MATEMATIKA „A”
10. évfolyam

1. modul

Logika

Készítette: Vidra Gábor

A modul célja	Állítások és tagadásuk megfogalmazása, azok igaz, hamis voltának eldöntése, az „és" ill. a „vagy" műveletek alkalma-zásának ismétlése. Egyszerű következtetések, állítások és megfordításuk megfogalmazása, implikáció és ekvivalencia műveletek használata. A definíció és a tétel különbözőségére történő rávilágítás. Szükséges és elégséges feltétel, skatulyaelv alkalmazása.
Időkeret	4 óra
Ajánlott korosztály	10. évfolyam
Modulkapcsolódási pontok	Geometria, 9. évfolyam logika modulja, feladatokban: algebra, koordinátageometria, halmazelmélet, statisztika, számelmélet, kombinatorika, valószínűség.
A képességfejlesztés fókuszai	Pontos szövegértés, szövegelemzés, a szöveges feladatokban megfogalmazott hétköznapi problémák átemelése a matematikai logika rendszerébe, a metakogníció fejlesztése. Következtetés a speciális, a konkrét megfigyelésektől az általános esetre, az induktív gondolkodás fejlesztése. A felvetett problémákban megjelenő kapcsolatok modellezése logikai műveletekkel, a megoldások adaptálása az eredeti szövegkörnyezetbe.

Ajánlás

Feladatlap megoldásakor a csoport minden tanulója ugyanazt a feladatlapot kapja, a megoldásokat megbeszélik a csoportban, és a füzetükben rögzítik. A közös munkát a füzetek alapján értékeljük. A feladatlapok, a totó feladatai közül sok megegyezik a modul feladataival, mert a csoportmunkában végzett feladatmegoldás nem helyettesíti az önálló munkát, és így lehetőséget kap az esetleg hiányzó tanuló is a tananyag pótlására.

Támogató rendszer

A tanári modulhoz tartoznak a következő, tanórákon használható feladatlapok. Sokszorosítási igényük általában csoportonként 1-1 példány (ld. a tanári modul módszertani útmutatásaiban). A feladatlapok a modul feladataiból tartalmaznak válogatást, ezért a modulban szereplő, de a feladatlapokból kimaradó feladatok házi feladatnak feladhatók.

- Logikai totó;
- Feladatlap implikációra (ez tartalmazza a modul 5, 6, 7. feladatának egy részét, valamint a 8. és 9.
feladatot teljes egészében);
- Tapasztalatszerzés skatulyaelvre (6. mintapélda);
- Skatulyaelv szakértői mozaik feladatlap (7–10. mintapéldák; felvágható).

A tananyag javasolt órabeosztása

Óraszám Óracím

1. Ismétlés
Ismétlés (frontális; kijelentés, logikai értékek), füllentős játék a kijelentésekre (csoportmunka), ismétlés (frontális; logikai műveletek), logikai totó (csoportmunka).
2. Implikáció
Mintapéldák (frontális), feladatok (csoportmunka, feladatlappal).
3. Ekvivalencia
Mintapéldák (frontális), füllentős játék szükséges és elégséges kijelentésekre (csoportmunka), feladatok (csoport vagy egyéni munka, modul feladatai).
4. Skatulyaelv
5. Tapasztalatszerzés (csoportmunka, feladatlap), általánosítás (frontális), mintapéldák (szakértői mozaik), feladatok (önálló munka).

Érettségi követelmények:

Matematikai logika

Középszint

• Tudjon egyszerű matematikai szövegeket értelmezni.
• Ismerje és alkalmazza megfelelően a kijelentés (állítás, ítélet) fogalmát.
• Értse és egyszerű feladatokban alkalmazza az állítás tagadása műveletet.
• Ismerje az „és”, a „(megengedő) vagy” logikai jelentését, tudja használni és összekapcsolni azokat a halmazműveletekkel.
• Értse és használja helyesen az implikációt és az ekvivalenciát.
• Használja helyesen a „minden”, „van olyan” kvantorokat.

Emelt szint

Alkalmazza tudatosan a nyelv logikai elemeit.

Fogalmak, tételek és bizonyítások a matematikában

Középszint

• Tudjon definíciókat, tételeket pontosan megfogalmazni.
• Használja és alkalmazza feladatokban helyesen a „szükséges”, az „elégséges” és a „szükséges és elégséges” feltétel fogalmát.

Emelt szint

• Ismerje az alábbi bizonyítási típusokat és tudjon példát mondani alkalmazásukra: direkt és indirekt bizonyítás, skatulyaelv.
• Tudja megfogalmazni konkrét esetekben tételek megfordítását.

MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
I. Ismétlés			
1.	A kijelentés (frontális emlékeztető)	Figyelem, rendszerezés, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	Tanulók könyve
2.	Példák kijelentésekre (csoportmunka)	Kommunikáció, kooperáció, metakogníció, szöveges feladatok.	Füllentős játék csoportban.
3.	ÉS, VAGY logikai műveletek és tagadásuk (frontális emlékeztető)	Figyelem, rendszerezés, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	Tanulók könyve
4.	Totó a logikai műveletekről (csoportmunka)	Kommunikáció, kooperáció, metakogníció, szöveges feladatok.	Logika totó

II. Implikáció			
1.	Mintapéldák implikációra (frontális munka)	Kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	1. mintapélda 3. mintapélda
2.	Feladatok implikációra (csoportmunka)	Kommunikáció, kooperáció, metakogníció, szöveges feladatok, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	Feladatlap implikációra.

III. Ekvivalencia			
1.	Mintapéldák ekvivalenciára (frontális munka)	Kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	4. mintapélda tanári magyarázat 5. mintapélda
2.	Példák „szükséges és elégséges” jellegű kijelentésekre (csoportmunka)	Kommunikáció, kooperáció, metakogníció, szöveges feladatok, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	Füllentős módszer.
3.	Feladatok ekvivalenciára (frontális vagy egyéni munka)	Kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	Feladatok 10–14.

IV. Skatulyaelv			
1.	Tapasztalatszerzés (csoportmunka)	Kommunikáció, kooperáció, metakogníció, szöveges feladatok, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	Feladatlap: skatulyaelv tapasztalatszerzéshez.
2.	Általánosítás (frontális munka)	Figyelem, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	Tanulók könyve

3.	Mintapéldák skatulyaelvre (csoportmunka, szakértői mozaik)	Kommunikáció, kooperáció, metakogníció, szöveges feladatok, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás, egymás tanítása.	Skatulyaelv szakértői mozaik feladatlap.
4.	Feladatmegoldás (önálló munka)	Szöveges feladatok, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	Tanulók könyve feladatok.

