MATEMATIKA „A”

10. évfolyam

7. modul

Négyzetgyökös egyenletek

Készítette: Gidófalvi Zsuzsa

A modul célja	Négyzetgyökös egyenletek megoldása egyszerűbb és összetettebb egyenletek esetén
Időkeret	6 óra
Ajánlott korosztály	10. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Négyzetgyök fogalma, négyzetgyökvonás azonosságai, négyzetgyökös kifejezések értelmezési tartományának meghatározása, négyzetgyökfüggvény, másodfokú egyenletek, abszolút érték definíciója
A képességfejlesztés fókuszai	Számolás, számlálás, számítás: Konkrét számolási feladatok a valós számkörben Rendszerezés, kombinatív gondolkodás: A szükséges adatok kikeresése, a fölösleges adatok mellőzése, a lényegkiemelő képesség fejlesztése. A lehetséges alkalmazások megkeresése, a tanult új ismeret beillesztése a korábbi ismeretek rendszerébe, a rendszerező szemlélet alakítása. Négyzetgyökös egyenletek megoldásakor a nem megfelelő hamis gyök kiszűrése, a diszkusszió igényének fejlesztése.

Támogató rendszer

Számológép, TOTÓ, triminó.

A tananyag javasolt órabeosztása

Óraszám Óracím

1. I.. Egyszerű négyzetgyökös egyenletek. TOTÓ kitöltése.
2. Egyszerű négyzetgyökös egyenlet felírása, adott gyök ismeretében.

3–4. Egyetlen négyzetgyökös kifejezést tartalmazó egyenletek algebrai és grafikus megoldása.

5. II. Két négyzetgyökös kifejezést tartalmazó egyenletek.
6. Vegyes feladatok

Érettségi követelmények:

Középszint:
Ismerje az alaphalmaz és a megoldáshalmaz fogalmát. Alkalmazza a különböző egyenletmegoldási módszereket: mérlegelv, grafikus megoldás, ekvivalens átalakítások, következményegyenletre vezető átalakítások, új ismeretlen bevezetése … stb. Tudjon a tanuló $\sqrt{ax+b} = cx+d$ típusú egyenleteket megoldani.
Emelt szint:
Tudjon két négyzetre emeléssel megoldható egyenleteket megoldani.

Értékelés:

Röpdolgozat a modul végén. A csoportok értékelhetők a csoportmunka alapján. A félév lezárása: a 2. negyedéves témazáró dolgozat.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Egyszerű négyzetgyökös egyenletek			
1.	Négyzetgyökös egyenlet fogalma	Számolás, számítás	Mintapélda1
2.	Egyszerű négyzetgyökös egyenletek TOTÓ-jának kitöltése	Számolás, számítás, mennyiségi következtetés	TOTÓ
3.	Egyszerű négyzetgyökös egyenletek algebrai és grafikus megoldása	Számolás, számítás	Mintapéldák: 2, 3, 4, 5 Feladatok: 1, 2, 3, 4, 5, 6

II. Két négyzetgyökös kifejezést tartalmazó egyenletek			
1.	Látszólag két négyzetgyököt tartalmazó egyenletek	Számolás, számítás	Mintapélda: 6
2.	Értelmezési tartomány vizsgálata alapján megoldható négyzetgyökös egyenletek	Számolás, számítás, mennyiségi következtetés	Mintapélda: 7
3.	Két négyzetgyökös kifejezést tartalmazó egyenletek algebrai megoldása	Számolás, számítás	Mintapéldák: 8, 9, 10
4.	Vegyes feladatok	Számolás, számítás	Feladatok: 7, 8, 9, 10, 11

I. Egyszerű négyzetgyökös egyenletek

Azokat az egyenleteket, amelyekben az ismeretlen négyzetgyök alatt is előfordul, négyzetgyökös egyenleteknek nevezzük.

Mintapélda$_1$

Határozzuk meg azt az x-et, amelyre a $\sqrt{x} = 2$ egyenlet teljesül!

Megoldás:

Olyan $x \geq 0$ valós számot keresünk, amelynek a négyzetgyöke 2. Ez a 4. Tehát $x = 4$.

Módszertani megjegyzés: Alakítsunk ki az osztályban 3 - 4 fős csoportokat! Minden csoport oldja meg a következő mintapéldában található TOTÓ-t, amelyben egyszerű négyzetgyökös egyenletek helyes megoldásait kell kiválasztani.
A feladat megoldásához 15-20 perc ajánlott. A TOTÓ kitöltése során a tanár járkál a csoportok között és figyeli a csoportok munkáját. A megoldásra szánt idő letelte után közösen megbeszéljük a helyes megoldásokat, a tanár értékeli és jutalmazza a csoportok munkáját a teljesítményüknek megfelelően. Amelyik csoport legalább 12 helyes megoldást ad, az részesüljön jutalomban.
A totó utáni mintapéldákat a kialakult csoportokkal vehetjük át.

Mintapélda$_2$

Matematikai TOTÓ

Válaszd ki a következő egyenletek megoldásait!

	Egyenletek	1	2	x
1.	$\sqrt{x} = 3$, ahol $x \geq 0$	nem értelmezhető	$x = 9$	$x = -9$
2.	$\sqrt{x} - 1 = 3$, ahol $x \geq 0$	$x = 4$	$x = 16$	$x = -16$
3.	$\sqrt{x-3} = 3$, ahol $x \geq 3$	$x = 12$	$x = -12$	$x = 9$
4.	$\sqrt{2x-3} = 3$, ahol $x \geq \frac{3}{2}$	$x = 5$	$x = 6$	$x = 7$
5.	$\sqrt{x-1} + 3 = 3$, ahol $x \geq 1$	$x = 0$	$x = 3$	$x = 1$
6.	$\sqrt{x} = 6$, ahol $x \geq 0$	$x = 36$	$x = 18$	$x = 0$
7.	$\sqrt{2x-1} = 6$, ahol $x \geq \frac{1}{2}$	$x = 37$	$x = \frac{38}{2}$	$x = \frac{37}{2}$

