MATEMATIKA „A”
10. évfolyam

6. modul

Másodfokúra visszavezethető problémák

Készítette: Darabos Noémi Ágnes

A modul célja	Különböző típusú másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása. Gyakorlati, mindennapi életbeli problémák megoldása egyenletekkel.
Időkeret	8 óra
Ajánlott korosztály	10. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Tágabb környezetben: Fizika, kémia Valóságos problémák matematikai megoldása. Szűkebb környezetben: Függvények. Egyenletek grafikus megoldása. Paraméteres egyenletek (emelt szint). Ajánlott megelőző tevékenységek: Törtes kifejezések közös nevezőjének meghatározása, nevezetes azonosságok használata. Másodfokú egyenletek megoldása, megoldóképlet, gyöktényezős alak ismerete. Másodfokú függvények jellemzése. Ajánlott követő tevékenységek: Négyzetgyökös egyenletek. Számtani és mértani közép, szélsőérték feladatok.

A képességfejlesztés fókuszai	Számolás, számlálás, számítás: Alapműveletek biztonságos elvégezése (zsebszámológéppel is). Műveletek sorrendjének ismerete. Becslés, mérés, valószínűségi szemlélet: Szöveges feladatok megoldása előtt a várható eredmények becslése és a kapott eredmény visszakonvertálása az eredeti szövegbe. Szöveges feladatok, metakogníció: A szövegértés tudatos fejlesztése, a hétköznapi szöveg „lefordítása” a matematika nyelvére, a valóságbeli problémák matematikai értelmezése. A kapott megoldások ellenőrzése és adaptációja az eredeti szövegkörnyezetbe. Rendszerezés, kombinatív gondolkodás: A szükséges adatok kikeresése, a fölösleges adatok mellőzése, a lényegkiemelő képesség fejlesztése. Szöveges, másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldásakor a felvetett problémának nem megfelelő hamis gyök kiszűrése, a diszkusszió igényének fejlesztése. A korábbi matematikai ismeretek beépítése, a lehetséges alkalmazások megkeresése, a tanult új ismeret beillesztése, a rendszerező szemlélet alakítása. Induktív, deduktív következtetés: Konkrét számoktól az általános eset megfogalmazásáig (induktív gondolkodásmód fejlesztése). Azonosságok alkalmazása konkrét esetekben (deduktív gondolkodás fejlesztése).

A tananyag javasolt órabeosztása

Óraszám		**Óracím**
I.	1.	Másodfokúra visszavezethető magasabbfokú egyenletek
	2.	Gyakorlás
II.	3.	Törtet tartalmazó egyenletek
	4–5.	Gyakorlás
III.	6.	Szöveges feladatok
	7.	Gyakorlás
	8.	Összefoglalás

Érettségi követelmények:

Középszint:
Ismerje az alaphalmaz és a megoldáshalmaz fogalmát. Alkalmazza a különböző egyenletmegoldási módszereket: mérlegelv, grafikus megoldás, ekvivalens átalakítások, következményegyenletre vezető átalakítások, új ismeretlen bevezetése stb. Ismerje az egyismeretlenes másodfokú egyenlet általános alakját. Tudja meghatározni a diszkrimináns fogalmát. Ismerje és alkalmazza a megoldóképletet. Használja a teljes négyzetté alakítás módszerét. Alkalmazza feladatokban a gyöktényezős alakot. Tudjon törtes egyenleteket, másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatokat megoldani. Másodfokú egyenletrendszerek megoldása. Egyszerű, másodfokúra visszavezethető egyenletek megoldása.
Emelt szint:
Igazolja a másodfokú egyenlet megoldóképletét. Igazolja és alkalmazza a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket. Másodfokú paraméteres feladatok megoldása. Tudjon másodfokúra visszavezethető egyenletrendszereket megoldani. Értelmezési tartomány, illetve értékkészlet-vizsgálattal, valamint szorzattá alakítással megoldható feladatok, összetett feladatok megoldása.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Másodfokúra visszavezethető magasabbfokú egyenletek			
1.	Mindenkinek adunk egy kártyát, melyen másodfokú egyenletek, diszkriminánsuk, gyöktényezős alakjuk, valamint a gyökeik szerepelnek. Az összetartozó kártyák tulajdonosai alkotnak egy csoportot. Ezen az órán ők dolgoznak együtt.	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás	6.1. kártyakészlet
2.	Magasabb fokszámú egyenletek megoldása. Közösen megbeszéljük a feladatokat.		2. és 3. feladat
3.	Minden csoport egyedül dolgozik a feladatokon. A csoporton belül kiosztjuk az A, B, C, D jelű kártyákat, mindenki húz egyet. A feladat megoldását az ismerteti a táblánál, akinek a csoport számát és betűjelét kihúzza a tanár.	Kombinatív gondolkodás	1., 4., 5., 6. és 7. feladat

2. Gyakorlás			
1.	Minden csoportnak adunk egy csomag kártyát, melyen magasabbfokú egyenletek szerepelnek. Feladatuk összepárosítani azokat az egyenleteket, melyeknek azonosak a gyökeik.	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás	6.2. kártyakészlet
2.	Minden csoport egyedül dolgozik a feladatokon. A feladat megoldását ismertetik a táblánál.	Kombinatív gondolkodás	8., 9. és 10. feladat

II. Törtet tartalmazó egyenletek			
1.	Minden csoport egyedül dolgozik a feladatokon. A feladat megoldását ismertetik a táblánál.		16., 17., 18. és 19. feladat

4. Gyakorlás			
1.	A kijelölt feladatok egyéni vagy csoportos megoldása. A megoldások ellenôrzése, megbeszélése.		21., 22., 23., és 24. feladat
2.	Mindenkinek adunk egy kártyát, amelyen egy egyenlet szerepel. Felírjuk a táblára a következő négy egyenletet: $x+2=5$, $\frac{x^2-4}{x-2}=5$ $\frac{3x+6}{x}=\frac{15}{x}$, $x(x+2)=5x$, valamint nyitunk egy „egyik sem” rovatot is. Minden tanuló feladata az, hogy elhelyezze a saját kártyáját az alá az egyenlet alá, amelyikkel a kapott egyenlete megegyezik, vagy ha nem talál ilyet, akkor az egyik sem rovat alá. Közösen beszéljük meg, hogy minden kártya jó helyre került-e.	Disszkussziós készség fejlesztése.	6.3. kártyakészlet

5. Gyakorlás			
1.	Bonyolultabb feladatok feldolgozása, különös tekintettel az értelmezési tartomány megállapítására. A feldolgozás módja lehet egyéni, csoportos vagy frontális		25., 26., 27. és 28. feladat

III. Szöveges feladatok			
1.	Szövegértés; a szöveg matematikai formába öntése. A probléma tartalma és matematikai formai mondanivalójának megbeszélése. Legalább 1 feladat megoldása táblánál. Minden csoportba osszunk ki A, B, C, D jelű kártyákat, differenciálva a tanulók képességei szerint. Szétválnak a csoportok az A, B, C, D jelek szerint, az azonos betűsök dolgoznak most együtt. Ha elkészültek a csoportok, mindenki visszamegy a saját csoportjába, és a többieknek elmondja a feladatának a megoldását. A feladat megoldását az ismerteti a táblánál, akinek a csoport számát és betűjelét kihúzza a tanár.	A szükséges adatok kikeresése, a fölösleges adatok mellőzése, a lényegkiemelő képesség fejlesztése.	30., 31., 32. és 33. feladat

8. Összefoglalás			
1.	Matematikai TOTÓ Minden tanuló egyedül dolgozik a feladatokon. Ha elkészültek, mindenki átadja a padtársának a feladatlapját, aki kijavítja azt a frontális megbeszélésnek megfelelően.	Rendszerezés, kombinatív gondolkodás	35., 36. és 37. feladat

I. Másodfokúra visszavezethető magasabb fokszámú egyenletek

A matematikusok különösen nagy erőfeszítést tettek, hogy a másodfokú egyenlet megoldóképletéhez hasonlóan megtalálják a magasabb fokszámú egyenletek megoldóképletét is.

