

A CSOPORT

1. Oldd meg az $x^4 + 7x^2 = 60 - 4x^2$ egyenletet!

2. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{2x-5} = 9$

b) $x = \sqrt{5x+1} - 1$

3. Ábrázold az $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ függvény grafikonját és jellemezd a függvényt!

4. A tavaszi áradás elleni védekezéskor a gát megerősítéséhez az egyik szállítmánnyal 240 t homok érkezett 20 kg-os zsákokban. Hány önkéntesre van szükség – feltéve, hogy minden embernek ugyanakkora a teherbírása –, ha 10, 12, 15, 20, 30 illetve 40 fordulóval tudják a zsákokat a gáthoz cipelni? (Minden ember ugyanannyi fordulót tesz meg.)
Ábrázold grafikonon az emberek száma és a fordulók száma közötti összefüggést!

5. Ábrázold az $f(x) = 2\sqrt{x-3}$ függvény grafikonját és jellemezd a függvényt!

6. Oldd meg az $\frac{4x+4}{x+2} = \frac{3}{x^2+x-2} + \frac{2x-1}{x-1}$ egyenletet az egész számok halmazán!

B CSOPORT

1. Oldd meg az $x^4 - 7x^2 = 54 - 4x^2$ egyenletet!

2. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $\sqrt{3x+7} = 5$

b) $\sqrt{2x+9} - x = 3$

3. Ábrázold az $f(x) = x^2 + 6x + 5$ függvény grafikonját és jellemezd a függvényt!

4. Egy háziasszony befőttet szeretne eltenni. 1 kg cukorhoz lassan, állandó kevergetés mellett önti a vizet. Hány liter vizet kell a cukorhoz öntenie, hogy az oldat 40, 20, 10, illetve 5 %-os legyen?

Ábrázold grafikonon a cukor és a cukoroldat tömegének arányát!

5. Ábrázold az $f(x) = 3\sqrt{x+2}$ függvény grafikonját és jellemezd a függvényt!

6. Oldd meg az $\frac{x-1}{x-5} = \frac{2}{x^2-2x-15} + \frac{2x+3}{x+3}$ egyenletet a pozitív számok halmazán!

Megoldások:

A csoport

A függvények jellemzésénél, ha valaki kihagyja a konvexitás - konkávitás vizsgálatát, azért pont nem vonható le, de pluszpont adható érte, amennyiben az így kapott pontszám nem haladja meg a feladatra adható maximális pontszámot.

1. Oldd meg az $x^4 + 7x^2 = 60 - 4x^2$ egyenletet!	
Jól rendezzi az egyenletet: $x^4 + 11x^2 - 60 = 0$	1p
Új ismeretlent vezet be ($y = x^2$) és felírja a másodfokú egyenletet: $y^2 + 11y - 60 = 0$	1p
Jól írja fel a megoldóképletet: $y_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60)}}{2 \cdot 1}$	2p
Jó a két gyök: $y_1 = 4$ $y_2 = -15$	2p
Az $y_1 = 4$ -ből helyesen számítja ki a két megoldást: $x_1 = 2$ $x_2 = -2$	2p
Az $y_2 = -15$ -ből nem kap megoldást, hiszen $y \geq 0$	1p
Ellenőrzi a megoldásokat	1p
Összesen a feladat	10 p

2. Oldd meg az alábbi egyenleteket!	
a) $\sqrt{2x-5} = 9$	
Értelmezési tartomány meghatározása: $2x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$	2p
Négyzetre emeli az egyenletet: $2x - 5 = 81$	1p
Jól oldja meg az egyenletet: $x = 43$	1p
Ellenőrzés:	2p
Összesen az a) feladatra adható	6 p
b) $x = \sqrt{5x+1} - 1$	
Átrendezi az egyenletet: $x + 1 = \sqrt{5x+1}$	1p
Értelmezési tartomány meghatározása: $5x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{5}$, $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$, a közös rész: $x \geq -\frac{1}{5}$	2p
Jól emel négyzetre: $x^2 + 2x + 1 = 5x + 1$	1p
Jól végzi el a nullára redukálást: $x^2 - 3x = 0$	1p
A gyökök kiszámítása: $x = 0$ vagy $x = 3$	2p
Ellenőrzés:	1p
Összesen a b) feladatra adható:	8p

3. Ábrázold az $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ függvény grafikonját és jellemezd a függvényt!