8.	$\sqrt{(-x)^2} = -x$, ahol $x \in \mathbf{R}$	minden valós szám	negatív valós szám	nempozitív valós szám
9.	$\sqrt{(-x^2)} = 5$, ahol $x \in \mathbf{R}$	$x = 25$	$x = -25$	nincs megoldás
10.	$\sqrt{x^2 - 4} = 3$, ahol $\lvert x \rvert \geq 2$	$x = \sqrt{13}$	$x = -\sqrt{13}$	$x = \pm\sqrt{13}$
11.	$\sqrt{x} - 3 = -5$, ahol $x \geq 0$	$x = 4$	nincs megoldás	$x = 16$
12.	$\sqrt{2 \cdot x + 1} = 0$, ahol $x \geq -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	nincs megoldás	$x = \frac{1}{2}$
13.	$\sqrt{(-x)^2} = 3$, ahol $x \leq 0$	$x = 3$	$x = -3$	nincs megoldás
13+1.	$\sqrt{x^2} = x$, ahol $x \in \mathbf{R}$	minden valós szám	negatív valós szám	nemnegatív valós szám

Megoldás: 2, 2, 1, 2, x, 1, x, 2, x, x, 2, 2, 2, x.

Módszertani megjegyzés:

A csoportoknak 10 perc alatt kell olyan négyzetgyökös egyenleteket felírni, amelyeknek a gyöke $x = 4$ (lásd a 3. mintapéldát). A megoldásra szánt idő eltelte után az egyik csoport megbízottja ismerteti azokat az egyenleteket, amelyeket felírtak. A többi csoport már csak azokat mondja be, amelyek addig nem szerepeltek. Amelyik csoport a legtöbb egyenletet tudta felírni, részesüljön valamilyen jutalomban.

Mintapélda$_3$

Írjunk fel olyan négyzetgyökös egyenleteket, amelyeknek a gyöke $x = 4$.

Megoldás:

Lehetséges megoldások például: $\sqrt{x} = 2$ vagy $\sqrt{3x-3} = 3$.

További lehetséges megoldások:

a) $\sqrt{x} = 2$ b) $\sqrt{3x-8} = 2$ c) $\sqrt{x-2} = \sqrt{2}$

d) $\sqrt{x} - 2 = 0$ e) $\sqrt{2x-5} = \sqrt{3}$ f) $\sqrt{3x-3} = 3$

g) $\sqrt{4x} = 4$ h) $\sqrt{x} - 1 = 1$ i) $\sqrt{25x} = 10$

Természetesen ezeken kívül bármilyen más egyenletet is felírhatunk.

Ezen a ponton érdemes megbeszélni a tanulókkal, hogy milyen lehetőségeink vannak a négyzetgyökjel eltüntetésére?

Lehetséges válaszok:

négyzetre emelés;

a négyzetgyökjel alatt teljes négyzet kialakítása.

Nézzük meg ezeket a megoldási lehetőségeket egy négyzetgyökjelet tartalmazó egyenlet esetén!

Mintapélda$_4$

Oldjuk meg a következő egyenletet: $\sqrt{x-2}=2$.

Megoldás:

Először a bal oldali kifejezés értelmezési tartományát határozzuk meg.

Mivel a négyzetgyökjel alatt csak nemnegatív szám lehet:

$x-2\geq 0$ feltételnek kell teljesülnie. $\Rightarrow$ $x\geq 2$.

Mivel az egyenlet mindkét oldalán nemnegatív szám szerepel, a négyzetreemelés elvégzésével az előbbivel egyenértékű (ekvivalens) egyenletet kapunk.

$x-2=4$,

$x=6$.

A négyzetgyökös egyenletek megoldását mindig ellenőrizzük, mivel a négyzetre emelés általában nem ekvivalens átalakítás. (Bővülhet a megoldáshalmaz, pl. az $x=2$ egyenletet négyzetre emelve az $x^2=4$ egyenletet kapjuk, amelynek 2 és –2 is megoldása.)

Ellenőrzés: bal oldal: $\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2$; jobb oldal: 2.

Mintapélda$_5$

Oldjuk meg a következő egyenletet: $\sqrt{2x+1}-x=-1$.

Megoldás:

Határozzuk meg, hogy az egyenlet mely valós számokra értelmezhető!

$$2x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{1}{2}.$$

Négyzetre emelés előtt célszerű átrendezni az egyenletet úgy, hogy csak a négyzetgyökös kifejezés álljon az egyenlet egyik oldalán.

$$\sqrt{2x+1}=x-1.$$

Mivel az egyenlet bal oldalán nemnegatív szám szerepel, az egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha a jobb oldal is nemnegatív.

Tehát $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$.

Így az egyenlet csak olyan valós számokra teljesülhet, amelyekre $x \geq -\frac{1}{2}$ és $x \geq 1$ teljesül, vagyis $x \geq 1$.

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát:

$$2x + 1 = (x - 1)^2,$$

$$2x + 1 = x^2 - 2x + 1,$$

$$0 = x^2 - 4x.$$

Alakítsuk szorzattá az egyenlet jobb oldalát:

$$0 = x(x - 4).$$

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, azaz

$x_1 = 0$ vagy $x_2 - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 4$.

Ellenőrzés: $x_1 = 0$ nem tartozik az értelmezési tartományhoz, ezért ez hamis gyök.

Az egyenlet megoldása így $x_2 = 4$.

Helyettesítsük be: bal oldal: $\sqrt{2 \cdot 4 + 1} - 4 = \sqrt{9} - 4 = 3 - 4 = -1$; jobb oldal: -1.

A két oldal megegyezik $\Rightarrow x = 4$ gyöke az egyenletnek.

Oldjuk meg az egyenletet grafikusan is!

