MATEMATIKA „A”
10. évfolyam

# 2. modul

# A négyzetgyök fogalma, azonosságai

Készítette: Gidófalvi Zsuzsa

# MODULVÁZLAT

| | |
|---|---|
| **A modul célja** | A négyzetgyök fogalmának megismerése. A négyzetgyökvonás azonosságainak készségszinten történő alkalmazása feladatok megoldása során. |
| **Időkeret** | 4 óra |
| **Ajánlott korosztály** | 10. évfolyam |
| **Modulkapcsolódási pontok** | Számhalmazok, négyzetre emelés, hatványozás, nevezetes azonosságok, polinomok szorzattá alakítása. A másodfokú és a négyzetgyök függvény. |
| **A képességfejlesztés fókuszai** | Számolás, becslés fejlesztése.<br>A matematikai rendszerezés megerősítése a valós számok halmazának megismerésén keresztül.<br>Induktív és deduktív következtetések a számfeladatokon felfedezett azonosságok észrevételekor és azok alkalmazása konkrét feladatokban. |

## Támogató rendszer

Dominókészlet, kártyakészletek, számológép, mintafeladatok.

## Értékelés:

Írásbeli számonkérés: témazáró dolgozat

## A tananyag javasolt órabeosztása:

1 óra: A négyzetgyök fogalmának megismerése, alkalmazása, a négyzetgyökvonás művelete.

2.óra: A négyzetgyökvonás azonosságai.

3.óra: Műveletek négyzetgyökökkel ( négyzetgyökök összevonása, kivitel a gyökjel elé, bevitel a gyökjel alá).

4. óra: A nevező gyöktelenítése.

## Érettségi követelmény:

**Középszint:**

Ismerje az irracionális szám fogalmát. Definiálja és használja a $\sqrt{a}$ fogalmát. Adott $n$ ($n \in \mathbf{N}$) esetén tudja eldönteni, hogy $\sqrt{n}$ irracionális szám-e. Ismerje és alkalmazza a négyzetgyökvonás azonosságait.

**Emelt szint:**

Bizonyítsa a négyzetgyökvonás azonosságait. Bizonyítsa, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám.

# MODULLEÍRÁS

| | Lépések, tevékenységek | Kiemelt készségek, képességek | Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény |
|---|---|---|---|
| **I. Négyzetgyök fogalma (1 óra)** | | | |
| 1. | Racionális, irracionális számok.<br>Valós számok halmaza. | A matematikai rendszerezés megerősítése a valós számok halmazának megismerésén keresztül. | 1. mintapélda,<br>1. feladat. |
| 2. | A négyzetgyökvonás és a négyzetgyök fogalmának bevezetése konkrét feladaton keresztül. | Induktív és deduktív következtetések. Számolás, becslés | 2. mintapélda. |
| 3. | Milyen számhalmazon értelmezhető a négyzetgyökvonás művelete? Négyzetgyökös kifejezések értelmezési tartományának vizsgálata. | | 3. mintapélda,<br>2–3. feladatok. |
| | Érdekességek: gyökjel kialakulása, szakaszok összemérhetősége, irracionális számok helye a számegyenesen. | | 4. feladat |
| | Számok négyzetgyökének meghatározása számológép segítségével. | Számolás, becslés. Számológép használata. | 5. feladat. |
| 4. | Feladatok megoldása. | Számolás, becslés, mennyiségi következtetés. | Dominókészlet |

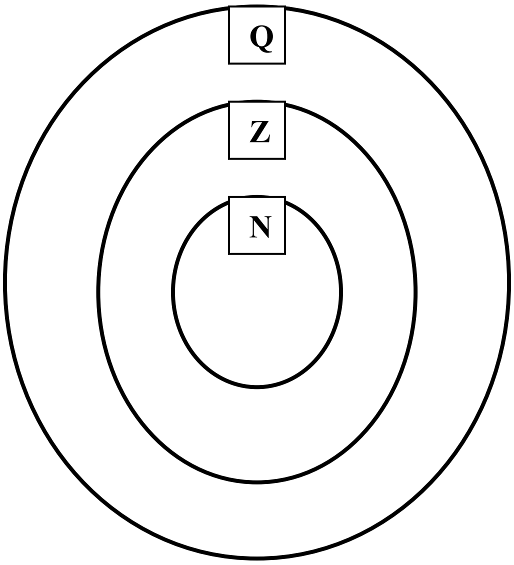
| | | | |
|---|---|---|---|
| **II. Négyzetgyökvonás azonosságai ( 1óra )** | | | |
| 1. | Szorzat négyzetgyöke. | Induktív és deduktív következtetések. Számolás, becslés. | 4. mintapélda. |
| 2. | Hányados négyzetgyöke. | | 5. mintapélda. |
| 3. | Hatvány négyzetgyöke. | | 6–9. mintapéldák, 5. feladat. |

| **III. Műveletek négyzetgyökökkel ( 2 óra )** | | | |
|---|---|---|---|
| 1. | Négyzetgyökök szorzása, osztása, hatványozása | Induktív és deduktív következtetések. Számolás, becslés. | 1. kártyakészlet |
| 2. | Négyzetgyökök összevonása:<br>- kivitel a négyzetgyökjel elé,<br>- bevitel a négyzetgyökjel alá. | | 10–11. mintapélda,<br>6–8. feladatok. |
| 3. | Nevező gyöktelenítse. | | 12–15. mintapélda. |
| 4. | Feladatok megoldása. | Számolás, becslés. | 2. kártyakészlet,<br>15–17. feladatok. |

# I. A négyzetgyök fogalma

## Mintapélda₁

Helyezzük el az alábbi műveletek eredményeit a számhalmazok közötti kapcsolatot kifejező halmazábrán!

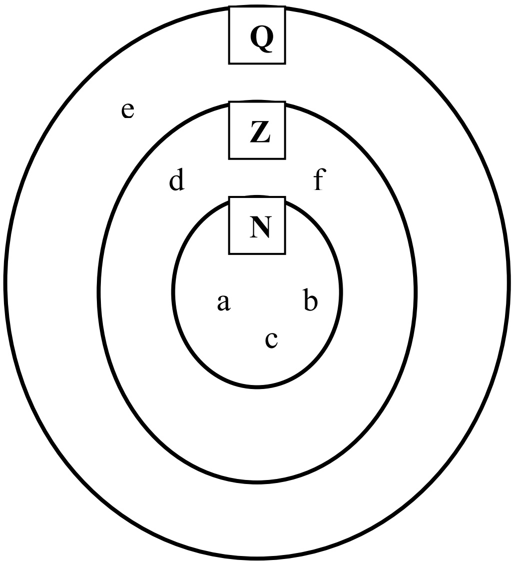



$a = 23 + 72 \cdot 5$; $b = (23 + 72) \cdot 5$;

$c = 8 - 5$; $d = 5 - 8$;

$e = \frac{14}{35}$; $f = -\frac{180}{90}$.

*Megoldás:*




Azt mondjuk, hogy a természetes számok halmaza az összeadás és a szorzás műveletére nézve zárt. A kivonás kivezethet a természetes számok halmazából: pl. a $d$ már negatív egész szám.

Az egész számok halmaza az összeadás, kivonás és szorzás műveletére nézve zárt.

Az osztás kivezethet az egész számok halmazából, pl. $e$ és $f$ már nem egész számok.

> Azokat a számokat, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként, racionális számoknak nevezzük.

## Feladatok

**1.** Írd fel az alábbi racionális számok tizedes tört alakját:

a) $\frac{5}{4}$; b) $\frac{10}{3}$; c) $\frac{7}{8}$; d) $\frac{6}{7}$; e) $\frac{7}{6}$; f) $\frac{180}{12}$.

*Megoldás:*

a) $\frac{5}{4} = 1{,}25$ b) $\frac{10}{3} = 3{,}\dot{3}$ c) $\frac{7}{8} = 0{,}875$

d) $\frac{6}{7} = 0{,}\dot{8}5714\dot{2}$ e) $\frac{7}{6} = 1{,}1\dot{6}$ f) $\frac{180}{12} = 15$

A feladat megoldása során azt tapasztaltuk, hogy az eredményként kapott számok tizedes tört alakja vagy véges, vagy végtelen szakaszos tizedes tört. Ez általánosan is elmondható:

A racionális számok tizedes tört alakja vagy véges, vagy végtelen szakaszos tizedes tört.

Ennek indokolása a modul végén, a kislexikonban található.