Módszertani megjegyzés: Az alábbi bevezető olvasmány elolvasása nem kötelező, az érdeklődő tanulóknak ajánlott.

A matematika felépítése (olvasmány)

Módszertani megjegyzés: A témáról bővebben olvashatunk a következő honlapon:

http://www.szabadgondolkodo.hu/ismeretterjesztes/tudomanyos-modszer.php

A modulban az internetes hivatkozások a 2006.06.30-án fennálló viszonyokra vonatkoznak.

A matematika egzakt (pontos) tudomány: az alapvetőnek kimondott állítások (axiómák) kivételével minden állítást be kell bizonyítani. Ameddig nem bizonyítunk egy állítást, addig sejtésnek nevezzük.

Egy állítást **bizonyított tételnek** nevezünk, ha logikai úton vissza tudjuk vezetni más állításokra, amiket már elfogadtunk – akár azért, mert ismerjük a bizonyításukat (korábban bizonyított tételek), akár azért, mert annyira egyszerűnek, nyilvánvalónak tűnnek, hogy nem tartjuk érdemesnek vesződni a bizonyításukkal (ezeket axiómáknak, alaptételeknek nevezzük).

Az egyik leghíresebb sejtés a Fermat-sejtés. Pierre de Fermat (1601–1665) toulouse-i gondolkodó (főállásban jogász, egyébként műkedvelő matematikus) volt, és 1637 táján Diofantosz: Aritmetika című könyvének latin nyelvű kiadásának margójára írt egy megjegyzést: az $x^n+y^n=z^n$ egyenletnek $n > 2$ esetén nincsen olyan nullától különböző megoldása, ahol x, y és z egész számok. (Ha $n = 2$, akkor az egyenlet megoldásai az úgynevezett *pitagoraszi számhármasok*, például $3^2 + 4^2 = 5^2$ jó megoldás.) Azt állította, hogy *„Ennek igazán bámulatos bizonyítását találtam meg, azonban a könyv margója túlságosan keskeny, hogy ide írjam."* Nos, a tételt csak 1995-ben (majdnem 370 évvel Fermat bejegyzése után!) tudták bebizonyítani: Andrew Wiles és Richard Taylor brit matematikusok több száz oldalon keresztül.

Módszertani megjegyzés: Továbbiak találhatók a következő honlapokon:

http://www.enc.hu/1enciklopedia/fogalmi/mat/fermat-sejtes.htm

http://www.sulinet.hu/eletestudomany/archiv/1999/9916/konyvtermes/anagy.htm

http://www.titoktan.hu/_raktar/_e_vilagi_gondolatok/KOMALFermat.htm

Sokszor mondjuk egy állításról, hogy triviális. A „triviális” szó eredete a római korba nyúlik vissza: a szabad embereknek tanított közismereti tárgyak nyelvtanból, logikából és retorikából, vagyis a triviumból álltak. Más értelmezések szerint a kifejezés görög iskolákból ered, ahol séta közben beszélgettek matematikáról. A triviális állítás azt jelenti, hogy három úton (tri = három, via = út) menve is igazolni lehet, vagyis könnyű a bizonyítása. Hogy kinek mi a könnyű, és mit lehet elfogadni bizonyítás nélkül, az függ az egyéntől**.**

A matematika **axiomatikus felépítésű**: alaptételeket (axiómákat, posztulátumokat) fogadnak el igaznak, és ezekből kiindulva bizonyítják a különböző tételeket. Az axiomatikus felépítésnek óriási jelentősége volt a különböző geometriák megszületésekor.

Az axiómáktól elvárjuk a következő feltételeket:

- nem lehetnek egymásnak ellentmondók;
- ne legyen sok axióma;
- egymástól függetleneknek kell lenniük (vagyis egyik sem bizonyítható a többi axióma segítségével);
- rendszerük teljes legyen, azaz minden olyan axióma kéznél legyen, ami a felsorolt tételek bebizonyításához szükséges.

Az első ránk maradt axiómarendszer Eukleidész: Elemek c. könyvében található (i. e. 330 körül). Eukleidész szétválasztotta az axiómákat és a posztulátumokat. Az axiómák nála általános jellegű kijelentések, a posztulátumok kifejezetten a geometria témakörére vonatkozó alapállítások. Ma ezeket összefoglaló néven axiómáknak nevezzük.

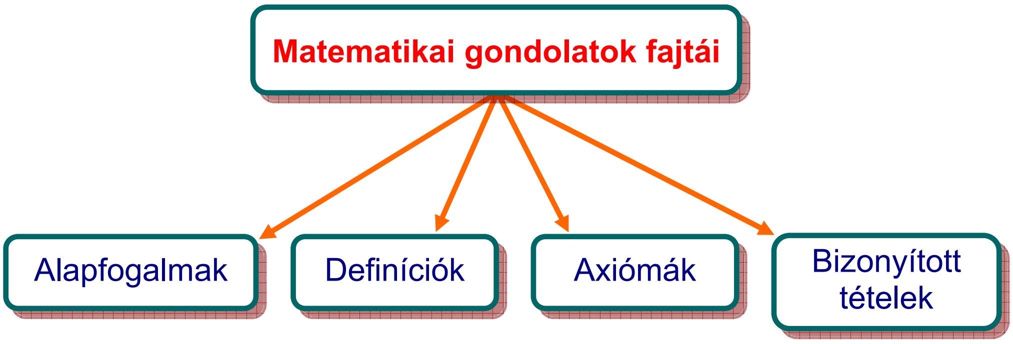
Módszertani megjegyzés: Az Elemek megtalálhatók az interneten:
http://www.mek.iif.hu/porta/szint/termesz/matemat/elemek1/html/index.htm

Az axiómarendszerek a tudományterületek fejlődésével együtt fejlődnek. Egy-egy új felfedezés vagy korszakalkotó gondolat kapcsán előfordul, hogy a valóság leírását módosítani kell (gondolj a Naprendszer modelljének, vagy az atommodelleknek a fejlődésére). A fizika fejlődésével kiderült, hogy nagyon nagy (kozmikus) méretekben az euklideszi geometria fogalmait nem tudjuk megfelelően használni.

Eddigi tanulmányaink során is találkoztunk már olyan felülettel, amelyen nincs párhuzamosság: a gömbfelülettel. Ez azt jelenti, hogy a gömbi geometria eltér az euklideszi geometriától. Egy másik példa: megszoktuk, hogy a párhuzamosok nem találkoznak, azonban ennek a perspektíva törvényei látszólag ellentmondanak. Ha a sínek közé állunk, a párhuzamos sínek összetartónak látszanak. Létezik az euklideszi geometriának olyan kibővítése (projektív geometria), amely alkalmas az ehhez hasonló jelenségek leírására.

