Ajánlott szakmai jellegű feladatok

A feladatok szakmai jellegűek, alkalmazásuk mindenképpen a tanulók motiválását szolgálja. Segít abban, hogy a tanulók a tanultak alkalmazhatóságát meglássák. Értsék meg, hogy a matematika tanulása nem öncélú, hanem hasznos tevékenység.

A feladatok nem tartalmaznak kifejezetten szakmai számításokat, bármely szakmát tanuló tanulók számára kitűzhetők.

A feladatok feldolgozása nem igényel különösebb szakmai ismereteket a matematikatanártól sem. Ötletadónak is szántuk, hogy a kollégák maguk is készítsenek hasonló feladatokat az ott tanított szakmák ismeretében.

Másodfokú egyenletek

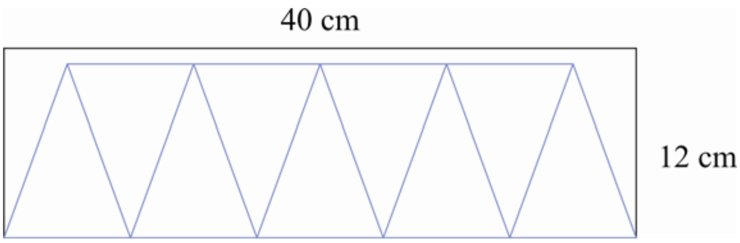
1. Egy 288 cm^2 téglalap alakú bádoglemezből négyzet alakú lemezt készítenek úgy, hogy egyik oldalával párhuzamosan levágnak egy 4 cm széles sávot. Hány cm^2 lesz az így kapott négyzet területe?

Megoldás: A téglalap oldalai x és $(x + 4)$. A téglalap területe: $x(x + 4) = 288$.

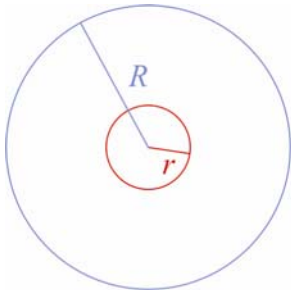
Ebből $x_1 = 30{,}18$ és $x_2 = -19{,}09$. A hosszúság mérőszáma csak pozitív szám lehet. Ezért a megoldás a 30,18. A négyzet területe: $x^2 \approx 910{,}8$; azaz 910,8 cm^2.

2. Egy egyenlőszárú háromszög alakú sablonlemez magassága 3 cm-rel hosszabb, mint az alapja. A területe 44 cm^2. A sablon alapján 9 darab háromszöget kívánnak kivágni egy 12 cm széles és 40 cm hosszú acélszalagból. Lehetséges ez?

Megoldás: A háromszög területe: $\frac{a \cdot (a+3)}{2} = 44$. Ebből $a_1 = 8$; $a_2 = -11$. A hosszúság mérőszáma csak pozitív szám lehet, ezért a megoldás: 8. A háromszög alapja 8 cm, a magassága 11 cm. Ha a sablont az ábrán látható módon helyezzük a szalagra, akkor lehetséges a 9 háromszög kivágása.



3. Egy M36-os csavarhoz tartozó alátét belső átmérője 58 mm. Az alátét felfekvési felülete $4825{,}6 \text{ mm}^2$. Mekkora az alátét külső átmérője?



Megoldás: Az alátét körgyűrű alakú.

A belső sugár: $r = 29$ mm, a külső sugár: R.

A nyílás területe: $29^2 \cdot \pi \approx 2642{,}1$ (mm^2);

az alátét területe a nyílással együtt: $R^2 \cdot \pi$.

Az alátét felfekvési felülete: $R^2 \cdot \pi - 2642{,}1 = 4825{,}6$.

Ebből: $R^2 = 2377{,}04$; $R \approx 48{,}75$ (mm).

Az alátét külső átmérője ennek kétszerese, 97,5 mm.

4. Egy téglalap alaprajzú szoba egyik oldala 90 cm-rel hosszabb, mint a másik. A szoba alapterülete 20 m^2, magassága 2,8 m. Az ajtók–ablakok 5 m^2 területet foglalnak el a falakon. A szobát kifestik, beleértve a mennyezetet is. Mekkora a festendő felület?

