

MATEMATIKA „A”

10. évfolyam

**14. modul**

**Számtani és mértani közép, nevezetes egyenlőtlenségek**

Készítette: Vidra Gábor

<b>A modul célja</b>	A számítási közép ismételése, a számítási és a mértani közép összefüggésének ismerete. Feladatok megoldása, a hasonlóság anyagában található mértani közép tételek alkalmazásának elmélyítése.
<b>Időkeret</b>	4 óra
<b>Ajánlott korosztály</b>	10. évfolyam
<b>Modulkapcsolódási pontok</b>	Hasonlóság, statisztika, másodfokú kifejezések azonos átalakításai, négyzetgyökvonás azonosságai. Függvények, differenciálszámítás.
<b>A képességfejlesztés fókuszai</b>	Pontos szövegértés, szövegelemzés, a metakogníció fejlesztése. Következtetés a speciális, a konkrét megfigyelésektől az általános esetre, az induktív gondolkodás fejlesztése. A valós számok és a számegegyenes pontjai közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. A szélsőérték fogalmának elmélyítése a számítási és a mértani közép közötti összefüggés segítségével, amely az alulról, illetve a fölülről történő becslés képességét is fejleszti. A lehetséges alkalmazások megkeresése, a tanult új ismeret beillesztése a korábbi ismeretek rendszerébe, a rendszerező szemlélet alakítása.

## AJÁNLÁS

A modul órakerete lehetőséget ad a következő, a tanulócsoporthoz tudásszintjétől függő célok teljesítésére:

- a számítási és a mértani közép fogalmának és kapcsolatuknak az ismerete, ábrázolása számegegyenesen;
- algebrai egyenlőtlenségek megoldása a számítási és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával;
- szélsőérték feladatok megoldása a számítási és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával (függvények, geometria);
- szélsőérték feladatok megoldása függvényvizsgálattal;

- szélsőérték feladatok megoldása másodfokú kifejezés azonos átalakításával.

Mint látható, a modul feldolgozása során lehetőségünk van kitekinteni a középszint követelményrendszeréből. A középszintű érettséginek nem követelménye a szélsőérték feladatok megoldása, ezért annak számonkérését nem javasoljuk. A függvényvizsgálat előfordul a vizsgán, a függvényvizsgálattal kapcsolatos mintapélda és feladatok feldolgozását javasoljuk.

## TÁMOGATÓ RENDSZER

A tanári modulhoz tartozik egy tanórákon használható, elméletet és mintapéldákat tartalmazó bemutató. Ez egyrészt Power Point programmal kivetíthető, másrészt fóliára nyomtatva írásvetítővel megjeleníthető. Ezen kívül készíthetünk diákjainknak feladatlapokat a tanári anyagot felhasználva.

## ÓRABEOSZTÁS

<b>Óraszám</b>	<b>Óracím</b>
----------------	---------------

- |    |  |
|----|--|
| 1. | Számítási közép, mértani közép                             |
| 2. | Feladatok mértani közép                                    |
| 3. | A számítási és a mértani közép közötti összefüggés         |
| 4. | Feladatok számítási és mértani közép közötti összefüggésre |

## ÉRETTSÉGI KÖVETELMÉNYEK

**Középszint:** Két pozitív szám számtani és mértani közepének fogalma, kapcsolatuk, használatuk.

**Emelt szint:** Ismerje  $n$  szám számított középértékeit (aritmetikai, geometriai, négyzetes, harmonikus), valamint a nagyságrendi viszonyaikra vonatkozó tételeket. Bizonyítsa, hogy  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ , ha  $a, b \in \mathbb{R}^+$ . Tudjon megoldani feladatokat számtani és mértani közép közötti összefüggés alapján.

## MODULVÁZLAT

	Lépések, tevékenységek	Kiemelt készségek, képességek	Eszköz/ Feladat/ Gyűjtemény
<b>I. Közepek</b>			
1	Bevezetés, ráhangolódás: középértékek	Figyelem, rendszerezés, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás. Frontális munka.	Bemutató
2	Számítási közép és hibája		Bemutató, 1. mintapélda
3	Számolás mértani középpel		Bemutató, 2–5. mintapélda
4	Feladatok megoldása (csoportmunka)	Kommunikáció, kooperáció, metakogníció, szöveges feladatok.	1–14. feladatok

<b>II. A számtani és mértani közép közötti összefüggés</b>			
1.	Az összefüggés tapasztalati megismerése (csoportmunka)	Kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	Bemutató, 6. mintapélda
2.	A számtani és mértani közép közti összefüggés alkalmazása (frontális)	Szöveges feladatok, kombinatív gondolkodás, induktív és deduktív következtetés, elvonatkoztatás.	Bemutató, 6–11. mintapélda
3.	Feladatok megoldása (csoportmunka, differenciáltan)		15–30. feladatok

## I. Közepek

Sok adat (számsokaság) jellemzői között szerepel a legnagyobb és a legkisebb adat, a minta terjedelme (a legnagyobb és a legkisebb elem különbsége), a középértékek (különböző átlagok, közepek) és az adatok középértékek körüli elhelyezkedésére, szétszórtságára jellemző szórás.

Eddigi tanulmányaink során megismerkedtünk néhány középértékkel a statisztika témakörében:

- **Számtani közép vagy átlag:**

**$a$  és  $b$  valós számok számtani közepe**  $A = \frac{a+b}{2}$ , vagyis két szám átlagát (összegük felét) a két szám számtani közepének nevezzük.

- **Módusz:** a számsokaság leggyakoribb adata.
- **Medián:** páratlan számú adat esetén a **rendezett minta** középső eleme, páros számú adat esetén a két középső átlaga.

A számtani közép tehát azonos a köznapi értelemben használt átlag fogalmával. Több szám esetén a két száméhoz hasonlóan számoljuk ki a számtani közepüket: a számok összegét elosztjuk a számok darabszámával:

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \text{ ahol } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ valós számok.}$$

A számtani közép azonban nem minden esetben jellemzi megfelelően az adatokat. Vizsgáljuk meg a következő példát.

### Mintapélda<sub>1</sub>

Egy cégnél 8 ember 90 ezer, 1 ember 140 ezer, és 1 ember 500 ezer forintot keres havonta. Mennyi az átlagkereset?

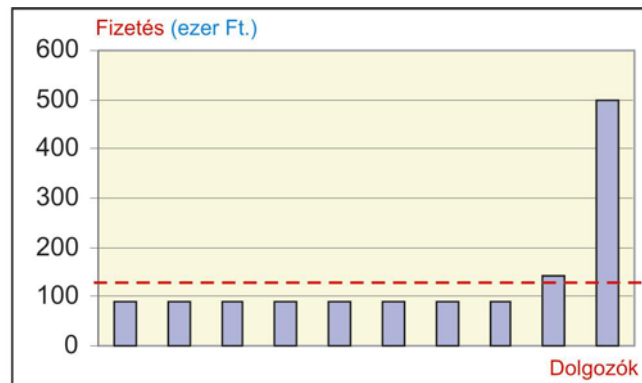
*Megoldás:*

$$\frac{8 \cdot 90000 + 140000 + 500000}{10} = 136000.$$

Ez aligha vigasztalja azokat, akik csak 90 ezer forintot keresnek. Érdeemes lenne kiegészíteni a szórás nagyságával:

$$\sigma = \sqrt{\frac{8 \cdot (136000 - 90000)^2 + (136000 - 140000)^2 + (136000 - 500000)^2}{10}} \approx 122\,246.$$

A szórás nagyságrendje is mutatja az adatok elhelyezkedését. Kiegészíthetjük a megjegyzéssel is, hogy a dolgozók 80%-ának a fizetése az átlagkereset alatt van. Jól szemlélteti a problémát a keresetekből készített oszlopdiagram is.