Mindezekből leszűrhetjük, hogy azokat az axiómarendszereket tudjuk jól használni, amelyekkel a valóság jelenségei minél pontosabban leírhatók. Ha valaki másképp látja a valóságot, akkor változtathat az axiómákon, viszont ekkor a korábbihoz hasonlóan fel kell építenie az új rendszer szerint az adott tudományterületet. Ezt tette Bolyai János (1802–1860) is.

Az axiómák mellett a matematika felépítésében alapfogalmak (azaz nem definiált fogalmak) is vannak. (Ilyen például a pont, az egyenes, a sík, a tér.)

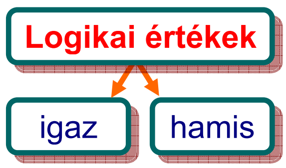


I. Ismétlés

Módszertani megjegyzés: A kijelentés fogalmát frontálisan ismételjük át, ezután 4 fős csoportokat alakítunk.
A kijelentés felelevenítése **füllentős játék** keretében javasolt. A csoportalakítás és a szóvivő kiválasztása után a tanár elmondja, hogy 3 olyan mondatot kell írni, amelyből kettő kijelentés, egy pedig nem. A (kb. 5 perces) megadott idő után az első csoport szóvivője felolvassa a 3 mondatot. A többi csapat rövid tanakodás keretében kiválasztja, hogy hányadiknak hangzott el az, ami nem kijelentés. A tanár jelére (lehet például számolás 3-ig) a szóvivők annyit mutatnak, ahányadik mondat nem kijelentés. Célszerű felírni a jó válaszokat, és az óra végén a többi csoportmunkával együtt értékelni.

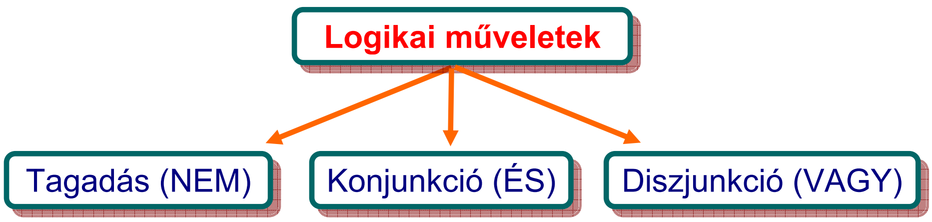
Kijelentés (vagy állítás, ítélet)**:** olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz, vagy hamis.

Egy kijelentésnek kétféle **logikai értéke** (vagy igazságértéke) lehet: **igaz**, vagy **hamis**.



Módszertani megjegyzés: A logikai műveleteket frontálisan ismételjük át.

Logikai műveletek:



Tagadás (negáció): az a logikai művelet, amely egy kijelentés igazságértékét ellentettjére változtatja: az igazból hamisat, a hamisból igazat csinál.

Konjunkció: két kijelentés ÉS-sel összekapcsolva. Az új kijelentés akkor igaz, ha mindkét kijelentés logikai értéke igaz, minden más esetben hamis. A konjunkció tagadása:

NEM (*A* **ÉS** *B*) = **NEM** *A* **VAGY** **NEM** *B*

Diszjunkció (megengedő vagy)**:** két kijelentés VAGY-gyal összekapcsolva. Az új kijelentés akkor igaz, ha bármelyik vagy mindkét kijelentés logikai értéke igaz. Akkor hamis, ha mindkét kijelentés hamis. A diszjunkció tagadása:

NEM (*A* **VAGY** *B*) = **NEM** *A* **ÉS NEM** *B*

Módszertani megjegyzés: A logikai műveletekhez kapcsolódó feladatokat csoportmunkában, **totó** segítségével végezzük. A totó a tanári modulban sokszorosításra rendelkezésre áll.
A totó megoldása: 1,1,1,1,X,X,X,X,2,1,X,X,2,X.

Feladatok

1. Döntsd el, hogy kijelentések-e az alábbi mondatok! Amelyik kijelentés, annak add meg a tagadását is!

a) Szépen süt a nap. b) A matematika mindenki kedvenc tantárgya.

c) Az angolt könnyű megtanulni. d) Havazik.

e) $2 < 3$. f) $5 \geq 5$.

Megoldás:

a) Nem szépen süt a nap.

Van, aki szerint ez nem kijelentés, mivel nem egyértelmű, hogy mikor süt „szépen" a nap. Ez azonban az emberek túlnyomó többsége számára ugyanazt jelenti, és eldönthető.

b) Nem mindenki kedvenc tantárgya a matematika.

c) nem kijelentés, hiszen lehet, akinek könnyű, és lehet, akinek nem.

d) Nem havazik.

e) $2 \geq 3$.

f) $5 < 5$.

2. Mi a logikai értéke a következő kijelentéseknek:

a) Az $x < 10$ ($x \in \mathbf{Z}$) egyenlőtlenségnek megoldása az 5.

b) Az $2x+3 < 15$ ($x \in \mathbf{N}$) egyenlőtlenségnek megoldása az 5.

c) Az $y = 2x–4$ egyenes zérushelye 2.

d) A (–3; 10) pont rajta van az $y = –3x–1$ egyenletű egyenesen.

e) A 2; 5; 8; 12; 14 adatsor mediánja 8 és átlaga is 8.

f) A 2; 3; 5; 5; 8; 13; 16; 22; 26 adatsor mediánja 2 vagy módusza 5.

g) Van olyan háromszög, amelynél a köré írt kör középpontja a háromszög egyik oldalán van.

h) Nincs olyan rombusz, amelynek az átlói egyenlő hosszúak.

i) 4-nek a négyzete 16, és csak 4-nek a négyzete 16.

j) Egy 29 fős osztályban 8 tanuló furulyázik, 7 zongorázik, 3 tanuló mindkét hangszeren játszik. Ekkor igaz az, hogy 16 tanuló se nem furulyázik, se nem zongorázik.

Megoldás:

a) i; b) i; c) i; d) h; e) medián: 8, átlag: 8,2, az ÉS miatt: hamis; f) medián: 8, módusz: 5, a VAGY miatt igaz; g) i; h) h; i) h; j) $29-(8+7-3)=17$ fő nem zenél: hamis.