Megoldás: A szoba téglalap alakú padlózatának, illetve a mennyezetének oldalai:

x és $(x + 0{,}9)$; területe: $x \cdot (x + 0{,}9) = 20$; ebből: $x^2 + 0{,}9x - 20 = 0$.

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy: $x_1 \approx 4{,}045$; $x_2 \approx -9{,}89$.

A hosszúság mérőszáma csak pozitív szám lehet. Ezért a megoldás: 4,045.

Az oldalak: $\approx 4{,}05$ m és 4,95 m.

Az oldalfalak területe: $2 \cdot 2{,}8 \cdot (4{,}05 + 4{,}95) = 50{,}4$ (m^2).

A festendő terület: $50{,}4 + 20 - 5 = 65{,}4$; azaz 65,4 m^2.

5. Padlóburkoláskor az egyik falnál a négyzet alakú padlóburkoló lapokból 6 cm-es sávot vágtak le. Így egy megkisebbített lap területe 720 cm^2 lett. Mekkora az eredeti padlólapok mérete?

Az eredeti példa más szövegezéssel, hibásan jelent meg!

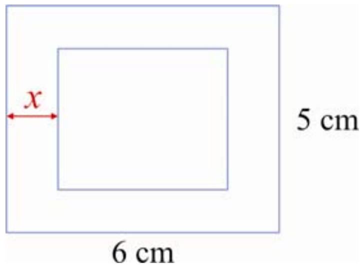
Megoldás: A négyzet alakú lap oldala x cm hosszú. A megcsonkított lap területe:

$x \cdot (x - 6) = 720$. Ebből: $x^2 - 6x - 720 = 0$. Az egyenlet megoldása: $x_1 = 30$; $x_2 = -24$.

A hosszúság mérőszáma csak pozitív szám lehet, ezért a megoldás 30, az eredeti burkolólap oldalai 30 cm hosszúak.

6. Egy téglalap alakú alátétlemez oldalai 6 cm és 5 cm hosszúak. A lemez közepén a nyílás 6 cm^2 területű. A nyílást úgy vágták ki a lemezből, hogy a kivágás széle mindenütt azonos távolságra legyen az alátétlemez széleitől. Hány cm-re van a kivágás az alátétlemez szélétől?

Megoldás: Az alátét lemez oldalait a két oldalon x cm-rel megrövidítve 6 cm^2 területet kapunk.



$(6 - x)(5 - x) = 6$, amiből: $x^2 - 11x + 24 = 0$.

Az egyenlet megoldása : $x_1 = 8$; $x_2 = 3$.

Megoldást csak az $x = 3$ ad, ugyanis a 6 cm, illetve 5 cm hosszú oldalból nem tudunk elvenni 8 cm-t. A 3 cm két oldali csökkentést jelent, ezért a megmaradó sáv 1,5 cm széles.

Megjegyzés: A nyílás oldalai így 3 cm és 2 cm, területe valóban 6 cm^2. Figyeljük meg, hogy az egyenletnek a 8 is valóban megoldása, hiszen $(6 - 8) = -2$; $(5 - 8) = -3$ és $(-2)\cdot(-3) = 6$. Azonban -2 és -3 nem lehet egy téglalap oldalának mérőszáma.

Ezért 8 megoldása az egyenletnek, de nem megoldása a szöveges feladatnak.

7*. Egy traktorral a felszántandó terület felét felszántották, majd a másik felének szántását egy másik traktorral fejezték be. Így a szántás 25 napig tartott. Ugyanezt a földterületet 12 nap alatt szánthatták volna fel, ha a két traktor egyszerre dolgozott volna. Hány nap alatt végezné el az egész szántást az egyik, és hány nap alatt a másik traktor?

Megoldás: Az egyik traktor x nap alatt szántotta fel, a másik $(25 - x)$ nap alatt a terület felét, ezért az egész területet az egyik $2x$, a másik $2(25 - x)$ nap alatt szántaná fel egyedül.

