A CSOPORT

1. Számítsd ki a háromszög szögeit, ha a területe $7\sqrt{6}$ cm^2, és két oldala $b = 2\sqrt{7}$ cm és $a = 7$ cm hosszúak!

2. Legyen $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$. A szög meghatározása nélkül számítsd ki a másik három szögfüggvény értékét, és szerkeszd az egységsugarú körbe a keresett szögeket!

3. Az 1,2,3,4 számjegyekből háromjegyű számokat készítünk úgy, hogy a számjegyek nem ismétlődnek. A számkártyákból elkészítve az összes háromjegyű számot, és közülük egyet kiválasztva mi a valószínűsége annak, hogy 3-mal osztható számot kapunk?

4. Egy vállalat 15 dolgozójának 2006 március havi nettó keresete:

63 000	87 000	67 000	78 000	63 000
87 000	87 000	142 000	150 000	142 000
112 000	112 000	258 000	346 000	234 000

Mekkora a vállalat dolgozóinak átlagkeresete, a keresetek módusza, mediánja?
Írj egy-egy mondatot arról, hogy mit mutatnak ezek a statisztikai jellemzők erről a vállalatról!

5. Egy csomag magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani 4 lapot úgy, hogy 1 nyolcas és 3 makk szerepeljen a kiválasztott lapok között?

B CSOPORT

1. Számítsd ki a háromszög szögeit, ha a területe $7\sqrt{23}$ cm^2, és két oldala $b = 8\sqrt{2}$ cm és $a = 7$ cm hosszúak!

2. Legyen $\cos\alpha = \frac{5}{7}$. A szög meghatározása nélkül számítsd ki a másik három szögfüggvény értékét!

3. A 0,2,3,5 számjegyekből háromjegyű számokat készítünk úgy, hogy a számjegyek nem ismétlődnek. Hány darab öttel osztható számot készíthetünk?
A számkártyákból elkészítve az összes háromjegyű számot, és közülük egyet kiválasztva mi valószínűsége annak, hogy 5-tel osztható számot kapunk?

4. Egy osztály matematika dolgozatainak eredményei:

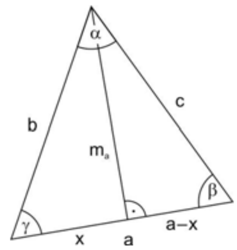
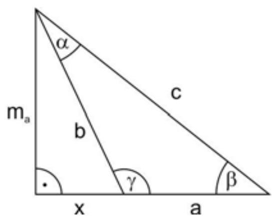
Minősítés	*Darab*
Jeles	5
Jó	7
Közepes	12
Elégséges	6
Elégtelen	3

Határozd meg a matematika dolgozat érdemjegyeinek átlagát, móduszát, mediánját!
Írj egy-egy mondatot arról, hogy mit mutatnak ezek a statisztikai jellemzők!

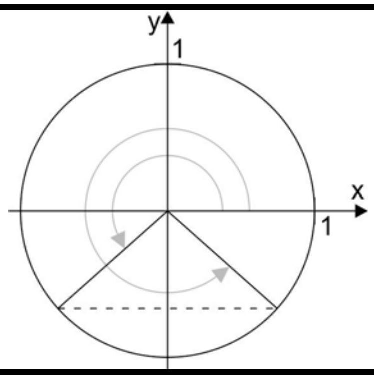
5. Egy csomag magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani 4 lapot úgy, hogy 1 hetes és 3 piros szerepeljen a kiválasztott lapok között?

Megoldások:

A csoport

1. Számítsd ki a háromszög szögeit, ha a területe $7\sqrt{6}$ cm², és két oldala $b = 2\sqrt{7}$ cm és $a = 7$ cm hosszúak!	
Trigonometrikus területképlet alkalmazása: $T = \dfrac{a \cdot b \cdot sin\gamma}{2}$ és $sin\ \gamma$ értékének kiszámítása: $sin\ \gamma = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$	1 pont 1 pont
γ lehetséges értékeinek meghatározása: $\gamma_1 = 67{,}8°$ és $\gamma_2 = 112{,}2°$	2 pont
Másik szög kiszámítása $\gamma_1 = 67{,}8°$ esetben: I. $\left(2\sqrt{7}\right)^2 = {m_a}^2 + x^2$ (1 pont) $T = \dfrac{a \cdot m_a}{2} \rightarrow m_a = 2\sqrt{6}$ (1 pont) m_a –t visszahelyettesítve I. -be kapjuk: $x = 2$ cm (1 pont) tg $\beta = \dfrac{m_a}{7-x} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5} = 0{,}9798$ (1 pont) $\beta_1 = 44{,}4°$ (1 pont) 	5 pont
Másik szög kiszámítása $\gamma_2 = 112{,}2°$ esetben: Új ábra (1 pont); $x = 2$ tg $\beta = \dfrac{m_a}{7+x} = \dfrac{2\sqrt{6}}{9} = 0{,}5443$ (1 pont) $\beta_2 = 28{,}6°$ (1 pont) 	3 pont
A harmadik szög kiszámítása az $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ összefüggést felhasználva: $\alpha_1 = 180° - (\beta_1 + \gamma_1) = 67{,}8°$ $\alpha_1 = 180° - (\beta_2 + \gamma_2) = 39{,}2°$ Ellenörzés: Nagyobb szöggel szemben van a hosszabb oldal	 2 pont 2 pont
Összesen:	16 pont

2. Legyen $\sin\alpha = -\dfrac{2}{3}$. A szög meghatározása nélkül számítsd ki a másik három szögfügg-vény értékét, és szerkeszd be az egységsugarú körbe a keresett szögeket!!	
cos α értékeinek meghatározása Pitagoraszi összefüggéssel ($\cos^2 x + \sin^2 x = 1$): $\cos^2\alpha = \dfrac{5}{9}$, amiből $\cos\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$; $\cos\alpha_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$	3 pont
tg $\alpha = \dfrac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$ összefüggés alkalmazása: tg $\alpha_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; tg $\alpha_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$	3 pont
ctg $\alpha = \left(\dfrac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}\right) = \dfrac{1}{tg\alpha}$ összefüggés alkalmazása:	3 pont

ctg $\alpha_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$; ctg $\alpha_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$	
	1+2=3pont
Összesen	12pont

3. Az 1,2,3,4 számjegyekből háromjegyű számokat készítünk úgy, hogy a számjegyek nem ismétlődnek. A számkártyákból elkészítve az összes háromjegyű számot, és közülük egyet kiválasztva mi a valószínűsége annak, hogy 3-mal osztható számot kapunk?	
Először kiválasztjuk azt a három számjegyet, amelyek összege osztható hárommal. 1,2,3 és 2,3,4	2 pont
Az 1,2,3 számjegyekből 6db háromjegyű szám készíthető.	1 pont
A 2,3,4 számjegyekből is 6 db háromjegyű szám készíthető.	1 pont
A megadott számjegyekből összesen 12 db olyan háromjegyű szám készíthető, amelyik osztható hárommal.	1 pont
A valószínűség kiszámításához meg kell határozni az összes és a kedvező esetet. A kedvező esetek száma az előző rész alapján 12.	1 pont
Az összes eset: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$	1 pont
A keresett valószínűség: $P(A)\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$	2 pont
Összesen	9 pont

4. Egy vállalat 15 dolgozójának 2006 március havi nettó keresete: 63 000 87 000 67 000 78 000 63 000 87 000 87 000 142 000 150 000 142 000 112 000 112 000 258 000 346 000 234 000 Mekkora a vállalat dolgozóinak átlagkeresete, módusza, mediánja? Írj egy-egy mondatot arról, hogy mit mutatnak ezek a statisztikai jellemzők erről a vállalatról!	
Először rendezzük sorba az adatokat! 63 000; 63 000; 67 000; 78 000; 87 000; 87 000; 87 000; 112 000; 112 000; 142 000; 142 000; 150 000; 234 000; 258 000; 346 000	1 pont
Az átlagkereset:135 200 Ft Átlagosan a vállalat dolgozói 135 200 Ft-ot keresnek.	2pont+2pont
A keresetek módusza: 87 000 Ft A vállalatnál a leggyakoribb fizetés 87 000 Ft.	1pont+2pont
A keresetek mediánja: 112 000 Ft A vállalatnál ugyanannyian keresnek 112 000 Ft-nál többet, mint kevesebbet.	1pont+2pont
Összesen	11pont