Girolamo **Cardano** (1501–1576) olasz matematikus, 1545-ben megjelent könyvében közölte a harmadfokú egyenletek megoldóképletét. Utólag kiderült, hogy a megoldóképletet a bolognai egyetem professzora, Ferro találta meg elsőként, aki azonban ezt titokban tartotta, és csak halála előtt adta tovább egyik tanítványának, Fiore-nak. Ebben az időben azonban egy másik tehetséges olasz matematikus Nicolo **Tartaglia** is önállóan megtalálta a megoldóképletet, és elmondta Cardanonak. Cardano ekkor már dolgozott a könyvén, és így került bele Tartaglia bizonyítása Cardano könyvébe. Cardano becsületére legyen mondva, a felfedezést soha nem tartotta magáénak. Az ő érdeme azonban, hogy Tartaglia képletét általánosította, illetve megmutatta, hogy minden általános harmadfokú egyenlet megoldása visszavezethető az $x^3 + bx = c$ alakúéra. Mindenesetre a harmadfokú egyenletek megoldóképletét Cardanoról nevezték el.
Evariste **Galois** (1811–1832) francia matematikus, őt tartják a modern algebra megalapozójának. Rövid munkássága során megmutatta, hogy melyek azok az egyenlettípusok, melyek csupán a négy alapművelettel és gyökvonással megoldhatók.
Niels Henrik **Abel** (1802–1829) norvég matematikus bebizonyította, hogy az ötöd-, vagy annál magasabb fokszámú egyenletekre általában nem létezik megoldóképlet.

Mi most az olyan speciális magasabbfokú egyenletekkel foglalkozunk, melyek bizonyos átalakítások és helyettesítések során, az egyenletek fokszámát csökkentve másodfokú egyenletekre vezethetők vissza.

Módszertani megjegyzés: **Keresd a csoportod!**

Mindenkinek adunk egy kártyát a 6.1 kártyakészletből, melyen másodfokú egyenletek, diszkriminánsuk, gyöktényezős alakjuk, valamint a gyökeik szerepelnek. Ez a kiosztás lehet véletlenszerű: például a tanulók maguk húznak egy-egy kártyát a tanári asztalról, lehet tudatos: figyelünk arra, hogy kinek melyik kártyát adjuk. Az összetartozó kártyák tulajdonosai alkotnak egy csoportot. Ezen az órán ők dolgoznak együtt.

6.1 kártyakészlet

$x_1 = -3 \quad x_2 = \frac{1}{2}$	$D = 49$	$(2x-1)(x+3) = 0$	$2x^2 + 5x - 3 = 0$
$x_1 = -\frac{2}{3} \quad x_2 = 1$	$D = 25$	$(3x+2)(x-1) = 0$	$3x^2 - x - 2 = 0$
$x_1 = -5 \quad x_2 = -4$	$D = 1$	$(x+5)(x+4) = 0$	$x^2 + 9x + 20 = 0$
$x_1 = 3 \quad x_2 = 7$	$D = 16$	$(x-7)(x-3) = 0$	$x^2 - 10x + 21 = 0$
$x_1 = -2 \quad x_2 = 1$	$D = 36$	$2(x-1)(x+2) = 0$	$2x^2 + 2x - 4 = 0$
$x_1 = -2 \quad x_2 = 1$	$D = 81$	$3(x+2)(x-1) = 0$	$3x^2 + 3x - 6 = 0$
$x_1 = -8 \quad x_2 = 6$	$D = 196$	$(x-6)(x+8) = 0$	$x^2 + 2x - 48 = 0$

Mintapélda$_1$

Oldjuk meg a $x^4 = 625$ egyenletet a negatív egész számok halmazán!

Megoldás:

Alaphalmaz: $\mathbf{Z}^-$

Vegyük mindkét oldal negyedik gyökét: $|x| = 5$.

Ebből két megoldás adódik: $x_1 = 5, \quad x_2 = -5 \quad \Rightarrow$ a megoldáshalmaz $M = \{5; -5\}$.

A feladat alaphalmazába csak az $x = -5$ tartozik.

A megoldás helyességéről ellenőrzéssel győződhetünk meg.

Mintapélda$_2$

Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; b) $2x^4 + 2x^2 - 12 = 0$.

Megoldás:

a) Amennyiben nem teszünk megszorítást az alaphalmazra vonatkozóan, a megoldásokat mindig a valós számok körében, **R**-ben keressük.

Mivel $\left(x^2\right)^2 = x^4$ ezért célszerű egy új ismeretlent bevezetni: $y = x^2$, ahol $y \geq 0$.

Ekkor az egyenlet a következő alakba írható: $y^2 - 13y + 36 = 0$.

Ezt megoldjuk, felhasználva a megoldó képlet, két megoldást kapunk: $y_1 = 4$, $y_2 = 9$.

Ebből felhasználva, hogy $y = x^2$,

ha $y = 4 \;\Rightarrow\; x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x_1 = 2,\quad x_2 = -2$,

ha $y = 9 \;\Rightarrow\; x^2 = 9 \;\Rightarrow\; x_3 = 3,\quad x_4 = -3$.

Tehát az egyenletnek négy megoldása van: $M = \{2; -2; 3; -3\}$.

A feladat alaphalmazába mind a négy megoldás beletartozik.
A megoldások helyességéről ellenőrzéssel győződhetünk meg.

b) Vezessük be az $y = x^2$ új ismeretlent, ahol $y \geq 0$.

Ekkor az egyenlet a következő alakba írható: $y^2 + y - 6 = 0$.

Ezt megoldjuk, felhasználva a megoldóképletet, két megoldást kapunk: $y_1 = 2$, $y_2 = -3$.

Tekintve, hogy $y = x^2$,

ha $y = 2 \;\Rightarrow\; x^2 = 2 \;\Rightarrow\; x_1 = \sqrt{2},\quad x_2 = -\sqrt{2}$,

ha $y = -3$, akkor az egyenletnek nincs valós megoldása, hiszen $y \geq 0$.

Tehát az egyenletnek két megoldása van: $M = \left\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right\}$.

A feladat alaphalmazába mind a két megoldás beletartozik.
A megoldások helyességéről ellenőrzéssel győződhetünk meg.

Megjegyzés: Egy *n*-edfokú algebrai egyenletnek legfeljebb *n* darab valós megoldása lehet.

Mintapélda₃

Oldjuk meg az $8(x+2)^6 + 7(x+2)^3 - 1 = 0$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

Célszerű új ismeretlent bevezetni: $y = (x+2)^3$.

Ekkor az új egyenletünk: $8y^2 + 7y - 1 = 0$.

$$y_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{16} \quad\Rightarrow\quad y_1 = -1,\quad y_2 = \frac{1}{8}.$$

Ebből felhasználva, hogy $y=(x+2)^3$,

ha $y=-1 \quad \Rightarrow \quad (x+2)^3=-1 \quad \Rightarrow \quad x+2=-1 \quad x_1=-3$;

ha $y=\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad (x+2)^3=\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad x+2=\frac{1}{2} \quad x_2=-\frac{3}{2}$.

Tehát az egyenletnek két megoldása van: $M=\left\{-3;-\frac{3}{2}\right\}$.

A feladat alaphalmazába mindkét megoldás beletartozik.

A megoldások helyességéről ellenőrzéssel győződhetünk meg.

Mintapélda$_4$

Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

a) x^3+4x^2+3x b) x^4-10x^2+9

c) Egyszerűsítsük az $\dfrac{x^3+4x^2+3x}{x^4-10x^2+9}$ törtet!