Ezért 1 nap alatt az egyik felszántja a terület $\frac{1}{2x}$-ed részét, a másik az $\frac{1}{2(25-x)}$-ed részét. 12 nap alatt szántanák fel az egész területet együtt.

ezért: $\frac{12}{2x} + \frac{12}{2(25-x)} = 1$. Ebből 2-vel egyszerűsítve kapjuk: $\frac{6}{x} + \frac{6}{25-x} = 1$

Ebből közös nevezőre hozva és a nevezővel szorozva ($x \neq 0$ és $x \neq 25$), valamint az összevonásokat elvégezve kapjuk, hogy: $x^2 - 25x + 150 = 0$. Az egyenlet megoldása:

$x_1 = 10$; $x_2 = -15$. Mivel x-szel a félterület felszántási idejét jelöltük, a teljes területet az egyik traktor 20 nap alatt, a másik 30 nap alatt szántaná fel egyedül.

8*. Egy ház alapozási munkáján két kőműves dolgozik. A munka 8 nap alatt készül el, de az egyik kőműves az első és a harmadik napon hiányzik. Ha egyedül dolgoznának, akkor az a munkás, aki nem dolgozta végig a 8 napot, 4 nappal hamarább fejezné be a munkát, mint a másik, aki végigdolgozta a 8 napot. Hány nap alatt végeznék el egyedül a munkát az egyes kőművesek?

Megoldás: Az egyik kőműves x nap alatt végezné el egyedül a munkát, ő 8 napig dolgozott. A másik kőműves $(x - 4)$ nap alatt végezné el egyedül a munkát és 6 napon át dolgozott. Ezért 1 nap alatt az egyik a munka $\frac{1}{x}$-ed részét, a másik az $\frac{1}{x-4}$-ed részét végzi el. A feladat szerint 8 illetve 6 nap alatt ketten elvégzik az egész munkát:

$\frac{8}{x}+\frac{6}{x-4}=1$. Ebből: $x^2 - 18x + 32 = 0$. Az egyenlet megoldása: $x_1 = 16$; $x_2 = 2$. A feladat megoldása 16; az egyik kőműves 16 nap alatt, másik 12 nap alatt végezné el a munkát egyedül.

9. Egy 30 cm széles bádoglemezből vízlevezető csatornát hajlítunk. Ezt a legegyszerűbben úgy tehetjük, hogy a lemez két oldalát egyenlő mértékben felhajtjuk úgy, hogy a keletkezett csatorna téglalap alakú legyen. Mennyit hajtsunk fel, hogy a csatorna keresztmetszete 112 cm^2 területű legyen?

Figyelem! Az eredeti feladat számadatát megváltoztattuk!

Megoldás: A két felhajtott rész magassága: x, a csatorna alja: $(30 - 2x)$. A keresztmetszet területe: $x(30 - 2x) = 112$; ebből: $x^2 - 15x + 56 = 0$. Az egyenlet megoldása: $x_1 = 7$; $x_2 = 8$. Mind a két megoldás megoldása a feladatnak. Két olyan csatorna készíthető, amelynek keresztmetszete 112 cm^2: Az egyik alapja 16 cm és a felhajtott részek magassága 7 cm, a másik alapja 14 cm és a felhajtott rész magassága 8 cm.

10. Egy fatelepről egy asztalosüzem rendszeresen olyan téglalap alakú farostlemezeket vásárolt, amelynek oldalai 90 cm és 120 cm hosszúak voltak. Az új rendelésben a megrendelő azt kérte, hogy olyan farostlemezeket szállítson, amelynek a régi rendelésekben szereplő adatokhoz képest a hosszabbik oldala ugyanannyival rövidebb legyen, mint amennyivel hosszabb legyen a rövidebbik oldala. Az új téglalap területe így 1,1 m^2 lesz.

Mennyivel változtak az új téglalap oldalai a régihez képest? A változás után egy téglalap ára olcsóbb lett, vagy drágább? (A farostlemez egységára 1000 Ft/m^2.)