Tapasztalataink szerint **az átlagot a kiugró adatok elrontják**, ezért szükség van további, az adatsokaságot jellemző, átlag jellegű adatokra (közepekre). Ilyen például a mértani közép.

***a* és *b* pozitív számok mértani közepe:**  $G = \sqrt{a \cdot b}$ , vagyis két pozitív szám szorzatának négyzetgyökét a két szám mértani közepének nevezzük.

A medián, módusz, számtani és mértani közép mellett *egyéb középértékeket* is ismerünk:

- *Harmonikus közép (H):*  $\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$  ( $a, b > 0$ ), az algebrai átalakításokat elvégezve

$$H = \frac{2ab}{a + b}.$$

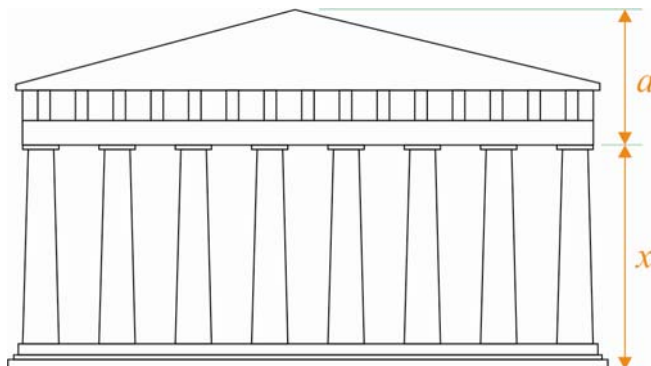
A harmonikus közép jól használható például átlagsebesség vagy áramkörökkel kapcsolatos számításoknál.

- *Négyzetes közép:*  $N = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$  ( $a, b$  valós számok) A négyzetes közepet olyan adatok jellemzésére szoktuk használni, amelyek átlaga nulla.

A mértani közép értelmezhető több szám esetén is, de erre most nem térünk ki. A számtani közepet  $A$ -val jelöljük (aritmetikai közép), a mértani közepet  $G$ -vel (geometriai közép).



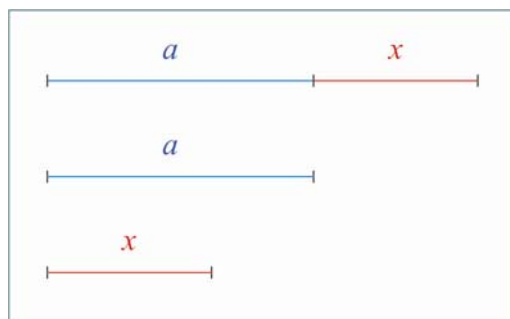
**Módszertani megjegyzés:** Az aranymetszés előfordult a kilencedikes anyagban. Kiadhatjuk kiselőadás vagy projektek témájának ennek újbóli feldolgozását, vagy az aranymetszés történetével, alkalmazásával kapcsolatos (például internetes) kutatást.



A mértani közép az aranymetszéssel is kapcsolatba hozható. Egy szakaszt akkor osztunk fel az aranymetszés szabálya szerint, ha a hosszabb és a rövidebb szakasz hosszának aránya ugyanannyi, mint az egész és a nagyobb szakasz hosszának az aránya:

$$\frac{a}{x} = \frac{a+x}{a} \Rightarrow a^2 = ax + x^2 \Rightarrow a^2 = x(a+x).$$

Innen  $a = \sqrt{x \cdot (a+x)}$ , azaz észrevehetjük, hogy a hosszabb szakasz éppen a rövidebb és az egész szakasz hosszának mértani középarányosa.



### Mintapélda<sub>2</sub>

Számítsuk ki két szám, 2 és 8 számtani és mértani közepét, és ábrázoljuk a közepeket a számgyenesen!

**Megoldás:**

$$A = \frac{2+8}{2} = 5 \quad G = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$



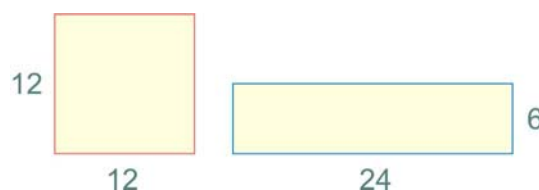
### Mintapélda<sub>3</sub>

Adott egy téglalap, amelynek oldalai 24 és 6 egység. Mekkora a vele egyenlő területű négyzet oldala?

**Megoldás:**

$$\text{A téglalap területe: } T = 6 \cdot 24 = 144.$$

$$\text{A négyzet területe: } T = x^2, \quad x = 12.$$



Éppen  $x = \sqrt{6 \cdot 24}$ , vagyis a négyzet oldala a téglalap oldalainak mértani közepe.

### Mintapélda<sub>4</sub>

Határozzuk meg azt a két pozitív számot, amelyek számtani közepe 10, mértani közepe 8.

*Megoldás:*

Jelöljük  $x$  és  $y$ -nal a keresett számokat!

A számtani közép:  $\frac{x+y}{2} = 10$ , innen  $x+y = 20$ .

A mértani közép:  $\sqrt{x \cdot y} = 8$ , innen  $x \cdot y = 64$ .

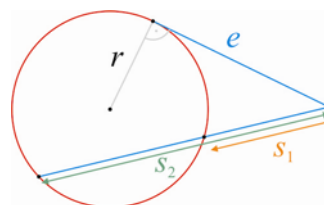
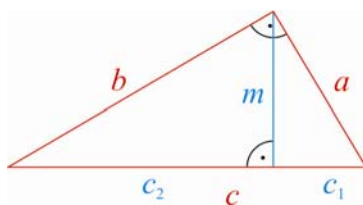
Ebből adódik a  $0 = x^2 - 20x + 64$  másodfokú egyenlet, amelyet megoldva  $x_1 = 16$  és  $x_2 = 4$ .  $y$  értékei:  $y_1 = 20 - 16 = 4$ ,  $y_2 = 20 - 4 = 16$ .

