$

$$\frac{1386}{231} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11}{3 \cdot 7 \cdot 11} = 2 \cdot 3 = 6.$$

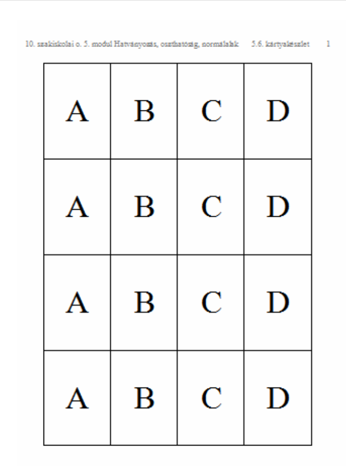
A tört egyszerűsítés után $\frac{125}{6}$ lesz.

Megjegyzés: Ha a legnagyobb közös osztó 1, akkor a tört nem egyszerűsíthető.

5.6 kártyakészlet alkalmazása

Módszertani megjegyzés: A mintapéldák megbeszélése után ismét legfeljebb négyfős csoportokat alakítsunk ki. Minden csoportban mindenki kapjon egy-egy kártyát az 5.6. kártyakészletből. A kártyákon az *A, B, C, D* betűk szerepelnek.

Ezután egy munkacsoportot alkotnak azok a tanulók, akik azonos betűt húztak. A betűk a feladatok nehézségi fokát jelentik: *A* a legkönnyebb, a *D* pedig a legnehezebb. A munkacsoportok megoldják a kapott feladatot, majd visszamennek az eredeti csoportjukhoz. A csoportokban megbeszélik mind a négy feladat megoldását. Ezután a tanár tetszőlegesen kiválaszt négy tanulót, és mindegyiküktől egy feladat ismertetését kéri a táblánál.


10. szakiskolai o. 5. modul Hatványozás, oszthatóság, normálalak 5.6. kártyakészlet 1

A	B	C	D
A	B	C	D
A	B	C	D
A	B	C	D

Feladatok

A jelűek feladata:

17. Keresd meg a következő számok 1-től különböző közös osztóit!

a) 9 és 18; b) 5 és 25; c) 6 és 15;

d) 18 és 36; e) 20 és 60.

Megoldás:

a) 3; 9; b) 5; c) 3; d) 2; 3; 6; 9 e) 2; 4; 5; 20.

B jelűek feladata:

18. Keresd meg a következő számok legnagyobb közös osztóját!

a) 5 és 10; b) 6 és 10; c) 6 és 15;

d) 12 és 18; e) 30 és 45; f) 15 és 28.

Megoldás:

a) 5; b) 2; c) 3; d) 6; e) 15; f) 1.

C jelűek feladata:

19. Egyszerűsítsd a következő törteket!

a) $\frac{3^2}{3^3}$; b) $\frac{2^3}{3^2}$; c) $\frac{2^2 \cdot 3}{2 \cdot 3^2}$; d) $\frac{2^2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 5}$; e) $\frac{3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^3}$; f) $\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 31}{2^3 \cdot 3 \cdot 31}$.

Megoldás:

a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{2^3}{3^2}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{2}{5}$; e) $\frac{5}{2^2 \cdot 3}$; f) $\frac{3}{2^2}$.

D jelűek feladata:

20. Hozd a lehető legegyszerűbb alakra a következő törteket!

a) $\frac{10}{15}$; b) $\frac{32}{72}$; c) $\frac{600}{1000}$; d) $\frac{24}{18}$; e) $\frac{28}{30}$; f) $\frac{36}{175}$.

Megoldás:

a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{9}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{4}{3}$; e) $\frac{14}{15}$; f) $\frac{36}{175}$.

Közös többszörös, legkisebb közös többszörös

Mintapélda$_{10}$

Végezzük el a következő műveletet: $\frac{56}{72}+\frac{49}{108}$!

1. megoldás:

Hozzunk közös nevezőre!

Közös nevező lehet például a $108 \cdot 72 = 7776$.

Bővítsük az összeadandó törteket úgy, hogy nevezőjük 7776 legyen!

$\frac{56}{72}=\frac{6048}{7776}$ illetve $\frac{49}{108}=\frac{3528}{7776}$.

Végezzük el az összeadást!

$$\frac{6048}{7776}+\frac{3528}{7776}=\frac{9576}{7776}.$$

Egyszerűsítsük a végeredményt a tanult módon!

A számláló prímtényezős felbontása: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 19$.