CSAK MEGASABB ÓRASZÁMBAN TANULÓKNAK:

5. Egy csomag magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani 4 lapot úgy, hogy 1 nyolcas és 3 makk szerepeljen a kiválasztott lapok között?	
A 32 lapos magyar kártyában 8 db makk és 4 db nyolcas lap van.	
a. A kiválasztott lapok között van a makk 8-as, ekkor a fennmaradó 3db nyolcasból már nem választunk, a 7 db makkból még 2-öt kell választani. Ezeken a lapokon kívüli 32-4-7= 21 db-ból pedig 1-et húzunk. $\binom{3}{0}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{21}{1}= 441$ a makk nyolcas egyértelműen választható, ezért az első tényező:1	4pont
b. A kiválasztott lapok között nincs a makk 8-as, ekkor a fennmaradó 3 db nyolcasból 1-et választunk, a 7 db makkból pedig 3-at $\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{21}{0}=105$	4pont
Így az összes kiválasztási lehetőség: 441+105 = 546	1 pont
Összesen	9pont

A heti 3 órában tanulóknak az 1 – 4. feladatokat ajánljuk. Összesen 48 pont.

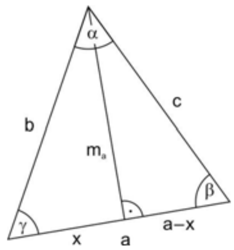
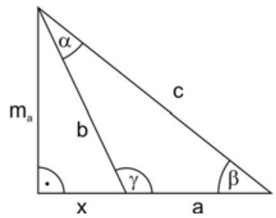
0 – 14: elégtelen
15 – 23: elégséges
24 – 32: közepes
33 – 40: jó
41 – 48: jeles

A heti 4 órában tanulóknak az összes feladatot ajánljuk. Összesen: 57 pont

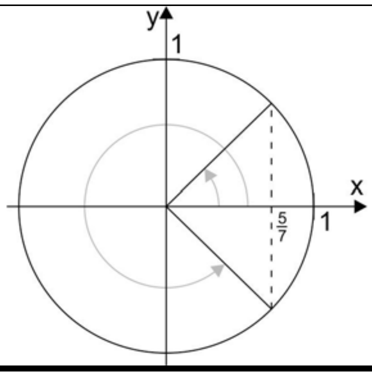
0 – 17: elégtelen
18 – 28: elégséges
29 – 38: közepes
39 – 47: jó
48 – 57: jeles

Megoldások:

B csoport

1. Számítsd ki a háromszög szögeit, ha a területe $7\sqrt{23}$ cm^2, és két oldala $b = 8\sqrt{2}$ cm és $a = 7$ cm hosszúak!	
Trigonometrikus területképlet alkalmazása: $T = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$ és *sin* γ értékének kiszámítása: $\sin\gamma = \frac{\sqrt{23}}{4\sqrt{2}} = 0{,}8478$	1 pont 1 pont
γ lehetséges értékeinek meghatározása: $\gamma_1 = 58{,}0°$ és $\gamma_2 = 122{,}0°$.	2 pont
Másik szög kiszámítása $\gamma_1 = 58°$ esetben: I. $\left(8\sqrt{2}\right)^2 = m_a^2 + x^2$ (1 pont) $T = \frac{a \cdot m_a}{2} \rightarrow m_a = 2\sqrt{23}$ (1 pont) m_a –t visszahelyettesítve I. -be kapjuk: $x = 6$ (1 pont) $\operatorname{tg}\beta = \frac{m_a}{7-x} = \frac{2\sqrt{23}}{1} = 9{,}5917$ (1 pont) $\beta_1 = 84{,}0°$ (1 pont) 	5 pont
Másik szög kiszámítása $\gamma_2 = 122°$ esetben: Új ábra: 1 pont; $x = 6$ $\operatorname{tg}\beta = \frac{m_a}{7+x} = \frac{2\sqrt{23}}{13} = 0{,}7378$ (1 pont) $\beta_2 = 36{,}4°$ (1 pont) 	3 pont
A harmadik szög kiszámítása az $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ összefüggést felhasználva: $\alpha_1 = 180° - (\beta_1 + \gamma_1) = 38{,}0°$ $\alpha_1 = 180° - (\beta_2 + \gamma_2) = 21{,}6°$	2 pont 2 pont
Összesen:	16 pont