Ellenőrzés után a feladatot a válasz leírásával zárjuk: *a keresett számok 4 és 16.*

A mértani középpel már többször találkoztunk geometriai problémák esetében is, például a hasonlóságnál tanultuk a következőket:

Emlékeztető

- **Magasságtétel:** a derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót két olyan szeletre bontja, amelyek mértani közepe a magasság.
- **Befogótétel:** a derékszögű háromszögben a befogó megegyezik az átfogónak, és az adott befogó átfogóra eső merőleges vetületének mértani közepével.
- **Érintő és szelőszakaszok tétele:** egy külső pontból a körhöz húzott érintőszakasz mértani közép a pontból húzott szelő és a szelőnek a ponttól a körig terjedő darabja között.



$$m = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$$

$$a = \sqrt{c \cdot c_1}$$

$$e = \sqrt{s_1 \cdot s_2}$$

**Módszertani megjegyzés:** A következő mintapélda jobb képességű tanulóknak ajánlott.

## Mintapélda<sub>5</sub>

Az  $ABC$  háromszög  $BC$  oldalának  $C$ -n túli meghosszabbításán levő  $D$  pontra igaz, hogy az  $ABC$  szög egyenlő a  $CAD$  szöggel. Bizonyítsuk be, hogy  $AD$  mértani közepe a  $CD$  és  $BD$  szakaszoknak!

*Megoldás:*


Először igazoljuk, hogy az  $ACD$  háromszög hasonló a  $BAD$  háromszöghöz.

Mindkét háromszög egyik szöge  $\beta$  ( $ABD$  valamint  $DAC$  szögek), s mindkét háromszögnek van egy  $\alpha + \beta$  nagyságú szöge ( $ACD$  és  $BAD$  szögek).

Felírva a megfelelő oldalak arányát:


$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}, \text{ amit átrendezve } AD = \sqrt{CD \cdot BD}, \text{ vagyis az állítást igazoltuk.}$$

## Feladatok

 1. Töltsd ki a táblázat hiányzó részeit! (A: számtani közép, G: mértani közép.)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)
$a$	100	15	2	128	12	120	8	3	0,2	5
$b$	125	20	14	208	18,75	83,33	32	12	1,8	45
$A$	112,5	17,5	8	168	15,375	101,67	20	7,5	1	25
$G$	111,8	17,32	5,29	163,17	15	100	16	6	0,6	15

*Módszertani megjegyzés:* A szürke cellák értéke kiszámolandó. A g) – j) feladatok a mintapéldában bemutatott megoldás szerint másodfokú egyenletrendszerre visszavezethetők. Egyes esetekben az eredmény közelítő érték.

 2. Egy busz a menetidejének első harmadát 60 km/h, fennmaradó részét 90 km/h sebességgel tette meg. Mekkora volt az átlagsebessége?

*Megoldás:*

$$\text{Az út első harmadára } s_1 = 60 \cdot \frac{t}{3} = 20 \cdot t, \text{ a fennmaradó részére } s_2 = 90 \cdot \frac{2t}{3} = 60 \cdot t.$$

$$\text{Az átlagsebesség } \frac{s_1 + s_2}{t} = \frac{20t + 60t}{t} = 80 \text{ (km/h.)}$$

3. Egy autó az út harmadát 60 km/h, kétharmadát 90 km/h sebességgel tette meg. Mekkora volt az átlagsebessége?

*Megoldás:*

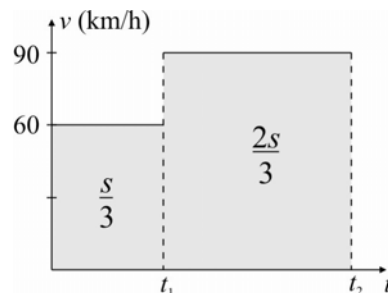
A sebesség--idő koordináta-rendszerben a felrajzolt gra-

fikon alatti területek segítségével  $\frac{s}{3} = 60 \cdot t_1$ , ahonnan

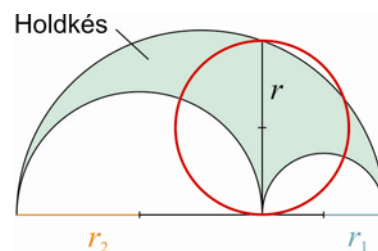
$$t_1 = \frac{s}{180}, \text{ valamint}$$

$$\frac{2s}{3} = 90 \cdot (t_2 - t_1) \Rightarrow s = 135 \cdot (t_2 - t_1) = 135 \cdot t_2 - 135 \cdot \frac{s}{180}.$$

Átrendezve:  $1,75 \cdot s = 135 \cdot t_2$ . Az átlagsebesség  $\frac{s}{t_2} = \frac{135}{1,75} \approx 77,1$  km/h.



4. Az alábbi feladat Arkhimédész *Lemmák* c. könyvében található: fejezd ki a holdkés területét  $r$ -rel! (A holdkés az ókorban használt vágóeszköz volt.)

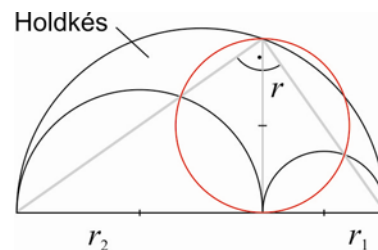


*Megoldás:*

A segédvonalak berajzolása után az ábra szerint Thalész tétele miatt derékszögű háromszöget kapunk.  $r_1$  és  $r_2$  segítségével felírva a holdkés területét kapjuk:

$$T = \frac{(r_1 + r_2)^2 \pi}{2} - \left( \frac{r_1^2 \pi}{2} + \frac{r_2^2 \pi}{2} \right) = r_1 \cdot r_2 \cdot \pi. \text{ A magasságté-}$$

tel szerint  $2r = \sqrt{2r_1 \cdot 2r_2} = 2\sqrt{r_1 \cdot r_2}$ , vagyis  $r = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$ . Ezt  $T$ -be visszahelyettesítve, a holdkés területe  $r^2 \pi$ .



5. Egy derékszögű háromszögben az átfogót a hozzá tartozó magasság 10 és 16 cm-es darabokra osztja. Mekkora a háromszög területe és befogói?

*Megoldás:*

A szokásos jelölésekkel a magasságtétel szerint  $m = \sqrt{10 \cdot 16} \approx 12,65$  cm. A terület

$$T = \frac{m \cdot c}{2} = \frac{12,65 \cdot (10 + 16)}{2} \approx 164,4 \text{ cm}^2. \text{ A befogótétel szerint a befogók:}$$

$$a = \sqrt{10 \cdot (10 + 16)} \approx 16,12 \text{ cm, és } b = \sqrt{16 \cdot (10 + 16)} \approx 20,40 \text{ cm.}$$

6. Egy derékszögű háromszögben az átfogót a hozzá tartozó magasság 3 cm és 5 cm nagyságú részekre osztja. Mekkora a háromszög területe és kerülete?

*Megoldás:*

A szokásos jelölésekkel a magasságtétel szerint  $m = \sqrt{3 \cdot 5} \approx 3,87$  cm. A terület

$$T = \frac{m \cdot c}{2} = \frac{3,87 \cdot (3 + 5)}{2} \approx 15,48 \text{ cm}^2. \text{ A befogótétel szerint a befogók:}$$

$$a = \sqrt{3 \cdot (3 + 5)} \approx 4,90 \text{ cm, és } b = \sqrt{5 \cdot (3 + 5)} \approx 6,32 \text{ cm. A kerület}$$

$$K = 6,32 + 4,90 + 8 = 19,22 \text{ cm.}$$

7. Egy derékszögű háromszögben a befogók aránya 1,5. Az átfogóhoz tartozó magasság 10 cm. Mekkora részekre osztja az átfogót a hozzá tartozó magasság?