Megoldás:

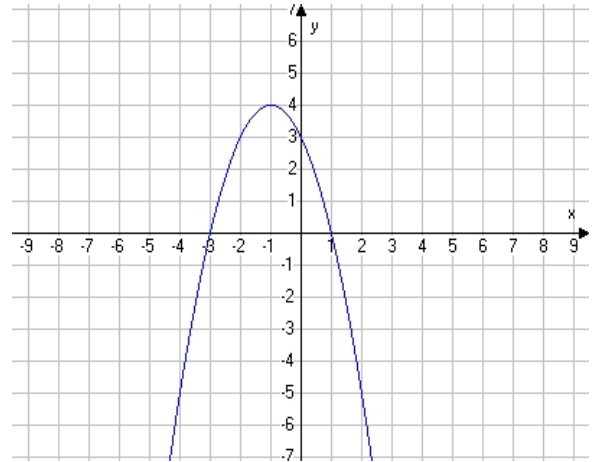
Teljes négyzetté alakítás: $-x^2 - 2x + 3 = -(x^2 + 2x) + 3 = -(x+1)^2 + 4$

Jellemzés:

1. É.T.: $x \in \mathbf{R}$
2. É.K.: $] -\infty; 4]$
3. Zérushely:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} \begin{cases} \rightarrow x_1 = 1 \\ \rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

4. Monotonitás:
 - szigorúan monoton növekvő, ha $x \leq -1$
 - szigorúan monoton csökkenő, ha $x \geq -1$
5. Szélsőérték:
 - maximum hely: $x = -1$
 - maximum érték: $f(-1) = 4$
6. paritás: nem páros, nem páratlan
7. konkáv



Pontozás:

Teljes négyzetté alakítás:	2 p
Grafikon:	3 p
Jellemzés:	5 p
Összesen adható:	10 p

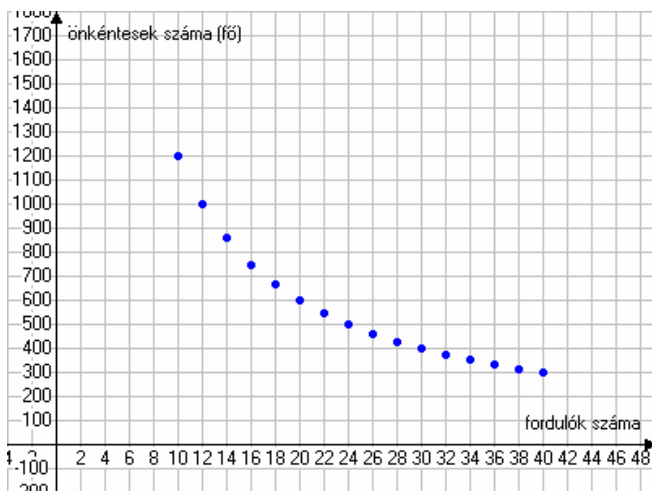
4. A tavaszi áradás elleni védekezéskor a gát megerősítéséhez egy szállítmánnyal 240 t homok érkezett 20 kg-os zsákokban. Hány önkéntesre van szükség –feltéve, hogy minden embernek ugyanakkora a teherbírása –, ha 10, 12, 15, 20, 30, illetve 40 fordulóval tudják a zsákokat a gáthoz cipelni? (Minden ember ugyanannyi fordulót tesz meg.)
 Ábrázold grafikonon az emberek száma és a fordulók száma közötti összefüggést!