3. Tagadd a következő kijelentéseket:

a) Holnap esni fog.

b) $-2>4$.

c) 1972 áprilisában nagy esőzések voltak.

d) Elmegyek, és veszek mozijegyet.

e) A széf kombinációja 11-gyel és 5-tel is osztható szám.

f) A szemtanú vagy nem látta az esetet, vagy elfutott.

g) Az étkezési hozzájárulást kifizetik, vagy egy részét természetben térítik.

Megoldás:

a) Holnap nem fog esni.

b) $-2\le 4$.

c) 1972 áprilisában nem voltak nagy esőzések.

d) Nem megyek el, vagy nem veszek mozijegyet.

e) A széf kombinációja nem osztható 11-gyel vagy 5-tel.

f) A szemtanú látta az esetet és nem futott el.

g) Az étkezési hozzájárulást nem fizetik ki, és egy részét sem térítik meg természetben.

4. Adj meg olyan feltétel(eke)t, hogy az alábbi állítások igaz kijelentéssé váljanak!

a) x és 15 legnagyobb közös osztója 5.

b) n piros és 10 fehér golyó van egy kalapban. Véletlenszerűen kihúzva egy golyót, a piros valószínűsége 0,6.

c) Az e: $y=2x-4$ egyenes egyik pontja: $(3, y_0)$.

d) Egy s síkidom átlói felezik a szögeket, vagy merőlegesen metszik egymást.

Megoldás:

a) végtelen sok ilyen szám van; x lehet 5, 10, 20, 25, 35, stb.

b) $\frac{n}{n+10} = 0{,}6$, megoldása $n = 15$;

c) $y_0 = 2 \cdot 3 - 4 = 2$;

d) s lehet rombusz, deltoid, szabályos nyolcszög, stb.

Módszertani megjegyzés: Javasolt feladatok diagnosztikához:

1. Kijelentés-e a következő mondat (indokold az állításodat)? Ha igen, mi a logikai értéke?

a) Júlia szép leány.

b) A paralelogramma átlói általában nem felezik a paralelogramma szögeit.

c) A trapéz azonos száron fekvő szögei mellékszögpárt alkotnak.

Megoldás: a) nem kijelentés; b) kijelentés, igaz; c) kijelentés, hamis (társszögek).

2. Tagadd a következő kijelentéseket:

a) Vagy piros autót veszek, vagy Suzukit.

b) Elmegyek az erdőbe és nem vágok ki fát.

Megoldás: a) Nem piros autót veszek, és nem Suzukit.

b) Nem megyek el az erdőbe, vagy kivágok egy fát.

II. Az implikáció

Módszertani megjegyzés: Javasoljuk, hogy a mintapéldákat frontális módszerrel oldjuk meg.

A hétköznapi életben beszélgetéseink során sokszor meg kell védenünk saját álláspontunkat másokéval szemben. Ennek eszközei a következtetés, logikus érvelés, bizonyítás. Az érvelés tudománya kultúránként eltérhet. A retorika, melynek nagy mesterei voltak Empedoklész, Platón, Arisztotelész, Cicero, Tacitus, a középkorban a hét szabad mesterség egyikeként a triviumon belül helyezkedett el. Érdekes a tibeti lámák tanulási stílusa: teológiai vitákon keresztül tanulnak, melynek során az érvelésüket széles tapsmozdulattal kísérik, miközben nagyot dobbantanak a lábukkal.

Mintapélda$_1$

Ha este hideg lesz, akkor kabátot fogok felvenni.

Miről nyilatkozik a fenti állítás? Mikor mondhatjuk, hogy a fenti állítás nem igaz?

Megoldás:

A feltételhez kötött állításokat HA – AKKOR kapcsolattal fejezzük ki. A fenti állítás akkor nem teljesül, ha hideg lesz, de mégsem veszek kabátot. Ha nem lesz hideg, arról a mondat nem nyilatkozik, ezért nem mondhatjuk, hogy nem igaz (logikai értéke igaz lesz).

hideg lesz	kabátot veszek	Ha este hideg lesz, akkor kabátot fogok felvenni.
igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis
hamis	igaz	igaz
hamis	hamis	igaz

Módszertani megjegyzés: A következő mintapéldát a matematika iránt érdeklődő tanulóknak ajánljuk.

Mintapélda$_2$

Milyen a és b számokra teljesül, hogy ha $a < b$, akkor $a^2 < b^2$?

Milyen számok esetén mondhatjuk, hogy nagyobb számnak a négyzete is nagyobb?

Megoldás:

Ez szintén HA – AKKOR kapcsolat, azonban **most nem tudjuk előre megmondani, hogy igaz, vagy hamis az állítás. A feltételnek megfelelő számokat nekünk kell megkeresnünk.** Ebben az esetben körültekintően kell eljárnunk, ui. mondhatnánk, hogy a feladat megoldása: a>0 és b>0. Azonban találunk más példákat is: például $a= -3$; $b=4$. Pontosítva a megoldás: ha $|a| < |b|$, akkor $a^2 < b^2$. (Így minden ilyen a-ra és b-re teljesül az állítás.)

Amikor HA – AKKOR kapcsolattal két kijelentést összekapcsolunk, akkor új kijelentés keletkezik. Ezt a kapcsolatot **implikációnak** nevezzük. Általános alakja:

HA feltétel, AKKOR következmény.

Az implikáció logikai értéke hamis, ha a feltétel igaz, és a következmény

Az implikáció más nyelvi elemekkel is kifejezhető. Például: „hideg esetén kabátot veszek", „kabátot veszek, ha hideg lesz" stb. A feltételt szokták nevezni az implikáció **előtagjának**, a következményt az **utótagjának.** Nem biztos, hogy az előtag és az utótag szerep megegyezik a két állítás mondatbeli sorrendjével. **Az implikáció megfordítása az előtag és az utótag cseréjét jelenti.**

Mintapélda$_3$

A következő következtetés kicsit furcsára sikeredett:

Ha zöld a lámpa, este sötét van.

Az ilyen típusú következtetéseknek a hétköznapi életben semmi értelme, de a matematikai logikában van igazságértéke: igaz, hiszen az utótag igazságértéke igaz. Azt mondjuk, hogy nincs kapcsolat az előtag és az utótag között.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: Javasoljuk, hogy a feladatmegoldást csoportmunkában végezzük.

5. Helyes következtetéseket fogalmaznak-e meg a következő implikációk?

a) Ha elmegyünk a butikba, vehetünk zöldséget.

b) Ha egy trapéz tengelyesen szimmetrikus, akkor kör írható köré.

c) Ha sokat dolgozunk, sok pénzt fogunk keresni.

d) Ha egy háromszög tengelyesen szimmetrikus, az biztosan szabályos.