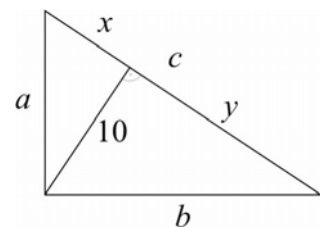
*Megoldás:*

A befogótétel szerint a befogókra felírható:  $a = \sqrt{x(x+y)}$ , és

$$b = \sqrt{y(x+y)}. \text{ Hányadosuk } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{x(x+y)}}{\sqrt{y(x+y)}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}, \text{ ahonnan}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a^2}{b^2} = 1,5^2 = 2,25, \text{ vagyis } x = 2,25y. \text{ A magasságtétel sze-}$$

rint  $m = \sqrt{x \cdot y}$ , ahonnan  $100 = xy = 2,25y^2$ . Innen  $y \approx 6,67$  és  $x = 15$  a keresett szakaszok.




8. Mekkora a derékszögű háromszög köré írható kör sugara, ha a befogók aránya 3 : 4, és az átfogóhoz tartozó magasság az átfogót két olyan szeletre bontja, amelyek különbsége 4 cm?

*Megoldás:*

A befogótétel szerint az  $a$  és  $b$  befogóra, valamint az  $x$  és  $y$  átfogó-szeletre

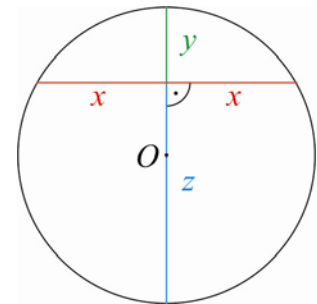
$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{x(x+y)}}{\sqrt{y(x+y)}} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{x}{y}, \text{ amiből } x = y \frac{a^2}{b^2} = \frac{9}{16} y. \text{ A két szelet különbségére}$$


$4 = y - x = y - \frac{9}{16}y = \frac{7}{16}y$ . Ebből  $y = \frac{64}{7} \approx 9,14$  cm,  $x = y - 4 \approx 5,14$  cm. A köré írható kör sugara az átfogó hosszának a fele:  $r = \frac{x+y}{2} \approx 7,14$  cm.

 9. Az ábra jelöléseit felhasználva igazold, hogy  $x^2 = y \cdot z$  !

*Megoldás:*


Ha az  $x$  hosszúságú szakaszok végpontjait az átmérő végpontjaival összekötjük, a Thalész-tétel miatt a körvonalnál derékszögek keletkeznek. Ezeknek a derékszögű háromszögeknek a magassága  $x$ , amely az átfogót  $y$  és  $z$  darabokra osztja. A magasságtétel miatt az összefüggés fennáll.



 10. Egy körhöz egy adott pontból húzunk egy szelőt, és kiszámítjuk a szelőszakaszok szorzatát. Húzható-e még egy olyan szelő a körhöz, amelyre a szelőszakaszok szorzata ugyanennyi?

*Megoldás:*

Az érintő és szelőszakaszok tétele miatt bárhogy húzunk is szelőt a körhöz, a szelőszakaszok szorzata mindig ugyanannyi (ti. az érintőszakasz négyzete).

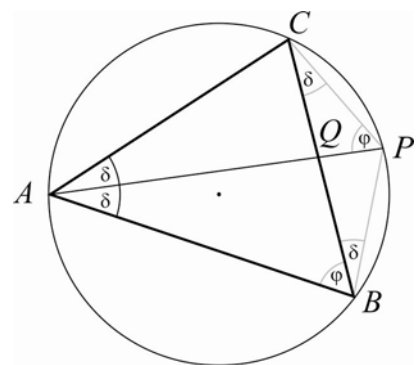
 11. Az  $ABC$  háromszög  $A$  csúcsból kiinduló szögfelezőjének a köré írt körrel alkotott metszéspontja  $P$ ,  $BC$  oldallal alkotott metszéspontja  $Q$ . Mutasd meg, hogy  $BP$  mértani közepe az  $AP$  és az  $QP$  szakasznak!

*Megoldás:*

Először bebizonyítjuk, hogy  $APB$  háromszög és  $BPQ$  háromszögek hasonlóak. Az ábrán azonos betűkkel jelölt szögek egyenlők (egyenlő íveken nyugszanak). A külsőszög-tétel miatt  $BQP$  szög nagysága  $\delta + \varphi$ , így mindkét háromszögnek van két egyenlő nagyságú szöge.

A megfelelő oldalak arányát felírva:  $\frac{BP}{AP} = \frac{PQ}{BP}$ , amit átrendezve kapjuk az állítást:

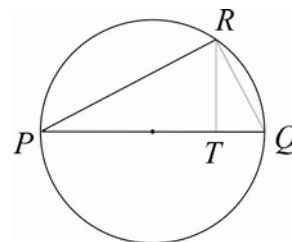
$$BP = \sqrt{AP \cdot PQ}.$$



- 🏠 **12.** Bizonyítsd be, hogy a kör  $PR$  húrja mértani közepe a  $P$ -ből induló átmérőnek, és a húr ezen átmérőjére eső merőleges vetületének!

*Megoldás:*

Az ábra szerinti jelölésekkel a Thalész-tétel miatt  $PRQ$  háromszög derékszögű. Derékszögű háromszögre érvényes a befogótétel,  $PR = \sqrt{PQ \cdot PT}$ , ami épp a kívánt állítás.



- 🏠 **13.** Igazold Pitagorasz tételét a befogótételek felhasználásával!

*Megoldás:*  $a^2 + b^2 = c \cdot c_1 + c \cdot c_2 = c \cdot (c_1 + c_2) = c^2$ .

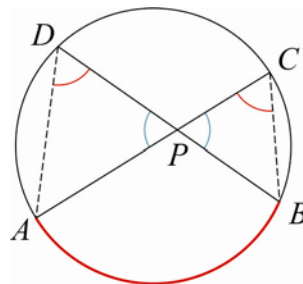
- 🏠 **14.** Igazold, hogy a körben egy  $P$  belső ponton átmenő húrokat  $P$  két olyan szakaszra bontja, amelyek mértani közepe minden  $P$ -n átmenő húr esetén egyenlő.

*Megoldás:*

Legyen  $AC$  és  $BD$  két tetszőleges,  $P$  ponton áthaladó húr.  $D$  és  $C$ -nél egyenlők a szögek, mert azonos íven nyugvó kerületi szögek.  $P$ -nél egyenlő csúcsszögek találhatók, így

$DPA\triangle \sim CPB\triangle$ . A megfelelő oldalak arányából  $\frac{PC}{DP} = \frac{PB}{PA}$ ,

ahonnan  $PC \cdot PA = PB \cdot DP$ .