A nevező prímtényezős felbontása: $2^5 \cdot 3^5$.

$$\frac{9576}{7776}=\frac{2^3\cdot 3^2\cdot 7\cdot 19}{2^5\cdot 3^5}=\frac{7\cdot 19}{2^2\cdot 3^3}=\frac{133}{108}.$$

A két tört összege $\frac{133}{108}$.

A közös nevezőt úgy határoztuk meg, hogy a két nevezőt összeszoroztuk. Ezzel az eljárással az a probléma, hogy nagyon nagy számokkal kellett dolgoznunk. Lehet-e kisebb szám a közös nevező?

Végezzük el még egyszer a feladatot, csak ezúttal másképp határozzuk meg a közös nevezőt.

2. megoldás:

Bontsuk fel prímtényezők szorzatára mindkét nevezőt!

72	2		108	2
36	2		54	2
18	2		27	3
9	3		9	3

$$\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$72 = 2^3 \cdot 3^2$ $\qquad$ $108 = 2^2 \cdot 3^3$

Keressük azt a legkisebb számot, amelynek mindkét nevező osztója.

Ahhoz, hogy ez teljesüljön, a keresett szám prímtényezős felbontásában szerepelnie kell 2 2. és 3. hatványának, illetve 3 2. és 3. hatványának. 2^3 többszöröse 2^2-nak, ezért a közös nevezőben 2^3 lesz (ekkor osztható 2^2-nal is). Vagyis a keresett szám egyik szorzótényezője 2^3. Hasonlóan a másik szorzótényező 3^3.

A közös nevező $2^3 \cdot 3^3 = 216$.

$$\frac{56}{72} = \frac{168}{216} \text{ illetve } \frac{49}{108} = \frac{98}{216}.$$

Végezzük el az összeadást!

$$\frac{168}{216} + \frac{98}{216} = \frac{266}{216} = \frac{133}{108}.$$

Ugyanazt az eredményt kaptuk, csak lényegesen kisebb számokkal számoltunk.

A közös nevező megállapításakor olyan számokat keresünk, amelyek mindkét nevezőnek többszörösei. Végtelen sok ilyen szám létezik, ezért célszerű közöttük megkeresni a legkisebbet.

Két szám **közös többszöröse** az a szám, amelynek mindkét szám osztója.

A közös többszörösök közül a legkisebbet **legkisebb közös többszörös**nek nevezzük.

Ha a két szám *a* és *b*, akkor a legkisebb közös többszörösük jelölése: [*a*; *b*].

Két szám legkisebb közös többszörösét megkapjuk, ha vesszük a törzstényezős felbontásokban szereplő összes prímszámot a legnagyobb hatványkitevőn, és ezeket a hatványokat összeszorozzuk.

Megjegyzés: Két szám közös többszörösei oszthatók legkisebb közös többszörössel.

Mintapélda$_{11}$

Számítsuk ki a 9625 és a 980 legkisebb közös többszörösét!

Megoldás:

Törzstényezőkre bontjuk a két számot.

$$\begin{array}{r|l} 9625 & 5 \\ 1925 & 5 \\ 385 & 5 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 980 & 2 \\ 490 & 2 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$9625 = 5^3 \cdot 7 \cdot 11$ $\qquad 980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2$

A legkisebb közös többszöröst úgy állapítjuk meg, hogy vesszük az összes prímtényezőt, mégpedig a legnagyobb hatványon:

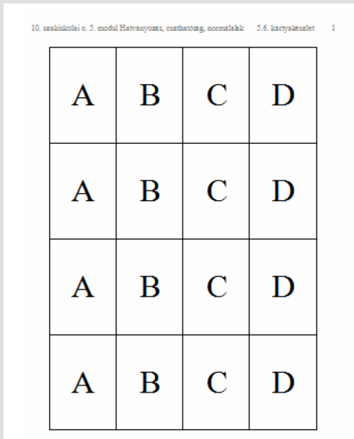
$[9625;\ 980] = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 = 269\,500.$

A két szám legkisebb közös többszöröse 269 500.

5.6 kártyakészlet alkalmazása

Módszertani ajánlás: A mintapéldák megbeszélése után ismét legfeljebb négyfős csoportokat alakítsunk ki. Minden csoportban mindenki kapjon egy-egy kártyát az 5.6 kártyakészletből. A kártyákon az *A*, *B*, *C*, *D* betűk szerepelnek.