Megoldás:

a) $x^3+4x^2+3x=x\left(x^2+4x+3\right)=x(x+1)(x+3)$, mert a $x^2+4x+3=0$ másodfokú egyenlet gyökei $x_1=-1$, $x_2=-3$, így gyöktényezős alakja: $(x+1)(x+3)$.

b) Legyen $x^2=y$, ekkor az $x^4-10x^2+9=y^2-10y+9=(y-1)(y-9)$, mert az $y^2-10y+9=0$ másodfokú egyenlet gyökei $y_1=1$, $y_2=9$, így gyöktényezős alakja: $(y-1)(y-9)$,

$x^4-10x^2+9=\left(x^2-1\right)\left(x^2-9\right)=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$.

c) Minthogy a nevező nem lehet nulla, $x^4-10x^2+9\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}\neq \pm 1, \quad x_{3,4}\neq \pm 3$ ezért az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\{-1;1;-3;3\}$.

$$\frac{x^3+4x^2+3x}{x^4-10x+9}=\frac{x(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x-1)(x-3)}=\frac{x}{(x-1)(x-3)}.$$

Mintapélda$_5$

Oldjuk meg az $(x^2+7x+9)(x^2+7x+7)=3$ egyenletet a negatív számok halmazán!

Megoldás:

Megjegyzés: A műveletek elvégzése után a $x^4+14x^3+65x^2+112x+60=0$ negyedfokú egyenlet adódik, amit eddigi módszereink segítségével nem tudunk megoldani, így más megoldási utat kell keresnünk.

Alaphalmaz: $\mathbf{R}^-$.

Célszerű új ismeretlent bevezetni: $y=x^2+7x+9$.

Ekkor az új egyenletünk: $y(y-2)=3 \quad \Rightarrow \quad y^2-2y-3=0 \quad \Rightarrow \quad y_1=-1, \quad y_2=3$.

Figyelembe véve, hogy $y=x^2+7x+9$,

ha $y=-1 \quad \Rightarrow \quad x^2+7x+9=-1 \quad \Rightarrow \quad x^2+7x+10=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-2, \quad x_2=-5$,

ha $y=3 \quad \Rightarrow \quad x^2+7x+9=3 \quad \Rightarrow \quad x^2+7x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-1, \quad x_2=-6$.

Tehát az egyenletnek négy megoldása van: $M=\{-1;-2;-5;-6\}$.

A feladat alaphalmazába mind a négy megoldás beletartozik.

A megoldások helyességéről ellenőrzéssel győződhetünk meg.

Megjegyzés: Új ismeretlen bevezetésekor célszerű az egyenletben szereplő változók egymáshoz való viszonyát megvizsgálni. Ennél a feladatnál három lehetőség is adódik az új ismeretlen bevezetésére:

ha $y=x^2+7x+9$ akkor $y^2-2y-3=0$;

ha $y=x^2+7x+7$ akkor $y^2+2y-3=0$;

ha $y=x^2+7x$ akkor $y^2+16y+60=0$ egyenletek adódnak.

Mintapélda$_6$

Oldjuk meg a $2x^4-5x^3-8x^2-5x+2=0$ egyenletet a pozitív számok halmazán!

Megoldás:

Alaphalmaz: $\mathbf{R}^+$.

Célszerű az egyenlet mindkét oldalát elosztani x^2-tel, hiszen $x \neq 0$:

$$2x^2-5x-8-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}=0.$$

Csoportosítsuk az egyenlő együtthatójú tagokat: $2x^2 + \dfrac{2}{x^2} - 5x - \dfrac{5}{x} - 8 = 0$.

Emeljük ki az egyenlő együtthatókat: $2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 8 = 0$.

Vezessük be az $y = x + \dfrac{1}{x}$ új ismeretlent, ekkor $y^2 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$.

Így az új egyenletünk: $2\left(y^2 - 2\right) - 5y - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y^2 - 5y - 12 = 0$,

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 4, \quad y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Ebből felhasználva, hogy $y = x + \dfrac{1}{x}$,

$$y = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \quad \Rightarrow$$

$x_1 = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}73, \quad x_2 = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}27$;

$$y = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{2} = x + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{4}.$$

A diszkrimináns negatív, így innen nem kapunk megoldást.

Tehát az egyenletnek két valós megoldása van: $M = \left\{2 + \sqrt{3};\, 2 - \sqrt{3}\right\}$.

A feladat alaphalmazába mindkét megoldás beletartozik.

A megoldások helyességéről ellenőrzéssel győződhetünk meg.

Megjegyzés: Az $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ alakú negyedfokú egyenleteket szimmetrikus vagy reciprok egyenleteknek nevezzük; ezekben ha egy szám megoldás, akkor annak a reciproka is az.

Feladatok

1. Oldd meg a következő egyenleteket:

a) $x^4 = 81$; b) $x^3 = -64$; c) $x^4 = -625$; d) $x^6 - 729 = 0$.

Megoldás:

a) $M = \{3; -3\}$; b) $M = \{-4\}$; c) $M = \emptyset$; d) $M = \{3; -3\}$.

2. Oldd meg a $16x^4 - 257x^2 + 16 = 0$ egyenletet!

Megoldás:

Legyen $y = x^2$. Ekkor $16y^2 - 257y + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = x^2 = 16, \quad y_2 = x^2 = \frac{1}{16}$.

$M = \left\{4; -4; \frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right\}$

3. Oldd meg az $x^6 - 63x^3 - 64 = 0$ egyenletet!

Megoldás:

Legyen $y = x^3$. Ekkor $y^2 - 63y - 64 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = x^3 = 64, \quad y_2 = x^3 = -1$.

$M = \{4; -1\}$

4. Oldd meg a $9x^4 = 25 + 224x^2$ egyenletet!

Megoldás:

Legyen $y = x^2$. Ekkor $9y^2 - 224y - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = x^2 = 25, \quad y_2 = x^2 = -\frac{1}{9}$.

$M = \{5; -5\}$

5. Oldd meg a $27x^6 + 1 + 28x^3 = 0$ egyenletet!

Megoldás:

Legyen $y = x^3$. Ekkor $27y^2 + 28y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = x^3 = -\frac{1}{27}, \quad y_2 = x^3 = -1$.

$M = \left\{-\frac{1}{3}; -1\right\}$

6. Oldd meg az $x^8 = 15x^4 + 16$ egyenletet!

Megoldás:

Legyen $y = x^4$. Ekkor $y^2 - 15y - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = x^4 = 16, \quad y_2 = x^4 = -1$.

$M = \{2; -2\}$

7. Oldd meg a $8x^6 + 1 = 9x^3$ egyenletet!

Megoldás:

Legyen $y = x^3$. Ekkor $8y^2 - 9y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = x^3 = 1, \quad y_2 = x^3 = \frac{1}{8}$.

$M = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$

Módszertani megjegyzés: **Keresd a párját!**

Minden csoportnak adunk egy csomag kártyát, melyen magasabbfokú egyenletek szerepelnek. Feladatuk összepárosítani azokat az egyenleteket, melyeknek azonosak a gyökeik. A csoporton belül kiosztjuk az A, B, C, D jelű kártyákat, mindenki húz egyet. A feladat megoldását az ismerteti a táblánál, akinek a csoport számát és betűjelét kihúzza a tanár.

6.2.Kártyakészlet

$x^4+2x^2-3=0$	$x^6-1=0$	$x^4+4x^2-5=0$	$2x^4+x^2-3=0$
$x^4-2x^2-8=0$	$x^6=64$	$x^4+x^2-20=0$	$2x^4-5x^2-12=0$
$x^4-7x^2-18=0$	$x^6-729=0$	$x^4-4x^2-45=0$	$3x^4-26x^2-9=0$
$x^4-15x^2-16=0$	$x^6-4096=0$	$x^4-14x^2-32=0$	$2x^4-31x^2-16=0$

8. Oldd meg a $8(x-1)^6-215(x-1)^3-27=0$ egyenletet!

Megoldás:

Legyen $y=(x-1)^3 \quad \Rightarrow \quad 8y^2-215y-27=0$.