Megoldás:

a) helytelen; b) helyes; c) helytelen; d) helytelen.

6. Határozd meg, hogy az alábbi implikációk esetén mi a feltétel, és mi a következmény. Fordítsd meg a feltételt és a következményt, és írd le a megfordított implikációt! Fogalmazd át az implikációkat!

a) Ha fúj a szél, akkor hajladoznak a virágok.

b) Ha éjszaka van, akkor sötét van.

c) Derékszögű háromszögben a befogók négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével.

d) A deltoid átlói merőlegesek egymásra.

e) Egy szám 15-tel is osztható, amennyiben 3-mal és 5-tel is.

Megoldás:

a) felt.: fúj a szél; köv.: hajladoznak a virágok; megfordítás: „Ha hajladoznak a virágok, akkor fúj a szél”; Szélben hajladoznak a virágok.

b) felt.: éjszaka van; köv.: sötét van; megfordítás: „Ha sötét van, akkor éjszaka van.”; Éjjel sötét van.

c) felt.: a háromszög derékszögű; köv.: a befogók négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével; megfordítás: „Ha egy háromszögben a befogók négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével, akkor az derékszögű.” Annak, hogy egy háromszögben a befogók négyzetösszege egyenlő legyen az átfogó négyzetével, szükséges feltétele, hogy derékszögű legyen.

d) felt.: a négyszög deltoid; köv.: az átlók merőlegesek egymásra; megfordítás: „Ha egy négyszögben az átlók merőlegesek egymásra, akkor az deltoid.” Ha egy négyszög deltoid, akkor az átlók merőlegesek egymásra.

e) felt.: a szám osztható 3-mal és 5-tel; köv.: osztható 15-tel; „Ha egy szám osztható 15-tel, akkor 3-mal is 5-tel is.” Egy szám 15-tel való oszthatóságának szükséges feltétele a 3-mal és 5-tel való oszthatóság.

7. Keress feltételt, illetve következményt az alábbi implikációkhoz!

a) Ha egy kör átmérőjének két végpontját összekötjük a körvonal bármely más pontjával, …

b) Ha bizonyos pontok távolsága a sík egy adott *O* pontjától ugyanannyi, …

c) Ha egy négyszögnek egyenlők az átlói, akkor…

d) Ha egy négyszög deltoid, …

e) Ha …, akkor $a < a^2$.

f) Ha egy egyenes egyenlete $y = 3x - 2$, akkor …

Megoldás:

a) akkor derékszögű háromszöget kapunk;

b) akkor azok egy O középpontú körön helyezkednek el;

c) például: az lehet szimmetrikus trapéz.;

d) például: a szimmetriatengely felezi a másik átlót,; e) $a < 0$ vagy $a > 1$; f) –2-nél metszi az y tengelyt; vagy rajta van a (0; –2) pont; stb.

8. Keress összetartozó feltétel – következmény párosokat, és írd le az implikációkat. Több feltételt és következményt is összekapcsolhatsz ÉS és VAGY kapcsolattal is.

Feltételek
egy szám osztható 3-mal és 2-vel
egy szám 0-ra végződik
egy páros szám számjegyeinek összege $3n$ ($n \in \mathbf{N}^+$) alakban írható fel
egy szám osztható 30-cal
egy szám páros négyzetszám

Következmények
a szám osztható 2-vel és 5-tel
a szám osztható 3-mal
a szám osztható 6-tal
a szám osztható 4-gyel
a szám osztható 100-zal

Megoldás: például ha egy szám 0-ra végződik, akkor osztható 2-vel és 5-tel.

9. Elemezd a következő mondatok feltételét és következményét, majd mondatonként válaszd ki a megfelelő kategóriát!

	Előtag	Utótag	Kapcsolat az előtag és az utótag között
a)	igaz – hamis	igaz – hamis	van – nincs
b)	igaz – hamis	igaz – hamis	van – nincs

a) A háromlábú szék sohasem billeg, mert a térben három pont egyértelműen meghatároz egy síkot.

b) A tengelyes tükrözés szimmetriát eredményez, ezért a szabályos ötszög tengelyesen szimmetrikus.

Megoldás: a) igaz, igaz, van; b) igaz, igaz, nincs.

III. Az ekvivalencia

Módszertani megjegyzés: Javasoljuk, hogy a mintapéldákat frontális munkával oldjuk meg.

Vizsgáljuk meg az alábbi kijelentést:

Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 3-mal és 2-vel, ha osztható 6-tal.

A matematikában az **„akkor és csak akkor”** azt jelenti, hogy egy állítás megfordítható:

Ha egy természetes szám osztható 3-mal és 2-vel, akkor osztható 6-tal.
Ha egy természetes szám osztható 6-tal, akkor osztható 3-mal és 2-vel.

Ez két implikáció, amelyek egymás megfordításai. Mindkettő igaz állítás, ezért azt mondjuk, hogy a kijelentések megfordíthatók.
Az „AKKOR ÉS CSAK AKKOR” kapcsolat a megfordíthatóságot fejezi ki.

Mintapélda$_4$

Megfordítható-e az alábbi kijelentés: **Ha egy szám osztható 9-cel, akkor nem prím.**

Megoldás:

Ez önmagában igaz állítás, és a megfordítása így hangzik:

Ha egy szám nem prím, akkor osztható 9-cel.

Ez nyilván hamis állítás, tehát a kijelentés nem megfordítható. A fenti mondat nem ekvivalencia.

Ekvivalenciának nevezzük az

AKKOR ÉS CSAK AKKOR

kapcsolattal kifejezett logikai műveletet. Az ekvivalencia logikai értéke akkor igaz, ha a két állítás logikai értéke megegyezik.

Az ekvivalens állítások tehát egymásból következnek. Az „akkor és csak akkor” tételeknek a matematikában nagy jelentősége van: ha egyik kijelentés teljesül, akkor az automatikusan magával vonja a másik kijelentés tényét. Például ha egy háromszög derékszögű, akkor tudjuk, hogy két befogót ismerve hogyan számítjuk ki az átfogót, mert a háromszög „derékszögűsége” maga után vonja az oldalakra vonatkozó, jól ismert összefüggést.