Módszertani megjegyzés: Tisztázzuk a tanulókkal, hogy mit jelent egy egyenlet grafikus megoldása? Válasz:

Az egyenlet mindkét oldalát ábrázoljuk, mint egy-egy függvényt és ahol a két grafikon metszi egymást az lesz az egyenlet megoldása.

$$\sqrt{2x+1} - x = -1.$$

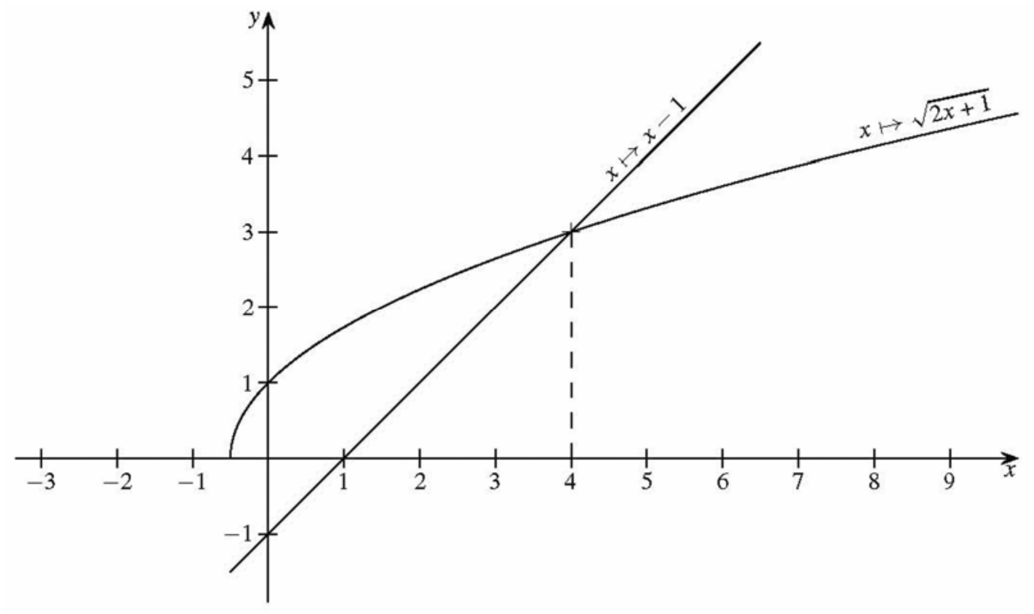
Rendezzük át az egyenletet úgy, hogy a bal oldalon csak a négyzetgyökös kifejezés maradjon.

$$\sqrt{2x+1} = x - 1.$$

Az egyenlet mindkét oldalát függvényként ábrázoljuk, és ahol a két grafikon metszi egymást, ott olvasható le az egyenlet megoldása.

A két függvény most:

$$f(x) = \sqrt{2x+1} \quad \text{és} \quad g(x) = x - 1.$$



Megjegyzés: A grafikus megoldásról az is leolvasható, hogy

$$\sqrt{2x+1} \geq x-1, \quad \text{ha} \quad -\frac{1}{2} \leq x < 4;$$

$$\sqrt{2x+1} < x-1, \quad \text{ha} \quad x \geq 4.$$

Mintapélda$_6$

Oldjuk meg a $\sqrt{x^2-4x+4} = 3$ egyenletet!

Megoldás:

Ha megvizsgáljuk a négyzetgyök alatti kifejezést, láthatjuk, hogy az teljes négyzet. $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, ezért az egyenlet minden valós számra értelmezhető.

Használjuk fel a $\sqrt{a^2} = |a|$ összefüggést! Az eredeti egyenlet akkor így írható:

$$|x-2| = 3.$$

Bontsuk fel az abszolútértéket!

$$|x-2| = x-2, \quad \text{ha} \quad x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2;$$

$$|x-2| = -x+2, \quad \text{ha} \quad x-2 \leq 0 \Rightarrow x < 2.$$

Így az eredeti egyenlet két egyenlettel helyettesíthető.

Ha $x \geq 2$, akkor $\quad x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5.$

Ha $x < 2$, akkor $\quad -x + 2 = 3 \Rightarrow x = -1.$

Ellenőrzés:

$x_1 = 5$; bal oldal: $\sqrt{5^2 - 4\cdot 5 + 4} = \sqrt{25 - 20 + 4} = \sqrt{9} = 3$; jobb oldal: 3.

$x_2 = -1$; bal oldal: $\sqrt{(-1)^2 - 4\cdot(-1) + 4} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$; jobb oldal: 3.

Tehát mind a két szám gyöke az egyenletnek.

Az egyenletet négyzetre emeléssel is meg lehet oldani.

$x^2 - 4x + 4 = 9$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

A megoldóképlet szerint:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}, \text{ innen}$$

$x_1 = 5$, $x_2 = -1$.

Behelyettesítéssel megmutatható, hogy mindkét kapott gyök megoldás.

Módszertani megjegyzés: A következő mintapélda átvételét a „gyorsabban haladó” diákoknak javasoljuk.

Mintapélda$_7$

Oldjuk meg az $x^2 + 2x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4} = 3$ egyenletet!

Használjuk fel, hogy $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 > 0$, ezért a feladat minden valós számra értelmezett.

1. megoldás:

Legyen $x^2 + 2x + 1 = y$.

Az új ismeretlen felhasználásával az egyenletünk a következőképpen írható:

$y + \sqrt{y + 3} = 3$.

Rendezzük át az egyenletet:

$\sqrt{y + 3} = 3 - y$, ahol $3 - y \geq 0$, mert a négyzetgyökös kifejezés értéke csak nemnegatív szám lehet $\Rightarrow$ $y \leq 3$ és $y + 3 \leq 0$, $y \geq -3$, mert a gyökjel alatt sem lehet negatív mennyiség! Így $-3 \leq y \leq 3$.

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát:

$y + 3 = 9 - 6y + y^2$,

$0 = y^2 - 7y + 6$,

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}.$$

$y_1 = 6$, $y_2 = 1$.

Az $y_1 = 6$ esetén nem teljesül az egyenlőség.