Léteznek olyan tizedes törtek is, amelyek végtelenek, de nem szakaszosak. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan számok, amelyek nem racionális számok.

Azokat a számokat, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, irracionális számoknak nevezzük.

Az irracionális számok tizedes tört alakja végtelen, nem szakaszos tizedes tört.

Irracionális számot magunk is készíthetünk például a következőképpen:

- egymás után írjuk a tizedes vessző után a pozitív egész számokat:
  0, 1234567891011121314…
- a hármasok számát mindig eggyel növeljük:
  5, 2323323332333323333…

Irracionális számot másképp is előállíthatunk. Nézzük a következő feladatot!

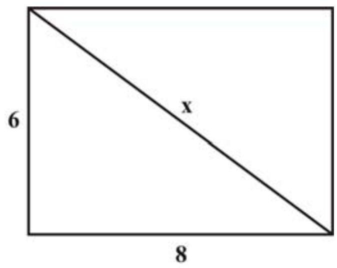
## Mintapélda$_2$

Adott egy téglalap, amelynek oldalai 6 és 8 egység hosszúak. A téglalapot egy vágással oszszuk két egyenlő területű részre! Határozzuk meg a vágás hosszát!

*Megoldás:*


a) Ha *valamelyik oldalfelező mentén* vágjuk ketté a téglalapot, akkor a vágás hossza valamelyik oldal hosszával egyezik meg.

b) *Ha az átló mentén* vágjuk ketté a téglalapot, akkor a vágás a téglalap átlója, hossza a Pitagorasz-tétellel kiszámolható.

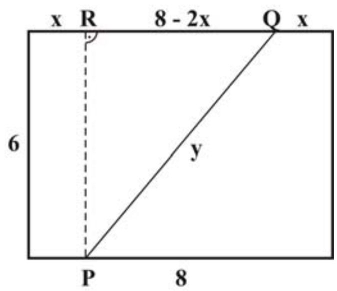



$x^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

Az átló hossza egy olyan nemnegatív szám, amelynek a négyzete 100.

Ezt a számot a 100 négyzetgyökének nevezzük és a következőképpen jelöljük:

$$x = \sqrt{100} = 10.$$




c) Ha *a vágás metszi a hosszabbik oldalt*, trapézt kapunk. A vágás hosszát ekkor is a Pitagorasz-tétel segítségével tudjuk meghatározni.

A $PQR$ derékszögű háromszögben $RQ = 8 - 2x$,

$$y^2 = 6^2 + (8-2x)^2 = 36 + 64 - 32x + 4x^2,$$

$$y^2 = 4x^2 - 32x + 100,$$

$$y = \sqrt{4x^2 - 32x + 100}.$$

$x$ helyére olyan számok írhatók, nullánál nem kisebbek és négynél nem nagyobbak: $0 \le x \le 4$. Határozzuk meg az $y$ értékét $x$ néhány lehetséges értéke mellett!

$x = 0$ esetén: a vágás pontosan a téglalap átlója lesz, $y = 10$.

$x = 1$ esetén: $y^2 = 4 \cdot 1^2 - 32 \cdot 1 + 100 = 72$

$y = \sqrt{72}$.

$x = 2$ esetén: $y^2 = 4 \cdot 2^2 - 32 \cdot 2 + 100 = 52$

$y = \sqrt{52}$.

$x = 2{,}4$ esetén: $y^2 = 4 \cdot 2{,}4^2 - 32 \cdot 2{,}4 + 100 = 46{,}24$

$y = \sqrt{46{,}24}$.

$x = 3$ esetén $y^2 = 4 \cdot 3^2 - 32 \cdot 3 + 100 = 40$

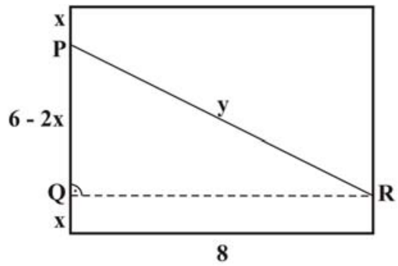
$y = \sqrt{40}$.

$x = 4$ esetén $y^2 = 4 \cdot 4^2 - 32 \cdot 4 + 100 = 36$

$y = \sqrt{36} = 6$.

Ebben az esetben a téglalap egyik középvonalát kapjuk.

d) Ha *a vágás metszi a rövidebb oldalt*, szintén két egyenlő területű trapézt kapunk. A vágás hosszát ekkor is a Pitagorasz-tétel segítségével tudjuk meghatározni.




$$y^2 = 8^2 + (6 - 2x)^2 = 64 + 36 - 24x + 4x^2$$

$$y^2 = 4x^2 - 24x + 100$$

$$y = \sqrt{4x^2 - 24x + 100}.$$

$x$ helyére olyan számok írhatók, amelyek nullánál nem kisebbek, és háromnál nem nagyobbak: $0 \le x \le 3$. Határozzuk meg az $y$ értékét $x$ néhány lehetséges értéke mellett!

$x = 0$ esetén: a vágás pontosan a téglalap átlója lesz, $x = 10$.

$x = 1$ esetén: $y^2 = 4 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 + 100 = 80$,

$y = \sqrt{80}$.

$x = 1{,}32$ esetén: $y^2 = 4 \cdot 1{,}32^2 - 24 \cdot 1{,}32 + 100 = 75{,}29$,

$y = \sqrt{75{,}29}$.

$x = 2$ esetén: $y^2 = 4 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 + 100 = 68$,

$y = \sqrt{68}$.

$x = 3$ esetén $y^2 = 4 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 + 100 = 64$,

$y = \sqrt{64} = 8$.

A vágással most a téglalap másik középvonalát kapjuk.

Ebben a feladatban a vágás hosszának meghatározása során egy szám négyzetgyökét kaptuk.

Azt a nemnegatív számot, amelynek

a négyzete 2, négyzetgyök kettőnek,

a négyzete három, négyzetgyök háromnak,

a négyzete 64, négyzetgyök 64-nek, … stb. nevezzük. Ezeket a következőképpen jelöljük: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{64}$; … stb.

A négyzetgyökök között racionális és irracionális számok is lehetnek. Igazolható például, hogy $\sqrt{2}$ irracionális szám (a bizonyítás a modul végén, a kislexikon után található). További irracionális számok a $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\pi$ stb.

## Milyen számhalmazon értelmezhető a négyzetgyök?

### Mintapélda₃

Határozzuk meg a következő számok négyzetgyökét (ha van):

$$25;\ -16;\ 0;\ \frac{4}{9};\ 1{,}44;\ 5.$$

*Megoldás:*

- 25 esetén két olyan valós szám van, amelynek a négyzete 25. Ezek a –5 és a +5, hiszen $(-5)^2 = 25$ és $5^2 = 25$.

  Megállapodás szerint közülük a nem negatívot nevezzük négyzetgyök 25-nek: $\sqrt{25} = 5$.
- –16 esetén nincs olyan valós szám, amelynek a négyzete –16, mivel minden valós szám négyzete nemnegatív szám lesz. Így a $\sqrt{-16}$ nem értelmezhető a valós számok halmazán.
- 0 esetén egy olyan valós szám van, amelynek a négyzete 0. $\sqrt{0} = 0$, mert $0^2 = 0$.

- $\frac{4}{9}$ esetén két olyan valós szám van, amelynek a négyzete $\frac{4}{9}$. Közülük a nemnegatív a négyzetgyök: $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, mert $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.
- 1,44 esetén két olyan valós szám van, amelynek a négyzete 1,44. Közülük a nemnegatív a négyzetgyök: $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, mert $(1{,}2)^2 = 1{,}44$.
- 5 esetén két olyan valós szám van, amelynek a négyzete 5. Közülük a nemnegatív a négyzetgyök: $\sqrt{5}$, mert $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$.

Legyen $a \geq 0$. $\sqrt{a}$ jelenti azt a nemnegatív valós számot, amelynek a négyzete $a$.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

## Feladat

**2.** Határozd meg a következő számok négyzetgyökét: 100; 25; 49; 0,01; 0,25; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{4}$.

*Megoldás:*

$\sqrt{100} = 10$ $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{49} = 7$ $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$ $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

**Vizsgáljuk meg, mivel egyenlő a $\sqrt{a^2}$ kifejezés!**

A definícióban az áll, hogy $\sqrt{a}$ négyzete $a$, azaz $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Vajon igaz-e, hogy $\sqrt{a^2} = a$?