Szükséges és elégséges feltétel

Vizsgáljuk meg, hogy mit mond ki a Pitagorasz-tétel. A tétel szövege: „egy derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével”. Feltétel: a háromszög derékszögű; következmény: érvényes az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés.

$$\text{Derékszögű háromszög} \Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Ha a tételt megfordítjuk, másik állítást kapunk:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow \text{Derékszögű háromszög}$$

Megfogalmazva: Ha egy háromszög oldalaira érvényes az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés, akkor a háromszög derékszögű. Ez a tétel szintén igazolható.

$$\text{Derékszögű háromszög} \underset{\text{Pitagorasz-tétel megfordítása}}{\overset{\text{Pitagorasz-tétel}}{\rightleftarrows}} a^2 + b^2 = c^2$$

A két tétel össze is kapcsolható: **egy háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha oldalaira teljesül az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés.**

Más megfogalmazásban:

Annak, hogy egy háromszög derékszögű legyen, *szükséges és elégséges feltétele* az, hogy az oldalaira teljesüljön az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggés.

A szükséges és elégséges feltételek használatát jól mutatja a következő mintapélda. Tudjuk, hogy a 3-mal és a 9-cel való oszthatóság között kapcsolat van:

$$\text{9-cel oszthatóság} \Longrightarrow \text{3-mal oszthatóság}$$

$$\text{3-mal oszthatóság} \not\Longrightarrow \text{9-cel oszthatóság}$$

A 3-mal való oszthatóság szükséges, de nem elégséges feltétele a 9-cel való oszthatóságnak.

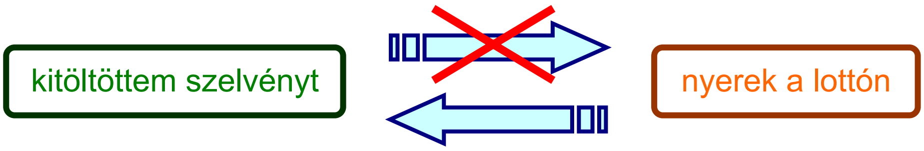
A 9-cel való oszthatóság elégséges, de nem szükséges feltétele a 3-mal való oszthatóságnak.

Mintapélda$_5$

Fogalmazzuk meg a „*szükséges*” és az „*elégséges*” felhasználásával a következő kijelentések közötti kapcsolatot: nyerek a lottón, és töltöttem ki szelvényt.

Megoldás:

Segítségül a kapcsolatot rajzzal szemléltethetjük:



Kitöltöttem szelvényt: ez szükséges, de nem elégséges feltétele annak, hogy nyerjek.

Az **„akkor”** az elégséges, a **„csak akkor”** a szükséges feltételt fogalmazza meg az ekvivalenciában.

Feladatok

Módszertani megjegyzés: Alkalmazhatjuk a „füllentős” játékot például a 10. és 11. feladatnál. Két példa legyen hibátlan, de egy legyen hibás!

10. Gyűjtsetek példákat a hétköznapi élet és a matematika területeiről, amelyekben használhatók a „*szükséges”*, illetve az „*elégséges”* szavak! Legyenek benne „*szükséges és elégséges*” jellegű mondatok is!

11. Gyűjtsetek példákat a hétköznapi élet és a matematika területeiről ekvivalenciákra!

12. Mondjatok olyan kijelentéseket, amelyek szükségesek, illetve elégségesek a következő kijelentésekkel kapcsolatban. Fogalmazzatok meg olyan mondatokat is a segítségükkel, amelyekben szerepelnek a nem elégséges, valamint a nem szükséges szókapcsolatok is.

Például a kijelentés: leáll az autó. Ehhez megfogalmazhatók a következő implikációk:

Ha kifogy a benzin, akkor biztosan leáll az autó.

Annak, hogy leálljon az autó, elégséges feltétele, hogy kifogyjon a benzin.

Annak, hogy leálljon az autó, nem szükséges feltétele, hogy kifogyjon a benzin.

a) Elkaptam az influenzát.

b) Egy négyszögnek van párhuzamos oldalpárja.

c) Egy szám osztható 4-gyel.

13. Helyes-e a következő ítéletekben az ekvivalencia használata? Fogalmazd át úgy a mondatokat, hogy tartalmazzák a *szükséges*, illetve az *elégséges* kifejezéseket!

a) 15 osztója a-nak akkor és csak akkor, ha 5 osztója a-nak.

b) Egy négyszög átlói merőlegesek egymásra akkor és csak akkor, ha a négyszög rombusz.

c) A háromszög köré írt körének középpontja akkor és csak akkor esik a leghosszabb oldal felezőpontjába, ha a háromszög derékszögű.

Megoldás:

a) Nem helyes, mert visszafelé nem teljesül; A 15-tel való oszthatóság szükséges feltétele az 5-tel való oszthatóság. Az 5-tel való oszthatóságnak elegendő feltétele a 15-tel való oszthatóság. A 15-tel való oszthatóságnak nem elégséges feltétele az 5-tel való oszthatóság (például 10 nem osztható 15-tel).

b) Odafelé nem teljesül (például deltoid); Az átlók merőlegességének elégséges feltétele, hogy a négyszög rombusz legyen. Hogy a négyszög rombusz legyen, annak nem elégséges feltétele, hogy az átlók merőlegesek legyenek egymásra.

c) Hogy háromszög köré írt körének középpontja a leghosszabb oldal felezőpontja legyen, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a háromszög derékszögű legyen.

IV. Skatulyaelv

Módszertani megjegyzés: A skatulyaelv nem a középszintű érettségi anyaga. Ha a törzsanyag feldolgozása után marad idő, akkor javasoljuk ennek a fejezetnek a feldolgozását.

Mintapélda$_6$

Módszertani megjegyzés: A tapasztalatszerzést feladatlap segítségével, csoportmunkában végezzük.

Gondold át az A és a B esetet:

A: Van 15 gyufaszálam és 10 dobozom, amelyekbe a gyufaszálakat rakhatom.

B: Van 10 gyufaszálam és 15 dobozom, amelyekbe a gyufaszálakat rakhatom.

Válaszd ki, hogy melyik állítás biztosan igaz (I), melyik hamis (H), és melyik lehet igaz is és hamis is (L)!

		A	B
1.	Minden dobozba kerül gyufaszál.		
2.	Minden gyufa egy dobozba kerül.		
3.	Pontosan egy üres gyufásdoboz van.		
4.	Biztosan van olyan doboz, amiben pont egy gyufa van.		
5.	Biztosan van olyan doboz, amibe legalább egy gyufa kerül.		
6.	Biztosan van olyan doboz, amibe legfeljebb egy gyufa kerül.		
7.	Biztosan van olyan doboz, amibe kettő gyufa kerül.		
8.	Biztosan van olyan doboz, amibe egynél több gyufa kerül.		
9.	Biztosan van legalább egy üres doboz.		
10.	Két üres gyufásdoboz van.		
11.	Legalább két üres doboz van.		
12.	Legfeljebb két üres doboz van.		
13.	Biztosan van 3 üres gyufásdoboz.		
14.	Biztosan van legalább két olyan gyufásdoboz, amibe több gyufa kerül.		