$y_2 = 1$ esetén meghatározzuk az x értékeket:

$x^2 + 2x + 1 = 1$,

$x^2 + 2x = 0$,

$x(x + 2) = 0$,

$x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

Ellenőrizzük a kapott gyököket:

$x_1 = 0$

bal oldal: $1 + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3$

jobb oldal: 3

$x_2 = -2$

bal oldal: $(-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 1 + \sqrt{(-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 4}$

$= 4 - 4 + 1 + \sqrt{4-4+4} = 1 + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3$

jobb oldal:3.

Tehát az egyenlet megoldáshalmaza: $M = \{0; -2\}$.

2. megoldás:

$y = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$, a négyzetgyök definíciója miatt $y \geq 0$,

$y^2 - 3 + y = 3$,

$y^2 + y - 6 = 0$,

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2},$$

$y_1 = 2$, $y_2 = -3$, de ez nem adhat megoldást.

$\sqrt{x^2 + 2x + 4} = 2$,

$x_2 + 2x + 4 = 4$,

$x_2 + 2x = 0$,

$x(x + 2) = 0$,

$x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk mindkét gyök helyességéről.

Feladatok

1. Oldd meg az alábbi egyenleteket:

a) $\sqrt{x}=9$; b) $\sqrt{-x}=3$;

c) $\sqrt{x}=-1$; d) $\sqrt{x^2}=5$.

Megoldás:

a) É.T.: $\{x\in\mathbf{R} \mid x\geq 0\}$, $x=81$;

b) É.T.: $\{x\in\mathbf{R} \mid x<0\}$, $x=-9$;

c) É.T.: $\{\}$, mivel a négyzetgyök értéke nemnegatív; nincs megoldás;

d) É.T.: $\{x\in\mathbf{R}\}$, $x=\pm 5$.

2. Határozd meg az alábbi egyenletek gyökeit:

a) $\sqrt{x-5}=0$; b) $\sqrt{4x-4}=4$;

c) $\sqrt{2x+3}=0$; d) $\sqrt{3x-4}=5$.

Megoldás:

a) É.T.: $\{x\in\mathbf{R} \mid x\geq 5\}$, $x=5$; b) É.T.: $\{x\in\mathbf{R} \mid x\geq 1\}$, $x=5$;

c) É.T.: $\{x\in\mathbf{R} \mid x\geq -\frac{3}{2}\}$, $x=-\frac{3}{2}$; d) É.T.: $\{x\in\mathbf{R} \mid x\geq \frac{4}{3}\}$, $x=\frac{29}{3}$.

3. Oldd meg az alábbi egyenleteket:

a) $\sqrt{x+3}=x$; b) $\sqrt{2x+1}=x+1$;

c) $\sqrt{x-1}=x-1$; d) $\sqrt{x-3}=x-3$;

e) $\sqrt{x-2}=7-2x$; f) $\sqrt{3x+1}=3x-11$;

g) $\sqrt{x+6}=x$; h) $\sqrt{9-x}+5=1$.

Megoldás:

a) É.T.: $\{x\in\mathbf{R} \mid x\geq 0\}$, $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$;

b) É.T.: $\{x\in\mathbf{R} \mid x\geq -\frac{1}{2}\}$, $x=0$;

c) É.T.: $\{x\in\mathbf{R} \mid x\geq 1\}$, $x_1=2$, $x_2=1$;

d) É.T.: $\{x\in\mathbf{R} \mid x\geq 3\}$, $x_1=4$, $x_2=3$;

e) É.T.: $\{ x \in \mathbf{R} \mid 2 \le x \le \frac{7}{2}\}$, $x = \frac{29 \pm \sqrt{841-816}}{8} = \frac{29 \pm \sqrt{25}}{8} \Rightarrow x_1 = \frac{17}{4}$, $x_2 = 3$

A $\frac{17}{4}$ nagyobb, mint $\frac{7}{2}$ $\Rightarrow$ nem megoldása az egyenletnek.

f) É.T.: $\{ x \in \mathbf{R} \mid x \ge \frac{11}{3}\}$, $x = \frac{69 \pm \sqrt{4761-4320}}{18} = \frac{69 \pm \sqrt{441}}{18} = \frac{69 \pm 21}{18} \Rightarrow$

$x_1 = 5$, $x_2 = \frac{8}{3}$;

g) É.T.: $\{ x \in \mathbf{R} \mid x \ge 0\}$, $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = -2$ (ez nem eleme az értelmezési tartománynak);

h) Nincs megoldása az egyenletnek.

Módszertani megjegyzés: A következő feladatok megoldásakor a négyzetgyökös kifejezés értelmezési tartományát és értékkészletét is vizsgálnunk kell. A megoldásokat ellenőrizzük!

4. Oldd meg a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{x+2} + 2 = x$;

b) $\sqrt{196-x^2} + 14 = x$;

c) $\sqrt{5-x} + 3 = x$;

d) $\sqrt{5-x} - \frac{x}{2} = -3$.

Megoldás:

a) É.T.: $\{ x \in \mathrm{R} \mid x \ge 2\}$, $x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$;

b) É.T.: $\{ x \in \mathrm{R} \mid 0 \le x \le 14 \text{ és } x \ge 14\}$, $x = 14$;

c) É.T.: $\{ x \in \mathrm{R} \mid 3 \le x \le 5\}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, de az 1 nem eleme az értelmezési tartománynak;

d) É.T.: $\{ x \in \mathrm{R} \mid x \le 5 \text{ és } x \ge 6\}$, ellentmondás, így nincs megoldása az egyenletnek.

Az $x^2 - 8x + 16 = 0$ egyenletet kapjuk, amely átalakítva $(x-4)^2 = 0$, ennek megoldása: $x = 4$. Az ellenőrzés során megállapítjuk, hogy a 4 az eredeti egyenletnek nem gyöke.

Módszertani megjegyzés: Az egyenletek megoldása során vizsgáltassuk meg a tanulókkal a négyzetgyökös kifejezések értelmezési tartományát, hisz nagyon sok esetben már ekkor kiszűrhető, hogy mi lehet (vagy nem lehet) az egyenlet megoldása.