$y_1=(x-1)^3=27, \quad y_2=(x-1)^3=-\frac{1}{8}$

$x-1=3 \quad \Rightarrow \quad x_1=4$

$x-1=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{1}{2}$

Tehát az egyenletnek két megoldása van: $M=\left\{4;\frac{1}{2}\right\}$.

9. Oldd meg az $(x^2+4x)^2+105=26(x^2+4x)$ egyenletet!

Megoldás:

Legyen $y=x^2+4x$. Ekkor

$y^2-26y+105=0 \quad \Rightarrow \quad y_1=x^2+4x=21, \quad y_2=x^2+4x=5$

$x^2+4x-21=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=3, \quad x_2=-7$

$x^2+4x-5=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1, \quad x_2=-5. \qquad M=\{1;3;-5;-7\}$

10. Oldd meg a $-4(x^2+5x+3)=(x^2+5x+3)^2+3$ egyenletet!

Megoldás:

Legyen $y=x^2+5x+3$. Ekkor

$y^2+4y+3=0 \quad\Rightarrow\quad y_1=x^2+5x+3=-1, \quad y_2=x^2+5x+3=-3$

$x^2+5x+4=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-1, \quad x_2=-4$

$x^2+5x+6=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-2, \quad x_2=-3$

$M=\{-1;-2;-3;-4\}$

11. Alakítsd szorzattá a következő kifejezéseket!

a) x^3+5x^2+6x; b) x^4-5x^2+4;

c) x^3+2x^2+2x+1; d) x^3+4x^2+5x+6; e) x^4+x^2+1; f) x^4+3x^2+4.

Megoldás:

a) $x^3+5x^2+6x=x(x^2+5x+6)=x(x+2)(x+3)$;

b) $x^4-5x^2+4=(x^2-1)(x^2-4)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$;

c) $x^3+2x^2+2x+1=(x^3+x^2)+(x^2+x)+(x+1)=x^2(x+1)+x(x+1)+(x+1)=$

$=(x+1)(x^2+x+1)$, vagy nevezetes azonossággal:

$(x^3+1)+(2x^2+2x)=(x+1)(x^2-x+1)+2x(x+1)=(x+1)(x^2+x+1)$;

d) $x^3+4x^2+5x+6=x^3+3x^2+x^2+3x+2x+6=x^2(x+3)+x(x+3)+2(x+3)=$

$=(x+3)(x^2+x+2)$;

e) $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$;

f) $x^4+3x^2+4=x^4+4x^2+4-x^2=(x^2+2)^2-x^2=(x^2+2+x)(x^2+2-x)$.

12. Legyen $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=16$ és x pozitív szám. Az x értékének kiszámítása nélkül adjuk meg

az $x^2+\frac{1}{x^2}$, ill. $x^3+\frac{1}{x^3}$ kifejezések az értékét!

Megoldás:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2} \quad\Rightarrow\quad x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=16-2=14$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3x^2\frac{1}{x}+3x\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right) \quad\Rightarrow$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4^3-3\cdot4=52\text{, hiszen } x+\frac{1}{x}=4.$$

13. Oldd meg a $3x^4+14x^3+x^2+14x+3=0$ egyenletet!

Megoldás:

$x^2\neq0$-val való osztás és kiemelés után: $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+14\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$.

Legyen $y=x+\frac{1}{x}$ ekkor $y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$.

$3\left(y^2-2\right)+14y+1=0 \quad\Rightarrow\quad 3y^2+14y-5=0$

$y_1=x+\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$, $\quad y_2=x+\frac{1}{x}=-5$

$3x^2-x+3=0 \quad\Rightarrow$ nincs valós gyök.

$x^2+5x+1=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

$M=\left\{\frac{-5+\sqrt{21}}{2},\frac{-5-\sqrt{21}}{2}\right\}$.

14. Oldd meg az $x^4+4x^3-19x^2+4x+1=0$ egyenletet!

Megoldás:

$x^2\neq0$-val való osztás és kiemelés után: $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-19=0$.

Legyen $y=x+\frac{1}{x}$ ekkor $y^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$.

$\left(y^2-2\right)+4y-19=0 \quad\Rightarrow\quad y^2+4y-21=0$

$$y_1 = x + \frac{1}{x} = 3, \quad y_2 = x + \frac{1}{x} = -7$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 + 7x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{45}}{2} = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$M = \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{-7+\sqrt{45}}{2}; \frac{-7-\sqrt{45}}{2} \right\}.$$

15. Oldd meg az $\left(x^2 + 2x + 1\right)^3 + \left(2x^2 - 3x - 5\right)^3 = \left(3x^2 - x - 4\right)^3$ egyenletet a valós számok halmazán!

Megoldás:

Legyen $x^2 + 2x + 1 = a \quad 2x^2 - 3x - 5 = b$, ekkor $a + b = 3x^2 - x - 4$

Ekkor az előző egyenlet felírható a következő alakban: $a^3 + b^3 = (a+b)^3$.

Ebből következik $3a^2b + 3ab^2 = 3ab(a+b) = 0$.

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

$$b = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 3x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{5}{2}, \quad x_2 = -1$$

$$a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = -1$$

Így az egyenlet megoldáshalmaza: $M = \left\{ -1; \frac{5}{2}; \frac{4}{3} \right\}$.

Megjegyzés: $x = -1$ az egyenletnek 4-szeres gyöke. Az eredeti egyenlet $(x+1)^4 \left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right) = 0$ alakban is írható.

II. Törtet tartalmazó egyenletek

Mintapélda$_7$

Oldjuk meg az $\frac{x^2-3x-10}{x+2}=x-5$ egyenletet!

Megoldás:

Minthogy a nevező nem lehet nulla, így az értelmezési tartomány a (-2)-től különböző valós számok halmaza. Röviden: $\mathbf{R}\setminus\{-2\}$.

$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$

$x^2-3x-10=x^2-3x-10$

Azonosság, tehát az értelmezési tartomány minden eleme megoldás.

Mintapélda$_8$

Oldjuk meg az $\frac{x^2-3x-10}{x+2}=x-3$ egyenletet!

Megoldás:

Minthogy a nevező nem lehet nulla, így az értelmezési tartomány a (-2)-től különböző valós számok halmaza. Röviden: $\mathbf{R}\setminus\{-2\}$.

$x^2-3x-10=(x-3)(x+2)$,

$x^2-3x-10=x^2-x-6$,

$x=-2$.

A (-2) nem eleme az egyenlet értelmezési tartományának, így az egyenletnek nincs megoldása. Megoldáshalmaz: $M=\{\ \}$.

Mintapélda$_9$

Oldjuk meg az $\frac{3-x}{x+4}+\frac{x+2}{x-4}=\frac{12x-6}{x^2-16}$ egyenletet!

Megoldás:

Minthogy a nevező nem lehet nulla, így az értelmezési tartomány a (-4)-től és 4-től különböző valós számok halmaza. Röviden: $\mathbf{R}\setminus\{-4;4\}$.

Szorozzuk mindkét oldalt a közös nevezővel, $(x-4)(x+4)=x^2-16$-tal!

$(3-x)(x-4)+(x+2)(x+4)=12x-6$

$-x^2+7x-12+x^2+6x+8=12x-6$

$13x-4=12x-6$

$x=-2$

A (-2) eleme az egyenlet alaphalmazának.

Ellenőrzés:

Bal oldal értéke: $\frac{3-(-2)}{(-2)+4}+\frac{(-2)+2}{(-2)-4}=\frac{5}{2}$.

Jobb oldal értéke: $\frac{12(-2)-6}{(-2)^2-16}=\frac{-30}{-12}=\frac{5}{2}$.

Az $x=-2$ valóban megoldás. Megoldáshalmaz: $M=\{-2\}$.