Megoldás: Az oldalakat x m-rel növeljük, illetve csökkentjük. Az így kapott téglalap területe: $(0,9 + x)(1,2 - x) = 1,1$; ebből kapjuk, hogy: $x^2 - 0,3x + 0,02 = 0$. Az egyenlet megoldása : $x_1 = 0,2$; $x_2 = 0,1$. Mind a két megoldás a feladatnak is megoldása, mind a két esetben az új terület 1,1 m^2. Ez nagyobb az előző méretűnél, amely 1,08 m^2. Ezért drágább is, hiszen a régi lap ára 1080 Ft, az új lapé 1100 Ft.

11. Egy üzemanyag-tartályt két csapon 5 órán keresztül töltenek fel, ha mind a két csap egyszerre működik. Mennyi idő alatt töltik fel egyedül az egyes csapok, ha az egyik csapnak 2 órával kevesebb idő szükséges a tartály feltöltéséhez, mint a másiknak?

Megoldás: Az egyik csap x, a másik $(x - 2)$ óra alatt töltené meg a tartályt. 5 óra alatt a két csap megtölti az egész tartályt. $\frac{5}{x} + \frac{5}{x-2} = 1$; ebből: $x^2 - 12x + 10 = 0$. Az egyenlet megoldása: $x_1 = 11,1$; $x_2 = 0,9$.

A feladatnak csak az $x = 11,1$ a megoldása, hiszen ha $x = 0,9$ óra lenne, akkor az egyik csap negatív idő alatt töltené meg a tartályt: $0,9 - 2 = -0,1$. Ennek itt nincs értelme.

12. Egy téglalap alakú 16 m hosszú és 12 m széles területen úgy füvesítenek, hogy a területen belül, az oldalak mentén azonos szélességű, keskeny járdát is építenek. A füvesített rész területe megegyezik a járdák területével. Milyen széles a járda?

Megoldás: A rendezett terület $16 \cdot 12 = 192$ (m^2). A füvesített rész ennek a fele: 96 m^2.

A járda szélessége x; A füvesített terület: $(16 - 2x)(12 - 2x) = 96$, ebből: $x^2 - 14x + 24$.

Az egyenlet megoldása: $x_1 = 12$; $x_2 = 2$. A feladatnak csak az $x = 2$ a megoldása. (A 12 m hosszú oldalból nem vehetünk el kétszer 12 m széles járdát.) A járda 2 m széles.

13*. Egy harisnyanadrág ára két egymást követő, azonos százalékú árleszállítás után 300 Ft-ról 192 Ft-ra csökkent. Hány százalékkal lett olcsóbb a harisnya az egyes árleszállításokkor? Hány százalékkal lett olcsóbb az ár az eredeti árhoz képest?

Megoldás: Az a %-os árleszállítás azt jelenti, hogy az eredeti árat $x = \frac{100-a}{100}$ –zal szorozva kapjuk meg az új árat. A két egymást követő árleszállítás után: $300 \cdot x \cdot x = 192$, ebből $x^2 = \frac{192}{300} = 0{,}64$. $x = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$. Az egyes árleszállítások 20%-osak voltak, az utolsó ár 36%-kal lett olcsóbb az eredetinél.

14*. Egy cipő árát árrendezés során bizonyos százalékkal felemelték, majd mivel a felemelt ár miatt a cipő kevésbé fogyott, az árát kétszer annyi százalékkal csökkentették, mint ahány százalékkal először felemelték. A cipő ára így az eredeti árnál 5,5%-kal olcsóbb lett. Hány százalékkal emelték eredetileg az árat? Mennyibe került az árrendezés előtt a cipő, ha a végleges ára 11340 Ft?

Megoldás: Jelöljük az eredeti árat a-val, ekkor $a \cdot 0{,}945 = 11340$, ebből $a = 12000$ (Ft).

Az első áremelést jelöljük x%-kal. A két árváltoztatásra felírható a következő egyenlet:

$12000(1+\frac{x}{100})(1-\frac{2x}{100}) = 11340$, amiből: $x_1 = 5$; $x_2 = -55$. A megoldás csak pozitív szám lehet, ezért csak az 5 a feladat megoldása. Tehát először 5%-kal emeltek, majd 10%-kal csökkentették az árat.