Például $\sqrt{4}$ értéke 2, vagyis $a = 2$ esetén $\sqrt{a^2} = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$, a $\sqrt{a^2} = a$ egyenlőség teljesül.

Mi a helyzet $a = -2$ esetén? Ekkor $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$, vagyis nem teljesül a $\sqrt{a^2} = a$ egyenlőség.

A négyzetgyök definíciója alapján a négyzetgyökjel alatt csak nemnegatív szám szerepelhet. Most az $a^2 \geq 0$ feltételnek kell teljesülni, ami minden valós számra igaz is.

Azonban a gyökvonás eredménye a definíció értelmében nem lehet negatív szám. Ez azt jelenti, hogy a $\sqrt{a^2}=a$ egyenlőség nem teljesülhet, ha $a$ negatív szám. Vizsgáljuk meg a következő eseteket, hogy a megoldást megtaláljuk!

$\sqrt{(-2)^2}=2$; $\sqrt{(-5)^2}=5$; $\sqrt{(-8)^2}=8$;

$\sqrt{2^2}=2$; $\sqrt{5^2}=5$; $\sqrt{8^2}=8$.

A példákból látható, hogy $\sqrt{a^2}=a$ teljesül, ha $a\geq 0$ és $\sqrt{a^2}=-a$, ha $a\leq 0$. Vagyis:

Minden $a\in\mathbf{R}$ esetén teljesül a $\sqrt{a^2}=|a|$ összefüggés.

## Feladat

**3.** Határozd meg a következő négyzetgyökös kifejezések értékét:

$$\sqrt{x^2};\quad \sqrt{y^4};\quad \sqrt{x^6};\quad \sqrt{y^8}.$$

*Megoldás:*

$\sqrt{x^2}=|x|$; $\sqrt{y^4}=y^2$; $\sqrt{x^6}=|x^3|$; $\sqrt{y^8}=y^4$.

**Megjegyzés:** Az ókorban alakult ki a racionális és irracionális szám fogalma. A középkori Európában a számok gyökének jelölésére a latin radix (gyökér) szó első betűjét használták. A mai gyökjel alkalmazása körülbelül 400 éve vált általánossá.

## Szakaszok összemérhetősége (olvasmány)

Két szakaszt összemérhetőnek nevezünk, ha megadható olyan egység, amelynek mind a két szakasz többszöröse.

Például az $\frac{5}{4}$ és a $\frac{7}{3}$ hosszúságú szakaszok összemérhetők, hisz mind a kettő az $\frac{1}{12}$ hosszúságú szakasznak a többszöröse: az első 15-szöröse, a második pedig 28-szorosa.

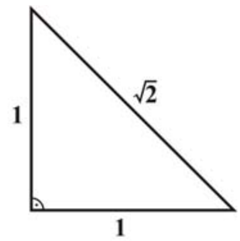
Két olyan szakasz, amelyeknek a hossza racionális számmal adható meg, mindig összemérhető. Az egység az a tört lesz, amelynek számlálója 1 és a nevezője a két tört nevezőjének legkisebb közös többszöröse.

A négyzet oldala és átlója már nem összemérhető, hisz ha a négyzet oldalának hossza racionális, az átlóé irracionális. Ezt a megállapítást már a görög matematikusok bebizonyították. Mi a könyvünkben nem térünk ki a bizonyítására.

## Irracionális számok helyének meghatározása a számegyenesen (olvasmány)

A számegyenesen minden eddig megismert szám ábrázolható. Vajon hol helyezkednek el az irracionális számok a számegyenesen? A feladatokban kiszámoltuk, hogy léteznek irracionális hosszúságú szakaszok is. Vajon hogyan lehet megszerkeszteni a $\sqrt{2}$ hosszúságú szakaszt? Ezekre a kérdésekre keressük a választ.

A geometriában találkoztunk már $\sqrt{2}$-vel: az egységnyi oldalú négyzet átlójának hossza éppen $\sqrt{2}$ egység. Ha ezt megrajzoljuk, akkor az átlót körzőnyílásba véve a $\sqrt{2}$ hosszúságú szakasz rámérhető a számegyenesre, amelyen az e szerkesztésben alkalmazott egység szerepel.




## Feladat

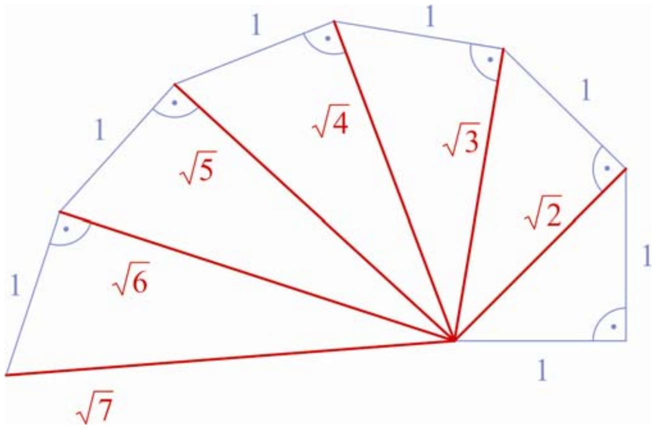
**4.** Hogyan lehet megszerkeszteni a $\sqrt{3}$ és a $\sqrt{5}$ hosszúságú szakaszt?

*Megoldás:*

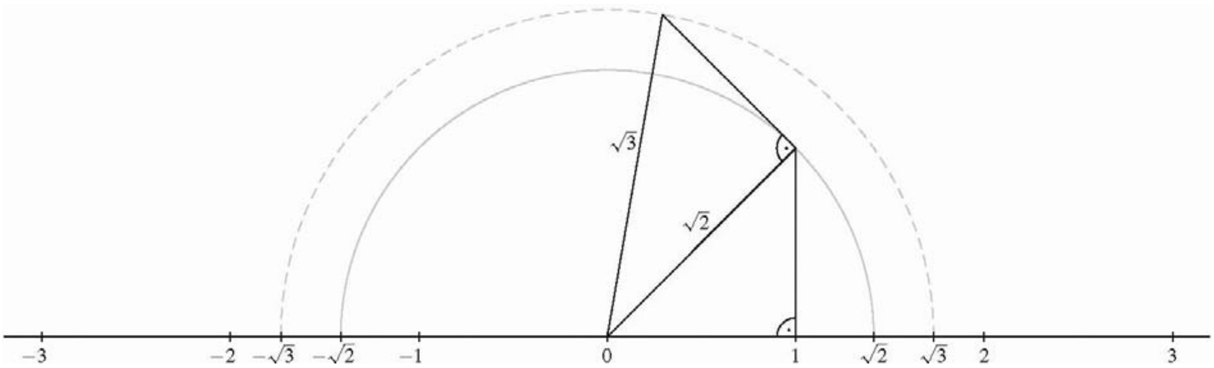
Vegyünk fel olyan derékszögű háromszöget, amelynek az egyik befogója 1, a másik befogója pedig $\sqrt{2}$. Ennek az átfogója $\sqrt{3}$ lesz.

Vegyünk fel olyan derékszögű háromszöget, amelynek az egyik befogója 1, a másik pedig 2. Ennek az átfogója $\sqrt{5}$ lesz.

$\sqrt{n}$ hosszúságú szakasz ($n \in \mathbf{N}$) mindig megszerkeszthető, például az ábrán látható csigavonallal:




Ezek a szakaszok körzőnyílásba véve rámérhetőek a számegyenesre.




Nem minden irracionális számot lehet megszerkeszteni. Pl. a $\pi$ nem szerkeszthető meg.

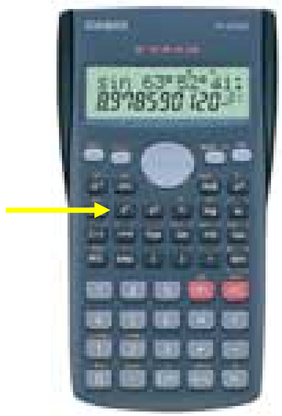
## Számok négyzetgyökének meghatározása zsebszámológéppel.

a) Egyszerű számológéppel:

Beírjuk azt a számot, amelynek a négyzetgyökét szeretnénk meghatározni, majd lenyomjuk a $\sqrt{\phantom{x}}$ jelű billentyűt.