Mintapélda$_{10}$

Oldjuk meg az $\frac{x+11}{x-1}-\frac{2}{x+3}=\frac{3}{x^2+2x-3}$ egyenletet!

Megoldás:

Minthogy a nevező nem lehet nulla, így az értelmezési tartomány a (-3)-tól és 1-től különböző valós számok halmaza. Röviden: $\mathbf{R}\setminus\{-3;1\}$.

Szorozzuk mindkét oldalt a közös nevezővel, $(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$-mal!

$(x+11)(x+3)-2(x-1)=3$

$x^2+12x+32=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-8,\quad x_2=-4$

Megoldáshalmaz: $M=\{-8;-4\}$.

A megoldások helyességéről ellenőrzéssel győződünk meg.

Mintapélda$_{11}$

Oldd meg a $\frac{13x^2+8x-3}{x^2-7x+6}=3$ egyenletet!

Megoldás:

Minthogy a nevező nem lehet nulla, $x^2-7x+6\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x_1\neq 1,\quad x_2\neq 6$ ezért az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\{1;6\}$.

$13x^2+8x-3=3(x^2-7x+6) \quad\Rightarrow\quad 10x^2+29x-21=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-\frac{7}{2},\quad x_2=\frac{3}{5}$.

Megoldáshalmaz: $M=\left\{-\frac{7}{2};\frac{3}{5}\right\}$.

A megoldások helyességéről ellenőrzéssel győződünk meg.

Feladatok

16. Oldd meg az $\frac{x^2+4x-11}{21}=\frac{x+3}{7}$ egyenletet!

Megoldás:

$x^2+x-20=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-5,\quad x_2=4$. Megoldáshalmaz: $M=\{-5;\,4\}$.

17. Oldd meg a $\frac{2x+1}{3}=\frac{4x+2}{x}$ egyenletet!

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. A közös nevező: $3x$.

$2x^2-11x-6=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-\frac{1}{2},\quad x_2=6$. Megoldáshalmaz: $M=\left\{-\frac{1}{2};\,6\right\}$.

18. Oldd meg az $\frac{x^2+7x-6}{x}=6-x$ egyenletet!

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

$2x^2+x-6=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-2,\quad x_2=\frac{3}{2}$. Megoldáshalmaz: $M=\left\{-2;\,\frac{3}{2}\right\}$.

19. Oldd meg az $\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{6\left(1+x^2\right)}{x^2}-\frac{4}{x}$ egyenletet!

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\{0\}$.

$3x^2-5x+2=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=\frac{2}{3},\quad x_2=1$. Megoldáshalmaz: $M=\left\{\frac{2}{3};1\right\}$.

20. Oldd meg az $\frac{x-4}{2x+1}=\frac{x-4}{7x-3}$ egyenletet!

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{3}{7}\right\}$.

$5x^2-24x+16=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=\frac{4}{5},\quad x_2=4$. Megoldáshalmaz: $M=\left\{\frac{4}{5};4\right\}$.

Megjegyzés: Másik megoldási lehetőség: $x=4$ -re mindkét számláló 0, ha $x\neq 4$, akkor $2x+1=7x-3$, innen $x=\frac{4}{5}$.

21. Oldd meg a $\frac{8x^2+15x-9}{x^2+x-2}=2$ egyenletet!

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\{-2;1\}$.

$6x^2+13x-5=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-\frac{5}{2},\quad x_2=\frac{1}{3}$. Megoldáshalmaz: $M=\left\{-\frac{5}{2};\frac{1}{3}\right\}$.

22. Oldd meg az $\frac{x^2+5x+6}{x^2+2x-3}=0$ egyenletet!

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\{-3;1\}$.

$x^2+5x+6=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-3,\quad x_2=-2$. Megoldáshalmaz: $M=\{-2\}$.

23. Oldd meg az $\frac{x+2}{x+3}+\frac{x-2}{x-3}=\frac{20}{x^2-9}$ egyenletet!

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\{-3;3\}$.

A közös nevező: $(x-3)(x+3)=x^2-9$.

$x^2=16 \quad\Rightarrow\quad x_1=-4,\quad x_2=4$. Megoldáshalmaz: $M=\{-4;4\}$.

24. Oldd meg az $\frac{x+2}{3x^2-x}+\frac{6x+4}{6x-2}=2$ egyenletet!

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\left\{0;\frac{1}{3}\right\}$.

$$\frac{x+2}{x(3x-1)}+\frac{6x+4}{2(3x-1)}=2$$

A közös nevező: $2x(3x-1)$.

$3x^2-5x-2=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-\frac{1}{3},\quad x_2=2$. Megoldáshalmaz: $M=\left\{-\frac{1}{3};2\right\}$.

25. Oldd meg az $\frac{x+8}{x-2}-\frac{3}{x+3}=\frac{6-2x}{x^2+x-6}$ egyenletet!

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\{2;-3\}$.

A közös nevező: $(x-2)(x+3)=x^2+x-6$.

$x^2+10x+24=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-6,\quad x_2=-4$. Megoldáshalmaz: $M=\{-6;-4\}$.

26. Oldd meg az $\frac{x-3}{x+2}-\frac{5}{x-5}=\frac{-4x-13}{x^2-3x-10}$ egyenletet!

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: $\mathbf{R}\setminus\{-2;5\}$.

Szorozzunk a közös nevezővel, $(x+2)(x-5)=x^2-3x-10$ – tel!

$$(x-3)(x-5)-5(x+2)=-4x-13$$

$x^2-9x+18=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=6,\quad x_2=3$. Megoldáshalmaz: $M=\{6;3\}$.

27. Oldd meg a $\frac{x^3+x}{x^2+1}=12$ egyenletet!

Megoldás:

Az értelmezési tartomány: **R**, mert a nevező mindig pozitív.

$$\frac{x(x^2+1)}{x^2+1}=12$$

$x=12$. Megoldáshalmaz: $M=\{12\}$.

28. Oldd meg a $\frac{x^3-5x^2-14x}{x^2-2x-8}=\frac{3x^2-18x-21}{x^2-3x-4}$ egyenletet!

Az értelmezési tartomány: **R**, mert a nevező mindig pozitív.

$\frac{x(x^2+1)}{x^2+1}=12$

$x=12$. Megoldáshalmaz: $M=\{12\}$.

Módszertani megjegyzés: **Keresd meg a helyét!**

Mindenkinek adunk egy kártyát, amelyen egy egyenlet szerepel. Felírjuk a táblára a következő négy egyenletet: $x+2=5$, $\frac{x^2-4}{x-2}=5$, $\frac{3x+6}{x}=\frac{15}{x}$, $x(x+2)=5x$ valamint nyitunk egy „egyik sem” rovatot is. Minden tanuló feladata az, hogy elhelyezze a saját kártyáját az alá az egyenlet alá, amelyikkel a kapott egyenlete megegyezik, vagy ha nem talál ilyet, akkor az „egyik sem” rovat alá. Közösen beszéljük meg, hogy minden kártya jó helyre került-e.

6.3 kártyakészlet

$4x+8=40$	$\frac{x}{2}+1=2{,}5$	$-10=5x-25$	$\frac{3x}{5}+\frac{6}{5}=3$
$\frac{3x^2-12}{x-2}=15$	$x+\frac{1}{x+2}=3+\frac{1}{x+2}$	$\frac{2x-4}{x-2}+x=\frac{5x-9}{x-2}$	$\frac{3x-5}{x-2}=4$
$\frac{1}{x}+x=\frac{1}{x}+3$	$\frac{x+2}{x}=\frac{5}{x}$	$\frac{x(x+2)}{x}=5$	$\frac{x-3}{x}=0$
$x^2+2x=5x$	$x^2-3x=0$	$x(x+2)^2=5x(x+2)$	$x^3-3x^2=0$
$(x-2)(x-3)=0$	$5(x-2)=x^2-4$	$x^2-5x+6=0$	$2x^2=10x-12$

Törtet tartalmazó egyenletek megoldásakor gyakran végzünk olyan átalakításokat, amikor hamis gyököt kapunk, vagy gyököt vesztünk (például egyszerűsítés, vagy ismeretlennel való szorzás, osztás). Ezekre fokozottan figyeljünk!