## II. A számtani és mértani közép közötti összefüggés

### Mintapélda<sub>6</sub>

Számítsuk ki a következő számok számtani és mértani közepeit, és ábrázoljuk számegyenesen a számokat és a közepeket! Milyen összefüggést találunk két szám számtani és mértani közepe között?

- a) 4 és 25;    b) 10 és 40;    c) 5 és 16;    d)  $\frac{1}{3}$  és  $\frac{14}{5}$ ;    e) 7,2 és 7,2.

*Megoldás:*

	a	b	A	G
a)	4	25	14,5	10
b)	10	40	25	20
c)	5	16	10,5	8,94
d)	$\frac{1}{3}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{47}{30} \approx 1,57$	0,97
e)	7,2	7,2	7,2	7,2

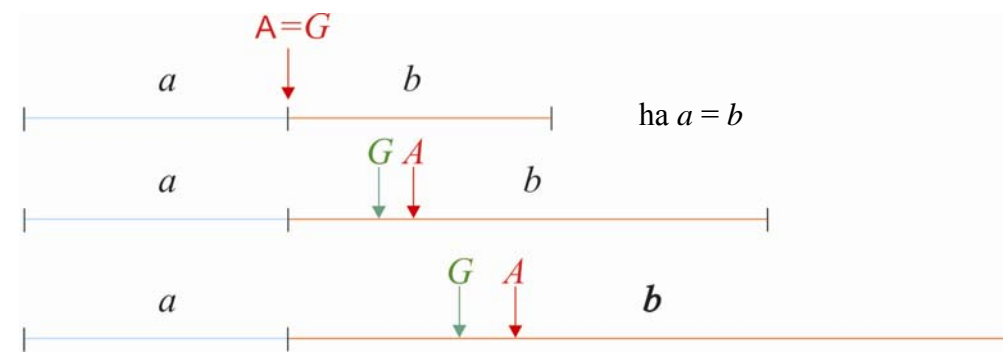


Azt tapasztaltuk, hogy a számtani közép nem kisebb a mértani középnél, és mindkét közép a két szám által meghatározott intervallumba esik.

**Két pozitív szám mértani közepe nem nagyobb, mint a két szám számtani közepe:**

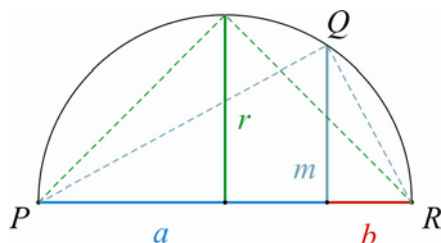
$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a + b}{2}.$$

**Egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha a két szám egyenlő.**





Két pozitív szám ( $a$  és  $b$ ) számtani és mértani közepét ábrán is szemléltethetjük.



Rajzoljuk meg az  $a+b$  hosszúságú szakasz Thalész-körét. Az ábra jelöléseivel:  $r = \frac{a+b}{2}$ , és a

$PQR$  derékszögű háromszögben a magasságtétel szerint  $m = \sqrt{a \cdot b}$ ,

vagyis a kör sugara  $a$  és  $b$  számtani közepe, az  $m$ -mel jelölt szakasz  $a$  és  $b$  mértani közepe.

Mivel az  $m$  hosszúságú szakasz a kör sugaránál nem lehet hosszabb, érvényes az  $m \leq r$

egyenlőtlenség, vagyis  $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$ . Az egyenlőség akkor teljesül, ha  $m = r$ , vagyis a két

szakasz egyenlő hosszú:  $a = b$ .

A számtani és a mértani közép közötti összefüggést a gyakorlatban **változó mennyiségek esetén becslésre** (egyenlőtlenség felírására), és **szélsőérték-feladatok megoldására** használjuk. Ehhez az kell, hogy vagy az összeg vagy a szorzat állandó legyen.

*Módszertani megjegyzés:* A szélsőérték-feladatok megoldása nem tartozik a középszintű érettségi követelményei közé. Csak a matematika iránt fogékony tanulóknak ajánljuk. A másodfokú kifejezés átalakítása és a szélsőérték vizsgálata azonban középszintű követelmény.

## Mintapélda

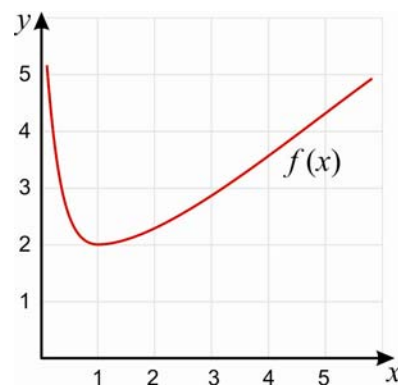
Bizonyítsuk be, hogy az  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) függvény 2-nél kisebb értéket nem vesz fel.

*Megoldás:*

A számtani és a mértani közép közötti összefüggés

$$\text{szerint: } \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{1}, \text{ innen } x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Ezt az állítást gyakran így fogalmazzuk meg: egy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2.



**Mintapélda<sub>8</sub>**

120 méter hosszú kerítéssel legfeljebb mekkora területű téglalap alakú telket lehet körülkeríteni?

*Megoldás:*

Legyen  $a$  és  $b$  a két oldal. Ekkor a kerület  $2(a+b) = 120$ , vagyis  $a+b = 60$ . Teljesül az összeg állandóságának feltétele, ezért becsülhetünk a számtani és mértani közép közötti összefüggéssel:  $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow \sqrt{a \cdot b} \leq 30 \Rightarrow a \cdot b \leq 900$ .

Tehát legfeljebb  $900 \text{ m}^2$  területű telket lehet körbekeríteni.

A legnagyobb érték  $900$ , ami  $a = b = 30$  esetében, vagyis négyzet alakú teleknél lehetséges.

*Megjegyzés:* A feladat megoldható másodfokú függvény szélsőértékének vizsgálatával is. Az  $a+b = 60$  összefüggésből  $b = 60 - a$ . A téglalap területe  $T = ab = 60a - a^2$ . A teljes négyzetre kiegészítés módszerét alkalmazva  $T = -(a^2 - 60a) = -[(a-30)^2 - 900] = -(a-30)^2 + 900$ . A másodfokú függvény minimuma az  $M(30;900)$  pontban, azaz az  $a = 30\text{m}$ . Tehát a maximális terület  $900 \text{ m}^2$ . Természetesen  $a = 30\text{m}$  esetén  $b = 30\text{m}$  adódik.

**Mintapélda<sub>9</sub>**

Legalább mennyi kerítésre van szükség egy  $120 \text{ m}^2$ -es, téglalap alakú telek körbekerítéséhez?

*Megoldás:*

Legyen  $a$  és  $b$  a két oldal hossza. A kerítés hossza a kerület, vagyis  $2(a+b)$ . A számtani és mértani közép közötti összefüggést felírva

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow 4\sqrt{a \cdot b} \leq 2(a+b) \Rightarrow 4\sqrt{a \cdot b} \leq K \Rightarrow 4\sqrt{120} \leq K \Rightarrow 43,82 \leq K$$

Tehát legalább körülbelül  $44$  méter kerítés kell.