5. Teljes négyzetté alakítás felhasználásával oldd meg a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{x^2-10x+25}=0$;   b) $\sqrt{4x^2-4x+1}=5$;

c) $\sqrt{x^2+6x+9}=1+x$;   d) $\sqrt{x^2+2x+1}-x=1$.

Megoldás:

a) É.T.: $\{x\in\mathbf{R}\mid x\in\mathbf{R}\}$, $x=5$;

b) É.T.: $\{x\in\mathbf{R}\mid x\in\mathbf{R}\}$, $|2x-1|=5$ egyenletet kapjuk, melynek megoldása a következő: ha $x\geq\frac{1}{2}$, akkor $x=3$; ha $x<\frac{1}{2}$, akkor $x=-2$.

c) É.T.: $\{x\in\mathbf{R}\mid x\geq-1\}$, az $|x+3|=1+x$ egyenletet kapjuk, melynek nincs valós gyöke;

d) É.T.: $\{x\in\mathbf{R}\mid x\geq-1\}$, az $|x+1|=1+x$ egyenletet kapjuk, mely minden nemnegatív szám esetén teljesül.

6. Új ismeretlen bevezetésével oldd meg a következő egyenleteket:

a) $x^2+\sqrt{x^2-9}=21$;   b) $x^2+4x+4+\sqrt{x^2+4x+9}=7$.

Megoldás:

a) Új ismeretlen bevezetése: $x^2-9=a \Rightarrow a+9+\sqrt{a}=21$; É.T.: $a\geq 0$, $|x|\geq 3$.

átrendezés után: $\sqrt{a}=12-a$ É.T.: $a\leq 12$

négyzetre emelés: $a=144-24a+a^2$

nullára rendezés: $a^2-25a+144=0$

$$a_{1,2}=\frac{25\pm 7}{2}$$

$a_1=16$, ez nem felel meg az É.T.-nak;

$a_2=9$

$9=x^2-9$

$x^2=18 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\,3\cdot\sqrt{2}$.

b) *I. megoldás*

új ismeretlen bevezetése: $x^2 + 4x + 4 = a \quad \Rightarrow \quad a + \sqrt{a+5} = 7$, É.T.: $a \geq -5$.

rendezzük át az egyenletet: $\sqrt{a+5} = 7 - a$, É.T.: $a \leq 7$

azaz $-5 \leq a \leq 7$

emeljük négyzetre: $a + 5 = 49 - 14a + a^2$

rendezzük nullára: $0 = a^2 - 15a + 44$

$a_1 = \dfrac{15 + \sqrt{49}}{2} = 11$, ez nem eleme É.T.-nak.

$a_2 = \dfrac{15 - \sqrt{49}}{2} = 4$

helyettesítsük vissza: $x^2 + 4x + 4 = 4$

$x^2 + 4x = 0$

$x(x + 4) = 0$

$x_1 = 0, \quad x_2 = -4$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk, hogy mindkét gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

II. megoldás

új ismeretlen bevezetése: $\sqrt{x^2 + 4x + 9} = b \Rightarrow b^2 - 5 + b = 7$,

É.T.: $b \geq 0$

rendezzük át az egyenletet $b^2 + b - 12 = 0$

$b_1 = \dfrac{-1 + 7}{2} = 3$

$b_2 = \dfrac{-1 - 7}{2} = -4$, ez nem eleme az É.T.-nak.

helyettesítsük vissza $\sqrt{x^2 + 4x + 9} = 3$

$x^2 + 4x + 9 = 9$

$x^2 + 4x = 0$

$x(x + 4) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = -4$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk, hogy mindkét gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

II. Két négyzetgyökös kifejezést tartalmazó egyenletek

Mintapélda$_8$ (Látszólag két négyzetgyökös kifejezést tartalmazó egyenlet.)

Oldjuk meg az alábbi egyenletet!

$\sqrt{9x-27}+\sqrt{x-3}=12$

Megoldás:

Az egyenletnek $x \geq 3$ esetén van értelme.

Vegyük észre, hogy az első gyökös kifejezésben a gyökjel alatt szereplő mennyiség szorzattá alakítható, és a 3 kiemelhető a négyzetgyökjel elé.

Ezeket felhasználva kapjuk a következő egyenletet:

$3\sqrt{x-3}+\sqrt{x-3}=12.$

Összevonva a négyzetgyökös kifejezéseket:

$4\sqrt{x-3}=12,$

$\sqrt{x-3}=3.$

Négyzetre emelve az egyenletet:

$x-3=9,$

$x=12.$

Ellenőrzés: bal oldal: $\sqrt{9\cdot 12-27}+\sqrt{12-3}=\sqrt{81}+\sqrt{9}=9+3=12$; jobb oldal: 12.

12 valóban gyöke az egyenletnek.

Mintapélda$_9$ (Az értelmezési tartomány vizsgálatával megoldható egyenletek.)

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

a) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x-3}=0,$

b) $\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}=1,$

c) $\sqrt{x^2-x+-6}+\sqrt{x^2-7x+12}=0.$

Megoldás:

a) Vizsgáljuk meg az értelmezési tartományt:

$3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3,$

$x-3\,x \geq 0 \Rightarrow x \geq 3.$

Az egyenlet megoldása során olyan x értéket keresünk, amely mind a két feltételt egyszerre igazzá teszi. A két feltétel csak akkor teljesül egyszerre, ha $x = 3$.

Ellenőrzés:

$x = 3$ esetén az egyenlet bal oldala is és a jobb oldala is nulla, tehát teljesül az egyenlőség.

b) Vizsgáljuk meg az értelmezési tartományt:

$x - 3\,x \geq 0 \Rightarrow x \geq 3,$

$2 - x \geq \Rightarrow x \leq 2.$

Az egyenlet megoldása során olyan x értéket keresünk, amely mind a két feltételt egyszerre kielégíti.