Megoldások: (I: biztosan igaz; H: biztosan hamis; L: lehet igaz is és hamis is)

A1: L; A2: L; A3: L; A4:H; A5: I; A6: I; A7: H; A8: I; A9: H; A10: L; A11: L; A12: L; A13: H; A14: H; B1: H; B2: L; B3: H; B4: H; B5: I; B6: I; B7: H; B8: H; B9: I; B10: H; B11: I; B12: H; B13: I; B14: H;

A megfogalmazások jól mutatják, hogy amikor valamit kimondunk, törekedjünk a pontosságra és az egyértelmű megfogalmazásra. Egy-egy apró megjegyzés vagy változtatás nagy hatással lehet a mondanivalónk megértésére és jelentésére.

A B esetben kevesebb a gyufa, mint a doboz, maradnia kell üres doboznak. Előfordulhat olyan eset is, hogy 1–1 gyufa van 10 dobozban (ekkor öt üres doboz is van), vagy minden szálat egy dobozba raktunk (ekkor 14 üres doboz van). Tehát legalább öt üres doboz marad (öt vagy több). Az is elmondható, hogy legfeljebb 14 üres doboz van, vagyis az üres dobozok száma 5 és 14 között lehet.

Mi a helyzet 13 gyufaszál és 12 doboz esetén? Milyen állításokat tudunk megfogalmazni?

Most több gyufa van, mint doboz. Ebből az következik, hogy biztosan van olyan doboz, amiben egynél több szál gyufa található. Ha úgy rakom szét a gyufákat, hogy minden dobozba rakok egy szálat, akkor marad még 1 gyufaszál, amit el kell raknom valahová: teljesül az állítás.

Elmondható-e ez 12 gyufa és 12 doboz esetén?

Természetesen nem, mert az is előfordulhat, hogy minden dobozba jut 1-1 gyufaszál. Tehát nem mondható el, hogy „*biztosan*” marad üres doboz, vagy lenne legalább két gyufát tartalmazó. Előfordulhat, hogy van üres doboz, de az is, hogy nincs, és hogy a dobozokban egy vagy több szál van. Az viszont elmondható, hogy **akkor és csak akkor van üres doboz, ha van olyan doboz, amibe több szál gyufát is raktunk.**

Módszertani megjegyzés: Az általánosítást tanári irányítással és magyarázattal, frontális munkában végezzük.

Skatulyaelv:

ha *k* tárgyat kell *n* dobozban elhelyezni, akkor a következőket mondhatjuk:

- $k < n$ esetén biztosan marad legalább $n - k$ üres doboz
- $k > n$ esetén van legalább egy olyan doboz, amiben legalább két tárgy van.

Módszertani megjegyzés: A mintapéldák feldolgozását feladatlap segítségével, szakértői mozaik módszerrel végezzük. A feladatlap a tanári modulban sokszorosításra rendelkezésre áll.

Mintapélda$_7$

Egy kalapban van 5 piros, 5 fehér, 5 sárga és 5 kék golyó. Legalább mennyit kell kihúzni becsukott szemmel, hogy biztosan legyen közöttük mind a négy színű golyóból?

Megoldás: Legrosszabb esetben kihúzok egymás után 5-5-5 azonos színűt, tehát legalább 16 golyót kell kihúznom. (Legszerencsésebb esetben az első 4 húzásra 4 különböző színűt húzok, de azt nem mondhatom, hogy biztosan elég 4 húzás; mindig a legrosszabb esetre kell gondolni.)

Mintapélda$_8$

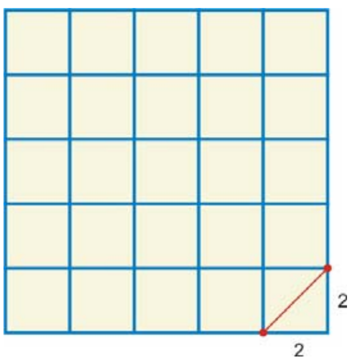
Adott 1 és 10 között 6 egész szám. Igazoljuk, hogy van köztük legalább két olyan, amelyek összege páratlan.

Megoldás: 1-től 10-ig 5 páros, és 5 páratlan szám van. A 6 egész szám között biztosan van 2 olyan, aminek a paritása eltérő, így azok összege páratlan.

Mintapélda$_9$

Egy 10 cm oldalú, négyzet alakú céltáblára véletlenszerűen lövünk 26 lövedéket. Igaz-e, hogy van közöttük legalább 2, amelyek távolsága legfeljebb 3 cm?

Megoldás: A 10x10-es tábla felbontható 25 darab, 2x2 cm-es kis négyzetre. A 26 lövedék között biztosan van 2 olyan, amelyik azonos négyzetbe csapódik be, és ezek maximális távolsága a négyzet átlója: $2\sqrt{2} \approx 2{,}83$. Ennél a 3 nagyobb, ezért van két olyan lövedék, amelynek a távolsága legfeljebb 3.



Mintapélda$_{10}$

Igazoljuk, hogy egy 22 fős osztályban van legalább 4 tanuló, akik a hétnek ugyanazon a napján születtek!

Megoldás: A skatulyaelv szerint a hét minden napjára elhelyezve 22 tanulót lesz legalább egy nap, amelyre 4 kerül. A „legrosszabb eset” elve szerint: ha minden napra 3 tanuló jutna, akkor 21 tanuló járna az osztályba, tehát a 22-ediknek valamelyik naphoz kell kapcsolódnia, negyedikként.

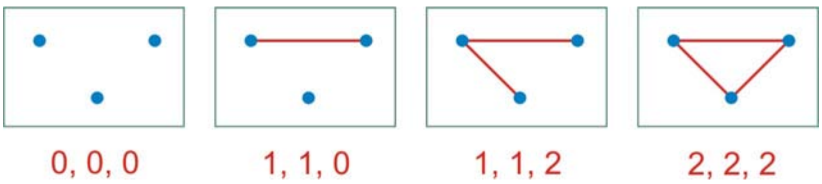
Módszertani megjegyzés: A kiegészítő anyag az indirekt bizonyítást mutatja be egy skatulyaelvvel megoldható mintapéldán keresztül.