Például: $\sqrt{17{,}25} \approx 4{,}15$, vagy $\sqrt{456{,}078} \approx 21{,}36$

A zsebszámológép típusától függ, hogy a végeredményt hány tizedesjegy pontossággal írja ki. Mi most két tizedesjegyre kerekítettük.



b) Van olyan számológép, amelynél először a négyzetgyök-jelet nyomjuk le, és utána kell megadni azt a számot, amelynek a négyzetgyökét akarjuk meghatározni.

c) Van olyan számológép is, amelynél a sorrend: szám, 2nd, $x^2$ lépésekkel történik egy szám négyzetgyökének meghatározása.

**Megjegyzés:** A számológépek sokfélék. Mindenki ismerje meg a saját gépét, hogy azon miként határozható meg egy szám négyzetgyöke.

## Feladat

**5.** Zsebszámológép segítségével határozd meg két tizedesjegyre kerekítve a következő számokat:

$\sqrt{43{,}7}$; $\sqrt{503{,}12}$; $\sqrt{0{,}0073}$; $\sqrt{\dfrac{623}{412}}$;

$\dfrac{\sqrt{623}}{412}$; $\sqrt{73 \cdot 28}$; $\sqrt{73} \cdot \sqrt{28}$; $\sqrt{142 + 47}$;

$\sqrt{142} + \sqrt{47}$; $\sqrt{\dfrac{65}{8}}$; $\dfrac{\sqrt{65}}{\sqrt{8}}$.

*Megoldás:*

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{43{,}7} \approx 6{,}61$ | $\sqrt{503{,}12} \approx 22{,}43$ | $\sqrt{0{,}0073} \approx 0{,}09$ |
| $\sqrt{\dfrac{623}{412}} \approx 1{,}23$ | $\dfrac{\sqrt{623}}{412} \approx 0{,}06$ | $\sqrt{73 \cdot 28} \approx 45{,}21$ |
| $\sqrt{73} \cdot \sqrt{28} \approx 45{,}21$ | $\sqrt{142+47} \approx 13{,}75$ | $\sqrt{142} + \sqrt{47} \approx 18{,}77$ |
| $\sqrt{\dfrac{65}{8}} \approx 2{,}85$ | $\dfrac{\sqrt{65}}{\sqrt{8}} \approx 2{,}85$ | |

*Módszertani megjegyzés:* Csoportmunka következik. Alakítsunk ki az osztályban négyfős csoportokat! Minden csoportnak adjunk egy-egy dominókészletet! A dominó szabályainak megfelelően a csoport tagjai rakják egymás mellé az egyenlőket.

***2. modul dominókészlete***

A kártyákon az alábbi kifejezések szerepelnek:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ | $\sqrt{16}$ | $2^2$ | $\sqrt{a^2}$ | $\lvert a \rvert$ | $\sqrt{25}$ | 5 | $\sqrt{(-8)^2}$ |
| $a^2$ | $\sqrt{400}$ | 20 | $\sqrt{a^6}$ | $\lvert a^3 \rvert$ | | 5 | $\sqrt{\dfrac{25}{9}}$ |
| $\lvert a \rvert$ | $\left(\sqrt{3}\right)^6$ | $3^3$ | $\sqrt{49}$ | 7 | $\sqrt{\dfrac{16}{9}}$ | $\dfrac{4}{3}$ | $\sqrt{a^{12}}$ |
| $\dfrac{8}{3}$ | $\sqrt{\left(\dfrac{2}{5}\right)^4}$ | $\dfrac{4}{25}$ | $\sqrt{10000}$ | 100 | $\sqrt{\dfrac{1}{64}}$ | $\dfrac{1}{8}$ | $\dfrac{11}{12}$ |
| 8 | $\sqrt{a^4}$ | $\dfrac{5}{3}$ | $\sqrt{(-a)^2}$ | $a^6$ | $\sqrt{\dfrac{64}{9}}$ | $\sqrt{\dfrac{121}{144}}$ | $\dfrac{2}{3}$ |

Felhívjuk a tanárok figyelemét, hogy az iskolákba kiküldött kinyomtatott dominókészletben az itt sárgával jelölt szám javítandó!

# II. Négyzetgyökökre vonatkozó azonosságok

## Mintapélda$_4$

a) Határozzuk meg 900 négyzetgyökét!

*Megoldás:*

$\sqrt{900} = 30$, mert $30^2 = 900$.

Észrevehetjük, hogy $\sqrt{900} = \sqrt{9 \cdot 100}$, és $30 = 3 \cdot 10$. A szorzat négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének szorzatával.

b) Számítsuk ki a $\sqrt{15} \cdot \sqrt{60}$ szorzat pontos értékét!

*Megoldás:*

Előző észrevételünket visszafelé alkalmazva a tényezők szorzatából vonjunk négyzetgyököt.

$$\sqrt{15} \cdot \sqrt{60} = \sqrt{15 \cdot 60} = \sqrt{900} = 30.$$

**Négyzetgyökök szorzata egyenlő a négyzetgyökjel alatti mennyiségek szorzatának négyzetgyökével.** Ennek alapján általánosan felírhatjuk a következő azonosságot:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \text{ ahol } a \geq 0 \text{ és } b \geq 0. \qquad \text{(I.)}$$

Ezt az azonosságot úgy is fogalmazhatjuk, hogy szorzatból tényezőnként lehet négyzetgyököt vonni, ha mindegyik tényezőnek létezik a négyzetgyöke.

## Mintapélda$_5$

Határozzuk meg $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ tört pontos értékét!

*Megoldás:*

Az I. azonosság alapján $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 36}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot}{\sqrt{2}}\sqrt{36} = \sqrt{36} = 6.$

Ha átírjuk az eredeti törtet $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{72}{2}}$ alakba, akkor a $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{72}{2}} = \sqrt{36} = 6$ hányadost kapjuk. Ennek alapján általánosan felírhatjuk a következő azonosságot:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ ahol } a \geq 0 \text{ és } b > 0. \qquad \text{(II.)}$$

**Hányados négyzetgyöke egyenlő a számláló és a nevező négyzetgyökének hányadosával. Két négyzetgyök hányadosa egyenlő a gyökjel alatti mennyiségek hányadosának négyzetgyökével.**

## Mintapélda$_6$

a) Határozzuk meg 4 négyzetgyökének harmadik hatványát!

*Megoldás:*

$$\left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8.$$

b) Határozzuk meg a $4^3$-nak a négyzetgyökét!

*Megoldás:*

$$\sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8.$$

A két egyenlet jobb oldala egyenlő, így az egyenlőség tranzitív tulajdonsága miatt felírhatjuk az alábbi egyenletet:

$$\left(\sqrt{4}\right)^3 = \sqrt{4^3}.$$

**Négyzetgyök hatványa egyenlő a gyökjel alatti mennyiség hatványának négyzetgyökével. Hatvány négyzetgyöke egyenlő a hatványalap négyzetgyökének hatványával.**

$$\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n} \text{ ahol } a \geq 0, \ n \text{ egész szám.} \qquad \text{(III.)}$$

A megfogalmazott azonosságoknál mindig figyelni kell arra, hogy az összes szereplő kifejezés értelmezhető legyen. Alkalmazásuknál a felírt egyenlőségeket mindkét irányba olvasva felhasználhatjuk. Az azonosságok bizonyítása a modul végén, a kislexikon után található.

*Módszertani megjegyzés:*

Alakítsunk ki négyfős csoportokat az osztályban. Minden csoport kap egy-egy csomag kártyát, melyben 28 db kártya van. Két-két kártya végeredménye megegyezik. (***2.1 kártyakészlet***)

**Keresd a párját!** A játékszabály a következő:

Minden csoport összekeveri a kártyákat és lefordítva elhelyezi az asztalon. Mindenki húz két-két lapot. Ha a lapjai között van azonos értékű pár, akkor azt felfelé fordítva maga elé teszi, és húz helyettük újabb két lapot. Amennyiben valakinek nincs párja, az középről húz egy lapot, ha párt talál, azt fordítva maga elé teszi, ha nem, akkor a kezében lévő négy lap valamelyikét az asztalon lévő kártyacsomagba helyezi. Ez addig folytatódik, amíg minden lapnak nincs meg a párja és az a tanuló győz csoporton belül, akinek a legtöbb párt sikerül összegyűjteni.