Nincs olyan valós szám, amely nagyobb lenne mint 3 és ugyanakkor kisebb lenne mint 2. Ebből adódik, hogy az egyenlet értelmezési tartománya az üres halmaz. Tehát az egyenletnek nincs megoldása.

c) Vegyük észre, hogy itt két négyzetgyök összege egyenlő nullával, amely csak akkor teljesül, ha mind a két gyök alatti kifejezés nulla, hiszen két nemnegatív szám öszege csak így lehet 0.

Vizsgáljuk meg a gyök alatti kifejezéseket:

$x^2 - x - 6 = 0.$

Alakítsuk szorzattá a kifejezést!

$(x - 3)(x + 2) = 0.$

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

Tehát: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

$x^2 - 7x + 12 = 0.$

Alakítsuk szorzattá a kifejezést!

$(x - 3)(x - 4)=0.$

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

Tehát: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

$x = 3$ esetén mindkét kifejezés nulla lesz, ez lehet megoldása az egyenletnek, és más nem.

Ellenőrzés:

$\sqrt{3^2 - 3 - 6} = 0.$

$\sqrt{3^2 - 7 \cdot 3 + 12} = 0.$

Tehát az $x = 3$ megoldása az egyenletnek.

Mintapélda$_{10}$

Oldjuk meg az alábbi négyzetgyökös egyenletet:

$\sqrt{x-1} - \sqrt{2x+5} = 0.$

Megoldás:

Megvizsgáljuk az értelmezési tartományt:

$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ és $2x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{5}{2}$. Az egyenlet értelmezési tartománya a két halmaz közös része: $x \geq 1$.

Átrendezzük az egyenletet:

$\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+5}$.

Négyzetre emelve:

$x - 1 = 2x + 5,$

$-6 = x.$

Ez nem tartozik az értelmezési tartományhoz, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

Mintapélda$_{11}$

Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$\sqrt{2x+8} - \sqrt{x+5} = 7.$

Megoldás:

Megvizsgáljuk az értelmezési tartományt:

$2x + 8 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$ és $x + 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5$. Az egyenlet értelmezési tartománya a két halmaz közös része: $x \geq -4$.

Átrendezzük az egyenletet úgy, hogy a bal oldalon csak egyetlen négyzetgyökös kifejezés szerepeljen:

$\sqrt{2x+8} = 7 + \sqrt{x+5}$.

Emeljük négyzetre mindkét oldalt!

$2x + 8 = 49 + 14 \cdot \sqrt{x+5} + x + 5.$

Így egyetlen négyzetgyököt tartalmazó egyenletet kapunk, melyet úgy rendezünk át, hogy a jobb oldalon csak a négyzetgyökös kifejezés szerepeljen:

$x - 46 = 14 \cdot \sqrt{x+5}$, ahol $x - 46 \geq 0$, azaz $x \geq 46$.

Ismételten négyzetre emeljük mindkét oldalt:

$x^2 - 92x + 2116 = 196 \cdot (x + 5)$,

$x^2 - 92x + 2116 = 196x + 980$.

Nullára rendezzük az egyenletet:

$x^2 - 288x + 1136 = 0$,

$x_1 = \dfrac{288 + \sqrt{78400}}{2} = \dfrac{288 + 280}{2} = 284$,

$x_2 = \dfrac{288 - \sqrt{78400}}{2} = \dfrac{288 - 280}{2} = 4$, nem eleme az É.T.-nek.

Ellenőrzés:

$x = 284$; bal oldal: $\sqrt{2 \cdot 284 + 8} - \sqrt{284 + 5} = 24 - 17 = 7$; jobb oldal: 7.

Mintapélda$_{12}$

Oldjuk meg a következő egyenletet:

$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 4$.

Megoldás:

Vegyük észre, hogy mind a két négyzetgyök alatt teljes négyzet szerepel, vagyis az értelmezési tartomány **R**. A következőképpen lehet átírni az egyenletet:

$\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = 4$.

Használjuk fel a $\sqrt{a^2} = |a|$ összefüggést!

$|x - 2| + |x + 1| = 4$.

Tehát a fenti egyenletet visszavezettük egy abszolútértékes egyenletre.

Bontsuk fel az abszolútértékeket!

$|x - 2| = x - 2$, ha $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$, $|x + 1| = x + 1$, ha $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$,

$|x - 2| = -x + 2$, ha $x - 2 \leq 0 \Rightarrow x < 2$, $|x + 1| = -x - 1$, ha $x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$.

Az abszolútértékes egyenletet három lineáris egyenlettel helyettesíthetjük a megfelelő intervallumokon.

Ha $x < -1$:	Ha $-1 \le x < 2$:	Ha $x \ge 2$:
$-x + 2 - x - 1 = 4$,	$-x + 2 + x + 1 = 4$,	$x - 2 + x + 1 = 4$,
$-2x + 1 = 4$,	$3 = 4$,	$2x - 1 = 4$,
$-2x = 3$,	ellentmondás.	$2x = 5$,
$x = -\frac{3}{2}$.		$x = \frac{5}{2}$.

Az $x = \frac{5}{2}$ és az $x = -\frac{3}{2}$ a kívánt intervallumban vannak, ezért gyökei lehetnek az eredeti egyenletnek.

Ellenőrzéssel meggyőződünk róla, hogy mind a két szám valóban megoldása az egyenletnek.

Feladatok

7. Oldd meg a következő egyenletet:

$\sqrt{3x-1} - \sqrt{x} = 1$.

Megoldás:

Meghatározzuk az értelmezési tartományt: $3x - 1 \ge 0 \Rightarrow x \ge \frac{1}{3}$ és $x \ge 0$. Az egyenlet értelmezési tartománya a két halmaz közös része: $x \ge \frac{1}{3}$.

A négyzetre emelés előtt célszerű átrendezni az egyenletet:

$$\sqrt{3x-1} = 1 + \sqrt{x}$$

$$3x - 1 = 1 + 2\sqrt{x} + x$$

$$2x - 2 = 2\sqrt{x}\text{, ahonnan} \quad x - 1 = \sqrt{x} \quad \text{É.T.: } x \ge 1\,.$$

Ismételten emeljük négyzetre: $x^2 - 2x + 1 = x$.