Ezután egy munkacsoportot alkotnak azok a tanulók, akik azonos betűt húztak. A betűk a feladatok nehézségi fokát jelentik: *A* a legkönnyebb, a *D* pedig a legnehezebb. A munkacsoportok megoldják a kapott feladatot, majd visszamennek az eredeti csoportjukhoz. A csoportokban megbeszélik mind a négy feladat megoldását. Ezután a tanár tetszőlegesen kiválaszt négy tanulót, és mindegyiküktől egy feladat ismertetését kéri a táblánál.



A	B	C	D
A	B	C	D
A	B	C	D
A	B	C	D

Feladatok

A jelűek feladata:

21. Írd fel a következő számpárok 5 db közös többszörösét!

a) 2 és 4; b) 2 és 3; c) 6 és 9; d) 6 és 15; e) 21 és 45.

Megoldás:

a) 4; 8; 12;16;21; b) 6; 12; 18; 24;30; c) 18; 36; 54; 72; 90;

d) 30; 60; 90; 120; 150; e) 315; 630; 945; 1260; 1575.

B jelűek feladata:

22. Keresd meg a következő számok legkisebb közös többszörösét!

a) 5 és 10; b) 6 és 10; c) 6 és 15; d) 12 és 18; e) 30 és 45; f) 15 és 28.

Megoldás:

a) 10; b) 30; c) 30; d) 36; e) 90; f) 420.

Megjegyzés: a 23. és a 24. feladatban lehetőleg legkisebb közös többszörössel számolj!

C jelűek feladata:

23. Hozd közös nevezőre a törteket, majd állapítsd meg, hogy melyik a nagyobb!

a) $\frac{4}{7}$ és $\frac{9}{14}$; b) $\frac{4}{3}$ és $\frac{3}{2}$; c) $\frac{5}{7}$ és $\frac{65}{91}$; d) $\frac{31}{21}$ és $\frac{8}{6}$; e) $\frac{7}{100}$ és $\frac{8}{1000}$.

Megoldás:

a) $\frac{8}{14} < \frac{9}{14}$; b) $\frac{8}{6} < \frac{9}{6}$; c) $\frac{65}{91} = \frac{65}{91}$; d) $\frac{62}{42} > \frac{56}{42}$; e) $\frac{70}{1000} > \frac{8}{1000}$.

D jelűek feladata:

24. Közös nevezőre hozás után végezd el a kijelölt műveleteket! Egyszerűsítsd az eredményt!

a) $\frac{4}{5} - \frac{1}{2}$; b) $\frac{5}{8} + \frac{3}{12}$; c) $\frac{8}{10} + \frac{6}{15}$; d) $\frac{8}{3} - \frac{5}{6}$; e) $\frac{68}{10} + \frac{32}{100}$.

Megoldás:

a) $\frac{8}{10} - \frac{5}{10} = \frac{3}{10}$; b) $\frac{15}{24} + \frac{6}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$; c) $\frac{24}{30} + \frac{12}{30} = \frac{36}{30} = \frac{6}{5}$;

d) $\frac{8}{3} - \frac{5}{6} = \frac{16}{6} - \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$; e) $\frac{680}{100} + \frac{32}{100} = \frac{712}{100} = \frac{178}{25}$.

IV. Pozitív számok normálalakja

Fizikában, kémiában, csillagászatban találkozhatunk olyan nagy vagy olyan kicsi számokkal, amelyek kiírása rendkívül helyigényes. Például:

A csillagászatban a fény terjedési sebessége 300 000 km/h. A fény egy év alatt kb. 9 500 000 000 000 km-t tesz meg. A Nap –Föld távolság 149 600 000 km.

A Nap egy 1 400 000 km átmérőjű, 2 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 kg tömegű törpecsillag.

A kémiában az atomi tömegegység 0,00000000000000000000000000166 kg.

Egy mol mennyiségű anyag 600 000 000 000 000 000 000 000 db elemi egységet (atomot, iont, molekulát stb.) tartalmaz.

Ezeket a mennyiségeket rövidebben is felírhatjuk a következőképpen:

$300\,000$ km/h $= 3\cdot10^{5}$ km/h;

$9\,500\,000\,000\,000$ km $= 9{,}5\cdot10^{12}$ km;

$149\,600\,000$ km $= 1{,}496\cdot10^{8}$ km;

$1\,400\,000$ km $= 1{,}4\cdot10^{6}$ km;

$2\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ kg $= 2\cdot10^{30}$ kg;

$0{,}00000000000000000000000000166$ kg $= 1{,}66\cdot10^{-26}$ kg;

$600\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ db $= 6\cdot10^{23}$ db.