Megoldás:

A zsákok száma: $\frac{240000}{20} = 12000$

fordulók száma (f)	10	12	15	20	30	40
önkéntesek száma (ö)	1200	1000	800	600	400	300

Összefüggés: $\ddot{o} = \frac{12000}{f}$



Pontozás:

Zsákok számának megállapítása: 2p

Táblázat: 3 p

Ábra:

– tengelyek helyes megnevezése: 2p

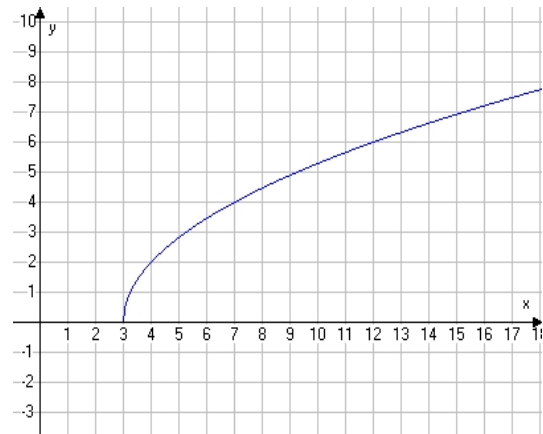
– legalább 6 diszkrét pont jelölése: 3p

(Ha folytonos görbét rajzol, csak 1 pont adható.)

Összesen adható: 10 p

Jellemzés:

1. É.T.: $x \in \mathbf{R}$ és $x \geq 3$
2. É.K.: $f(x) \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$
3. Zérushely: $x = 3$
4. Monotonitás: szigorúan monoton növekvő
5. Szélsőérték:
 - minimumhely: $x = 3$
 - minimumérték: $f(3) = 0$
6. paritás: nem páros, nem páratlan
7. konkáv



Pontozás:

Ábrázolás:	3 p
Jellemzés:	5
Összesen adható:	8 p

6. Oldd meg az $\frac{4x+4}{x+2} = \frac{3}{x^2+x-2} + \frac{2x-1}{x-1}$ egyenletet az egész számok halmazán!	
Jó az értelmezési tartomány: $x \neq -2$ $x \neq 1$	1p
Jó a közös nevező: $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$	1p
Jól szoroz a közös nevezővel: $(4x+4)(x-1) = 3 + (2x-1)(x+2)$	2p
Jól bontja fel a zárójeleket: $4x^2 + 4x - 4x - 4 = 3 + 2x^2 - x + 4x - 2$	1p
Jól rendezzi az egyenletet: $2x^2 - 3x - 5 = 0$	1p
Jó a két gyök: $x_1 = 2,5$ $x_2 = -1$	2p
Csak az $x = -1$ egész gyöke az egyenletnek	1p
Ellenőrzi a megoldást	1p
Összesen a feladat	10p

Elérhető pontszám: 62 p

Javasolt minősítés: 5: 53p – 62p; 4: 42p – 52p; 3: 31p – 41p; 2: 20p – 30p; 1: 0p – 19p

Megoldások:

B csoport

A függvények jellemzésénél, ha valaki kihagyja a konvexitás - konkávitás vizsgálatát, azért pont nem vonható le, de pluszpont adható érte, amennyiben az így kapott pontszám nem haladja meg a feladatra adható maximális pontszámot.