A másodfokú egyenlet nullára redukált alakja: $x^2 - 3x + 1 = 0$.

Alkalmazzuk a megoldóképletet:

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}62$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}38$ (erre nem teljesül az $x \ge 1$ feltétel).

Ellenőrzés: $x_1 \approx 2{,}62 \Rightarrow \sqrt{3 \cdot 2{,}62 - 1} - \sqrt{2{,}62} = \sqrt{6{,}86} - \sqrt{2{,}62} \approx 2{,}62 - 1.62 = 1$

Ez gyöke az egyenletnek.

Módszertani megjegyzés:

Az itt közölt ellenőrzés valójában csak látszólagos, hiszen $\sqrt{5}$ irracionalitása miatt a kéttizedes „pontosság” igencsak pontatlan! Hét tizedesre (számológéppel) számolva: $\sqrt{6{,}86} \approx 2{,}6191602$; $\sqrt{2{,}62} \approx 1{,}6186414$, a különbségük $\approx 1{,}0005188 \neq 1$.

Kétségtelen, hogy a $\sqrt{3 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 1} - \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = 1$ egyenlőség bizonyítása nagy gyakorlatot kíván. Érdemes pl. fakultáción kitűzni, és tanulságait frontálisan megbeszélni.

Bizonyítás:

A négyzetgyökjel alatti értékeket először külön kezeljük:

I. $3 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{9+3\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$.

Legyen $\frac{7+3\sqrt{5}}{2} = a^2$. Ekkor $7+3\sqrt{5} = 2a^2$. $/ \cdot 2$

$$14 + 6\sqrt{5} = 4a^2. \qquad (1)$$

A bizonyítás kulcsa az az észrevétel, hogy $14 + 6\sqrt{5} = \left(3+\sqrt{5}\right)^2$.

Ezt (1)-be behelyettesítve: $\left(3+\sqrt{5}\right)^2 = 4a^2 \Rightarrow 3+\sqrt{5} = 2a \Rightarrow a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

II. Legyen $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = b^2$. Ekkor $3+\sqrt{5} = 2b^2$. $/ \cdot 2$

$$6 + 2\sqrt{5} = 4b^2. \qquad (2)$$

Vegyük észre, hogy $6 + 2\sqrt{5} = \left(1+\sqrt{5}\right)^2$.

Ezt (2)-be behelyettesítve: $\left(1+\sqrt{5}\right)^2 = 4b^2 \Rightarrow 1+\sqrt{5} = 2b \Rightarrow b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

III. Mivel a és b pozitív értékek, ezért $\sqrt{a^2} = a$ és $\sqrt{b^2} = b$.

Ezt felhasználva, a bizonyítandó egyenlőség bal oldalát átalakíthatjuk:

$$\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2} =$$

= 1, tehát a kapott megoldás valóban kielégíti az egyenletet.

(A szerkesztő megjegyzése)

8. Oldd meg a következő egyenletet:

$\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3} = 2.$

Megoldás:

Vizsgáljuk meg az egyenlet értelmezési tartományát:

$5-x \geq 0 \Rightarrow 5 \geq x$ és $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$.

Az egyenlet értelmezési tartománya a két halmaz közös része: $3 \leq x \leq 5$.

Ezután átrendezzük az egyenletet: $\sqrt{5-x} = 2 - \sqrt{x-3}$.

Négyzetre emelve az egyenletet: $5 - x = 4 - 4 \cdot \sqrt{x-3} + x - 3$.

Átrendezzük az egyenletet úgy, hogy az egyik oldalon csak a négyzetgyökös kifejezés szerepeljen: $4\sqrt{x-3} = 2x - 4$

Elosztjuk az egyenletet 2-vel: $2\sqrt{x-3} = x - 2$

Ismételten négyzetre emelve az egyenletet: $4(x-3) = x^2 - 4x + 4$

Felbontjuk a zárójelet és nullára rendezzük az egyenletet:

$4x - 12 = x^2 - 4x + 4$

$0 = x^2 - 8x + 16$

$0 = (x-4)^2$

$x = 4$

Ellenőrzés: $x = 4$,

bal oldal: $\sqrt{5-4} + \sqrt{4-3} = 2$; jobb oldal: 2.

Tehát a 4 megoldása az egyenletnek.

Módszertani megjegyzés: A következő feladat megoldását csoportmunkában javasoljuk.

9. Írj fel olyan négyzetgyökös egyenleteket, amelyek gyökére a következő feltételek valamelyike teljesül: $x = 3$; $x \in \mathbf{R}$; $x = 0$.

Megoldási ötletek: pl. a) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-2} = 1$; b) $\sqrt{(x-5)^2} + 1 = 3$; c) $\sqrt{6x - x^2} = 0$.

10. Oldd meg az alábbi egyenleteket:

a) $\sqrt{\frac{1}{2}+x}=\frac{7}{2}$; b) $\sqrt{2x^2-2}=4$;

c) $x+2=\sqrt{7x+2}$; d) $2\sqrt{3+x}+\sqrt{-2x}=4$.

Megoldás:

Megoldás során módszertani javaslat:

Alakítsunk ki négyfős csoportokat! Minden csoportban mindenki húz egy-egy kártyát. A kártyákon az A, B, C, D betűk szerepelnek. Ezután egy munkacsoportot alkotnak azok a tanulók, akik azonos betűt húztak. A betűk a feladatok nehézségi fokát jelentik: A a legkönnyebb (a) részfeladat), a D pedig a legnehezebb (d) részfeladat). A munkacsoportok megoldják a kapott feladatot, majd visszamennek az eredeti csoportjukhoz. A négyfős csoportokban megbeszélik mind a négy feladat megoldását.

Ezután a tanár tetszőlegesen kiválaszt négy tanulót, és mindegyiktől az általa meghatározott részfeladat ismertetését kéri.

a) Megvizsgáljuk az értelmezési tartományt: $\frac{1}{2}+x\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{1}{2}$.