III. Szöveges feladatok

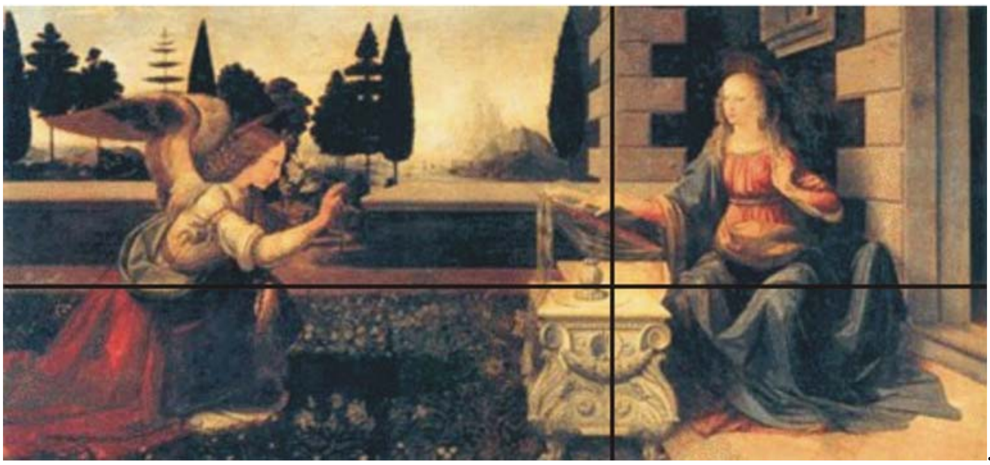
Az aranymetszés (olvasmány)

Aranymetszésnek nevezik egy szakasz két olyan részre való felosztását, melyek közül a kisebb (rövidebb) szakasz hossza úgy aránylik a nagyobbikhoz, mint az egészhez.
Jelölje az aranymetszési arány szerint felosztandó AB szakasz hosszát a, és legyen C az aranymetszésnek megfelelő olyan osztópont, melyre az $AC = x$ a hosszabb, CB pedig a rövidebb szakasz.

Ekkor a következő aránypárt írhatjuk fel:
$\frac{a-x}{x} = \frac{x}{a}$, ahonnan $x^2 = a(a-x) = a^2 - ax$.
Az egyenlet x változó szerint rendezett redukált alakja $x^2 + ax - a^2 = 0$.
Innen $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{a(-1 \pm \sqrt{5})}{2}$. Mivel $a > x > 0$, így a nagyobbik szakasz hossza
$x = \frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}$.

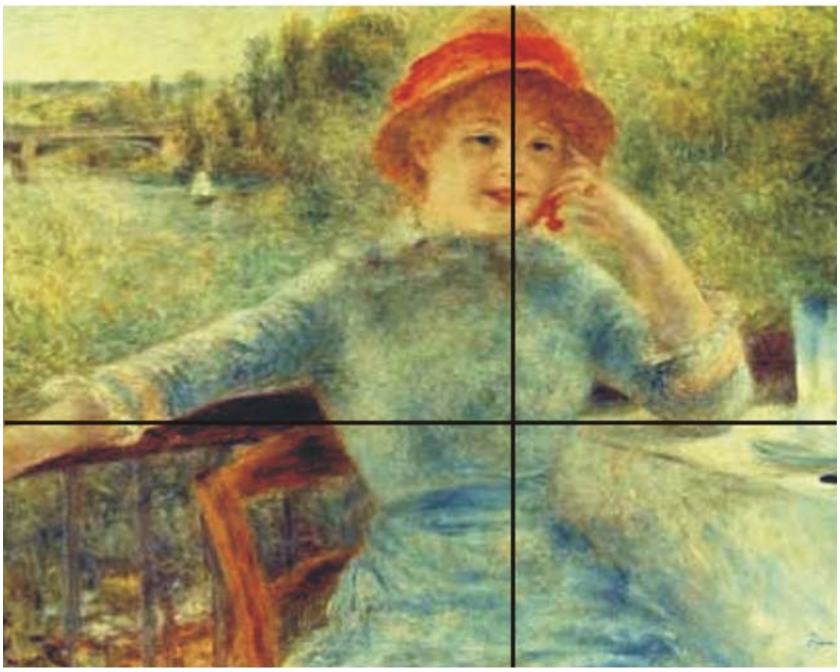
Az aranymetszésnek megfelelő arány a középkorban legfőképpen a templomok méretarányaiban jelentkezett. Ez a nevezetes arány azonban sok esetben nem csupán az alapméretekre, hanem ez épület más részeinek viszonyára is vonatkozott.
Az aranymetszésnek megfelelő arány alkalmazását a reneszánsz építészei is átvették. A római *Szent Péter Bazilika,* mely több évszázadon keresztül épült, alaprajzától a kupola tervezéséig számos méretviszonyában hordoz aranymetszésnek megfelelő arányokat.

A reneszánsz mesterek legtöbb alkotásán az aranymetszési arány kiemelkedő szerepet játszik. E képszerkesztésnek egyik példája *Leonardo: Angyali üdvözlet* című alkotása.

.

A képen a könyvtámasz alatti asztalka középvonalán áthaladó függőleges vonal a vízszintes helyzetű kép terét pontosan *aranymetszés* szerint osztja. Mária, illetve az angyal alakjának a középvonala az osztással kapott részeken belül szintén az aranymetszésnek megfelelően

helyezkedik el úgy, hogy mindkettő az adott térrész ugyanazon oldalára esik. Ezzel olyan aszimmetria jön létre, mely a kép egyensúlyát biztosítja. A kép függőleges terét két vízszintes egyenes vonal az aranymetszésnek megfelelő arányban osztja, melyek közül a felső a kertben húzódó alacsony építmény fedőlapjának felső élén halad át, az alsó pedig a kerti utat a pázsittól választja el. Ha a két nőalak mozdulatait követő vonalakat gondolatban meghosszabbítjuk, azok metszéspontja szintén az aranymetszés szerint osztó, az asztal középvonalán áthaladó egyenesre esik. Ez az egybeesés is arra utal, hogy ez a kép valódi főtengelye.
Auguste Renoir: Nő a Békástanyán című képe is jól átgondolt kompozíciós törvényeknek engedelmeskedik.



Az ábrázolt nő arcának középvonalán áthaladó egyenes pontosan a kép szélességi méretének az aranymetszetébe kerül. Az erkély korlátjának felső széle, melyen a hölgy karja, illetve keze is nyugszik, a kép széléhez annak aranymetszetében illeszkedik. Az e ponton áthaladó, a kép hosszával párhuzamos egyenes egyúttal a másik karnak az asztalra támaszkodó pontján is áthalad.

Forrás: Hámori Miklós: Arányok és talányok

További internetes oldalak:

http://www.jgytf.u-szeged.hu/tanszek/matematika/speckoll/2001/arany/

http://www.sulinet.hu/ematek/html/aranymetszes.html

http://www.kfki.hu/chemonet/TermVil/tv2001/tv0110/bagi.html

http://www.hmg.hu/tanarok/vz/arany.pdf

Módszertani megjegyzés:

A tanulóktól elvárjuk, hogy a szöveges feladatok elolvasása és megértése után jegyzeteljék ki a szükséges adatokat (esetleges mértékegység átváltással együtt). Írják le, hogy a bevezetett ismeretlenek miket jelölnek (és mi a mértékegységük). A megoldás végén adjanak szöveges választ, a szóba jöhető gyökö(ke)t az eredeti szöveg szerint ellenőrizzék. A szöveges feladatok jelentős része felírható másodfokú egyenletrendszerrel is – ha a diákok ezt a megoldást követik, nem kell eltéríteni őket. Frontális megbeszéléskor törekedjünk az egyismeretlenes megoldás ismertetésére.