1. Oldd meg az $x^4 - 7x^2 = 54 - 4x^2$ egyenletet!	
Jól rendezzi az egyenletet: $x^4 - 3x^2 - 54 = 0$	1p
Új ismeretlent vezet be ($y = x^2$), és felírja a másodfokú egyenletet: $y^2 - 3y - 54 = 0$	1p
Jól írja fel a megoldóképletet: $y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-54)}}{2 \cdot 1}$	2p
Jó a két gyök: $y_1 = 9$ $y_2 = -6$	2p
Az $y_1 = 9$ -ből helyesen számítja ki a két megoldást: $x_1 = 3$ $x_2 = -3$	2p
Az $y_2 = -6$ -ből nem kap megoldást, hiszen $y \geq 0$	1p
Ellenőrzi a megoldásokat	1p
Összesen a feladat	10 p

2. Oldd meg az alábbi egyenleteket!	
a) $\sqrt{3x+7} = 5$	
Értelmezési tartomány meghatározása: $3x+7 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{7}{3}$	2p
Négyzetre emeli az egyenletet: $3x+7 = 25$	1p
Jól oldja meg az egyenletet: $x = 6$	1p
Ellenőrzés:	2p
Összesen az a) feladatra adható:	6 p
b) $\sqrt{2x+9} - x = 3$	
Átrendezi az egyenletet: $\sqrt{2x+9} = 3+x$	1p
Értelmezési tartomány meghatározása: $2x+9 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{9}{2} = -4,5$ $3+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$, tehát a közös rész: $x \geq -3$	2p
Jól emel négyzetre: $2x+9 = 9+6x+x^2$	1p
Jól végzi el a nullára redukálást: $x^2+4x=0$	1p
A gyökök kiszámítása: $x=0$, az $x=-4$ pedig nem megoldás	2p
Ellenőrzés:	1p
Összesen a b) feladatra adható:	8p

3. Ábrázold az $f(x) = x^2 + 6x + 5$ függvény grafikonját és jellemezd a függvényt!

Megoldás:

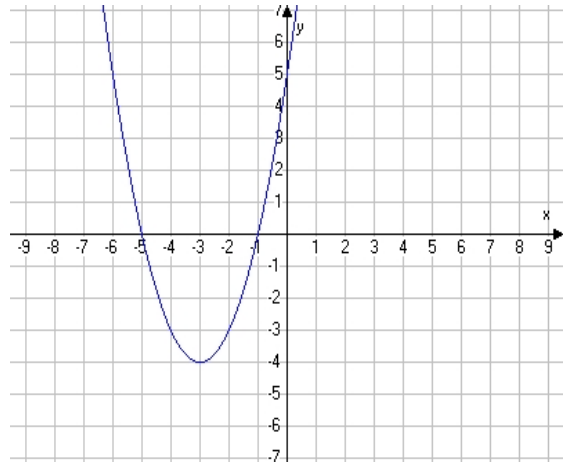
Teljes négyzetté alakítás: $x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4$

Jellemzés:

1. É.T.: $x \in \mathbf{R}$
2. É.K.: $[-4; +\infty [$
3. Zérushely:

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \begin{cases} \rightarrow x_1 = -5 \\ \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

4. Monotonitás:
 - szigorúan monoton csökkenő, ha $x \leq -3$
 - szigorúan monoton növekvő, ha $x \geq -3$
5. Szélsőérték:
 - minimumhely: $x = -3$
 - minimumérték: $f(-3) = -4$
6. Paritás: nem páros, nem páratlan
7. Konkáv



Pontozás:

Teljes négyzetté alakítás:	2 p
Grafikon:	3 p
Jellemzés:	5 p
Összesen adható:	10 p

4. Egy háziasszony befőttet szeretne eltenni. 1 kg cukorhoz lassan, állandó kevergetés mellett önti a vizet. Hány liter vizet kell a cukorhoz öntenie, hogy az oldat 40, 20, 10, illetve 5 %-os legyen?

Ábrázold grafikonon a cukor és a cukoroldat tömegének arányát!