***2.1 kártyakészlet***

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ | $\sqrt{9}$ | $\sqrt{50}\cdot\sqrt{20}$ | $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{32}-\sqrt{8}\right)$ | $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}$ | $\frac{2\cdot\sqrt{49}}{\sqrt{100}}$ |
| $\sqrt{\frac{50}{2}}$ | $\sqrt{5^4}$ | $\sqrt{5^3}\cdot\sqrt{5}$ | $\left(\sqrt{6}+\sqrt{24}\right)/\sqrt{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $6\cdot 8$ |
| $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ | $\sqrt{900}$ | $\sqrt{9}\cdot\sqrt{100}$ | $\sqrt{36}\cdot\sqrt{64}$ | $\frac{7}{5}$ | $\sqrt{6}+\sqrt{24}$ |
| $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$ | $\sqrt{1000}$ | $\sqrt{64}-\sqrt{16}$ | $\sqrt{3}+\sqrt{12}$ | $3$ | $\sqrt{6+24}$ |
| | $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{72}}{2}$ | $3+6$ | $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ | $\sqrt{5-3}$ | |

Felhívjuk a tanárok figyelmét, hogy az iskolákba kiküldött kinyomtatott kártyakészletben az itt sárgával jelölt szám javítandó!

## Feladat

**6.** A négyzetgyökök szorzatára és osztására vonatkozó azonosságok alapján határozzuk meg a következő négyzetgyököket!

a) $\sqrt{81 \cdot 4}$; $\sqrt{9 \cdot 25}$; $\sqrt{16 \cdot 100}$; $\sqrt{25 \cdot 36 \cdot 49}$;

b) $\sqrt{72 \cdot 32}$; $\sqrt{250 \cdot 10}$; $\sqrt{810 \cdot 40}$; $\sqrt{48 \cdot 75}$;

c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$; $\sqrt{10} \cdot \sqrt{90}$; $\sqrt{10} \cdot \sqrt{160}$; $\sqrt{10} \cdot \sqrt{250}$;

d) $\sqrt{162} \cdot \sqrt{2}$; $\sqrt{28} \cdot \sqrt{7}$; $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52}$; $\sqrt{27} \cdot \sqrt{12}$;

e) $\sqrt{\frac{9}{64}}$; $\sqrt{\frac{4}{25}}$; $\sqrt{\frac{49}{4}}$; $\sqrt{\frac{9}{4}}$; $\sqrt{\frac{121}{169}}$;

f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}}$; $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}}$.

*Megoldás*:

a) $\sqrt{81 \cdot 4} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{4} = 9 \cdot 2 = 18$;

$\sqrt{9 \cdot 25} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = 3 \cdot 5 = 15$;

$\sqrt{16 \cdot 100} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{100} = 4 \cdot 10 = 40$;

$\sqrt{25 \cdot 36 \cdot 49} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{49} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$;

b) $\sqrt{72 \cdot 32} = \sqrt{36 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 16} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{16} = 6 \cdot 2 \cdot 4 = 48$, vagy

$\sqrt{72 \cdot 32} = \sqrt{9 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{64} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 8 \cdot 2 = 48$;

$\sqrt{250 \cdot 10} = \sqrt{25 \cdot 100} = 5 \cdot 10 = 50$;

$\sqrt{810 \cdot 40} = \sqrt{81 \cdot 400} = 9 \cdot 20 = 180$;

$\sqrt{48 \cdot 75} = \sqrt{16 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 25} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$;

c) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40} = \sqrt{400} = 20$;

$\sqrt{10} \cdot \sqrt{90} = \sqrt{900} = 30$;

$\sqrt{10} \cdot \sqrt{160} = \sqrt{1600} = 40$;

e) $\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{64}} = \frac{3}{8}$;

$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$;

$\sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}} = \frac{7}{2}$;

$\sqrt{10}\cdot\sqrt{250}=\sqrt{2500}=50$;

$\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$;

$\sqrt{\frac{121}{169}}=\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{169}}=\frac{11}{13}$;

d) $\sqrt{162}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{324}=18$;

$\sqrt{28}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{196}=14$;

$\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}=\sqrt{676}=26$;

$\sqrt{27}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{324}=18$;

f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\sqrt{\frac{2}{18}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$;

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}}=\sqrt{\frac{2}{50}}=\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}$;

$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{27}{3}}=\sqrt{9}=3$;

$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{48}{3}}=\sqrt{16}=4$;

$\sqrt{\frac{3}{75}}=\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}$.

## Mintapélda$_7$

Melyik szám nagyobb: $\sqrt{2^5}$ vagy $\sqrt{5^2}$ ?

*Megoldás:*

$\sqrt{2^5}=\sqrt{32}\approx 5{,}66$ és $\sqrt{5^2}=\sqrt{25}=5$. Tehát $\sqrt{2^5}>\sqrt{5^2}$ .

**Általánosságban elmondható, hogy nagyobb számnak nagyobb a négyzetgyöke.** Erre egy másik modulban, a függvények tanulásakor még visszatérünk.

## Mintapélda₈

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\left(\sqrt{15}-\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{15}+\sqrt{7}\right)$;

b) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$;

c) $\left(2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$.

*Megoldások:*

a) Használjuk fel az $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ azonosságot!

$$\left(\sqrt{15}-\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{15}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{15}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=17-7=8.$$

b) Használjuk fel az $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ azonosságot!

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2=2-2\cdot\sqrt{6}+3=5-2\cdot\sqrt{6}.$$

c) Használjuk fel a négyzetgyökvonás azonosságait!

$$\left(2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)=2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}\right)^2=2\cdot3-2\cdot\sqrt{15}+\sqrt{15}-5=1-\sqrt{15}$$

## Mintapélda₉

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét:

a) $\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}$;

b) $\left(\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}}\right)^2$.

*Megoldások:*

a) Alkalmazzuk a I. azonosságot:

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{\left(4+\sqrt{7}\right)\cdot\left(4-\sqrt{7}\right)}=\sqrt{16-7}=\sqrt{9}=3.$$

b) Alkalmazzuk a négyzetre emelés és a négyzetgyök I. azonosságát!

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{2}}+\sqrt{3-\sqrt{2}}\right)^2=3+\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)}+3-\sqrt{2}=6+2\sqrt{9-2}=6+2\sqrt{7}.$$

# III. Műveletek négyzetgyökökkel

## Mintapélda$_{10}$

Számítsuk ki a következő kifejezés értékét: $\sqrt{45}-\sqrt{20}=$

*Megoldás:*

A tanult azonosságokat alkalmazva kapjuk, hogy $\sqrt{45}-\sqrt{20}=\sqrt{9\cdot 5}-\sqrt{4\cdot 5}$.

$\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}$, valamint $\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$. Így a kifejezés értéke $3\sqrt{5}-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

.

**A négyzetgyökjel alatti számot úgy alakítottuk szorzattá, hogy a szorzat egyik tényezője négyzetszám legyen, és ezt kiemeltük a négyzetgyökjel alól.**

## Feladatok

A megoldásokat csoportmunkában végzik a tanulók. A csoportok megbízottjai kihúzzák, hogy a feladat mely részét fogja a csoport megoldani, és ezt ismertetik a csoport tagjaival.
A tanár figyeli a tanulók munkáját, és amikor minden csoport elkészült, közösen megbeszélik a megoldásokat.

**7.** Határozd meg a következő kifejezések pontos értékét:

a) $\sqrt{32}+\sqrt{72}-\sqrt{200}$;

b) $\sqrt{12}+\sqrt{48}+\sqrt{27}$;

c) $\sqrt{98}-\sqrt{45}+2\cdot\sqrt{20}$;

d) $2\cdot\sqrt{128}-\sqrt{50}+3\cdot\sqrt{45}$.

*Megoldás*:

a) $\sqrt{32}+\sqrt{72}-\sqrt{200}=\sqrt{2\cdot 16}+\sqrt{2\cdot 36}-\sqrt{2\cdot 100}=4\cdot\sqrt{2}+6\cdot\sqrt{2}-10\cdot\sqrt{2}=0$.

A megoldás során felhasználtuk, hogy azok a négyzetgyökök, amelyeknél a gyökjel alatt azonos szám szerepel összevonhatóak.

b) $\sqrt{12}+\sqrt{48}+\sqrt{27}=\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{16\cdot 3}+\sqrt{9\cdot 3}=2\cdot\sqrt{3}+4\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{3}=9\cdot\sqrt{3}$

c) $\sqrt{98}-\sqrt{45}+2\cdot\sqrt{20}=\sqrt{2\cdot 49}-\sqrt{5\cdot 9}+2\cdot\sqrt{5\cdot 4}=7\cdot\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{5}+4\cdot\sqrt{5}=7\cdot\sqrt{2}+\sqrt{5}$

d) $2\cdot\sqrt{128}-\sqrt{50}+3\cdot\sqrt{45}=2\cdot\sqrt{2\cdot 64}-\sqrt{25\cdot 2}+3\cdot\sqrt{5\cdot 9}=16\cdot\sqrt{2}-5\cdot\sqrt{2}+9\cdot\sqrt{5}=$

$=11\cdot\sqrt{2}+9\cdot\sqrt{5}$.