2. Legyen $\cos\alpha = \frac{5}{7}$. A szög meghatározása nélkül számítsd ki a másik három szögfüggvény értékét!	
sin α értékeinek meghatározása Pitagoraszi összefüggéssel ($\cos^2 x + \sin^2 x = 1$): $\sin^2\alpha = \frac{24}{49}$, amiből $\sin\alpha_1 = \frac{2\sqrt{6}}{7}$; $\sin\alpha_2 = -\frac{2\sqrt{6}}{7}$	3 pont
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ összefüggés alkalmazása: $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2\sqrt{6}}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$	3 pont
$\operatorname{ctg}\alpha = \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ összefüggés alkalmazása: $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \frac{5}{2\sqrt{6}}$; $\operatorname{ctg}\alpha_2 = -\frac{5}{2\sqrt{6}}$	3 pont

	1+2 pont = 2 pont
Összesen	12 pont

3. A 0,2,3,5 számjegyekből háromjegyű számokat készítünk úgy, hogy a számjegyek nem ismétlődnek. Hány darab öttel osztható számot készíthetünk? A számkártyákból elkészítve az összes háromjegyű számot, és közülük egyet kiválasztva mi a valószínűsége annak, hogy 5-tel osztható számot kapunk?	
Ha nullára végződik a szám, akkor $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ db öttel osztható szám lesz	2 pont
Ha ötre végződik a szám, akkor $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ db öttel osztható szám lesz	2 pont
Összesen: $6 + 4 = 10$	1 pont
Így a kedvező esetek száma: 10	1 pont
Az összes eset száma: $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$	1 pont
Annak valószínűsége, hogy a kiválasztott szám osztható 5-tel $P(A) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$	2 pont
Összesen	9 pont

4. Egy osztály matematika dolgozatainak eredményei: Minősítés Darab Jeles 5 Jó 7 Közepes 12 Elégséges 6 Elégtelen 3 Határozd meg a matematika dolgozat érdemjegyeinek átlagát, móduszát, mediánját! Írj egy-egy mondatot arról, hogy mit mutatnak ezek a statisztikai jellemzők!	
Az átlag: 3,15 A matematika dolgozatok átlagosan 3,15 –ra sikerültek.	2 pont+2 pont
Az érdemjegyek módusza: 3 A legtöbb tanuló matematika dolgozata közepes.	1 pont+2pont
Az érdemjegyek mediánja: 3 Ugyanannyi tanuló matematika dolgozata lett hármasnál rosszabb, mint ahány jobb.	2 pont+2pont
Összesen	11 pont

CSAK MAGASABB ÓRASZÁMBAN TANULÓKNAK:

5. Egy csomag magyar kártyából hányféleképpen lehet kiválasztani 4 lapot úgy, hogy 1 hetes és 3 piros szerepeljen a kiválasztott lapok között?	
A 32 lapos magyar kártyában 8 db piros és 4 db hetes lap van.	
a. A kiválasztott lapok között van a piros 7-es, ekkor a fennmaradó 3db hetesből már nem választunk, a 7 db pirosból 2 pirosat választunk és az ezeken a lapokon kívüli 21 db-ból pedig 1-et húzunk. $\binom{3}{0}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{21}{1}= 441$ a piros hetes egyértelműen választható, ezért az első tényező:1	4 pont
b. A kiválasztott lapok között nincs a piros 7-es, ekkor a fennmaradó 3 db hetesből 1-et választunk, a 7 db pirosból pedig 3-at $\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{21}{0}=105$	4 pont
Így az összes kiválasztási lehetőség: 441+105 = 546	1 pont
Összesen	9 pont

A heti 3 órában tanulóknak az 1 – 4. feladatokat ajánljuk. Összesen 48 pont.

0 – 14: elégtelen
15 – 23: elégséges
24 – 32: közepes
33 – 40: jó
41 – 48: jeles

A heti 4 órában tanulóknak az összes feladatot ajánljuk. Összesen: 57 pont

0 – 17: elégtelen
18 – 28: elégséges
29 – 38: közepes
39 – 47: jó
48 – 57: jeles