**Megjegyzés:**

1. A kerítés  $a = b = \sqrt{120} \approx 11$  m oldalhosszú négyzet esetén a legkisebb.
2. Ebben a feladatban a függvényvizsgálat középiskolában nem szereplő matematikai ismereteket igényel.

## Mintapélda<sub>10</sub>

Mekkora a maximális területe annak a téglalapnak, amelynek kerülete 40 cm? Mekkora a téglalap oldalai?

*Megoldás:*

A feladat hasonlít az egyik előző mintapéldára, de most megoldjuk két másik módszerrel is. Jelölje  $x$  és  $y$  a két oldalt!

*1. Megoldás:*

$x$  és  $y$  pozitív számok, ezért  $\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2} \Rightarrow \sqrt{x \cdot y} \leq 10 \Rightarrow x \cdot y \leq 100$ . Tehát

legfeljebb  $100 \text{ cm}^2$  lehet a terület. Egyenlőség (legnagyobb érték) abban az esetben fordul elő, ha  $x = y = 10 \text{ cm}$ .

*Egyéb megoldások:*

A kerületből  $2(x+y) = 40$ , ahonnan  $x+y = 20$ ,  $y = 20-x$ . Ezt a területbe helyettesítve  $T = x \cdot (20-x) = -x^2 + 20x$ . A feladat nem más, mint megkeresni, hogy milyen  $x$  esetén lesz a másodfokú kifejezés értéke a legnagyobb. Ez két módszerrel: nevezetes azonosság vagy függvényvizsgálat felhasználásával is meghatározható.

*2. Megoldás:*

Alakítsuk át a terület képletét úgy, hogy teljes négyzet szerepeljen benne:

$T = -x^2 + 20x = -(x^2 - 20x) = -[(x-10)^2 - 100] = 100 - (x-10)^2$ . Ez a kifejezés  $x = 10$  esetén veszi fel a legnagyobb értékét, ami 100.

*3. Megoldás:*

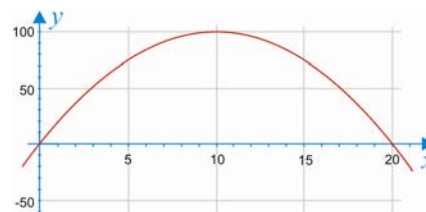
Határozzuk meg a kifejezés zérushelyeit, és vázoljuk fel a másodfokú kifejezéshez tartozó parabolát!

A zérushelyeket a  $-x^2 + 20x = 0$  egyenlet megoldásával kapjuk: 0 és 20. A parabola szimmetriája miatt

a legnagyobb értékét a két zérushely között, éppen középen, azaz a  $\frac{0+20}{2}$  helyen veszi

fel, vagyis  $x = 10$  esetén.

Tehát a maximális terület  $100 \text{ cm}^2$ , és 10 cm oldalú négyzet esetén teljesül.



**Megjegyzés:** a szélsőérték vizsgálata differenciálszámítással is történhet. Ez az emelt szintű érettségi anyaga.

### Mintapélda<sub>11</sub>

Szerkessz 8 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget! Mekkora az oldalai a háromszögbe írható téglalapok közül annak, amelynek területe a lehető legnagyobb? A kiszámítás után szerkeszd meg a háromszögbe a kapott téglalapot!

**Megoldás:**

Jelölje  $x$  és  $y$  a téglalap oldalait az ábra szerint, a téglalap területe  $T = x \cdot y$ , ahol  $0 < x < 8$ . Az  $ADE$  derékszögű háromszög egyik szöge  $60^\circ$ , ezért

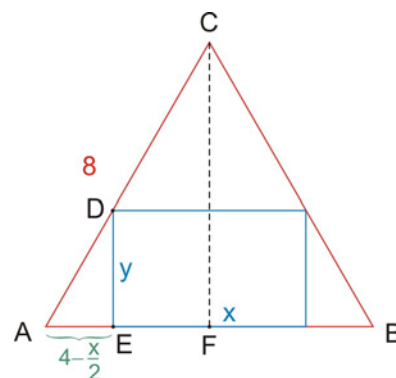
$$DE = AE \cdot \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3} \left( 4 - \frac{x}{2} \right).$$

$$T = x \cdot \sqrt{3} \left( 4 - \frac{x}{2} \right) = 4\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x(8 - x) \text{ másod-}$$

fokú kifejezés maximális értékét a két zérushely (0 és 8) számtani közepénél veszi fel,

vagyis  $x = 4$  esetén. Ekkor  $y = \sqrt{3} \left( 4 - \frac{4}{2} \right) = 2\sqrt{3}$ . A terület  $T = 8\sqrt{3}$ .

Megszerkesztése könnyű, mert az  $AB$  oldal negyedelő pontjait kell megszerkeszteni.



**Módszertani megjegyzés:** A feladatok között találunk hasonló példákat.

## Feladatok

**15.** Szerkeszd meg a következő hosszúságú szakaszok számtani és mértani közepét!

- a) 4 cm és 6 cm;      b) 3 cm és 9 cm;      c) 5 cm és 8 cm.

**Megoldás:** Thalész tételét és a magasságtételt (vagy a befogótételt) használjuk.

**16.** Egy derékszögű háromszög befogóinak összege 5 cm. Legfeljebb mekkora lehet a területe, és a legnagyobb terület esetén mekkorák a háromszög oldalai?

**1. megoldás:** függvényelemzéssel.

Jelölje  $x$  és  $(5 - x)$  a két befogó hosszát. Ekkor a terület  $T(x) = \frac{1}{2}x \cdot (5 - x)$ . A kifejezéshez tartozó parabolának maximuma van, és a szimmetria miatt épp a zérushelyek szám-

tani közepénél, azaz  $x = 2,5$  esetén. Ekkor  $T(2,5) = 3,125 \text{ cm}^2$ , a befogók hossza  $2,5 \text{ cm}$ , az átfogó  $2,5 \cdot \sqrt{2} \approx 3,54 \text{ cm}$ .


**2. megoldás:** *számítási és mértani közép segítségével.*

A számítási és mértani közép közötti egyenlőtlenségből kiindulva

$$\sqrt{x \cdot (5-x)} \leq \frac{x + (5-x)}{2} \Rightarrow x \cdot (5-x) \leq \frac{25}{4}. \text{ Az egyenlőtlenséget 2-vel osztva kapjuk,}$$

hogy  $T \leq \frac{25}{8} \text{ cm}^2$ . Legnagyobb a terület akkor, ha a két szám egyenlő:  $x = 5 - x$ , ahon-

nan a háromszög befogóinak hossza  $2,5 \text{ cm}$ , átfogója  $2,5 \cdot \sqrt{2} \approx 3,54 \text{ cm}$ .


 **17.** Egy derékszögű háromszög befogóinak összege  $40 \text{ cm}$ . Legfeljebb mekkora lehet a területe, és a legnagyobb terület esetén mekkorák a háromszög oldalai?