Megoldás:

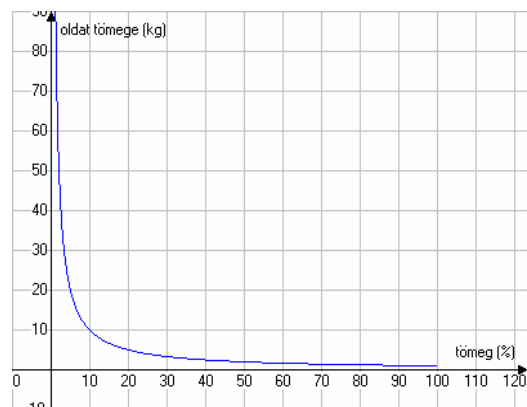
Jelöljük az oldat össztömegét o -val, a hozzáadott víz mennyiségét pedig v -vel. A cukor mennyisége 1 kg, ezért: $o = 1 + v$.

Tehát a tömegek aránya: $\frac{1}{1+v}$,

százalékos alakban: $t = \frac{1}{1+v} \cdot 100(\%)$,

innen $1 + v = o = \frac{100}{t}$.

<i>tömeg %</i>	40	20	10	5
<i>o</i>	2,5	5	10	20
<i>v (= o - 1)</i>	1,5	4	9	19



Pontozás:

Táblázat: 4 pont

Ábra: 6 pont (3 pont, ha a táblázatban szereplő értékeket helyesen ábrázolja.)

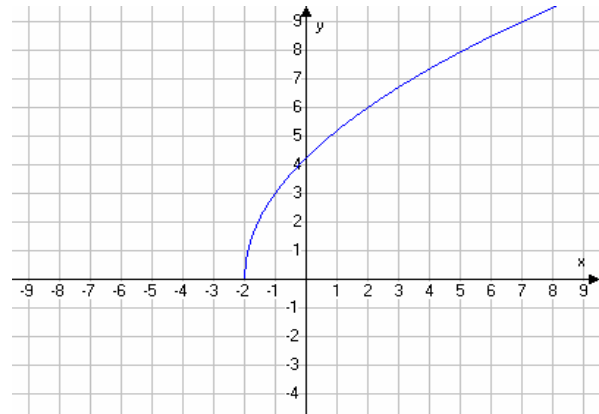
Összesen adható: 10 pont

5. Ábrázold az $f(x) = 3\sqrt{x+2}$ függvény grafikonját és jellemezd a függvényt!

Megoldás:

Jellemzés:

1. É.T.: $x \in \mathbf{R}$ és $x \geq -2$
2. É.K.: $[0; +\infty[$
3. Zérushely: $x = -2$
4. Monotonitás: szigorúan monoton növekvő
5. Szélsőérték:
 - minimumhely: $x = -2$
 - minimumérték: $f(-2) = 0$
6. Paritás: nem páros, nem páratlan
7. Konkáv



Pontozás:

Ábrázolás: 3 p

Jellemzés: 5 p

Összesen adható: 8 p

6. Oldd meg az $\frac{x-1}{x-5} = \frac{2}{x^2-2x-15} + \frac{2x+3}{x+3}$ egyenletet a pozitív számok halmazán!	
Jó az értelmezési tartomány: $x \neq 5 \quad x \neq -3$	1p
Jó a közös nevező: $(x-5)(x+3) = x^2 - 2x - 15$	1p
Jól szoroz a közös nevezővel: $(x-1)(x+3) = 2 + (2x+3)(x-5)$	2p
Jól bontja fel a zárójeleket: $x^2 - x + 3x - 3 = 2 + 2x^2 + 3x - 10x - 15$	1p
Jól rendez az egyenletet: $x^2 - 9x - 10 = 0$	1p
Jó a két gyök: $x_1 = 10 \quad x_2 = -1$	2p
Csak az $x = 10$ gyöke az egyenletnek a pozitív számok halmazán.	1p
Ellenőrzi a megoldást	1p
Összesen a feladat	10p

Elérhető pontszám: 62 p

Javasolt minősítés: 5: 53p – 62p; 4: 42p – 52p; 3: 31p – 41p; 2: 20p – 30p; 1: 0p – 19p