15. 20 literes tartályban sűrű festék van. Ebből kivesznek egy bizonyos mennyiséget, és annyi hígítót öntenek bele, mint amennyi festéket kivettek. Összekeverés után a keverékből ismét kivesznek ugyanannyit, mint előzőleg és helyébe ismét hígítót öntenek, így a tartályban 5 liter festék marad az eredeti festékből. Hány liter folyadékot öntöttek ki az edényből az egyes alkalmakkor?

Megoldás: A kivett mennyiség x liter. Az első alkalommal x liter tiszta festéket vesznek ki, a hígító bekeverése után a festék aránya a keverékben: $\frac{20-x}{20}$. Másodszor tehát a 20 l keverékből x liter $\frac{20-x}{20}$ festéktartalmú keveréket vesznek ki, ezért a második kivétel után a keverékben megmaradó festék: $(20-x) - x\frac{20-x}{20} = 5$. Ebből $x^2 - 40x + 300 = 0$.

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 10$ és $x_2 = 30$, de ez utóbbinak a feladat esetén nincs értelme (20 literből 30-at nem lehet kivenni). Tehát a festékből, illetve a keverékből egymás után kétszer 10 litert vettek ki.

16. Egy 12 m hosszú és 10 m széles téglalap alapterületű étteremben a szilveszteri mulatsághoz átrendezik a termet. Az asztalokat a falak mellé teszik, hogy a terem közepén egy 48 m^2 területű szabad hely maradjon a táncolók számára. A falaktól számítva hány méter széles sávban helyezik el az asztalokat?

Megoldás: A terem oldalai 12 m és 10 m, az asztaloknak fenntartott sáv szélessége x. A szabadon hagyott terület $(12 - 2x)(10 - 2x) = 48$, ebből $x^2 - 11x + 18 = 0$. Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 9$; $x_2 = 2$. A feladatnak csak az $x = 2$ felel meg. (Két-két 9 m széles sáv nem férne el a teremben.)

17. A faiparban a faanyag megmunkálásához több esetben szükséges a farönkök gőzölése. A gőzölési idő függ a vastagságuktól, a nagyobb keresztmetszetű gőzölése tovább tart. Két hengeresnek tekinthető, azonos fafajtájú rönk gőzölési ideje 3,5 óra illetve 4,8 óra. A vékonyabb rönk átmérője 24 cm. Mekkora a vastagabb rönk átmérője? (Ha z_1 és z_2 a gőzölési idő és D_1, D_2 a rönkök átmérője, akkor: $\frac{z_2}{z_1} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2$.

Megoldás: Az adatokat helyettesítsük az egyenletbe: $\frac{4{,}8}{3{,}5} = \left(\frac{D_2}{24}\right)^2$.

Ebből $D_2 = \sqrt{\frac{4{,}8 \cdot 24^2}{3{,}5}} \approx 28{,}1$, azaz 28,1 cm a vastagabb rönk átmérője.

18. A bútorok lakkozása előtt a fafelületet csiszolják. A felület simasága különböző lehet. A közepes simaságot az érdességi mélységek méréséből állapítják meg. A közepes simaságot (H_k) a következő képlet alapján állapítják meg:

$H_k = \sqrt{\frac{1}{n}\left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \ldots k_n^2\right)}$, ahol n a mérések számát és k az egyes mérési mélységeket jelenti.

a) Fejezzük ki a mérések számát a képletből!

b) Hány mérést végeztek, ha a mérési adatok négyzetének összege 0,025 mm és a közepes simaság 0,05?

Megoldás:

a) $n = \dfrac{\left(k_1^{\,2} + k_2^{\,2} + k_3^{\,2} ... k_n^{\,2}\right)}{\left(H_k\right)^2}$

b) Helyettesítsük az értékeket az előbbi képletbe: $n = \dfrac{0{,}025}{0{,}05^2} = \dfrac{0{,}025}{0{,}0025} = 10$;

azaz 10 mérést végeztek.