**8.** Határozd meg a következő kifejezések pontos értékét!

a) $\sqrt{80}+\sqrt{50}-\sqrt{20}-\sqrt{8}$;

b) $\sqrt{125}-\sqrt{45}-\sqrt{18}$;

c) $\left(\sqrt{80}+\sqrt{50}-\sqrt{20}-\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{125}-\sqrt{45}-\sqrt{18}\right)$.

*Megoldás*:

A megoldások során felhasználjuk a négyzetgyökjel alól történő kiemelést valamint a négyzetgyökök összevonását.

a) $\sqrt{80}+\sqrt{50}-\sqrt{20}-\sqrt{8}=\sqrt{5\cdot16}+\sqrt{2\cdot25}-\sqrt{5\cdot4}-\sqrt{2\cdot4}=$

$4\cdot\sqrt{5}+5\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{2}=2\cdot\sqrt{5}+3\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{125}-\sqrt{45}-\sqrt{18}=\sqrt{5\cdot25}-\sqrt{5\cdot9}-\sqrt{2\cdot9}=5\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{2}=2\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{2}$

c) A megoldás során felhasználjuk az a) és b) feladatrészek eredményeit, valamint az $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ azonosságot.

$$\left(\sqrt{80}+\sqrt{50}-\sqrt{20}-\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{125}-\sqrt{45}-\sqrt{18}\right)=\left(2\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{2}\right)=$$

$$=\left(2\cdot\sqrt{5}\right)^2-\left(3\cdot\sqrt{2}\right)^2=4\cdot5-9\cdot2=20-18=2.$$

## Mintapélda$_{11}$

Számítsuk ki a $2\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}$ kifejezés pontos értékét!

*Megoldás:*

$$2\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}=\sqrt{\frac{4\cdot5}{4}}=\sqrt{5}.$$

A négyzetgyökjel előtt álló számot a négyzetgyök definíciója alapján felírhatjuk gyökös alakban, és alkalmazva a négyzetgyökvonás azonosságait, **közös gyökjel alá írhatjuk.**

## Feladat

**9.** Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét:

a) $3\cdot\sqrt{\frac{5}{9}}$; b) $\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{9}{32}}$; c) $10\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}$; d) $15\cdot\sqrt{\frac{3}{25}}$.

*Megoldás*:

a) $3\cdot\sqrt{\frac{5}{9}}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{\frac{5}{9}}=\sqrt{\frac{9\cdot 5}{9}}=\sqrt{5}$;

b) $\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{9}{32}}=\sqrt{\frac{16}{9}}\cdot\sqrt{\frac{9}{32}}=\sqrt{\frac{16}{9}\cdot\frac{9}{32}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$;

c) $10\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}=\sqrt{\frac{100\cdot 5}{4}}=\sqrt{25\cdot 5}=5\cdot\sqrt{5}$;

d) $15\cdot\sqrt{\frac{3}{25}}=\sqrt{225}\cdot\sqrt{\frac{3}{25}}=\sqrt{225\cdot\frac{3}{25}}=\sqrt{9\cdot 3}=3\cdot\sqrt{3}$.

## Mintapélda$_{12}$

Számítsuk ki zsebszámológéppel, mennyivel egyenlő a következő két kifejezés értéke:

$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ és $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

*Megoldás:*

$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\approx 3{,}14627$; $\sqrt{3}+\sqrt{2}\approx 3{,}14627$.

Úgy találjuk, hogy a két tört értéke jó közelítéssel megegyezik.

Az igazság az, hogy a két tört értéke pontosan megegyezik. Mivel végtelen, nem szakaszos tizedes törtek (irracionális számok) szerepelnek a feladatban, a pontos egyezést kerekítéssel nem lehet igazolni. Helyette olyan műveletet keresünk, amelynek segítségével a két kifejezés azonos alakúra hozható.

A mintapéldához hasonlóan sok probléma esetén megoldást nyújthat, **ha a négyzetgyökös törtes kifejezéseket úgy alakítjuk át, hogy a nevező ne tartalmazzon négyzetgyököt.** Ezt hívjuk **a nevező gyöktelenítésének.** Jellemző módszere a tört bővítése: olyan kifejezést keresünk, amellyel a nevezőt meg kell szoroznunk, hogy eltűnjön a négyzetgyök. Természetesen nemcsak a nevezőt szorozzuk, hanem bővítünk, hogy ne változzon a tört értéke.

## Mintapélda$_{13}$

Gyöktelenítsük a következő kifejezések nevezőjét: a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{6}{\sqrt{2}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

*Megoldás:*

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Azért választottuk a $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ kifejezést, mert

- egyrészt ennek az értéke 1-gyel egyenlő, vagyis a tört értéke nem változik, ha megszorozzuk vele;
- másrészt a két tört nevezőjét összeszorozva gyökjelmentes kifejezést, 2-t kapunk.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A kapott $\frac{\sqrt{2}}{2}$ kifejezés nevezőjében négyzetgyök nem szerepel, ez a feladat megoldása.

b) $\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{2}=3\cdot\sqrt{2}$.

A most kapott kifejezésből még a nevező is eltűnt, a feladat megoldása $3\sqrt{2}$.

c) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Azt a kifejezést kellett megkeresni, amellyel a $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ kifejezést megszorozva a kapott eredmény gyökjelmentes kifejezés.

Szorzáskor nevezetes azonosságot használunk: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$.

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

A gyöktelenítés eredménye $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Most már érthető, hogy miért kaptunk a 12. mintapéldában számológéppel egyenlő eredményeket $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ és $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ esetén.

## Feladat

**10.** Gyöktelenítsd a következő törtek nevezőjét:

a) $\frac{1}{\sqrt{6}}$; b) $\frac{5}{\sqrt{15}}$; c) $\frac{2}{3+\sqrt{2}}$; b) $\frac{10}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

*Megoldás*:

a) $\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$;

b) $\frac{5}{\sqrt{15}}=\frac{5\cdot\sqrt{15}}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}}=\frac{5\cdot\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{15}}{3}$;

c) $\frac{2}{3+\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)}{\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)}=\frac{2\left(3-\sqrt{2}\right)}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2\left(3-\sqrt{2}\right)}{9-2}=\frac{2\left(3-\sqrt{2}\right)}{7}$;

d) $\frac{10}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{10\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{10\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{10\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=5\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$.

*Módszertani megjegyzés:*

Alakítsunk ki az osztályban négy csoportot. Minden csoport kap három-három kártyát *(**2.2 kártyakészlet**)*. A kártyák egyik oldalát két részre osztottuk és mindkét részben egy-egy kifejezés szerepel, amelyeknek értéke egyenlő.

Feladat: keressük meg azt a szabályt, amelyik megadja, hogy a kártya bal oldalán álló kifejezésből hogyan kaptuk meg a jobb oldalon álló kifejezést.

***2.2 kártyakészlet***

| I. csoport | | II. csoport | | III. csoport | | IV. csoport | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{32}$ | $4\cdot\sqrt{2}$ | $\sqrt{72}$ | $6\cdot\sqrt{2}$ | $\sqrt{75}$ | $5\cdot\sqrt{3}$ | $\sqrt{20}$ | $2\cdot\sqrt{5}$ |
| $2\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}$ | $\sqrt{5}$ | $13\cdot\sqrt{\frac{2}{13}}$ | $\sqrt{26}$ | $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$ | $\sqrt{\frac{4}{3}}$ | $2\cdot\sqrt{\frac{5}{8}}$ | $\sqrt{\frac{5}{2}}$ |
| $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ | $\frac{\sqrt{5}}{10}$ | $\frac{5}{\sqrt{3}}$ | $\frac{5}{3}\sqrt{3}$ | $\frac{5}{3\sqrt{2}}$ | $\frac{5}{6}\sqrt{2}$ |

Körülbelül 10 perc gondolkodási időt adunk a gyerekeknek és utána a csoportok megbízottjai elmondják a csoport által megbeszélt megoldásokat.

*Megoldás:* az alkalmazott műveletek: gyökjel alá bevitel, kihozás gyökjel alól, gyöktelenítés.