Indirekt bizonyítási módszer (kiegészítő anyag)

Mintapélda$_{11}$

Megmutatjuk, hogy egy társaságban mindig akad legalább két olyan ember, akinek azonos számú ismerőse van a társaságban, ha az ismeretség kölcsönös.

Megoldás:
- Vizsgáljuk meg 2 fős társaságban: vagy nem ismerik egymást, és ekkor mindkettőjüknek 0 ismerőse van, vagy ismerik egymást, és ekkor mindkettőjüknek 1 ismerőse van a társaságban.
- 3 fős társaságban az ismeretségeket ***gráfokkal*** is szemléltethetjük, azaz az embereket pontokkal jelöljük, és két pontot akkor kötünk össze egy szakasszal, ha az emberek ismerik egymást.



- Általánosítsunk: tegyük fel, hogy n fős társaságban mindenkinek különböző számú ismerőse van: 0, 1, 2, …, $n-1$. Az $n-1$ ismerőssel rendelkező ember mindenkit ismer, tehát nem lehet olyan, aki senkit nem ismer. Ha viszont van olyan a társaságban, aki senkit sem ismer, akkor egyiküknek sem lehet $n-1$ ismerőse. Ez azt jelenti, hogy a 0 és az $n-1$ ismeretség közül legfeljebb csak az egyik teljesülhet. Ez ellentmondás, vagyis nem lehet mindenkinek különböző számú ismerőse. Beláttuk, hogy van legalább két olyan ember, akinek azonos számú ismerőse van a társaságban.

A fenti gondolatmenet az **indirekt bizonyítás** példája, amit a matematikában sokszor alkalmazunk. Lényege, hogy az eredeti állítás ellenkezőjét (tagadását) tesszük fel, és ezt kezdjük el bizonyítani. A végén ellentmondáshoz jutunk. Tehát célunk az, hogy a bizonyítás során találjunk egymásnak ellentmondó tényeket. Ezzel látjuk be, hogy a feltételezett állítás tagadása lehetetlen (hamis), és ekkor épp az ellenkezője (az eredeti állítás) teljesül.

Indirekt bizonyítási módszerrel még találkozni fogunk ebben a tanévben, például annak bizonyítására, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális szám. **Indirekt (fordított irányú) bizonyítást akkor alkalmazunk, ha az állítás bebizonyításánál sokkal könnyebb igazolni azt, hogy az állítás tagadása (ellenkezője) nem teljesül.**

Módszertani megjegyzés: A feladatok megoldását önálló munkában végezzük.

Feladatok

14. Egy osztályban az osztálylétszám 25 fő, és egy dolgozatnál van A, B és C csoport. Igazold, hogy van legalább 9 olyan tanuló, aki azonos csoportba kerül!

Megoldás:

Legrosszabb esetben minden csoportba 8-8 tanuló kerül, de marad még 1 tanuló, akit valamelyik csoportba be kell sorolni.

15. 4-féle pizzából rendeltek. Legalább hány fős társaság esetén mondhatjuk el, hogy biztosan van olyan pizza, amelyet legalább 3 fő rendelt?

Megoldás:

Ez 9 fő esetén garantálható, ui. ha minden pizzából két ember rendelt (legrosszabb eset elve), akkor még egy rendelésre szükség van.

16. Mennyi az a legkisebb vevőszám egy DVD-boltban, amikortól elmondható, hogy egy kategóriából legalább 3 ember vásárolt? A kategóriák: romantikus, horror, akciófilm, vígjáték, mese.

Megoldás: 11 fő esetén garantálható (legrosszabb eset elve).

17. Legalább hány fős az osztály, ha teljesül, hogy legalább 3 tanuló biztosan ugyanabban a hónapban született?

Megoldás: 25 fő.

18. Igazold a következő állítást: ha egy sorban, 12 széken ül 9 ember, akkor van 3 olyan szomszédos szék, amelyen ülnek emberek.

Megoldás:

Ha párosával ülnének úgy, hogy nem teljesül az állítás, akkor legfeljebb 4-szer 2 fő és még 1 üres szék lenne, azaz 12 széken 8 ember ülne. Így egy fő azonban kimarad. Őt egy üres székre ültetve teljesül az állítás.

19. Adott n házaspár. A $2n$ ember közül mennyit kell kiválasztanunk, hogy biztosan akadjon közöttük házaspár?

Megoldás: $n+1$ embert.

20. Egy főiskolán 3 szakra lehet felvételizni, de egy személy csak egyre jelentkezhet. Legalább hányan felvételiztek, ha biztosan van olyan szak, ahová legalább 24 ember jelentkezett?

Megoldás: 3x23+1 = 70 fő.

21. Egy szakképző központban 10-féle szakmát lehet tanulni. Hány tanuló esetén mondható el, hogy biztosan van olyan szakma, amit legalább 8 ember tanul?

Megoldás: 71 tanuló esetén $(7 \cdot 10 + 1)$.

22. Egy utazási iroda 6 horvátországi utat ajánl nyárra. Legalább hány jelentkező esetén mondhatjuk el, hogy biztosan van olyan út, amire legalább 8 ember jelentkezett?

Megoldás: 43 fő.

23. Adott 7 pont egy 1 cm sugarú körben. Igazold, hogy van legalább két olyan pont, amelyek 1 cm-nél közelebb vannak egymáshoz!

Megoldás:

6 egyforma körcikkre osztva a kört mindig van olyan körcikk, amelyikbe legalább 2 pont esik. 1-1 körcikken belül a maximális távolság r, vagyis 1 cm.

Kislexikon

Ha HA – AKKOR kapcsolattal két kijelentést összekapcsolunk, akkor új kijelentés keletkezik. Ezt a kapcsolatot **implikációnak** nevezzük. Általános alakja:

HA feltétel, AKKOR következmény.

Az implikáció logikai értéke hamis, ha a feltétel igaz, és a következmény hamis. Minden más esetben az implikáció logikai értéke igaz.

Ekvivalenciának nevezzük az **„AKKOR ÉS CSAK AKKOR”** kapcsolattal kifejezett logikai műveletet. Az ekvivalencia logikai értéke akkor igaz, ha a két állítás logikai értéke megegyezik. Az „akkor és csak akkor” kapcsolatot a matematikában olyan tételeknél használjuk, amelyek oda-vissza érvényesek („megfordíthatók”).

Skatulyaelv: ha k tárgyat kell n dobozban elhelyezni, akkor a következőket mondhatjuk:

$k < n$ esetén biztosan marad legalább $n–k$ üres doboz

$k > n$ esetén van legalább egy olyan doboz, amiben legalább két tárgy van.