Ha egy pozitív számot egy 1 és 10 közé eső szám és 10 megfelelő egész kitevős hatványaként írunk fel, akkor ezt az írásmódot a szám **normálalakjának** nevezzük.

Mintapélda$_{12}$

Írjuk fel a következő számok normálalakját: a) 62 358; b) 0,004926.

Megoldás:

A hangsúly azon van, hogy 10-nek hányadik hatványával szorozzuk meg az egy és 10 közé eső számot. Készítsünk a számokhoz helyiérték-táblázatot!

a) $62358 = 6\cdot 10000 + 2\cdot 1000 + 3\cdot 100 + 5\cdot 10 + 8\cdot 1 = 6\cdot 10^4 + 2\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 8\cdot 10^0$

10^4 (10000)	10^3 (1000)	10^2 (100)	10^1 (10)	10^0 (1)	10^{-1} (0,1)	10^{-2} (0,01)	10^{-3} (0,001)	10^{-4} (0,0001)
6	**2**	**3**	**5**	**8**				
				6	2	3	5	8

A táblázat második sorát úgy kaptuk, hogy az eredeti számot az 1-es helyiértéknél kezdtük felírni. A táblázatban a dupla vonal a tizedesvessző helyét jelzi. A második sorban lévő számot 10^4-nel, azaz tízezerrel kell megszorozni ahhoz, hogy megkapjuk az eredeti számot: $62358 = 6{,}2358\cdot 10^4$

A szám normálalakja: $6{,}2358\cdot 10^4$.

Megjegyzés: A normálalakot úgy is megkapjuk, ha a számot addig osztjuk 10-zel, amíg a hányados egészrésze 1 és 10 közé esik:

$$62358 = 6235{,}8\cdot 10 = 623{,}58\cdot 10^2 = 62{,}358\cdot 10^3 = 6{,}2358\cdot 10^4 .$$

b) $0{,}004906 = 4\cdot\frac{1}{1000} + 9\cdot\frac{1}{10000} + 0\cdot\frac{1}{100000} + 6\cdot\frac{1}{1000000} = 4\cdot 10^{-3} + 9\cdot 10^{-4} + 0\cdot 10^{-5} + 6\cdot 10^{-6}$.

10^1	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
	0	**0**	**0**	**4**	**9**	**0**	**6**
	4	9	0	6			

A második sorban lévő számot úgy kaptuk, hogy balról indulva megkerestük az első nullától különböző számjegyet, amit az 1-es helyiértékhez írtunk, majd a többi számjegyet változatlan sorrendben utána írtuk.

A második sorban lévő számot 10^3-nal, vagyis ezerrel kell osztani ahhoz, hogy megkapjuk az eredeti számot: $0{,}004906 = 4{,}906:10^3 = \frac{4{,}906}{10^3}$.

Felhasználva az $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ azonosságot kapjuk, hogy $0{,}004906 = 4{,}906\cdot 10^{-3}$.

A szám normálalakja: $4{,}906\cdot 10^{-3}$.

Megjegyzés: A normálalakot úgy is megkapjuk, ha a számot addig szorozzuk 10-zel, amíg a szorzat egészrésze 1 és 10 közé esik.

$$0{,}004906$$
$$0{,}004906 \cdot 10 = 0{,}04906$$
$$0{,}004906 \cdot 100 = 0{,}4906$$
$$0{,}004906 \cdot 1000 = 4{,}906$$

Azaz $0{,}004906 = 4{,}906 : 1000 = 4{,}906 \cdot \frac{1}{1000} = 4{,}906 \cdot 10^{-3}$.

Röviden ismételjük át néhány helyiérték elnevezését!

Helyiérték	Elnevezés
10^{12}	billió (ezermilliárd)
10^{11}	százmilliárd
10^{10}	tízmilliárd
10^{9}	milliárd (ezermillió)
10^{8}	százmillió
10^{7}	tízmillió
10^{6}	millió
10^{5}	százezer
10^{4}	tízezer
10^{3}	ezer
10^{2}	száz

Helyiérték	Elnevezés
10^{1}	tíz
10^{0}	egy
10^{-1}	tized
10^{-2}	század
10^{-3}	ezred
10^{-4}	tízezred
10^{-5}	százezred
10^{-6}	milliomod
10^{-7}	tízmilliomod
10^{-8}	százmilliomod

A mintapéldában bemutatott táblázatos felírásnak megfelel a következő forma:

$\underbrace{62358}_{? = 4} = 6{,}2358 \cdot 10^{?} = 6{,}2358 \cdot 10^{4}$ $\underbrace{0{,}004}_{? = -3}906 = 4{,}906 \cdot 10^{?} = 4{,}906 \cdot 10^{-3}$

10-nél nagyobb számok esetén a tizedesvessző balra „vándorol”, azaz 10 megfelelő hatványával **szorzunk**. A kitevőbe az a szám kerül, ahány helyiértéket „vándorol” a tizedesvessző.