## Mintapélda$_{14}$

Melyik szám nagyobb? a) $2\sqrt{7}$ vagy $3\sqrt{2}$; b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ vagy $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

*Megoldás:*

a) Alkalmazzuk a gyökjel alá bevitelt: $2\sqrt{7}=\sqrt{4\cdot 7}=\sqrt{28}$

$3\sqrt{2}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{18}$

Mivel a nagyobb számok négyzetgyöke is nagyobb, $2\sqrt{7}>3\sqrt{2}$.

b) Most is alkalmazzuk a gyökjel alá történő bevitelt:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}}=\sqrt{\frac{6}{9}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\\ \frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{16}}=\sqrt{\frac{10}{16}}=\sqrt{\frac{5}{8}}\end{array}\right\}\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{16}{24}}\ \text{illetve}\ \sqrt{\frac{5}{8}}=\sqrt{\frac{15}{24}}.$$

A gyökjel alatti törteket közös nevezőre kellett hoznunk, hogy össze tudjuk azokat hasonlítani. Mivel $\frac{16}{24}>\frac{15}{24}$, a megoldás: $\frac{\sqrt{3}}{6}>\frac{\sqrt{10}}{4}$.

## Feladatok

**11.** Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét!

a) $\sqrt{28}-\sqrt{7}$; b) $\sqrt{28}+\sqrt{7}-\sqrt{63}$;

c) $\sqrt{98}+\sqrt{8}-\sqrt{18}$; d) $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{147}$.

*Megoldás*:

a) $\sqrt{28}-\sqrt{7}=2\sqrt{7}-\sqrt{7}=\sqrt{7}$;

b) $\sqrt{28}+\sqrt{7}-\sqrt{63}=2\sqrt{7}+\sqrt{7}-3\sqrt{7}=0$;

c) $\sqrt{98}+\sqrt{8}-\sqrt{18}=7\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$;

d) $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{147}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-7\sqrt{3}=0$.

**12.** Végezd el a következő műveleteket!

a) $(2\sqrt{5}+3)\cdot(2-4\sqrt{5})$; b) $(4-3\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(3\sqrt{2}-\sqrt{3})$;

c) $(2\sqrt{3}+4\sqrt{5})\cdot(2\sqrt{3}-4\sqrt{5})$; d) $(2\sqrt{7}-3\sqrt{2})^2$;

e) $(3\sqrt{7}+5\sqrt{3})^2$;

f) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^3$; g) $\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)^3$.

*Megoldás*:

a) $\left(2\cdot\sqrt{5}+3\right)\cdot\left(2-4\sqrt{5}\right)=4\sqrt{5}+6-8\cdot5-12\sqrt{5}=-34-8\sqrt{5}$;

b) $\left(4-3\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=12\sqrt{2}-4\sqrt{3}-9\sqrt{6}+(-3)\cdot3+3\cdot2-\sqrt{6}=$

$=12\sqrt{2}-4\sqrt{3}-10\sqrt{6}+15$;

c) $\left(2\sqrt{3}+4\sqrt{5}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}-4\sqrt{5}\right)=\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2=4\cdot3-16\cdot5=12-80=-68$;

d) $\left(2\sqrt{7}-3\sqrt{2}\right)^2=\left(2\sqrt{7}\right)^2-2\cdot2\cdot3\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}=\left(3\sqrt{2}\right)^2=4\cdot7-12\sqrt{14}+9\cdot2=$

$=28-12\sqrt{14}+18=46-1214$;

e) $\left(3\sqrt{7}+5\sqrt{3}\right)^2=\left(3\sqrt{7}\right)^2+2\cdot3\cdot5\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}+\left(5\sqrt{3}\right)^2=9\cdot7+30\sqrt{21}+25\cdot3=$

$=63+30\sqrt{21}+75=138+30\sqrt{21}$;

f) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^3=\left(\sqrt{3}\right)^3+3\left(\sqrt{3}\right)^2\sqrt{5}+3\sqrt{3}\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^3=\sqrt{27}+9\sqrt{5}+15\sqrt{3}+\sqrt{125}=$

$=3\sqrt{3}+9\sqrt{5}+15\sqrt{3}+5\sqrt{5}=18\sqrt{3}+14\sqrt{5}$;

g) $\left(3\sqrt{5}-2\sqrt{2}\right)^3=\left(3\sqrt{5}\right)^3-3\cdot\left(3\sqrt{5}\right)^2\cdot2\sqrt{2}+3\cdot3\sqrt{5}\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^3=$

$135\sqrt{5}-270\sqrt{2}+72\sqrt{5}-16\sqrt{2}=207\sqrt{5}-286\sqrt{2}$.

**13.** Számítsd ki a következő kifejezések pontos értékét!

Figyelem! A c) és d) feladatok a nyomtatásban hibásan jelentek meg!

a) $\sqrt{5+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{13}}$; b) $\sqrt{\sqrt{41}+\sqrt{32}}\cdot\sqrt{\sqrt{41}-\sqrt{32}}$;

c) $\sqrt{5\sqrt{3}+\sqrt{59}}\cdot\sqrt{\sqrt{75}-\sqrt{59}}$ ; d) $\sqrt{2\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{12}}$;

e) $\left(\sqrt{7+\sqrt{11}}-\sqrt{7-\sqrt{11}}\right)^2$; f) $\left(\sqrt{9-\sqrt{32}}-\sqrt{9+4\sqrt{2}}\right)^2$;

g) $\left(\sqrt{\sqrt{30}-\sqrt{14}}+\sqrt{\sqrt{30}+\sqrt{14}}\right)^2$.

*Megoldás*:

a) $\sqrt{5+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{13}}=\sqrt{25-13}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{\sqrt{41}+\sqrt{32}}\cdot\sqrt{\sqrt{41}-\sqrt{32}}=\sqrt{41-32}=\sqrt{9}=3$;

c) $\sqrt{5\sqrt{3}+\sqrt{59}}\cdot\sqrt{\sqrt{75}-\sqrt{59}}=\sqrt{75-59}=\sqrt{16}=4$;

d) $\sqrt{2\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{12}}=\sqrt{12-4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$;

e) $\left(\sqrt{7+\sqrt{11}}+\sqrt{7-\sqrt{11}}\right)^2=3+\sqrt{11}+2\sqrt{49-11}+7-\sqrt{11}=12+2\sqrt{38}$;

f) $\left(\sqrt{9-\sqrt{32}}-\sqrt{9+4\sqrt{2}}\right)^2=9-\sqrt{32-2\sqrt{81-32}}+9+\sqrt{32}=18-2\sqrt{49}=18-14=$

$=4$;

g) $\left(\sqrt{\sqrt{30}-\sqrt{14}}-\sqrt{\sqrt{30}+\sqrt{14}}\right)^2=\sqrt{30}-\sqrt{14}-2\sqrt{30-14}+\sqrt{30}+\sqrt{14}=$

$=2\sqrt{30}-2\sqrt{16}=2\sqrt{30}-8$.

**14.** Melyik szám nagyobb?

a) $6\sqrt{2}$ vagy $3\sqrt{8}$;

b) $4\sqrt{3}$ vagy $5\sqrt{2}$;

c) $5\sqrt{5}$ vagy $8\sqrt{2}$;

d) $\frac{\sqrt{21}}{7}$ vagy $\frac{\sqrt{15}}{5}$;

e) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ vagy $\frac{7\sqrt{2}}{6}$.

*Megoldás*:

a) egyenlő;

b) $4\sqrt{3}<5\sqrt{2}$;

c) $5\sqrt{5}<8\sqrt{2}$;

d) $\frac{\sqrt{21}}{7}$ vagy $\frac{\sqrt{15}}{5}$

$\sqrt{\frac{21}{49}}$ vagy $\sqrt{\frac{15}{25}}$

$\sqrt{\frac{3}{7}}$ vagy $\sqrt{\frac{3}{5}}$

$\frac{\sqrt{21}}{7}<\frac{\sqrt{15}}{5}$;

e) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ vagy $\frac{7\sqrt{2}}{6}$

$\frac{9\sqrt{5}}{12}$ vagy $\frac{14\sqrt{2}}{6}$

$\frac{\sqrt{405}}{12}$ vagy $\frac{\sqrt{392}}{12}$

$\frac{3\sqrt{5}}{4}>\frac{7\sqrt{2}}{6}$.