Mintapélda$_{12}$

Egy áruszállító csónak a víz folyásával egy irányban halad 20 km-t, ott kiteszi a rakományt, majd megfordul és visszaindul a kiindulási ponthoz. Az indulástól a megérkezésig 5 órát töltött vízen a csónak, ha a kirakodási időt elhanyagoljuk. Mekkora a csónak sebessége állóvízben, ha a folyóvíz sebessége 3 km/h?

Megoldás:

Legyen a csónak sebessége x km/h, akkor a vízben lefelé $x+3$ km/h, felfelé $x-3$ km/h sebességgel halad.

Így lefelé a 20 km-es utat $\frac{20}{x+3}$, felfelé $\frac{20}{x-3}$ óra alatt tette meg.

$$\frac{20}{x+3}+\frac{20}{x-3}=5 \quad\Rightarrow\quad 20(x-3)+20(x+3)=5(x-3)(x+3) \quad\Rightarrow\quad x^2-8x-9=0,$$

$x_1=9,\quad x_2=-1$.

A negatív gyöknek itt nincs értelme, a csónak sebessége állóvízben 9 km/h.

Ha a csónak a víz folyásával egy irányban halad, akkor a sebessége 12 km/h így a 20 km-t $\frac{3}{5}$ óra $=100$ perc alatt teszi meg, visszafelé a sebessége 6 km/h így a 20 km-t 200 perc alatt teszi meg. Ez összesen 300 perc, azaz 5 óra.

Feladatok

29. Két város, *A* és *B* távolsága 78 km. *A*-ból *B*-be elindul egy kerékpáros. 1 óra múlva *B*-ből *A*-ba elindul egy másik, aki óránként 4 km-rel többet tesz meg, mint az első, így *B*-től 36 km-re találkoznak. Mennyi ideig mentek a találkozásig és milyen sebességgel?

Megoldás:

Ha az első kerékpáros a találkozásig x órán át ment, akkor a második x–1 óráig haladt, így a sebességük $\frac{42}{x}\frac{\text{km}}{\text{h}}$, illetve $\frac{36}{x-1}\frac{\text{km}}{\text{h}}$. A feladat szerint $\frac{36}{x-1}-\frac{42}{x}=4$, innen $x=3$, vagyis az első kerékpáros sebessége 14 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, **a** másodiké 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Az indulástól a találkozásig az első 3 órát, a második 2 órát kerekezett.

Módszertani megjegyzés: **Szakértői mozaik:**

A tanulók a következő 4 feladatot 4 fős csoportokban dolgozzák fel, szakértői mozaik módszerrel. Minden csoportnak adjunk 4 kártyát (A, B, C, D jelűeket), differenciálva a tanulók képességei szerint. A továbbiakban a tanulók elhagyják a csoportjukat, és az azonos jelűek dolgoznak együtt: megoldják a saját feladatukat. Ha elkészültek, mindenki visszamegy a saját csoportjába, és a többi csoporttagnak elmondja a feladatának a megoldását. Ha végeztek, a csoporton belül összekeverik az A, B, C, D jelű kártyákat és mindenki húz egyet. A feladat megoldását az ismerteti a táblánál, akinek csoportját és betűjelét kisorsolja a tanár.

Az A jelűek feladata:

30. Egy pozitív számnak és a reciprokának a különbsége 3,75. Melyik ez a pozitív szám?

Megoldás:

$$a-\frac{1}{a}=3{,}75 \quad\Rightarrow\quad a^2-3{,}75a-1=0 \quad\Rightarrow\quad a_1=4,\quad a_2=-0{,}25$$

Ez a szám a 4.

A B jelűek feladata:

31. A Nagyi karácsonyra 2520 Ft-ért vett narancsot. Ha ugyanennyi pénzért kilónként 28 Ft-tal drágább mandarint vásárolt volna, akkor egy kilóval kevesebbet kapott volna. Hány kg narancsot vásárolt a Nagyi az ünnepekre?

Megoldás:

A Nagyi x kg narancsot vett. Egy narancs ára $\frac{2520}{x}$.

$$\frac{2520}{x}+28=\frac{2520}{x-1} \quad\Rightarrow\quad x^2-x-90=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=10,\quad x_2=-9$$

10 kg narancsot vett a Nagyi az ünnepekre.

A C jelűek feladata:

32. Ádám és Dávid testvérek. Ádám a lakást 3 órával tovább takarítja, mint Dávid. Együtt 2 óra alatt végeznek. Mennyi időre van szükségük a lakás kitakarításához külön-külön?

Megoldás:

	Ádám	Dávid	Együtt
Egyedül (óra)	$x+3$	x	2
1 óra alatt a kitakarított része a lakásnak	$\frac{1}{x+3}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad x^2-x-6=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=3, \quad x_2=-2$$

Dávid 3, Ádám 6 óra alatt végez a takarítással, egyedül.

A D jelűek feladata:

33. Egy teremben téglalap alakba rendeztek 180 széket. Másnap minden sorba 5 székkel többet tettek, de a sorok számát csökkentették 7-tel, ekkor összesen 100 szék van a teremben. Eredetileg hány szék volt egy sorban?

Megoldás:

Jelöljük x-szel a sorokban eredetileg lévő székek számát. Ekkor $\frac{180}{x}$ sor keletkezik.

Ha $(x+5)$ szék van soronként, akkor $\frac{180}{x}-7$ sor lesz. A felírható egyenlet:

$$(x+5)\left(\frac{180}{x}-7\right)=100 \quad\Rightarrow\quad 7x^2-45x-900=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=15, \quad x_2=-\frac{60}{7}.$$

A teremben eredetileg 15 szék volt egy sorban és $\frac{180}{15}=12$ sor volt.

Házi feladat javaslat: 34. feladat

34. Anti és fia együtt a füvet 2 óra 24 perc alatt nyírja le. A fiúnak két órával több időre van szüksége, mint apjának, ha egyedül dolgozik. Mennyi idő alatt nyírja le a füvet Anti?

Megoldás:

2 óra 24 perc $=$ $2{,}4$ óra

	Anti	Fia	Együtt
Egyedül (óra)	x	$x+2$	$\frac{12}{5}$
1 óra alatt	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+2}$	$\frac{5}{12}$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{5}{12} \quad \Rightarrow \quad 5x^2-14x-24=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-\frac{6}{5}, \quad x_2=4$$

Anti 4, fia 6 óra alatt végez egyedül a fűnyírással.

35. Egy derékszögű háromszög területe 54 cm^2, átfogója 15 cm. Mekkorák a befogói?

Megoldás:

A háromszög egyik befogója a, a másik $\frac{108}{a}$.

Pitagorasz-tétellel: $a^2+\left(\frac{108}{a}\right)^2=225$, ezt rendezve a következő egyenlethez jutunk:

$$a^4-225a^2+11664=0.$$

Mivel $a^4=\left(a^2\right)^2$ ezért célszerű egy új ismeretlent bevezetni: $y=a^2$.

Ekkor az egyenlet a következő alakba írható: $y^2-225y+11664=0$.

Ezt megoldjuk, felhasználva a megoldóképletet:

$$y_{1,2}=\frac{225\pm\sqrt{225^2-4\cdot1\cdot11664}}{2}=\frac{225\pm63}{2}$$, innen két megoldást kapunk:

$y_1=144, \quad y_2=81$.

Ebből felhasználva, hogy $y=a^2$,

ha $y=144 \quad \Rightarrow \quad a^2=144 \quad \Rightarrow \quad a_1=12$ (negatív érték nem lehet),

ha $y=25 \quad \Rightarrow \quad a^2=81 \quad \Rightarrow \quad a_2=9$ (negatív érték nem lehet).

Tehát a háromszög befogói 9 és 12 cm hosszúak.