*Megoldás:*

Jelölje  $x$  és  $(40 - x)$  a két befogó hosszát.  $T = \frac{x \cdot (40 - x)}{2}$ . A számítási és mértani közép

közötti egyenlőtlenségből kiindulva  $\sqrt{x \cdot (40 - x)} \leq \frac{x + (40 - x)}{2} \Rightarrow x \cdot (40 - x) \leq 400$ . Az

egyenlőtlenséget 2-vel osztva kapjuk, hogy  $T \leq 200 \text{ cm}^2$ . Legnagyobb terület abban az esetben lehetséges, ha a két szám egyenlő:  $x = 40 - x$ , ahonnan a háromszög befogóinak hossza  $20 \text{ cm}$ , átfogója  $20 \cdot \sqrt{2} \approx 28,28 \text{ cm}$ .

 **18.** Egy rakétát függőlegesen felfelé lövünk ki  $v_0 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  kezdősebességgel. Milyen ma-


gasra repül a rakéta, ha repülési magasságát az  $y = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} t^2$  képlet alapján határoz-

hatjuk meg ( $t$  az indulástól számított idő). Mikorra állítsuk a robbanást meghatározó

időzítőt, ha a pálya legmagasabb pontján kell robbantani?  $\left( g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$ .

*Megoldás:*


Behelyettesítve az adatokat, az  $y = 40 \cdot t - 5 \cdot t^2 = -5 \cdot (t^2 - 8 \cdot t)$  kifejezést kapjuk. Ezt átalakítva  $y = -5 \cdot [(t - 4)^2 - 16] = 80 - 5 \cdot (t - 4)^2$ . Ez  $t = 4 \text{ s}$  esetén maximális, és a maximális magasság  $80 \text{ méter}$ . Az időkapcsolónak  $4 \text{ s}$  múlva kell bekapcsolnia,  $80 \text{ m}$  magasságban.

-  **19.** Egy rakétát függőlegesen felfelé lövünk ki  $v_0 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  kezdősebességgel. Milyen magásra repül a rakéta, ha repülési magasságát az  $y = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} t^2$  képlet alapján határozhatjuk meg ( $t$  az indulástól számított idő). Mikorra állítsuk a robbanást meghatározó időzítőt, ha a pálya legmagasabb pontján kell robbantani?  $\left(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$ .

*Megoldás:*

Behelyettesítve az adatokat, az  $y = 30 \cdot t - 5 \cdot t^2 = -5 \cdot (t^2 - 6 \cdot t)$  kifejezést kapjuk. Ezt átalakítva  $y = -5 \cdot [(t-3)^2 - 9] = 45 - 5 \cdot (t-3)^2$ . Ez  $t = 3$  s esetén maximális, és a maximális magasság 45 méter. Az időzítőt 3 s-ra kell beállítani.


*Módszertani megjegyzés:* A következő feladatok az emelt szintű érettségi követelményrendszerére épülnek. Átvételüket csak érdeklődő diákoknak javasoljuk.

-  **20.** Igazoljuk, hogy  $a > 0$  esetén fennáll a  $2 \leq \frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}}$  egyenlőtlenség!

*Megoldás:*

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből kiindulva


$$\sqrt{(a^2 + 1) \cdot 1} \leq \frac{a^2 + 1 + 1}{2} = \frac{a^2 + 2}{2}. \text{ Ezt átrendezve kapjuk a kívánt állítást.}$$

-  **21.** Igazoljuk, hogy  $a > 0$  esetén fennáll a  $2 \leq \frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}}$  egyenlőtlenség!

*Megoldás:*

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből kiindulva

$$\sqrt{(a^2 + 2) \cdot 1} \leq \frac{a^2 + 2 + 1}{2} = \frac{a^2 + 3}{2}. \text{ Ezt átrendezve kapjuk a kívánt állítást.}$$

 **22.** Igazold, hogy pozitív  $x$ ,  $y$ ,  $a$  és  $b$  számok esetén teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$\text{a) } x \cdot y \leq \frac{x^2 + y^2}{2}; \quad \text{b) } \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}; \quad \text{c) } \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$


*Megoldás:*

a) Következik abból, ha a számtani és mértani közép közti összefüggésbe  $a$  helyére  $x^2$ ,  $b$  helyére  $y^2$ -et helyettesítünk.

b) Induljunk ki abból, hogy bármely két pozitív  $a$  és  $b$  számra  $\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \leq \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2}$ , vagyis  $2 \leq \frac{a^2 + b^2}{ab}$ .  $a$  és  $b$  pozitívak, így  $2ab \leq a^2 + b^2$ . Az egyenlőtlenség mindkét oldalához  $2ab$ -t adva  $4ab \leq (a+b)^2$ , amit átrendezve kapjuk az állítást.


c) Induljunk ki abból, amit igazolni kell, és emeljük négyzetre:  $\frac{(a+b)^2}{4} \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ . Ebből  $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ , azaz  $a^2 + b^2 + 2ab \leq 2a^2 + 2b^2$ . Átrendezve  $0 \leq a^2 + b^2 - 2ab$ , vagyis a  $0 \leq (a-b)^2$  érvényes egyenlőtlenséget kapjuk. Az átalakításaink ekvivalensek voltak, ezért az állítást igazoltuk.

*Módszertani megjegyzés:* Az ilyen feladatoknál célravezető módszer a bizonyítandó egyenlőtlenségből kiindulva, annak ekvivalens átalakításaival igaz összefüggést kihozni, mint azt a c) megoldása mutatja.

 **23.** Határozd meg az  $f(x) = x + \frac{5}{x}$  ( $x > 0$ ) függvény minimális értékét! Milyen  $x$  esetén minimális a függvény értéke?

*Megoldás:*

Felhasználva a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget  $\frac{x + \frac{5}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{5}{x}}$ , vagyis  $f(x) \geq 2\sqrt{5}$ . Legkisebb értékét akkor veszi fel, ha  $x = \frac{5}{x}$ , aminek megoldása  $x > 0$  miatt  $x = \sqrt{5}$ .

 **24.** a) Egy 20 cm hosszúságú szakaszt két részre osztunk, és mindkét részre írunk egy négyzetet. Mekkora részekre kell osztani a szakaszt, hogy a négyzetek területének összege a lehető legkisebb legyen?

b) Oldd meg a feladatot általánosan is, amikor a szakasz hossza  $a$  egység!

*Megoldás:*

b) Legyen  $x$  és  $y$  a két rész, ekkor  $y = a - x$ . A területek összege  $T = x^2 + y^2 =$   
 $= x^2 + (a - x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$ . Ezt teljes négyzetté alakítva  $T = 2(x^2 - ax) + a^2 =$   
 $= 2\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right] + a^2 = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}$ .  $T$  értéke  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{a}{2}$  esetén minimális

A minimális érték  $T_{\min} = \frac{a^2}{2}$ .

Az a) esetben ugyanez a gondolatmenet konkrét számokkal végigszámolható, 10-10 cm-es szakaszokra kell osztani a szakaszt, a minimális terület  $200 \text{ cm}^2$ .