1-nél kisebb, pozitív szám esetén a tizedesvessző jobbra „vándorol”. Ez 10 megfelelő hatványával való **osztást** jelent. A kitevőbe az a szám kerül negatív előjellel, ahány helyiértéket „vándorol” a tizedesvessző.

(10-zel, 100-zal, 1000-rel stb. történő osztás ugyanaz, mint $\frac{1}{10} = 10^{-1}$-nel, $\frac{1}{100} = 10^{-2}$-nel, $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$-nal való szorzás.)

Mintapélda$_{13}$

Írjuk fel a következő szorzatok számértékét: a) $3,59175 \cdot 10^8$; b) $7,294 \cdot 10^{-7}$.

Megoldás:

a) $3,59175 \cdot 10^8 = 359175000$;

b) $7,294 \cdot 10^{-7} = 0,0000007294$.

Feladatküldéses módszer alkalmazása
A tanulók továbbra is az eddig kialakított csoportokban dolgoznak. Egy írólapra (vagy papírlapra) összeírnak 4 – 4 feladatot a mintapélda alapján, valamint 2 – 2 példát, melyben a normálalak az adott. Majd két-két csoport kicseréli a feladatsorát. Megoldják, visszacserélik és ellenőrzik a feladatsorokat. Végül megbeszélik a javítást.

Feladatok

25. Írd be helyiérték-táblázatba az alábbi számokat: 62; 0,13; 803,762; 0,0023; 50034; 32,00491 .

26. Írd fel a következő számok normálalakját!

a) 9 000 000; b) 589 000; c) 27 265; d) 30;
e) 76 123,23; f) 36,04; g) 2,8; h) 0,0000004;
i) 0,00123; j) 0,6723; k) 0,8003; l) 0,0000656709.

Megoldás:

a) $9 \cdot 10^6$; b) $5,89 \cdot 10^5$; c) $2,7265 \cdot 10^4$; d) $3 \cdot 10$; e) $7,612323 \cdot 10^4$; f) $3,604 \cdot 10$;
g) 2,8; h) $4 \cdot 10^{-7}$; i) $1,23 \cdot 10^{-3}$; j) $6,723 \cdot 10^{-1}$; k) $8,003 \cdot 10^{-1}$;
l) $6,56709 \cdot 10^{-5}$.

27. Írd fel a következő szorzatok számértékét!

a) $3 \cdot 10^3$; b) $5 \cdot 10^{-2}$; c) $1,52 \cdot 10$; d) $6,19 \cdot 10^{-1}$;
e) $4,16 \cdot 10^4$; f) $7,08325 \cdot 10^2$; g) $9,6354 \cdot 10^{-3}$.

Megoldás:

a) 3000; b) 0,05; c) 15,2; d) 0,619; e) 41600; f) 708325; g) 0,0096354.

28. Melyik a nagyobb?

a) 95438 vagy $9{,}5438\cdot 10^3$; b) $2{,}98\cdot 10^{-5}$ vagy 0,000298;

c) 436,5 vagy $4{,}365\cdot 10^2$.

Megoldás: a) $95438 > 9{,}5438\cdot 10^3$; b) $2{,}98\cdot 10^{-5} < 0{,}000298$; d) $436{,}5 = 4{,}365\cdot 10^2$.

29. Csoportosítsd nagyságrendek (10 hatványai) szerint a normálalakban megadott számokat, majd állítsd növekvő sorrendbe!

$1{,}14\cdot 10^3$; $6{,}83\cdot 10^{-2}$; $6{,}84\cdot 10^{-3}$; $2{,}43\cdot 10^1$; $9\cdot 10^4$; $3{,}14\cdot 10^0$;
$7{,}39\cdot 10^1$; $4{,}5\cdot 10^{-2}$; $2{,}81\cdot 10^1$; $8{,}27\cdot 10^0$.

Megoldás:

$6{,}84\cdot 10^{-3}$; $4{,}5\cdot 10^{-2}$; $6{,}83\cdot 10^{-2}$; $3{,}14\cdot 10^0$; $8{,}27\cdot 10^0$; $2{,}43\cdot 10^1$;
$2{,}81\cdot 10^1$; $7{,}39\cdot 10^1$; $1{,}14\cdot 10^3$; $9\cdot 10^4$.