Valóban, $9^2+12^2=15^2$.

36. Egy amatőr futó minden nap ugyanannyit fut le a kitűzött 42 km-ből. Ha minden nap fél kilométerrel többet futna, akkor két nappal hamarabb teljesítené a távot. Hány nap alatt futotta le eredetileg a maratoni hosszúságot?

Megoldás:

$s = vt$

	Sebesség (km/nap)	Szükséges idő (napokban)
Eredetileg	x	$\frac{42}{x}$
Több futáskor	$x + 0{,}5$	$\frac{42}{x} - 2$

$(x+0{,}5)\left(\frac{42}{x}-2\right)=42 \quad \Rightarrow \quad -2x^2 - x + 21 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3, \quad x_2 = -3{,}5$. Ez utóbbi nem lehet megoldás. Ezért $x = 3$.

A futó eredetileg napi 3 kilométert futott 14 napon keresztül.

37. Egy tört számlálójának és nevezőjének szorzata 132. Ha a számlálóját eggyel növeljük, nevezőjét eggyel csökkentjük, akkor az eredeti tört reciprokát kapjuk. Melyik ez a tört?

Megoldás:

Legyen a számláló x, ekkor a nevező $\frac{132}{x}$.

$$\frac{x+1}{\frac{132}{x}-1} = \frac{\frac{132}{x}}{x} \quad \Rightarrow \quad x(x+1) = \frac{132}{x}\left(\frac{132}{x}-1\right) \quad \Rightarrow \quad x^4 + x^3 - 132^2 + 132x = 0$$

$$\left(x^2-132\right)\left(x^2+132\right)+x\left(x^2+132\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \left(x^2+132\right)\left(x^2-132+x\right)=0$$

Egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla:

Ha $x^2 = -132$, akkor ellentmondást kapunk.

Ha $x^2 + x - 132 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 11, \quad x_2 = -12$

Az eredeti tört $\frac{11}{12}, \frac{-12}{-11}$.

Házi feladat javaslat: 38. feladat

38. Levente kitalálta, hogy ha a 600 oldalas kötelező olvasmányból minden nap ugyanannyit olvas el, akkor pont befejezi a könyvet a megadott határidőre. Azonban a könyvtárból a könyvet csak hat nappal később tudta kikölcsönözni, így minden nap 5 oldallal többet kell olvasnia a könyvből, hogy azt időben befejezze. Hány oldalt kell így elolvasnia egy nap?

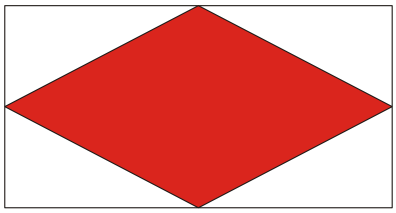
Megoldás:

Eredetileg x napig olvas és minden nap $\frac{600}{x}$ oldalt olvas el.

$$(x-6)\left(\frac{600}{x}+5\right)=600 \quad\Rightarrow\quad x^2-6x-720=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=-24, \quad x_2=30.$$

Naponta $x+5=35$ oldalt kell elolvasnia.

39. Marci téglalap alakú kertet vásárolt. A szomszédos oldalak felezőpontjai által határolt területet virágokkal ültette be. A virágos rész területe $120\ \text{m}^2$, kerülete 52 m. Mekkora Marci egész kertjének a kerülete?



Megoldás:

Jelöljük a téglalap oldalait a-val és b-vel.

A virágágyás rombusz alakú, jelöljük a rombusz oldalát x-szel.

$K=4x=52 \quad\Rightarrow\quad x=13.$

A rombusz átlói épp a téglalap oldalai. $T=\frac{ab}{2}=120 \quad\Rightarrow\quad a=\frac{240}{b}.$

Alkalmazva a Pitagorasz-tételt: $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=13^2 \quad\Rightarrow\quad a^2+b^2=676.$

Az első egyenletből $a=\frac{240}{b}$, ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe:

$$\left(\frac{240}{b}\right)^2+b^2=676 \quad\Rightarrow\quad b^4-676b^2+240^2=0.$$

Célszerű új ismeretlent bevezetni: $y=b^2$.

$$y_{1,2}=\frac{676\pm476}{2} \quad\Rightarrow\quad y_1=100 \quad y_2=576.$$

Ha $y=100 \quad\Rightarrow\quad b^2=100 \quad\Rightarrow\quad b_1=10$ (negatív érték nem lehet).

Ha $y=576 \quad\Rightarrow\quad b^2=576 \quad\Rightarrow\quad b_2=24$ (negatív érték nem lehet).

Így Marci kertjének oldalai 10 és 24 m hosszúak, tehát a kerülete 68 m.

Megjegyzés:

Az $\left.\begin{array}{r} ab = 240 \\ a^2 + b^2 = 676 \end{array}\right\}$ egyenletrendszer egyszerűbben is megoldható, ha nevezetes

azonosságot használunk:

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 676 + 2 \cdot 240 = 1156 \quad a + b = 34$, mert a és b pozitív számok.

$K = 2(a+b) = 68$.

Marci kertjének a kerülete 68 m.

Összefoglalás

Matematikai TOTÓ

	Az egyenlet	**Megoldáshalmaz**		
		1	**2**	**X**
1.	$x^4-15x^2-16=0$	$\{-4;4\}$	$\{16;-2\}$	$\{4;-4;\sqrt{2};-\sqrt{2}\}$
2.	$x^6-9x^3+8=0$	$\{1\}$	$\{1;2\}$	$\{1;-1;2;-2\}$
3.	$x^6-10x^4+9x^2=0$	$\{1;-1;3;-3;0\}$	$\{0;1;3\}$	$\{1;-1;3;-3\}$
4.	$x^4+2x^2-15=0$	$\{\sqrt{3};-\sqrt{3};\sqrt{5};-\sqrt{5}\}$	$\{3;-5\}$	$\{\sqrt{3};-\sqrt{3}\}$
5.	$\frac{2}{x-3}=\frac{x}{1-x}$	$\{3;1\}$	$\{-1;2\}$	$\{1;2\}$
6.	$3=\frac{x-5}{x+2}+\frac{2x-17}{x-5}$	$\left\{\frac{3}{2}\right\}$	$\{-2;5\}$	$\left\{\frac{2}{3}\right\}$
7.	$\frac{6x^2+5x-4}{3x^2+19x+20}=1$	$\left\{-6;\frac{4}{3}\right\}$	$\{6\}$	$\left\{6;-\frac{4}{3}\right\}$
8.	$\frac{6x+8}{x^2-4}=\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}$	$\{3\}$	$\{-2;2\}$	$\{0,3\}$
9.	$\frac{2x^2-2x-4}{x^2-9x+14}=2$	$\{2\}$	$\{\ \}$	$\{7;2\}$
10.	Két szám összege 15, négyzeteik összege 113. Melyik ez a két szám?	$\{7;8\}$	$\{9;6\}$	$\{11;4\}$
11.	Egy 1625 m^2 területű téglalap alakú telket 180 m hosszú kerítéssel vettek körül. Mekkorák a telek méretei?	$\{35;55\}$	$\{25;65\}$	$\{45;45\}$
12.	Derékszögű háromszög területe 480 cm^2, átfogója 52 cm, mekkorák a befogói?	$\{10;24\}$	$\{20;48\}$	$\{30;8\}$
13.	Egy osztály mozijegyei összesen 17 550 Ft-ba kerül. Két gyerek megbetegedett, így ők nem fizettek, de a többieknek még 52 Ft-ot kell fizetni. Hányan járnak az osztályba?	$\{25\}$	$\{29\}$	$\{27\}$

Megoldás:

1. – **1**, 2. – **2**, 3. – **1**, 4. – **X**, 5. – **2**, 6. – **1**, 7. – **2**, 8. – **X**,

9. – **2**, 10. – **1**, 11. – **2**, 12 .– **2**, 13. –**X**.