*Módszertani megjegyzés:* A feladatot az emelt szintre készülő diákok megoldhatják a számta-

ni és a négyzetes közép segítségével is. A  $\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2}$  egyenlőtlenséget négyzetre

emeljük:  $\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \frac{(x + y)^2}{4}$ . Innen  $x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2}$ , ahol  $T = x^2 + y^2$ , és  $x + y = a$ , azaz

$T \geq \frac{a^2}{2}$ . Tehát  $T = \frac{a^2}{2}$  a minimális terület, mely a két változó egyenlősége esetén áll fenn,

azaz  $x = y = \frac{a}{2}$ .

 **25.** Egy 40 cm hosszúságú szakaszt két részre osztunk, és mindkét részre írunk egy szabályos háromszöget. Mekkora részekre kell osztani a szakaszt, hogy a háromszögek területének összege a lehető legkisebb legyen? Oldd meg a feladatot általánosan is, amikor a szakasz hossza  $a$  egység!

*Megoldás:*

Legyen  $x$  és  $y$  a két rész, ekkor  $y = a - x$ . A területek összege

$$T = x^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + y^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} [x^2 + (a - x)^2] = \frac{\sqrt{3}}{4} [2x^2 - 2ax + a^2].$$
 Ezt átalakítva




$$T = \frac{\sqrt{3}}{4} [2(x^2 - ax) + a^2] = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \right] + a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}.$$

téke  $x = \frac{a}{2}$  esetén minimális, a minimális érték  $T_{\min} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}$ .

Ugyanez a gondolatmenet konkrét számokkal végigszámolható, 20-20 cm-es szakaszokra kell osztani a szakaszt, a minimális terület  $200\sqrt{3} \approx 346,41 \text{ cm}^2$ .

*Módszertani megjegyzés:* A feladatot emelt szintre készülő diákok megoldhatják a számítási és a négyzetes közép segítségével is.

 **26.** A  $600 \text{ m}^2$  területű, téglalap alakú telkeknek ...

- legalább mekkora lehet az átlója?
- legalább mekkora lehet a kerülete?

*Megoldás:*


Jelölje  $a$  és  $b$  a két oldalt. Ekkor  $ab = 600$ .

- Az átló  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . A számítási és mértani közép közötti egyenlőtlenségből kiindulva, felhasználva a négyzetgyök függvény monoton növekedését becsülhetjük a kifeje-

zést:  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ . Ezt négyzetre emelve  $4ab \leq a^2 + b^2 + 2ab$ , vagyis

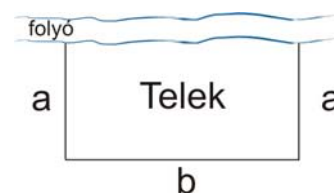
$2ab \leq a^2 + b^2$ , ahonnan az átlóra a  $\sqrt{2ab} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$  becslés adódik. A telek átlója legalább  $\sqrt{1200} \approx 34,64$  méter hosszú.

- A  $2(a+b)$  kerületre egyszerűbb a becslést megadni:  $2(a+b) \geq 4\sqrt{ab}$ , vagyis a kerület legalább 97,98 méter hosszú.


 **27.** 300 méteres kerítéssel 3 oldalról akarunk egy téglalap alakú telket körbe keríteni. Adj becslést a telek legnagyobb területére!

*Megoldás:*

Legyen  $a$  és  $b$  a téglalap két oldala. Ekkor  $2a + b = 300$ , vagyis  $b = 300 - 2a$ . A telek területe:




$T = ab = a(300 - 2a) = 300a - 2a^2 = 2a(150 - a)$ . Most a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség nem használható (nem állandó  $2a$  és  $150 - a$  összege). A terület függvény két zérushelye 0 és 150, A maximális értéket ezek számtani közepénél veszi fel a függvény, így  $a = \frac{0+150}{2} = 75$ . Ekkor  $b = 300 - 2 \cdot 75 = 150$ , a terület  $T = 75 \cdot 150 = 11250 \text{ m}^2$ . A telek területe tehát legfeljebb  $11250 \text{ m}^2$ , ami két 75 m és egy 150 m hosszú oldal esetén valósul meg.

-  **28.** 450 méteres kerítéssel 3 oldalról akarunk egy téglalap alakú telket körbe keríteni. Adj becslést a telek legnagyobb területére!

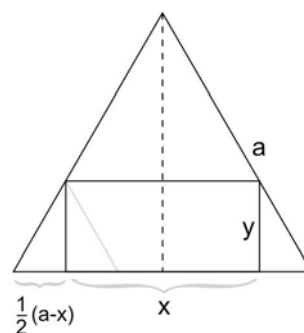
*Megoldás:*

Legyen  $a$  és  $b$  a téglalap két oldala. Ekkor  $2a + b = 450$ , vagyis  $b = 450 - 2a$ . A telek területe:  $T = ab = a(450 - 2a) = 450a - 2a^2 = 2a(225 - a)$ . A területfüggvény két zérushelye 0 és 225. A maximális értéket ezek számtani közepénél veszi fel a függvény, így  $a = \frac{0+225}{2} = 112,5$ . Ekkor  $b = 225$ , a terület  $T = 112,5 \cdot 225 = 25312,5 \text{ m}^2$ . A telek területe tehát legfeljebb  $25312,5 \text{ m}^2$ , ami két 112,5 m és egy 225 m hosszú oldal esetén valósul meg.

-  **29.** Mekkora a szabályos háromszögbe írható maximális területű téglalap oldalai, ha a háromszög oldala ... a) 24 cm; b)  $a$ .

*Megoldás:*

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= \frac{\sqrt{3}}{2}(a-x). \text{ A terület } T = xy = \frac{\sqrt{3}}{2}x(a-x) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}[-(x^2 - ax)] = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} \right]. \text{ Ez } x = \frac{a}{2} \text{ esetén} \\ &\text{maximális, és ekkor } y = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$



a)  $a$  helyére 24-et helyettesítve a téglalap oldalai 12 cm és  $6\sqrt{3} \approx 10,39$  cm.

**Módszertani megjegyzés:** A feladat gyakorlásképpen megoldható szabályos háromszög helyett egyenlőszárú derékszögű háromszöggel is.

## Kislexikon

$a$  és  $b$  pozitív számok számtani közepe (átlaga)  $A = \frac{a+b}{2}$ , mértani közepe  $G = \sqrt{a \cdot b}$ .

**Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség:** két pozitív szám mértani közepe nem nagyobb, mint számtani közepe. A számtani és a mértani közép akkor és csak akkor egyenlő, ha a két szám egyenlő.

**Tétel:**  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ .

*Módszertani megjegyzés:* Emelt szinten szükség van a többi középértékre is.

A számtani és a mértani közép mellett használjuk a következő közepeket is:

- harmonikus közép ( $H$ ):  $\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$ , az algebrai átalakításokat elvégezve  $H = \frac{2ab}{a+b}$ .

négyzetes közép ( $N$ ):  $N = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ .

Az egyenlőtlenségek közötti kapcsolat:  $H \leq G \leq A \leq N$ .