**15.** Adott A= $\sqrt{50}-\sqrt{12}$ és B = $\frac{20-\sqrt{96}}{\sqrt{8}}$. Melyik állítás igaz? A > B vagy A < B ?

*Megoldás*:

Átalakítjuk a B kifejezést:

$$B=\frac{20-\sqrt{96}}{\sqrt{8}}=\frac{20}{\sqrt{8}}-\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{8}}=\frac{20}{2\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{96}{8}}=\frac{10}{\sqrt{2}}-\sqrt{12}=\frac{10\cdot\sqrt{2}}{2}-\sqrt{12}=$$

$$= 5\cdot\sqrt{2}-\sqrt{12} = \sqrt{50}-\sqrt{12}$$

A két kifejezés egyenlő, tehát egyik állítás sem igaz.

**16.** Végezd el a következő műveleteket!

a) $\sqrt{192}+\sqrt{27}-\sqrt{108}$;

b) $\sqrt{72}-\sqrt{32}-\sqrt{8}$;

c) $\sqrt{252}-\sqrt{28}+\sqrt{63}-\sqrt{7}$;

d) $(\sqrt{108}-\sqrt{12}+\sqrt{32}-\sqrt{8})\cdot(\sqrt{147}-\sqrt{27}-\sqrt{50}+\sqrt{18})$.

*Megoldás*:

a) $\sqrt{192}+\sqrt{27}-\sqrt{108}=8\sqrt{3}+3\sqrt{3}-6\sqrt{3}=5\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{72}-\sqrt{32}-\sqrt{8}=6\sqrt{2}-4\sqrt{2}-2\sqrt{2}70$;

c) $\sqrt{252}-\sqrt{28}+\sqrt{63}-\sqrt{7}=6\sqrt{7}-2\sqrt{7}+3\sqrt{7}-\sqrt{7}=6\sqrt{7}$;

d) $\left(\sqrt{108}-\sqrt{12}+\sqrt{32}-\sqrt{8}\right)\cdot\left(\sqrt{147}-\sqrt{27}-\sqrt{50}+\sqrt{18}\right)=$

$=\left(6\sqrt{3}-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(7\sqrt{3}-3\sqrt{3}-5\sqrt{2}+3\sqrt{2}\right)=$

$=\left(4\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(4\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)=48-8=40$.

**17.** Gyöktelenítsd a következő törtek nevezőjét!

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{8}{2\sqrt{5}}$; c) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; d) $\dfrac{4}{2\sqrt{3}-2}$; e) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

*Megoldás*:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$;

b) $\dfrac{8}{2\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\cdot\sqrt{5}}{5}$;

c) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{3\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2}$;

d) $\dfrac{4}{2\sqrt{3}-2}=\dfrac{4}{2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}+1$;

e) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$.

**18.** Számítsd ki a következő kifejezések helyettesítési értékét, ha x = $\frac{1}{3}$:

a) $\frac{2}{\sqrt{x}+2}+\frac{2}{2-\sqrt{x}}$; b) $\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$.

*Megoldás*:

a) A kifejezés értelmezési tartománya $x \neq 4$ és $x \geq 0$, ami a megadott helyettesítési érték esetén teljesül. $\frac{2}{\sqrt{x}+2}+\frac{2}{2-\sqrt{x}}=\frac{2\cdot\left(2-\sqrt{x}\right)+2\cdot\left(2+\sqrt{x}\right)}{4-x}=\frac{8}{4-x}$

Behelyettesítve: $\frac{8}{4-\frac{1}{3}}=\frac{24}{11}$.

b) A kifejezés értelmezési tartománya $x \neq \frac{1}{4}$ és $x \geq 0$, ami a megadott helyettesítési érték esetén teljesül. $\frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1}+\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)+3\sqrt{x}\cdot\left(2\sqrt{x}-1\right)}{4x-1}=\frac{8x+1}{4x-1}$

Behelyettesítve: $\frac{8\cdot\frac{1}{3}+1}{4\cdot\frac{1}{3}-1}=\frac{\frac{11}{3}}{\frac{1}{3}}=11$.

# Kislexikon

Azokat a számokat, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként, **racionális számoknak** nevezzük.

Azokat a számokat, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként, **irracionális számoknak** nevezzük. Tizedes tört alakjuk végtelen, nem szakaszos tizedes tört.

### A négyzetgyök fogalma

Legyen $a \geq 0$. $\sqrt{a}$ jelenti azt a nemnegatív valós számot, amelynek a négyzete $a$.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

### A négyzetgyök azonosságai

I. azonosság: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, ahol $a \geq 0$ és $b \geq 0$.

II. azonosság: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, ahol $a \geq 0$ és $b > 0$.

III. azonosság: $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$, ahol $a \geq 0$, $n$ egész szám..

## Tételek és bizonyítások

**Tétel:** A racionális számok tizedes tört alakja véges, vagy végtelen szakaszos tizedes tört.

*Bizonyítás:*

Legyenek $p$ és $q$ ($q \neq 0$) egész számok, és osszuk el $p$-t $q$-val. Amennyiben az osztás során maradékul nullát kapunk, akkor a $\frac{p}{q}$ racionális szám tizedes tört alakja véges. Ha az osztás során nem nulla a maradék, akkor a lehetséges maradékok 1, 2, 3 … , $q-1$. Így az osztás közben legfeljebb $q$ lépés után újra olyan maradékot kapunk, ami már szerepelt. Egy idő után a maradékok ismétlődnek, tehát a tizedes tört végtelen szakaszos lesz.

**Tétel:** A $\sqrt{2}$ irracionális szám.

*Bizonyítás:*

A bizonyítás indirekt módszerrel történik. Tegyük fel, hogy a $\sqrt{2}$ felírható két egész szám ($p$ és $q$) hányadosaként: olyan tört alakba, amelyet tovább már nem tudunk egyszerűsíteni.

Vagyis létezik olyan $p$ és $q \in \mathbf{Z}^+$, hogy $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, és $p$ és $q$ relatív prímek: $(p, q) = 1$.

Négyzetre emelve $2 = \frac{p^2}{q^2}$, amiből $2q^2 = p^2$. Azt kaptuk, hogy $p^2$ páros. Ez csak úgy lehetséges, ha $p$ is páros, azaz $2|p$. Ekkor $4|p^2$, és $2q^2 = p^2$ miatt $q^2$ is, végső soron $q$ is páros.

Ha $q$ is páros és $p$ is páros, akkor legnagyobb közös osztójuk legalább 2. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy $p$ és $q$ relatív prímek. Mivel feltételezésünk ellentmondásra vezetett, az eredeti állítás igaz.

**Megjegyzés**: *a* fenti módszer segítségével belátható, hogy minden olyan $a > 0$ valós szám esetén, amely nem négyzetszám, $\sqrt{a}$ irracionális.

**I. azonosság:** $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, ahol $a \geq 0$ és $b \geq 0$.

*Bizonyítás:*

Mindkét oldal nemnegatív, ezért a négyzetgyöküket hasonlíthatjuk össze.

A négyzetgyök definíciója alapján:

$$(\sqrt{a \cdot b})^2 = a \cdot b;$$
$$(\sqrt{a})^2 = a;$$
$$(\sqrt{b})^2 = b;$$
$$a \cdot b = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2.$$

A hatványozás azonossága alapján:

$$(\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2;$$
$$(\sqrt{a \cdot b})^2 = \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2.$$

Mivel az $x \geq 0$ esetén az $x^2$ függvény szigorúan monoton növekvő, így

$$(\sqrt{a \cdot b}) = (\sqrt{a}) \cdot (\sqrt{b}).$$

**II. azonosság:** $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, ahol $a \geq 0$ és $b > 0$.

*Bizonyítás:*

A négyzetgyök definíciója alapján: $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2 = \dfrac{a}{b}$.

$(\sqrt{a})^2 = a;$

$(\sqrt{b})^2 = b;$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}$.

Így: $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}$.

A hatványozás azonossága alapján**:** $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$.

Mivel az $x \geq 0$ esetén az $x^2$ függvény szigorúan monoton növekvő, így $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

**III. azonosság:** $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$, ahol $a \geq 0$.

*Bizonyítás:*

A bal oldalt négyzetre emelve a hatványozás azonosságai és a négyzetgyök definíciója alapján: $\left[\left(\sqrt{a}\right)^n\right]^2 = \left(\sqrt{a}\right)^{2n} = \left[\left(\sqrt{a}\right)^2\right]^n = a^n$.

A jobb oldalt négyzetre emelve a négyzetgyök definíciója miatt: $\left(\sqrt{a^n}\right)^2 = a^n$.

A két oldal négyzete tehát egyenlő. Nemnegatív számok esetén az $x^2$ függvény szigorúan monoton növekvő, így $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$.