Négyzetre emeljük az egyenletet: $\frac{1}{2}+x=\frac{49}{4}$, ahonnan $x=\frac{47}{4}$.

Ellenőrzés: $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{47}{4}}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$.

b) Megvizsgáljuk az értelmezési tartományt:

$2x^2-2\geq 0 \Rightarrow x^2\geq 1 \Rightarrow x\geq 1$ vagy $x\leq -1$.

Négyzetre emelünk: $2x^2-2=16$, ahonnan $x^2=9 \Rightarrow x_1=3,\ x_2=-3$.

Mind a két szám eleme az értelmezési tartománynak.

Ellenőrzéssel meggyőződünk róla, hogy mindkettő gyöke az egyenletnek.

c) Megvizsgáljuk az egyenlet értelmezési tartományát:

$$x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2 \text{ és } 7x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -\frac{2}{7}.$$

Az egyenlet értelmezési tartománya a két halmaz közös része: $x\geq -\frac{2}{7}$.

Négyzetre emeljük az egyenletet mindkét oldalát: $x^2+4x+4=7x+2$.

Az egyenlet nullára redukált alakja: $x^2 - 3x + 2 = 0.$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 1.$$

Mind a két gyök eleme az értelmezési tartománynak és ellenőrzéssel meggyőződünk arról, hogy gyökei az eredeti egyenletnek.

Megjegyzés: Az egyenletet szorzattá alakítással is megoldhatjuk:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(-2) = 0$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1.$$

d) Megvizsgáljuk az értelmezési tartományt: $3 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$ és $x \leq 0.$

Az egyenlet értelmezési tartománya a két halmaz közös része: $-3 \leq x \leq 0$

A négyzetre emelés előtt célszerű átrendezni az egyenletet:

$$2\sqrt{3+x} = 4 - \sqrt{-2x}$$

$$4\,(3+x) = 16 - 8\sqrt{-2x} - 2x$$

Átrendezzük úgy az egyenletet, hogy az egyik oldalon csak a négyzetgyökös kifejezés maradjon: $8\sqrt{-2x} = 4 - 6x$.

Osztjuk 2-vel: $2\sqrt{-2x} = 2 - 3x$

Ismételten négyzetre emelünk: $-32x = 4 - 12x + 9x^2$

Az egyenlet nullára redukáljuk: $0 = 9x^2 + 20x + 4$

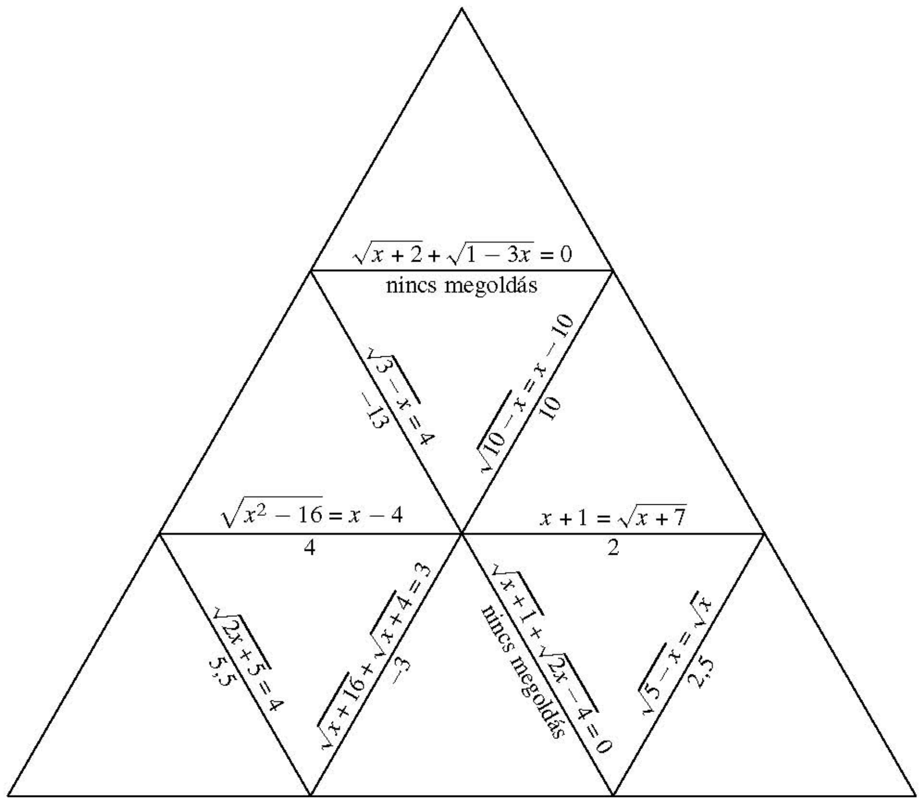
$$x_{1,2} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{18} = \frac{-20 \pm \sqrt{256}}{18} = \frac{-20 \pm 16}{18}$$

$$x_1 = -\frac{2}{9};\quad x_2 = -2$$

Mind a két gyök eleme az értelmezési tartománynak és ellenőrzéssel meggyőződünk arról, hogy gyökei az eredeti egyenletnek.

Módszertani megjegyzés: **Triminó játék:**

Alakítsunk ki csoportokat az osztályban! Minden csoport kap 9 db szabályos háromszöget. A kis háromszögek oldalait összeillesztve minden csoport elkészít egy nagy háromszöget. Úgy kell az oldalakat összeilleszteni, hogy az élek két oldalán egyenlőség vagy igaz állítás szerepeljen.


$\sqrt{x+2}+\sqrt{1-3x}=0$
nincs megoldás
$\sqrt{3-x}=4$
-13
$\sqrt{10-x}=x-10$
10
$\sqrt{x^2-16}=x-4$
4
$x+1=\sqrt{x+7}$
2
$\sqrt{2x+5}=4$
$5,5$
$\sqrt{x+16}+\sqrt{x+4}=3$
-3
$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-4}=0$
nincs megoldás
$\sqrt{5-x}=\sqrt{x}$
$2,5$