19. A borászatban használják a domború hasú hordó köbtartalmának közelítő kiszámítását.

A hordó térfogata: $V \approx \dfrac{m \cdot \pi}{12}\left(2D^2 + d^2\right)$, ahol m a hordó magassága, D a hasátmérő és d a fenékátmérő.

a) Fejezzük ki a hordó hasátmérőjét a képletből!

b) Mekkora a fenékátmérő, ha a két átmérő aránya 3 : 4, magassága 95 cm és a hordó űrtartalma közelítőleg 429 liter?

Az eredeti feladatból hiányzott a hordó magasságának megadása!

Megoldás:

a) $D \approx \sqrt{\dfrac{V \cdot 12}{2 \cdot m \cdot \pi} - d^2}$

b) $d : D = 3 : 4$; ebből $D = \dfrac{4d}{3}$; továbbá 429 liter megfelel 429000 cm^3 -nek.

Fejezzük ki a fenékátmérőt:

$d \approx \sqrt{\dfrac{V \cdot 12 \cdot 9}{m \cdot \pi \cdot 41}} = \sqrt{\dfrac{429000 \cdot 12 \cdot 9}{95 \cdot 41 \cdot 3{,}14 \cdot}} = \sqrt{\dfrac{46332000}{12230{,}3}} = \sqrt{3788{,}3} \approx 61{,}6$,

azaz a hordó fenékátmérője 61,6 cm.

20. Autóbaleseteknél fontos a fékút vizsgálata.

A gépkocsi fékútját (*s*) a következő összefüggések alapján számíthatjuk ki:

$s=\dfrac{v^2}{2a}$; $s=\dfrac{a}{2}t^2$, ahol v a gépkocsi sebessége ($\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$), (itt s másodpercet jelent), t a fékezés ideje; a pedig a gépkocsi gyorsulása ($\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$).

a) Számítsuk ki a féktávolságot, ha a gépkocsi sebessége: 90 $\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$, és lassulása 2,1 $\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$!

b) Számítsuk ki a féktávolságot, ha a gépkocsi lassulása 3 $\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$; és a fékezés ideje 5 másodperc!

c) Hány másodperc alatt állt meg a gépkocsi, ha a fékút, $s = 40$ m és a gépkocsi lassulása, $a = 2\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

d) Mekkora sebességgel haladt az a gépkocsi, amelynek fékútja 46 m és 6 másodperc alatt tudott megállni?

Megoldás:

a) A fékút: $s=\dfrac{v^2}{2a}$; az adatokat behelyettesítve; figyelembe véve, hogy

$90\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 25\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$; $s=\dfrac{25^2}{2\cdot 2{,}1} \approx 148{,}8$; azaz: a fékút: 148,8 m.

b) $s=\dfrac{a}{2}t^2$, az adatokat behelyettesítve: $s=\dfrac{3}{2}\cdot 5^2 = 37{,}5$, azaz a fékút: 37,5 m.

c) $s=\dfrac{a}{2}t^2$; ebből: $t=\sqrt{\dfrac{2s}{a}}$ az adatokat behelyettesítve az idő: $\sqrt{\dfrac{2\cdot 40}{2}} \approx 6{,}3$ másodperc.

d) $s=\dfrac{v^2}{2a}$; ebből: $v=\sqrt{2\cdot 40\cdot 2} \approx 12{,}6$, azaz a sebesség 12,6 $\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

21. Egy felső vezérlésű, felül-szelepelt motor esetében hány mm-t süllyed a szelep, addig amíg teljesen kinyílik, ha a szívócső átmérője 32 mm és a szelepnyílás 46 mm?

A szelep-elmozdulást a következő képletettel számítjuk ki: $D \cdot \pi \cdot h = \frac{d^2\pi}{4}$, ahol D a szelepnyílás átmérője, d a szívócső átmérője és h a szelep elmozdulása.

Megoldás: $D \cdot \pi \cdot h = \frac{d^2\pi}{4}$. Helyettesítsük a képletbe a megadott adatokat!

$46 \cdot \pi \cdot h = \frac{32^2\pi}{4}$. $h = \frac{32^2\pi}{4 \cdot 46 \cdot \pi} = \frac{3216{,}99}{578{,}05} = 5{,}6$, azaz 5,6 mm-t süllyed a szelep.