Műveletek normálalakban megadott számokkal

Mintapélda$_{14}$

Hány kilométer távolságra van a Földtől a 15,3 fényévre lévő bolygó?
(1 fényév = $9{,}46\cdot 10^{12}$ km)

Megoldás:

$$15{,}3 \text{ fényév} = 15{,}3\cdot 9{,}46\cdot 10^{12}\text{ km} = 144{,}738\cdot 10^{12}\text{ km} = \underbrace{1{,}44738\cdot 10^2}_{144{,}738}\cdot 10^{12}\text{ km} =$$

$$= 1{,}44738\cdot 10^{14}\text{ km}$$

A bolygó $1{,}44738\cdot 10^{14}$ km távolságra van a Földtől.

Mintapélda$_{15}$

Végezzük el a következő műveleteket, és adjuk meg a végeredményt normálalakban!

a) $1{,}3\cdot 10^5\cdot 6{,}5\cdot 10^{-12}$; b) $\dfrac{3{,}6\cdot 10^{-5}}{9\cdot 10^2}$; c) $9{,}3\cdot 10^5+8{,}5\cdot 10^4$.

Megoldás:

a) $1{,}3\cdot 10^5\cdot 6{,}5\cdot 10^{-12} = 1{,}3\cdot 6{,}5\cdot 10^5\cdot 10^{-12} = 8{,}45\cdot 10^{5-12} = 8{,}45\cdot 10^{-7}$;

b) $\dfrac{3{,}6\cdot 10^{-5}}{9\cdot 10^2} = \dfrac{3{,}6}{9}\cdot\dfrac{10^{-5}}{10^2} = 0{,}4\cdot 10^{-5-2} = 0{,}4\cdot 10^{-7} = \underbrace{4\cdot 10^{-1}}_{0{,}4}\cdot 10^{-7} = 4\cdot 10^{-8}$.

c) $9{,}3 \cdot 10^5 + 8{,}5 \cdot 10^4 = 930\,000 + 85000 = 1\,015\,000 = 1{,}015 \cdot 10^6$.

Műveletek normálalakben megadott számokkal:

I. Szorzás és osztás: A műveleteket külön végezzük az 1 és 10 közé eső számokkal és 10 hatványaival. Ez utóbbinál alkalmazzuk a hatványozás azonosságait. Az eredményül kapott szorzatot továbbalakítjuk normálalakká.

II. Összeadás és kivonás: A műveletet nem célszerű normálalakban elvégezni. A normálalakokat számmá alakítjuk, elvégezzük a műveletet, majd az eredményt felírjuk normálalakban.

Feladatok

30. Végezd el a kijelölt műveleteket, és add meg normálalakban az eredményeket, majd állítsd csökkenő sorrendbe az eredeti mennyiségeket!

a) $6 \cdot 10^8 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-4}$; b) $\dfrac{8 \cdot 10^5}{4 \cdot 10^{-3}}$; c) $2{,}5 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^3$; d) $\dfrac{1{,}2 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^4}$;

e) $3{,}4 \cdot 10^3 + 1{,}5 \cdot 10^4$; f) $8 \cdot 10^{-2} - 4 \cdot 10^{-3}$.

Megoldás:

a) $6 \cdot 10^8 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-4} = 9 \cdot 10^4$; b) $\dfrac{8 \cdot 10^5}{4 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^8$;

c) $2{,}5 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^3 = 10 \cdot 10^7 = 1 \cdot 10^8$; d) $\dfrac{1{,}2 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^4} = 0{,}4 \cdot 10^{-1} = 4 \cdot 10^{-2}$;

e) $3{,}4 \cdot 10^3 + 1{,}5 \cdot 10^4 = 3400 + 15000 = 18400 = 1{,}84 \cdot 10^4$;

f) $8 \cdot 10^{-2} - 4 \cdot 10^{-3} = 0{,}08 - 0{,}004 = 0{,}076 = 7{,}6 \cdot 10^{-2}$.

Csökkenő sorrend: $\dfrac{8 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^3}$; $2{,}5 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^3$; $6 \cdot 10^8 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-4}$;

$3{,}4 \cdot 10^3 + 1{,}5 \cdot 10^4$; $8 \cdot 10^{-2} - 4 \cdot 10^{-3}$; $\dfrac{1{,}2 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^4}$; (b > c > a > e > f > d).